

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2024

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

04/06/2024

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό σελ. 76

A2. Σχολικό σελ. 155

A3. Σχολικό σελ. 216

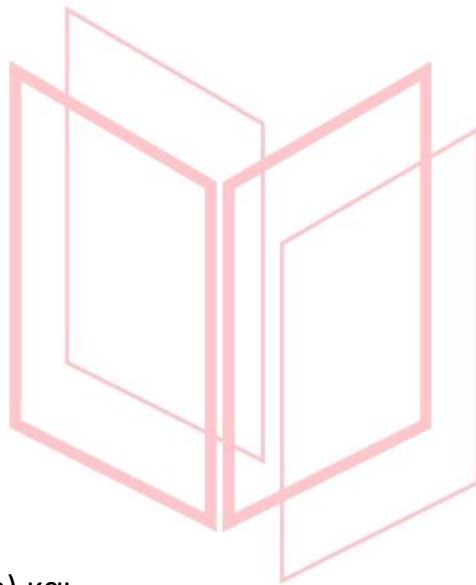
A4. α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Σωστό



ΘΕΜΑ Β

B1. • $D_g \cap D_h = [1, +\infty)$ και

$h(x) \neq 0$, άρα $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0$

Λύνω την εξίσωση : $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Άρα $x \neq 1$, οπότε : $D_f = (1, +\infty)$

$$f(x) = \left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$$

Άρα $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $D_f = (1, +\infty)$

• $D_r = D_{g \cdot h} = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$

$$r(x) = (g \cdot h)(x) = g(x)h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x - \frac{1}{x}$$

Άρα $r(x) = x - \frac{1}{x}$, $D_r = [1, +\infty)$

$$\mathbf{B2.} \quad f'(x) = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}, x > 1$$

$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ επομένως $f \downarrow (1, +\infty)$ άρα $1-1$,
άρα αντιστρέφεται.

$$Df^{-1} = f(Df) = f((1, +\infty)) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)) = (1, +\infty)$$

αφού:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} [(x+1) \cdot \frac{1}{x-1}] = 2 \cdot (+\infty) = +\infty$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$ και $x-1 > 0$ κοντά στο 1^+ ,

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow$$

$$x+1 = y(x-1) \Leftrightarrow$$

$$x+1 = yx - y \Leftrightarrow$$

$$x - yx = -1 - y \Leftrightarrow$$

$$x(1-y) = -1-y \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-1-y}{1-y} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{y+1}{y-1} \Leftrightarrow$$

$$\text{Επομένως, } f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad Df^{-1} = (1, +\infty)$$

$$\text{Αφού } Df = Df^{-1} = (1, +\infty) \text{ και } f(x) = f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

για κάθε $x > 1$, ισχύει ότι $f^{-1} = f$.

B3. Η f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο

$[1, +\infty)$

Πλάγια – οριζόντια ασύμπτωτη :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1, \text{ άρα } \lambda = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (r(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \frac{1}{x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0, \text{ άρα } \beta = 0.$$

Επομένως η $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

B4.

$$\text{Πρέπει } (f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + r(x)$$

πρέπει:

$$f(x) \in Df^{-1} \text{ άρα } x > 1$$

$$x \in D_f, \text{ άρα } x > 1 \text{ και } x \in D_r \text{ άρα } x \in (1, +\infty)$$

$$\text{Τελικά, } x > 1$$

$$x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x} \Leftrightarrow$$

$$x^3 = x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow$$

$$x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 4)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 4 \text{ (δεκτή) ή } x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1 \text{ (απορρίπτονται)}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

f συνεχής στο $[0, +\infty)$ άρα f συνεχής στο $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + 4x - 3 + \lambda) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x + 4 + e^\lambda) = -4 + 8 - 3 + \lambda$$

$$\Leftrightarrow -4 + 8 - 3 + \lambda = -4 + 4 + e^\lambda \Leftrightarrow e^\lambda = \lambda + 1 (*)$$

Από βασική ανισότητα ισχύει $\ln x \leq x - 1$ (1) για κάθε $x > 0$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

Θέτουμε στην (1) όπου x το $e^x > 0$ άρα $\ln e^x \leq e^x - 1$

$x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ άρα η (*) ισχύει μόνο για $\lambda = 0$.

