Ερώτηση 1.

Αν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, ποια σύνολα ονομάζουμε **διαστήματα με άκρα τα *α,β*** ;

Απάντηση:

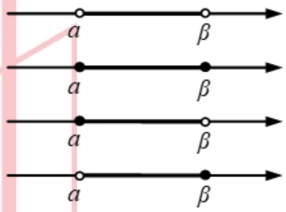
Αν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, τότε ονομάζουμε **διαστήματα με άκρα τα *α,β*** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

$(\alpha,\beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}$: **ανοικτό διάστημα**

$[\alpha,\beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \le x \le \beta\}$: **κλειστό διάστημα**

$[\alpha,\beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \le x < \beta\}$: **κλειστό-ανοικτό διάστημα**

$(\alpha,\beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \le \beta\}$: **ανοικτό-κλειστό διάστημα**.



Ερώτηση 2.

Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, ποια σύνολα ονομάζουμε **μη φραγμένα διαστήματα με άκρο το *α;***

Απάντηση:

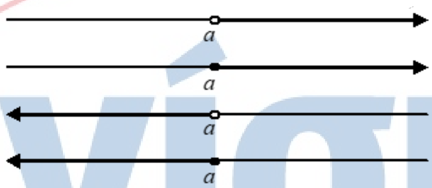
Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε ονομάζουμε **μη φραγμένα διαστήματα με άκρο το *α*** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

$(\alpha,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \alpha\}$

$[\alpha,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge \alpha\}$

$(-\infty,\alpha) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \alpha\}$

$(-\infty,\alpha] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le \alpha\}$



Ερώτηση 3.

Ποια σημεία ενός διαστήματος Δ λέγονται **εσωτερικά σημεία** του Δ;

Απάντηση:

Τα σημεία ενός διαστήματος *Δ*, που είναι διαφορετικά από τα άκρα του, λέγονται **εσωτερικά σημεία** του *Δ*.

Ερώτηση 4.

Έστω *Α* ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το *Α* *και τι ονομάζουμε τιμή της f στο xϵA;***

Απάντηση:

Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το *Α*** μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y.

Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Ερώτηση 5.

Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Τι ονμάζουμε ανεξάρτητη μεταβλητή και τι εξαρτημένη μεταβλητή;

Απάντηση:

Η μεταβλητή x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του Α λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ η μεταβλητή y που παριστάνει την τιμή της f στο x λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή.**

Ερώτηση 6.

Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε συνολο τιμών της f;

Απάντηση:

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με f(A).

Είναι δηλαδή: $f(A) = \{y \in R \,/\, y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$

Ερώτηση 7.

Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο Β;

Απάντηση:

Θα εννοούμε ότι το Β είναι ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού Α της f.

Ερώτηση 8.

Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και Β ένα μη κενό υποσύνολο του Α.

Τι συμβολίζουμε με f(B);

Απάντηση:

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in B$, συμβολίζεται με f(B).

Είναι δηλαδή: $f(B) = \{y \in R \,/\, y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in B\}$

Ερώτηση 9.

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

Απάντηση:

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f.

Ερώτηση 10.

Ποια σχέση έχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,(-f) ;

Απάντηση:

Η γραφική παράστασης της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της *f*, γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x,-f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$.

Ερώτηση 11.

Ποια σχέση έχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, |*f*| ;

Απάντηση:

Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$, από τα σημεία της C_f που βρίσκονται στον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

Ερώτηση 12.

Έστω οι συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$.

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g, f-g, f\cdot g$

Απάντηση:

Αν $A \cap B \neq \varnothing$ ορίζουμε ως **άθροισμα** $f+g$, **διαφορά** f-g, **γινόμενο** fg δύο συναρτήσεων *f*, *g* τις συναρτήσεις με τύπους

$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$

$(fg)(x) = f(x)g(x)$

Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και fg είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού *A* και *B* των συναρτήσεων *f* και *g*

Ερώτηση 13.

Έστω οι συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$.

Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$.

Απάντηση:

Αν $A_1 = \{x \mid x \in A$ και $x \in B$, με $g(x) \neq 0\} \neq \varnothing$ τότε ορίζουμε ως **πηλίκο** των *f*, *g* τη συνάρτηση με τύπο $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ και πεδίο ορισμού το A_1.

Ερώτηση 14.

Πότε λέμε ότι δύο συναρτήσεις f,g ότι είναι ίσες;

Απάντηση:

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Ερώτηση 15.

