ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2026

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

03/06/2026

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Σχολικό σελ. 133

Α2. Σχολικό σελ. 51

Α3. Σχολικό σελ. 185

Α4. α) Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Λ

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Πεδίο ορισμού

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2}+1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x > 2 \end{cases}$$

άρα $D_{fog}=(2, +\infty)$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x-2}+1\right) = 2\ln\left(\sqrt{x-2}+1-1\right) = 2\ln\left(\sqrt{x-2}\right) = \ln\sqrt{x-2}^{\,2} = \ln(x-2)$$

Τελικά $h(x) = \ln(x-2)$, $x \in (2,+\infty)$

Β2. h(x) = ln(x – 2), x∈ (2, +∞)

h συνεχής στο (2, +∞) και

h΄(x) = $\frac{1}{x-2}$ (x – 2)΄= $\frac{1}{x-2}$, x∈ (2, +∞)

Είναι h΄(x) > 0, για κάθε x ∈ (2, +∞), άρα h ↑ (2, +∞), είναι 1 – 1 άρα αντιστρέφεται.

Λύνω h(x) = y ⟺ ln(x – 2) = y ⟺ x – 2 = e^y ⟺ x = e^y + 2

Πρέπει x ∈ A_h ⟺ e^y + 2 > 2 ⟺ e^y > 0 ισχύει

Άρα $h^{-1}(x)$ = e^x + 2, x ∈ ℝ

Β3. $\lim\limits_{x\to 2}(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}) = \lim\limits_{x\to 2^+}[\ln(x-2)\cdot\frac{2\ln(x-1)}{x-2}]$

Θέτω u = x – 2 $\overset{u>0}{\Longleftrightarrow}$ x = u + 2

$\lim\limits_{x\to 2^+} u = \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2) = 0$, $u \to 0^+$

Οπότε το όριο γίνεται : $\lim\limits_{u\to 0^+}[\ln u\cdot\frac{2\ln(u+1)}{u}]$

· $\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{\ln(u+1)}{u} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+}\frac{1}{u+1} = 1$

· $\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u = -\infty$

Οπότε το όριο γίνεται :

$2\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u\cdot\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{\ln(u+1)}{u} = 2(-\infty)1 = -\infty$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad f(x) = \frac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}\quad \kappa,\mu\in\mathbb{R}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$I)\ A\nu\ \kappa\neq 0\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\kappa x = \begin{cases}+\infty, \kappa>0\\ -\infty, \kappa<0\end{cases}$

άρα για $\kappa\neq 0$ *η* C_f *δεν έχει ασύμπτωτη.*

$II)\ A\nu\ \kappa = 0\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mu x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mu x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} =$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu}{1+\frac{1}{x^2}}=0\cdot\frac{\mu}{1}=0$$

άρα η $y=0$ *είναι οριζόντια ασύμπτωτη της* C_f *στο* $+\infty$.

Άρα $\boldsymbol{\kappa=0}$.

για $\kappa=0$, $\quad f'(x)=\dfrac{\mu(x^2+1)-\mu x2x}{(x^2+1)^2}$

η $y=x$ *εφαπτομένη της* C_f *στο* $x=0$ *άρα* $f'(0)=1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\mu=1}$

Γ2. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ $,x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=\dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ $,x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=0$

$\Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm1$

$f'(x)>0$

$\Leftrightarrow x\in(-1,1)$

x	-∞ -1	1	+∞
f΄(x)	-	+	-
f	↘	↗	↘

Η f ↑ $[-1,1]$, $f\downarrow(-\infty,-1],[1,+\infty)$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο -1 *το* $f(-1)=-\frac{1}{2}$ *και*

τοπικό μέγιστο στο 1*το* $f(1)=\frac{1}{2}$

Σύνολο τιμών

$\Delta_1=(-\infty,-1]$, $\quad \Delta_2=(-1,1)$, $\quad \Delta_3=[1,+\infty)$

f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1

άρα $f(\Delta_1)=\left[f(-1),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left[-\frac{1}{2},0\right)$

f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2

άρα $f(\Delta_2)=\left(f(-1),f(1)\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_3

άρα $f(\Delta_3)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(1)\right]=\left(0,\frac{1}{2}\right]$

Αφού:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Άρα f(Df) = $\boldsymbol{f(\Delta_1)} \cup \boldsymbol{f(\Delta_2)} \cup \boldsymbol{f(\Delta_3)} = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

Πλήθος ριζών της εξίσωσης $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2}$

$\boldsymbol{Αν\ \alpha = 0}$ $τότε\ η\ εξίσωση$ $\boldsymbol{έχει\ ακριβώς\ μία}$ $ρίζα\ αφού:$

$$\alpha^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$Άρα\ \frac{1}{2} \notin f(\Delta_1), και\ \frac{1}{2} \notin\ f(\Delta_2)\ όμως\ \frac{1}{2} \in f(\Delta_3)\ με\ την\ f\ να\ είναι\ γνησίως$ $μονότονη\ στο\ \Delta_3.$

$\boldsymbol{Αν\ \alpha \neq 0}$ $τότε\ \alpha^2 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}\ άρα\ η\ εξίσωση\ είναι\ αδύνατη\ αφού\ \frac{1}{2} + \alpha^2 \notin f(D_f)$

Γ3.

i)

$$I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx\ \ και\ \ I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx$$

$$άρα\ I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx =$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1}dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2}$$

ii) $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}[\ln|x^2+1|]_1^0 = \frac{1}{2}ln2$

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2} \Leftrightarrow I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2} - I_\nu\ (1)$$

$$Για\ \nu = 0,\quad I_1 = \frac{1}{2} - I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln2 = \frac{1}{2}(1 - ln2)$$

$$Για\ \nu = 1,\quad I_2 = \frac{1}{4} - I_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(1 - ln2) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}ln2$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα , η οποία βρίσκεται στο