Γ2. Για $\lambda = 0$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4 + e^0 & , 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3 & , x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -2x + 5 & , 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3 & , x > 2 \end{cases}$$

Για $0 \leq x < 2$ η f παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = -2 < 0$ για κάθε $x \in [0, 2)$

Για $x > 2$ η f παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = -2x + 4$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 3 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} [-(x-2)] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 5 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x-2)}{x - 2} = -2$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ επομένως η f δεν είναι

παραγωγίσιμη στο $x = 2$.

Άρα

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & , 0 \leq x < 2 \\ -2x + 4 & , x > 2 \end{cases}$$

Για $0 \leq x < 2$ $f'(x) = -2 < 0$

Για $x > 2$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ απορρίπτεται

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < 2$ απορρίπτεται

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f(x)			$\emptyset$	
f'(x)				

Η $f \downarrow$ στο $[0, 2]$, $\downarrow [2, +\infty)$ και επειδή f συνεχής στο $[0, +\infty)$ η $f \downarrow$ στο $[0, +\infty)$

Η f παρουσιάζει στο $x = 0$ ολικό μέγιστο το $f(0) = 5$.

Γ3. i) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $2 \in (0, 3)$ άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$, επομένως η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

ii) $\Delta(0, f(0))$ δηλαδή $\Delta(0, 5)$

$E(3, f(3))$ δηλαδή $E(3,0)$

Ο συντελεστής διεύθυνσης του $ΕΔ$ είναι

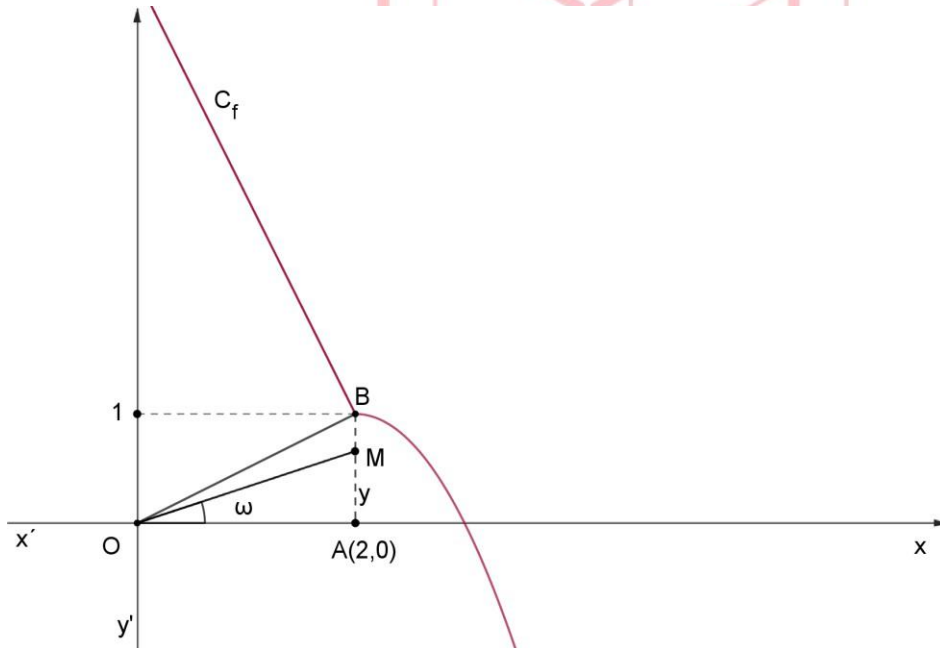
$$\lambda_{\Delta E} = \frac{y_E - y_{\Delta}}{x_E - x_{\Delta}} = \frac{0-5}{3-0} = -\frac{5}{3}$$

• Για $0 \leq x < 2$ $f'(x) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2 = -\frac{5}{3}$ αδύνατο

• Για $x > 2$ $f'(x) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2x + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{17}{6}$ δεκτό

Άρα υπάρχει $\xi = \frac{17}{6} \in (0,3)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ΔE .