Έστω οι συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$.

Πότε λέμε ότι οι δύο συναρτήσεις f,g είναι ίσες σε ένα υποσύνολο *Γ* των *Α* και *Β* ;

Απάντηση:

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των A και B. Αν για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις ***f*** **και** ***g*** **είναι ίσες στο σύνολο *Γ*.**

Ερώτηση 16.

Έστω οι συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$.

Τι ονομάζουμε σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g ;

Απάντηση:

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως και $f(A) \cap B \neq \varnothing$, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της *f* με την *g***, και τη συμβολίζουμε με gof, τη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $A_1 = \{x \in A \,/\, f(x) \in B\}$ και τύπο $(gof)(x) = g(f(x))$.

Ερώτηση 17.

Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. Τι ονομάζουμε σύνθεση των f,g,h;

Απάντηση:

Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει $ho(gof) = (hog)of$. Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $hogof$.

Ερώτηση 18.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f

(α) είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

(β) είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f λέγεται

(α) **γνησίως αύξουσα** σ' ένα *δ ι ά σ τ η μ α* Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$

(β) **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα *δ ι ά σ τ η μ α* Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$

Ερώτηση 19.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f

(α) είναι **αύξουσα** στο διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

(β) είναι **φθίνουσα** στο διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f λέγεται

(α) **αύξουσα** σ' ένα *δ ι ά σ τ η μ α* Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) \leq f(x_2)$

(β) **φθίνουσα** σ' ένα *δ ι ά σ τ η μ α* Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) \geq f(x_2)$

Ερώτηση 20.

Πότε λέμε : (α)ότι μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σ' ένα *δ ι ά σ τ η μ α* Δ του πεδίου ορισμού της

(β) ότι απλώς μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη

Απάντηση:

(α)Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ'ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

(β) Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα Δ και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Ερώτηση 21.

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A

(α)Πότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$;

Απάντηση :

θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$

όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

(β) **Πότε** θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$;

Απάντηση :

θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$,

όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

(γ) **Τι ονομάζουμε ολικά ακρότατα μιας συνάρτησης f;**

Απάντηση:

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται ολικά **ακρότατα** της f.

Ερώτηση 22.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1−1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ερώτηση 23.

Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ που είναι 1-1. Ποια συνάρτηση ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της f ;

Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ που είναι $1-1$, τότε ονομάζουμε αντίστροφη συνάρτηση της f τη συνάρτηση $g: f(A) \to R$ για την οποία ισχύει $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$. Η g συμβολίζεται με f^{-1}.

Ερώτηση 24.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει **κοντά στο x_0** μια ιδιότητα P;

Απάντηση:

Όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει **κοντά στο x_0** μια ιδιότητα P θα εννοούμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

α)Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα P.

β)Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0), έχει σ' αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0, β).

γ)Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β), έχει σ' αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α, x_0).

Ερώτηση 25.

- Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α, x_0), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, β), τότε πώς ορίζουμε το $\lim\limits_{x \to xo} f(x)$;

Απάντηση :

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

- Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) , αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, x_0) τότε πώς ορίζουμε: το $\lim\limits_{x \to xo} f(x)$;

Απάντηση :

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

Ερώτηση 26.

Να διατυπώσετε το Κριτήριο Παρεμβολής.

Απάντηση: Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$,

τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Ερώτηση 27.

Να διατυπώσετε τα θεωρήματα ορίων και διάταξης.

Απάντηση:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$

Ερώτηση 28.

(α)Να δώσετε τον ορισμό της ακολουθίας (πραγματικών αριθμών).

(β)Πότε λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$;

Απάντηση: **(α) Ακολουθία** ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$.

(β) Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = \ell$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει $|\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$.

Ερώτηση 29.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0**, όταν

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ερώτηση . 30

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Όταν:

α) δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

β) υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

Ερώτηση 31.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) του πεδίου ορισμού της**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).

Ερώτηση 32.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$**,

όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον

$\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$

Ερώτηση 33.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής;

Απάντηση:

Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση**.

Ερώτηση 34.

Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του.

Απάντηση:

Θ.BOLZANO:

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

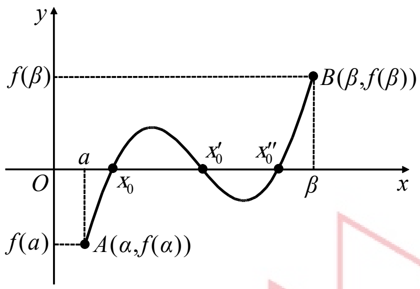
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β) ..

γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f που ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Bolazno στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$ και η f είναι συνεχής στο [α,β], η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα των x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο (α,β) .



Ερώτηση 35.

Να αναφέρετε τις συνέπειες του θ. Bolzano.

Απάντηση:

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Ερώτηση 36.

Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.

Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta$$

Ερώτηση 37.

Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

Απάντηση:

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$\boldsymbol{m \leq f(x) \leq M}, \quad \textbf{για κάθε} \quad \boldsymbol{x \in [\alpha, \beta]}.$$

Ερώτηση 38.

Έστω μια συνάρτηση f για την οποία υπάρχει το $\lim_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ. **Να δώσετε τον ορισμό της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της** $A(x_o,f(x_o))$.

Απάντηση:

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0,f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A, την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Ερώτηση 39.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός .Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της** f **στο** x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Ερώτηση 40.

Έστω μια συνάρτηση f που είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της.

Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο της $A(x_o,f(x_o))$;

Τι ονομάζουμε κλίση της C_f στο σημείο της $A(x_o,f(x_o))$;

Απάντηση:

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0. Δηλαδή, είναι $\boldsymbol{\lambda = f'(x_0)}$,οπότε η εξίσωση της *εφαπτομένης* ε είναι:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0,f(x_0))$ θα τη λέμε και **κλίση της** C_f **στο** A ή **κλίση της** f **στο** x_0.

Ερώτηση 41.

Έστω μια συνάρτηση f που είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο** $\boldsymbol{x_0}$ του πεδίου ορισμού της. Ποιος είναι ο συμβολισμός για την παράγωγο της f στο $\boldsymbol{x_0}$

(α) του Leibniz (β) του Lagrange

Απάντηση:

(α) Ο Leibniz συμβολίζει την παράγωγο της f στο x_0 με $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ ή $\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$.

(β) Ο Lagrange συμβολίζει την παράγωγο της f στο x_0 με $f'(x_0)$

Ερώτηση 42.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f

(α) είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της Α ή απλά παραγωγίσιμη

(β) είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) του πεδίου ορισμού της

(γ)) είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της

Απάντηση:

(α)Η *f* είναι παραγωγίσιμη στο *A* ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

(β) Η *f* είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα** $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$.

(γ) Η *f* είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}.$$

Ερώτηση 43.

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. *Τι ονομάζουμε πρώτη παράγωγο της f ή απλά παράγωγο της f ;*

Απάντηση:

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} f' : A_1 &\to R \\ x &\to f'(x), \end{aligned}$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της *f*** ή απλά **παράγωγος της *f***. Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται και με $\frac{df}{dx}$ που διαβάζεται “ντε εφ προς ντε χι”. Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση $y = f'(x)$ θα τη συμβολίζουμε και με $y = (f(x))'$.

Ερώτηση 44.

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. *Τι ονομάζουμε δεύτερη παράγωγο της f και τι ονομάζουμε νιοστή παράγωγο της f ;*

Απάντηση:

Αν υποθέσουμε ότι το πεδίο ορισμού A_1 της f' είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f', αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της *f*** και συμβολίζεται με f''.Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος της *f***, με $\nu \geq 3$, και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$. Δηλαδή

$$\boldsymbol{f^{(\nu)} = [\, f^{(\nu-1)}]', \quad \nu \geq 3 .}$$

Ερώτηση 45.

Τι ονομάζεται συνάρτηση θέσης,μέση ταχύτητα,στιγμιαία ταχύτητα ενός σώματος που κινείται κατά μήκος ενός άξονα.

Απάντηση:

• Ας θεωρήσουμε ένα σώμα που κινείται κατά μήκος ενός άξονα και ας υποθέσουμε ότι $S = S(t)$ είναι η τετμημένη του σώματος αυτού τη χρονική στιμή t, $t \geq 0$.

Η συνάρτηση S καθορίζει τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t και ονομάζεται **συνάρτηση θέσης** του κινητού.

• Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι το κινητό κάποια χρονική στιγμή t_0 βρίσκεται στη θέση M_0 και ότι μετά από παρέλευση χρόνου h, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = t_0 + h$, βρίσκεται στη θέση M, τότε η μετατόπιση του κινητού είναι ίση με $S(t) - S(t_0)$. Άρα, **η μέση ταχύτητα** του κινητού σ' αυτό το χρονικό διάστημα είναι

$$\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρόνος}}$$

• Το όριο της μέσης ταχύτητας, καθώς το t τείνει στο t_0, το ονομάζουμε **στιγμιαία ταχύτητα** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και τη συμβολίζουμε με $\upsilon(t_0)$. Δηλαδή:

$$\upsilon(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}.$$

Άρα η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0.

Δηλαδή, είναι $\boldsymbol{\upsilon(t_0) = S'(t_0)}$.

Ερώτηση 46.

Να διατυπώσετε τον κανόνα της αλυσίδας

Απάντηση:

Αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $\boldsymbol{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$.

Δηλαδή, αν $\boldsymbol{u = g(x)}$, τότε $\boldsymbol{(f(u))' = f'(u) \cdot u'}$.

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$,

έχουμε τον τύπο $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$, που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας.**

Ερώτηση 47.

Αν τα μεταβλητά μεγέθη x,y συνδέονται με τη σχέση y=f(x), όπου f είναι μια συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη στο x_o , τι ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής** του y ως προς x στο σημείο x_o ;

Απάντηση:

Αν τα μεταβλητά μεγέθη x,y συνδέονται με τη σχέση y=f(x), όπου f είναι μια συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη στο x_o , τότε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_o, ονομάζουμε την παράγωγο $f'(x_o)$.

Ερώτηση 48.

Στην οικονομία το κόστος παραγωγής Κ, η είσπραξη Ε και το κέρδος Ρ εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Τι ονομάζεται **οριακό κόστος στο x_o, οριακή είσπράξη στο x_o , οριακό κέρδος στο x_o** ;

Απάντηση:

Ο ρυθμός μεταβολής του κόστους Κ ως προς την ποσότητα x, όταν x= x_o λέγεται οριακό κόστος στο x_o

Ο ρυθμός μεταβολής της είσπράξης Ε ως προς την ποσότητα x, όταν x= x_o λέγεται οριακή είσπραξη στο x_o

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους Ρ ως προς την ποσότητα x, όταν x= x_o λέγεται οριακό κέρδος στο x_o

Ερώτηση 49.

Έστω ένα κινητό που κινείται κατά μήκος ενός άξονα. Τι ονομάζεται επιτάχυνση αυτού του σώματος τη χρονική στιγμή t_o ;

Απάντηση:

Ο ρυθμός μεταβολής της στιγμιαίας ταχύτητας u του κινητού ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_o λέγεται επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_o και συμβολίζεται με $α(t_o)$.

Είναι δηλαδή

$α(t_o)=u'(t_o)=S''(t_o)$, όπου S(t) η συνάρτηση θέσης του κινητού τη χρονική στιγμή t.

Ερώτηση 50.

Να διατυπώσετε το Θ.Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του .

Απάντηση:

Θεώρημα Rolle

Αν μια συνάρτηση f είναι

- συνεχής στο διάστημα [α,β]
- παραγωγίσιμη στο (α,β) και
- f(α)= f(β)

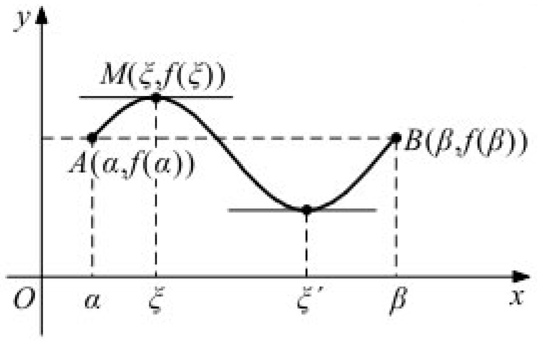
τότε υπάρχει ένα ,τουλάχιστον , $\xi \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$

Γεωμετρική Ερμηνεία του Θ.Rolle

Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Rolle στο διάστημα **[α,β],**

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ,ώστε η εφαπτομένη της C_f

στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x



Ερώτηση 51.