(-1,0) της εξίσωσης

$g(x) + x = 0$

Θεωρούμε $K(x) = g(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$

Η Κ συνεχής στο [-1,0] ως άθροισμα συνεχών (g συνεχής ως παραγωγίσιμη)

$K(-1) = g(-1) - 1 < 0$ καθώς $0<g(x) < 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε

$g(-1)<1 \Leftrightarrow g(-1) -1< 0$

$K(0) = g(0) > 0$ καθώς $0<g(x) < 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $g(0) > 0$

άρα $K(-1)\cdot K(0) < 0$ και από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(-1 , 0)$ τέτοιο ώστε $K(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$

Η Κ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων (g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$) με

$K'(x) = g'(x) + 1$, $x\in\mathbb{R}$

Όμως $g'(x)\neq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $g'(x) + 1 \neq 0$ άρα $K'(x)\neq 0$ $x\in\mathbb{R}$

Επιπλέον η $K'(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ (g' συνεχής) οπότε η K' διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
Αν $K'(x) > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε Κ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

αν $K'(x)< 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε Κ γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Οπότε σε κάθε περίπτωση Κ γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ άρα η $K(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Τελικά , υπάρχει μοναδικό $x_1\in(-1 ,0)$ ώστε $g(x_1) + x_1 = 0$

Δ2. Έφοσον η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\infty,\frac{\pi}{2}\right)$ τότε θα είναι και στο $x_o=0$

άρα

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\left(g(x)+x\right)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-\kappa x}{x}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left[x\left(g(x)+x\right)\right]=\lim_{x\to 0^+}\left(2\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\kappa\right)\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-} x\cdot \lim_{x\to 0^-} g(x)+\lim_{x\to 0^-} x = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{ημx}{x}+\lim_{x\to 0^-}\frac{ημx}{x}\cdot\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{συνx}-κ \Leftrightarrow$$

$0 = 2 + 1 - κ \Leftrightarrow κ = 3$

Δ3. i) Η $f(x) = 2ημx + εφx - 3x$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\frac{π}{2})$ με

$$f'(x)=2συνx+\frac{1}{συν^2x}-3=\frac{2συν^3x-3συν^2x+1}{συν^2x}=\frac{(συνx-1)^2(2συνx+1)}{συν^2x}\geq 0$$

για κάθε $x\in[0,\frac{π}{2})$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0,\frac{π}{2})$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o = 0$ το $f(0) = 0$, συνεπώς

$f(x)\geq f(0) \Leftrightarrow f(x)\geq 0$ για κάθε $[0,\frac{π}{2})$ (η ισότητα ισχύει μόνο για x=0)

ii) Έχουμε $3f(x)=π \Leftrightarrow f(x)=\frac{π}{3}$

$$\lim_{x\to \frac{π}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to \frac{π}{2}^-}\left(2ημx+εφx-3x\right)=2+(+\infty)-\frac{3π}{2}=+\infty$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,\frac{π}{2})$, άρα

$$f\left([0,\frac{π}{2})\right)=[f(0),\lim_{x\to \frac{π}{2}^-} f(x))=[0,+\infty)$$

Το $\frac{π}{3}\in f\left([0,\frac{π}{2})\right)$ άρα υπάρχει $x_2\in[0,\frac{π}{2})$ έτσι ώστε $f(x_2) = \frac{π}{3}$.

Το x_2 είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο $[0,\frac{π}{2})$

Δ4.

i) Η $f(x) = x^2(g(x) + x)$ με $x \in [x_1, 0]$.

Η $\kappa(x) = g(x) + x$, είναι συνεχής στο $(x_1, 0]$ και $\kappa(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, 0]$ (από ερώτημα Δ1), συνεπώς η Κ διατηρεί πρόσημο στο $(x_1, 0]$.

Εφόσον $\kappa(0) = g(0) > 0$, τότε $\kappa(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, 0]$.

Συνεπώς $\kappa(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$ και

$x^2\kappa(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [x_1, 0]$

$f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [x_1, 0]$.

__Άλλος τρόπος__

Από Δ1 η Κ είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και $K(0) > K(-1)$ άρα Κ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Οπότε

$$x_1 \leq x \overset{\kappa\uparrow}{\Leftrightarrow} K(x_1) \leq K(x) \Leftrightarrow 0 \leq K(x) \Leftrightarrow 0 \leq x^2K(x)$$

ii) Ισχύει ότι $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$, άρα εάν E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , το x΄x και τις ευθείες $x = x_1$ και $x = 0$ και E_2 το εμβαδόν του χωρίου που περιελείεται από τη C_f , τον x΄x , $x = 0$ και $x = \frac{\pi}{3}$, τότε

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} |f(x)|dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} |f(x)|dx \overset{\Delta3,\Delta4}{\Leftrightarrow} \int_{x_1}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{x_1}^{0} x^2\left(g(x)+x\right)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left(2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x\right)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{x_1}^{0} \left(x^2g(x)+x^3\right)dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln|\sigma\upsilon\nu x| - 3\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\int_{x_1}^{0} x^2g(x)dx + \int_{x_1}^{0} x^3dx = -1 - \ln\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} + 2 \Leftrightarrow$$

$$\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x1}^{0} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow$$

$$\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{{x_1}^4}{4}$$

Άρα

$$\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx = \left[x^3 g(x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} 3x^2 g(x)dx =$$

$$= -{x_1}^3 g(x_1) - 3\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)dx \overset{\Delta 1\, g(x_1)=-x_1}{=} {x_1}^4 - 3\left(1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{{x_1}^4}{4}\right) =$$

$$= \frac{{x_1}^4}{3} - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2}$$