Γ4. Για κάθε $t \geq 0$ είναι $\omega = \omega(t)$, $y = y(t)$ με $y'(t) = u = 0,5$



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

$$\varepsilon\phi(\omega(t)) = \frac{y(t)}{2} \Leftrightarrow (\varepsilon\phi(\omega(t)))' = \left(\frac{y(t)}{2} \right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \omega(t)} \cdot \omega'(t) = \frac{y'(t)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega'(t) = \frac{y'(t)}{2} \cdot \sin^2 \omega(t) \Leftrightarrow \omega'(t) = \frac{0,5}{2} \cdot \sin^2 \omega(t) \quad (1)$$

Για $t = t_0$ το κινητό βρίσκεται στο σημείο B. Από Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 \Leftrightarrow OB^2 = 2^2 + 1^2 \Leftrightarrow OB^2 = 5 \Leftrightarrow OB = \sqrt{5}$$

$$\text{άρα } \sin \omega(t) = \frac{OA}{OB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Η (1) για $t = t_0$ γίνεται

$$\omega'(t_0) = \frac{0,5 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2}{2} = \frac{1}{5} \text{ rad/sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = \frac{\ln x + ax}{x}$ με $D_f = (0, +\infty)$

Η f συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα και πηλίκο συνεχών με

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x} + a\right)x - \ln x - ax}{x^2} = \frac{1 + ax - \ln x - ax}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e$$

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$
f'(x)			+	-
f				

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x=e$ το $f(e) = \frac{\ln e + ae}{e} = \frac{1+ae}{e}$

Όμως $f((0, +\infty)) = (-\infty, 1 + \frac{1}{e}]$ άρα $f_{\max} = 1 + \frac{1}{e}$

οπότε, $\frac{1+ae}{e} = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow a = 1$

Δ2. Η f για $a=1$ γίνεται $f(x) = \frac{\ln x + x}{x} = \frac{\ln x}{x} + 1, x > 0$

έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \cdot \frac{1}{x} + 1 \right) = -\infty$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

άρα $f((0, e]) = (-\infty, 1 + \frac{1}{e}]$ αφού $f \uparrow$ στο $(0, e]$ και συνεχής

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right) = 1$$

$$\text{αφού: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{άρα } f((e, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow e} f(x) \right) = \left(1, 1 + \frac{1}{e} \right)$$

Παρατηρούμε ότι $0 \in f((0, e])$ f γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$

οπότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, e]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

Το $0 \notin$ στο $f((e, +\infty))$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(e, +\infty)$

Τελικά, η εξίσωση $f(x) = 0$

έχει μοναδική ρίζα που βρίσκεται στο $(0, e]$

Επίσης, f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + 1 = -2\ln 2 + 1 < 0$

$$\text{και } f(1) = \frac{\ln 1}{1} + 1 = 1 > 0$$

άρα $f\left(\frac{1}{2}\right) f(1) < 0$ οπότε από θεώρημα Bolzano η εξίσωση

$$f(x) = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(\frac{1}{2}, e\right] \subseteq (0, e]$ άρα $f(x) = 0$ έχει

μοναδική ρίζα x_0 η οποία ανήκει στο $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$$\Delta 3. \text{ i) } f(4) = \frac{\ln 4}{4} + 1 = \frac{2 \ln 2}{4} + 1 = \frac{\ln 2}{2} + 1 = f(2)$$

· Για $x \in (0, e]$ η $f \uparrow$ άρα η εξίσωση $f(x) = f(2)$ έχει ακριβώς 1 ρίζα την $x = 2$ αφού το $2 \in (0, e]$

· Για $x \in (e, +\infty)$ η $f \downarrow$ άρα η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει ακριβώς 1 ρίζα την $x = 4$ αφού το $4 \in (e, +\infty)$.