Να διατυπώσετε και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

Απάντηση:

Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού

Αν μια συνάρτηση f είναι

- συνεχής στο διάστημα [α,β] και
- παραγωγίσιμη στο (α,β)

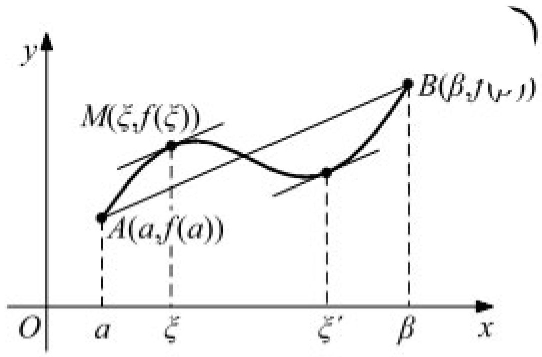
τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ,ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Γεωμετρική Ερμηνεία του Θ.Μ.Τ.

Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα **[α,β]**

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ,ώστε η εφαπτομένη της C_f

στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.



Ερώτηση 52.

(α)Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ τοπικό μέγιστο;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της *f*.**

(β)Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Απάντηση:

Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο,** όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \ge f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της *f*.**

(γ) Έστω μια συνάρτηση f .Τι ονομάζουμε τοπικά ακρότατα ή , απλά ακρότατα
της *f* *και τι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της ;*

Απάντηση:

Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f ονομάζονται τοπικά ακρότατα ή , απλά ακρότατα της f ενώ τα σημεία που η f παρουσιάζει τα τοπικά ακρότατα λέγονται θέσεις των τοπικών ακροτάτων της .

Ερώτηση 53.

Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat και να δώσετε και τη γεωμετρική του ερμηνεία.

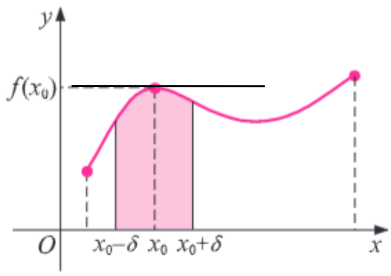
Απάντηση:

Θεώρημα Fermat

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$

Γεωμετρική Ερμηνεία Του Θ.Fermat

Αν σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και επιπλέον είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι οριζόντια, δηλαδή ισχύει $f'(x_0)=0$.



Ερώτηση 54.

Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

Απάντηση:

Οι *πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων* μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.**
2. **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.**
3. **Τα άκρα του Δ** (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Ερώτηση 55.

Έστω μιας συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο Δ;

Απάντηση:

Τα *εσωτερικά* σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ.

Ερώτηση 56.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή και πότε λέμε ότι είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Έστω μία συνάρτηση f *συνεχής* σ' ένα διάστημα *Δ* και *παραγωγίσιμη* στο *εσωτερικό* του *Δ*. Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο *εσωτερικό* του *Δ*.
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο *Δ*, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο *εσωτερικό* του *Δ*.

Ερώτηση 57.

Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f;

Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της *f*.

ΣΧΟΛΙΟ 1

Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε λέμε ότι η ***f* παρουσιάζει στο** $\boldsymbol{x_0}$ **καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**

ΣΧΟΛΙΟ 2

Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f "διαπερνά" την καμπύλη.

Ερώτηση 58.

Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

Απάντηση:

Οι *πιθανές θέσεις σημείων καμπής* μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα *Δ* είναι:

i) **τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία η f'' μηδενίζεται, και**

ii) **τα εσωτερικά σημεία του *Δ* στα οποία δεν υπάρχει η f'' .**

Ερώτηση 59.

Πότε λέμε ότι η ευθεία με εξίσωση $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ;

Απάντηση:

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

Ερώτηση 60.

Πότε λέμε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = \ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) ;

Απάντηση:

Αν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

Ερώτηση 61.

Πότε λέμε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$ αντιστοίχως στο $-\infty$;

Απάντηση:

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$,

αντιστοίχως

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$ είναι **οριζόντια** αν $\lambda = 0$, ενώ αν $\lambda \neq 0$ λέγεται **πλάγια** ασύμπτωτη.

Ερώτηση 62.

Να διατυπώσετε τον 1º κανόνα del' Hospital $\left(\text{μορφή } \frac{0}{0}\right)$

Απάντηση:

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ερώτηση 63.

Να διατυπώσετε τον 2º κανόνα del' Hospital $\left(\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$

Απάντηση:

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ερώτηση 64.

Τι ονομάζουμε αρχική ή παράγουσα μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

Απάντηση:

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα $\varDelta$. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο $\varDelta$** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο $\varDelta$ και ισχύει

$$F'(x)=f(x), \text{ για κάθε } x\in\varDelta.$$

Ερώτηση 65.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$. **Ν**α ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω.

