

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

02/06/2025

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό σελ. 186

A2. Σχολικό σελ. 76

A3. Σχολικό σελ. 161

A4.

α) Σ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3, \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

$x_0 = 1$ εσωτερικό του $\mathbb{R}$

Η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$

f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9, x \in \mathbb{R}$

Άρα από θεώρημα Fermat $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + 12 = 0 \Leftrightarrow$

$$\alpha = -6.$$

Έχουμε : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3, x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Λύνω : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ ή } x_2 = 3$$

$$\text{Λύνω } f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ή } x > 3$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Άρα για $\alpha = -6$ η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$

B2. Έστω τα διαστήματα $\Delta_1 = (0, 1)$, $\Delta_2 = [1, 3]$, $\Delta_3 = (3, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \stackrel{f \text{ συν.}}{=} f(0) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \stackrel{f \text{ συν.}}{=} f(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \stackrel{f \text{ συν.}}{=} f(3) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\text{Άρα } f(\Delta_1) \stackrel{f \uparrow}{\underset{\text{συν.}}{=}} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = (-3, 1)$$

$$f(\Delta_2) \stackrel{f \downarrow}{\underset{\text{συν.}}{=}} [f(3), f(1)] = [-3, 1]$$

$$f(\Delta_3) \stackrel{f \uparrow}{\underset{\text{συν.}}{=}} \left(\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-3, +\infty)$$

Οπότε :

$0 \in f(\Delta_1)$, f συνεχής και $f \uparrow$ στο $(-\infty, 1)$, άρα η $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς

ρίζα $x_1 \in \Delta_1 = (0, 1) \subseteq (-\infty, 1)$, άρα η x_1 είναι θετική ρίζα

$0 \in f(\Delta_2)$, f συνεχής και $f \downarrow$ στο Δ_2 , άρα η $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς ρίζα x_2

$\in \Delta_2 = [1, 3]$, άρα η x_2 είναι θετική ρίζα

$0 \in f(\Delta_3)$, f συνεχής και $f \uparrow$ στο Δ_3 , άρα η $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς ρίζα x_3

$\in \Delta_3 = (3, +\infty)$, άρα η x_3 είναι θετική ρίζα

Άρα η $f(x) = 0$ έχει 3 θετικές ρίζες.

Β' τρόπος για το πρόσημο της x_1 :

$$\text{Παίρνουμε } \Delta_1 = (-\infty, 1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\text{Άρα : } f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = (-\infty, 1),$$

$0 \in f(\Delta_1)$, f συνεχής και $f \uparrow$ στο Δ_1 , άρα η $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς ρίζα x_1

$$\in \Delta_1 = (-\infty, 1).$$

f συνεχής στο $[0, 1]$

$$f(0) = -3$$

$$f(1) = 1$$

$f(0)f(1) = -3 < 0$, άρα από θεώρημα Bolzano η $f(x) = 0$ έχει μια

τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$. Γενικεύοντας η $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς

ρίζα $x_1 \in (0, 1)$ με x_1 θετική.

$$\mathbf{B3.} f''(x) = 6x - 12, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Λύνω } f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Λύνω } f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 12 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\curvearrowright$		$\curvearrowleft$

$$f \curvearrowright (-\infty, 2], f \curvearrowleft [2, +\infty)$$

Η f παρουσιάζει σημείο καμψής στο 2 , το $(2, f(2)) = (2, -1)$

B4.

$$g(x) = x + f(x) = x + x^3 - 6x^2 + 9x - 3 \Leftrightarrow g(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{με } g'(x) = 3x^2 - 12x + 10, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ είναι

$$(\varepsilon_1): y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$$

$$\Leftrightarrow y - f(\xi) = f'(\xi)x - \xi f'(\xi)$$

$$\Leftrightarrow y = f'(\xi)x - \xi f'(\xi) + f(\xi)$$

$$\Leftrightarrow y = (3\xi^2 - 12\xi + 9)x - \xi(3\xi^2 - 12\xi + 9) + \xi^3 - 6\xi^2 + 9\xi - 3$$