Τελικά η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει ακριβώς 2 λύσεις τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$

ii) Για $x \in (0, +\infty)$ έχουμε :

$$2^x \leq x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \leq \ln x^2 \Leftrightarrow x \ln 2 \leq 2 \ln x \stackrel{2x > 0}{\Leftrightarrow} \frac{\ln 2}{2} \leq \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} + 1 \leq \frac{\ln x}{x} + 1$$

$$\Leftrightarrow f(2) \leq f(x) \quad (1)$$

· Για $x \in (0, e]$ η $f \uparrow$ οπότε :

$$(1) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} x \geq 2, \text{ άρα } e \geq x \geq 2$$

· Για $x \in (e, +\infty)$ η $f \downarrow$ οπότε :

$$(1) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(4) \Leftrightarrow x \leq 4, \text{ άρα } e < x \leq 4$$

Συνοψίζοντας : $x \in [2, 4]$

Δ4. Έχουμε $g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x}$, η g συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

α' τρόπος :

Για $x \in [-\ln 2, 0]$ έχουμε :

$$-\ln 2 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow \ln \frac{1}{2} \leq x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq e^x \leq 1$$

Ακόμη το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από το :

$$E = \int_{-\ln 2}^0 |g(x)| dx = \int_{\ln \frac{1}{2}}^1 |f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x}| dx$$

Θέτω $e^x = u \Leftrightarrow x = \ln u$, άρα :

$$dx = \frac{1}{u} du$$

$$u_1 = e^{\ln \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$u_2 = e^0 = 1$$

Άρα :

$$E = \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(u) \cdot \frac{1-\ln u}{u}| \cdot \frac{1}{u} du = \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(u) \cdot \frac{1-\ln u}{u^2}| du = \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(u) \cdot f'(u)| du$$

Για $u \in [\frac{1}{2}, 1]$ έχουμε ότι $f'(u) > 0$

Για $u \in [\frac{1}{2}, 1]$ λύνουμε : $f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \stackrel{f \uparrow [\frac{1}{2}, 1]}{\Leftrightarrow} 1 \geq x > x_0$

$$\text{Άρα : } E = - \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(u) f'(u) du + \int_{x_0}^1 f(u) f'(u) du =$$

$$\begin{aligned}
& -\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_1^{x_0} + \left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{x_0}^1 = \\
& -\frac{f^2(x_0)}{2} + \frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{f^2(1)}{2} - \frac{f^2(x_0)}{2} = 0 + \frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{f^2(1)}{2} - 0 = \frac{(1-\ln 4)^2}{2} + \frac{1}{2} = \\
& \frac{1-2\ln 4 + \ln^2 4 + 1}{2} = \frac{2-2\ln 4 + \ln^2 4}{2} \tau\mu
\end{aligned}$$

β' τρόπος:

$$g(x) = F(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x} = \frac{x+e^x}{e^x} \cdot \frac{1-x}{e^x} \quad x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1-x}{e^x} > 0 \text{ για } x < 1$$

Η g συνεχής

$$\begin{aligned}
E(\Omega) &= \int_{-\ln 2}^0 |g(x)| dx = \int_{-\ln 2}^0 \left| \frac{x+e^x}{e^x} \right| \cdot \left| \frac{1-x}{e^x} \right| dx = \int_{-\ln 2}^0 \frac{x+e^x}{e^x} \cdot \frac{1-x}{e^x} dx \quad \text{Θέτω } \frac{x+e^x}{e^x} = y, \quad dy = \frac{1-x}{e^x} dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^1 |y| dy \quad \begin{matrix} 1-2\ln 2 < 0 \\ 2\ln 2 \end{matrix} = \int_{1-2\ln 2}^0 (-y) dy + \int_0^1 y dy = \left[-\frac{y^2}{2} \right]_{1-2\ln 2}^0 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{(1-2\ln 2)^2}{2} + \frac{1}{2} \tau.\mu.
\end{aligned}$$

αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