Απάντηση:

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$.Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω εργαζόμαστε ως εξής:

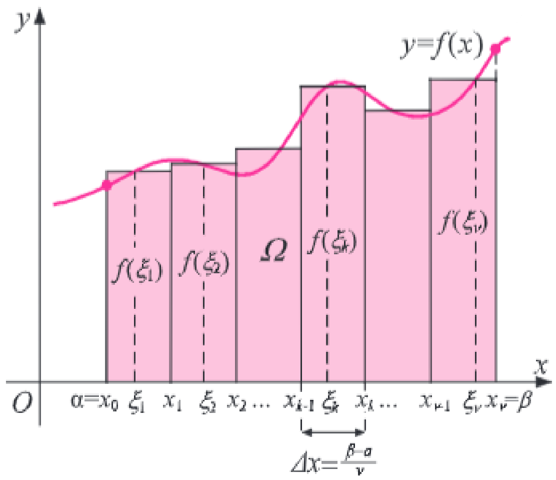
- Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x=\dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$, με τα σημεία $\alpha=x_0<x_1<x_2<...<x_\nu=\beta$.

- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1},x_\kappa]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_κ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_\kappa)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι

$$S_\nu=f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+\cdots+f(\xi_\nu)\Delta x=[f(\xi_1)+\cdots+f(\xi_\nu)]\Delta x\,.$$

- Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} S_\nu$.

Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_\nu$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_κ. Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν** του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $\boldsymbol{E(\Omega)}$.



Ερώτηση 66.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος της f στο [α,β]

Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση f σ υ ν ε χ ή ς στο $[\alpha,\beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$.

Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1,2,\ldots,\nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

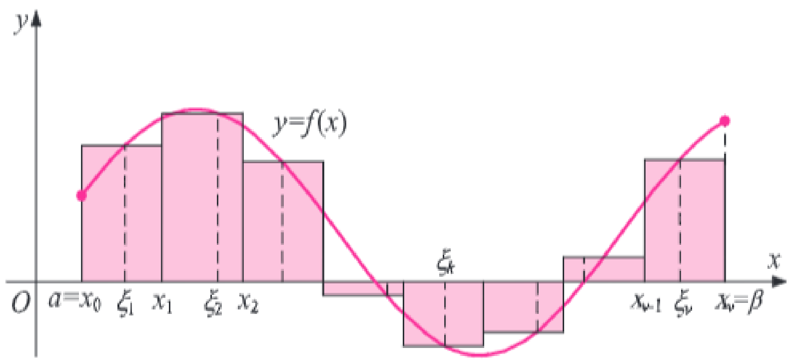
$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής: $S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$ [(1)] .

Αποδεικνύεται ότι,

"Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ (1) υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ". Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το α στο β". Δηλαδή,

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$$



ΣΧΟΛΙΟ

(1) Το άθροισμα αυτό ονομάζεται ένα άθροισμα RIEMANN.

Ερώτηση 67.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

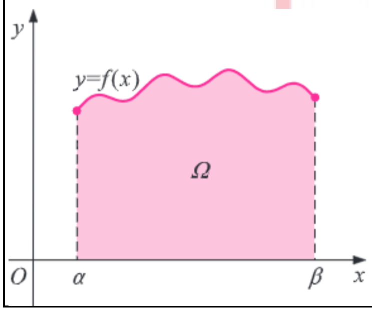
Τι εκφράζει γεωμετρικά το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$;

Απάντηση:

Αν f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.

Δηλαδή, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = E(\Omega)$$.

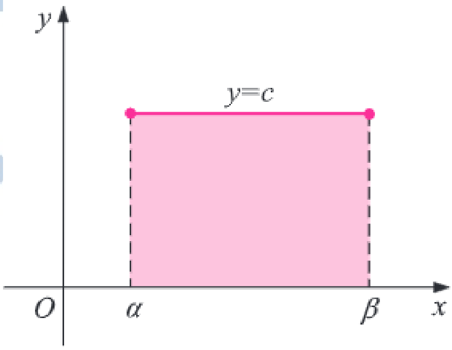


Ερώτηση 68.

Αν c>0 , τι εκφράζει το $\int_\alpha^\beta cdx$;

Απάντηση:

Αν $c>0$, τότε το $\int_\alpha^\beta cdx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta-\alpha$ και ύψος c



Ερώτηση 69.

Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

Απάντηση:

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$