$$\Leftrightarrow y = (3\xi^2 - 12\xi + 9)x - 2\xi^3 + 6\xi^2 - 3$$

Η (ε_1) τέμνει τον $y'y$ για $x=0$: $y = -2\xi^3 + 6\xi^2 - 3$

$$\text{άρα } M(0, -2\xi^3 + 6\xi^2 - 3)$$

Η εφαπτομένη της C_g στο $B(\xi, f(\xi))$ είναι

$$(\varepsilon_2): y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi)$$

$$\Leftrightarrow y = g'(\xi)x - g'(\xi)\xi + g(\xi)$$

$$\Leftrightarrow y = (3\xi^2 - 12\xi + 10)x - \xi(3\xi^2 - 12\xi + 10) + \xi^3 - 6\xi^2 + 10\xi - 3$$

$$\Leftrightarrow y = (3\xi^2 - 12\xi + 10)x - 2\xi^3 + 6\xi^2 - 3$$

Η (ε_2) τέμνει τον $y'y$ για $x=0$: $y = -2\xi^3 + 6\xi^2 - 3$

$$\text{άρα } M(0, -2\xi^3 + 6\xi^2 - 3)$$

Οπότε οι εφαπτομένες (ε_1) , (ε_2) των C_f , C_g στα A , B αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$ στο $M(0, -2\xi^3 + 6\xi^2 - 3)$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\text{Δίνεται συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} e^x \eta \mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = \sqrt{0^2 + 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \eta \mu x = e^0 \eta \mu 0 = 1 \cdot 0 = 0$$

$$f(0) = 0$$

Άρα αφού: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$, τότε f συνεχής στο 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = +\infty$$

$$\text{Αφού, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = 1 + (+\infty) = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2.

Η f είναι συνεχής στο $x=0$.

Επιπλέον, f συνεχής για $x>0$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και για $x<0$ συνεχής ως γινόμενο συνεχών. Επομένως f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Έστω $y=\lambda x+\beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{1 + 0} = 1 \in \mathbb{R}, \text{ άρα } \lambda = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} =$$

$$\frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}, \text{ άρα } \beta = \frac{1}{2}, \quad \text{επομένως η ευθεία } y = x + \frac{1}{2} \text{ είναι}$$

πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Έστω $y = \lambda x + \beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\text{Αφού } |\eta \mu x| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|\eta \mu x|}{|x|} = \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta \mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \text{άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$$

$$\text{Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$$

Άρα $\lambda = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \eta \mu x = 0$$

$$\text{Αφού, } |\eta \mu x| \leq 1 \Leftrightarrow |e^x| |\eta \mu x| \leq |e^x|$$

$$-|e^x| \leq e^x \eta \mu x \leq |e^x|$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} |e^x| = \lim_{x \rightarrow -\infty} -|e^x| = 0$$

$$\text{Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \eta \mu x = 0$$

Άρα $\beta = 0$

Επομένως η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Γ3.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x \eta \mu x = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x \eta \mu x - x - \frac{1}{2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-\pi, 0)$.

$$\text{Θεωρούμε συνάρτηση } K(x) = e^x \eta \mu x - x - \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η K συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως γινόμενο και γινόμενο και διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$K(0) = e^0 \eta \mu 0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

$$K(-\pi) = e^{-\pi} \eta \mu(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$$

$$\text{άρα } K(0)K(-\pi) < 0$$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano, άρα η εξίσωση

$$K(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x + \frac{1}{2} \text{ έχει μία τουλάχιστον ρίζα } \xi \in (-\pi, 0)$$

Γ4.

Τη χρονική στιγμή t είναι $x=x(t)$ και $y=y(t)$.

Το σημείο $M(x(t), y(t))$ ανήκει στην C_f με $x(t) \geq 0$,

άρα $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}, t \geq 0$

$$y'(t) = \left(\sqrt{x^2(t) + x(t)} \right)' = \frac{(x^2(t) + x(t))'}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} =$$

$$\frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}, t \geq 0$$

Για $t = t_0$, $y'(t_0) = x'(t_0)$

$$y'(t_0) = \frac{2x(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Leftrightarrow$$

$$x'(t_0) = \frac{2x(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \xLeftrightarrow{x'(t_0) > 0}$$

$$1 = \frac{2x(t_0) + 1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} = 2x(t_0) + 1$$

Έχουμε $x(t_0) \geq 0$ άρα:

$$\left(2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} \right)^2 = (2x(t_0) + 1)^2$$

$$4(x^2(t_0) + x(t_0)) = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1$$

$$0 = 1,$$

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 τέτοια ώστε $y'(t_0) = x'(t_0)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Η g συνεχής στο $(0, +\infty)$ και ισοδύναμα ισχύει

$$x^{\ln x} = e^{\ln^2 x}, \quad x > 0$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{F'(x)e^{\ln^2 x} - F(x)(e^{\ln^2 x})'}{e^{\ln^2 x}} = \frac{f(x)e^{\ln^2 x} - F(x)e^{\ln^2 x} \cdot 2 \cdot \frac{\ln x}{x}}{e^{\ln^2 x}} = \\ &= \frac{e^{\ln^2 x}(xf(x) - 2F(x)\ln x)}{x(e^{\ln^2 x})^2} = 0, \quad x > 0 \end{aligned}$$

Άρα η g σταθερή στο $(0, +\infty)$

Δ2. i)

Για $x = 1$ η δοθείσα ισότητα γίνεται

$$1 \cdot f(1) = 2F(1)\ln 1 \Leftrightarrow f(1) = 0 \text{ συνεπώς}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{x-1}}{\frac{x-1}{\ln x}} \quad (1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \stackrel{f \text{ παραγ. στο } x=1}{=} f'(1) = 2$$

εφόσον η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

$$\text{Άρα η (1) γίνεται: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{x-1}}{\frac{\ln x}{x-1}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{ii) Η δοθείσα για } x \neq 1 \text{ γίνεται } F(x) = \frac{xf(x)}{2\ln x}$$

Η F είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, άρα

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x)}{2\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\ln x} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

εναλλακτικά

Η δοθείσα για $x=1$ γίνεται $1 \cdot f(1) = 2F(1)\ln 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$

Αφού f, F παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$, παραγωγίζοντας την δοθείσα

$$xf'(x) + f(x) = 2f(x)\ln x + 2F(x) \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

$$\text{Για } x = 1: f'(1) + f(1) = 2F(1) \Leftrightarrow 2 + 0 = 2F(1) \Leftrightarrow F(1) = 1$$

Αφού η g σταθερή στο $(0, +\infty)$ άρα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$g(x) = c \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c, \quad \text{για } x > 0$$

$$\text{Για } x = 1 \quad \frac{F(1)}{1^{\ln 1}} = c \Leftrightarrow c = F(1) = 1$$

$$\text{Τελικά } \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1 \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x} \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Δ3.

$$F(x) = x^{\ln x} = e^{\ln^2 x}, x > 0$$

$$F'(x) = e^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x \cdot e^{\ln^2 x}}{x}, x > 0$$

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln x \cdot e^{\ln^2 x}}{x} > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$F'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	0		1	+
		∞			
F'(x)			-	○	+
F(x)			↘		↗

Άρα $F \searrow (0, 1]$ και $F \nearrow [1, +\infty)$,

Η F παρουσιάζει ελάχιστο το $F(1) = 1$.

Ακόμη :

$$0 < x < 1 \xrightarrow{x>0} x^2 < x \xrightarrow{F \downarrow (0,1]} F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 > 0$$

$$\text{Για } x = 1, F(1^2) - F(1) + (1-1)^2 = 0$$

$$\text{Για } x > 1 \xrightarrow{x>0} x^2 > x \xrightarrow{F \uparrow [1,+\infty)} F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 > 0$$

$$F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 > 0$$

Άρα η εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2, x > 0$ έχει μοναδική λύση τη $x = 1$.

Δ4.

Ισχύει ότι $e^x \geq x + 1, x \in \mathbb{R}$

(και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$)

Αντικαθιστούμε όπου x το $\ln^2 x$ και έχουμε:

$$e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1 \quad (1) \text{ για κάθε } x > 0$$

με την ισότητα να ισχύει για $x = 1$

Η F είναι συνεχής στο $[1, e]$

και $F(x) = e^{\ln^2 x} > 0$ για κάθε $x \in [1, e]$

Συνεπώς το ζητούμενο εμβδασμό,

$$\text{είναι το } E = \int_1^e |F(x)| dx = \int_1^e F(x) dx$$

Ολοκληρώνοντας την (1) έχουμε:

$$\int_1^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \Leftrightarrow$$

$$E > \int_1^e (x)' (\ln^2 x + 1) dx \Leftrightarrow$$

$$E > [x(\ln^2 x + 1)]_1^e - \int_1^e x 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow$$

$$E > 2e - 1 - 2 \int_1^e \ln x dx \Leftrightarrow$$

$$E > 2e - 1 - 2[x \ln x - x]_1^e \Leftrightarrow$$

$$E > 2e - 1 - 2(0 + 1) \Leftrightarrow$$

$$E > 2e - 3$$