ΕΡΩΤΗΣΗ 1.

Να αποδείξεις ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

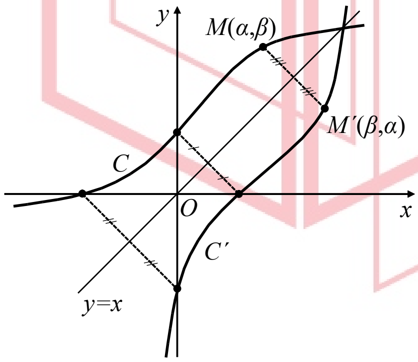
Απόδειξη:

Έστω μια $1-1$ συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C' των f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Τότε για οποιοδήποτε σημείο Μ(α,β) του επιπέδου ισχύει:

$$M(\alpha,\beta)\in C \Leftrightarrow f(\alpha)=\beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta)=\alpha \Leftrightarrow N(\beta,\alpha)\in C'.$$

Επομένως αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη C, τότε το σημείο $N(\beta,\alpha)$ θα ανήκει στη C' και επειδή τα σημεία $M(\alpha,\beta)$, $N(\beta,\alpha)$ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$ προκύπτει ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x, που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.



ΕΡΩΤΗΣΗ 2.

Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξεις ότι $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

— Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\mathbb{R}$.

Τότε έχουμε: $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0)$

$$=\lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu)+\lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1})+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0=P(x_0).$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$. ■

ΕΡΩΤΗΣΗ 3.

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0)\neq 0$. Να αποδείξεις ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.\ \blacksquare$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ (Θ.Ε.Τ.)

ΕΡΩΤΗΣΗ 4.

Να διατυπώσεις και να αποδείξεις το Θ.Ε.Τ.

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

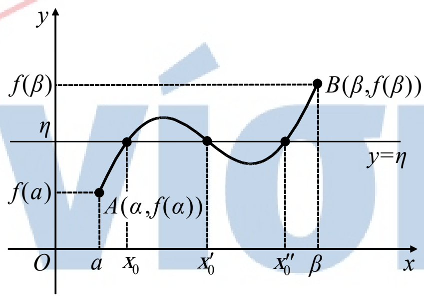
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

αφού

$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και

$g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.



Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

Αν $f(\alpha)>f(\beta)$, τότε εργαζόμενοι ομοίως καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.■

ΕΡΩΤΗΣΗ 5 .

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0,

τότε να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 ,τότε $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Αν σε αυτήν την ισότητα θέσουμε $x=x_0+h$, τότε έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\ . \ ■$$

ΣΧΟΛΙΟ

Πολλές φορές το $h=x-x_0$ συμβολίζεται με Δx, ενώ το $f(x_0+h)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 6.

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x\neq x_0$ έχουμε

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0),$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

$$=f'(x_0)\cdot 0=0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0. ■

ΕΡΩΤΗΣΗ 7. Έστω η σταθερή συνάρτηση f(x)=c, $c \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $(c)'=0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0,$$

δηλαδή $(c)'=0$. ■

ΕΡΩΤΗΣΗ 8.
Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $(x)'=1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1,$$

δηλαδή $(x)'=1$. ■

ΕΡΩΤΗΣΗ 9.
Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}-\{0,1\}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1},$$

δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$. ■

ΕΡΩΤΗΣΗ 10.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_1=0$

(β)Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

για κάθε $x\in(0,+\infty)$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, x>0.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(α) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$.

Η συνάρτηση αυτή δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_1=0$, αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty.$$

(β) Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ για x>0. ■

ΕΡΩΤΗΣΗ 11. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x\neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$. ■

ΕΡΩΤΗΣΗ 12. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα *Δ*, τότε να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει:

$(cf(x))'=cf'(x)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$(cf(x))'=(c)'f(x)+c\,f'(\chi)=0\,f(x)+c\,f'(\chi)=c\,f'(\chi)\ ■$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 13. Αν οι συναρτήσεις f,g,h είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα *Δ*, τότε να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$(f(x)g(x)h(x))' = [(f(x)g(x)) \cdot h(x)]' = (f(x)g(x))' \cdot h(x) + (f(x)g(x)) \cdot h'(x)$$
$$= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$
$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \ \blacksquare$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 14. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, δηλαδή $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$, για $x \neq 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu} = \dfrac{1}{x^{\nu}}, x \neq 0$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων .

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε: $f'(x) = (x^{-\nu})' = \left(\dfrac{1}{x^{\nu}}\right)' = \dfrac{(1)'x^{\nu} - 1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2} = \dfrac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}$

Δηλαδή $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$, για $x \neq 0$.$\blacksquare$

ΣΧΟΛΙΟ .

Από τις ερωτήσεις 9 και 14 προκύπτει ότι , αν $\kappa \in \mathbb{Z} - \{0,1\}$, τότε

$$\boldsymbol{(x^{\kappa})' = \kappa x^{\kappa-1}}.$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 15. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \text{εφ}x$. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \text{συν}x = 0\}$

και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$, δηλαδή $(\text{εφ}x)' = \dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$, για $x \in \mathbb{R}_1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f(x) = \text{εφ}x = \dfrac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}$, $x \in \mathbb{R}_1$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων .

Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$f'(x) = (\text{εφ}x)' = \left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)' = \frac{(\text{ημ}x)'\text{συν}x - \text{ημ}x(\text{συν}x)'}{\text{συν}^2 x} = \frac{\text{συν}x\text{συν}x + \text{ημ}x\text{ημ}x}{\text{συν}^2 x}$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$ Δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, για $x\in\mathbb{R}_1$.■

ΕΡΩΤΗΣΗ 16. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$,

δηλαδή $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$, για x>0.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f(x)=x^a=e^{\ln x^a}=e^{a\ln x}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επομένως για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει

$$f'(x)=\left(e^{a\ln x}\right)'=e^{a\ln x}\cdot(a\ln x)'=e^{a\ln x}\cdot a\cdot(\ln x)'=e^{a\ln x}\cdot a\cdot\frac{1}{x}=a\cdot x^a\cdot\frac{1}{x}=a\cdot x^{a-1}$$

Άρα είναι $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$, για x>0. ■

ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι, για $\alpha>1$ η f είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0=0$ και η παράγωγός της είναι ίση με 0, επομένως δίνεται από τον ίδιο τύπο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 17. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

δηλαδή $(\alpha^x)'=\alpha^x\ln\alpha$, για $x\in\mathbb{R}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)=a^x=e^{\ln a^x}=e^{x\ln a}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επομένως για κάθε $\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=\left(e^{x\ln a}\right)'=e^{x\ln a}\cdot(x\ln a)'=e^{x\ln a}\cdot\ln a\cdot(x)'=e^{x\ln a}\cdot\ln a\cdot 1=a^x\cdot\ln a.$$

Άρα είναι $(\alpha^x)'=\alpha^x\ln\alpha$, για $x\in\mathbb{R}$.■

ΣΧΟΛΙΟ

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

Τα όρια $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$,

είναι η παράγωγος στο $x_0=0$ των συναρτήσεων f,g αντιστοίχως, αφού

$$\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x-\eta\mu 0}{x-0}=f'(0) \text{ και } \lim_{x\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu 0}{x-0}=g'(0).$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 18. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$, για $x\in\mathbb{R}^*$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)=\ln|x|=\ln x$, άρα τότε η f είναι

παραγωγίσιμη με $f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$

Για κάθε $x<0$ είναι $f(x)=\ln|x|=\ln(-x)$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=(\ln(-x))'=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$

Συνοψίζοντας η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$, με $f'(x)=\frac{1}{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

Δηλαδή ισχύει $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$, για $x\in\mathbb{R}^*$.■

ΕΡΩΤΗΣΗ 19.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ

τότε να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$.

- Αν $x_1=x_2$, τότε προφανώς ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$
- Αν $x_1<x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

Επομένως υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (1).

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$,οπότε λόγω της (1)

είναι $f(x_1)=f(x_2)$.Αν $x_2<x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$.

Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$.■

ΕΡΩΤΗΣΗ 20.

Έστω δύο συναρτήσεις f ,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ.Αν

• οι f ,g είναι συνεχείς στο Δ και

• $f'(x) = g'(x)$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ,

τότε να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$

να ισχύει $f(x) = g(x) + c$

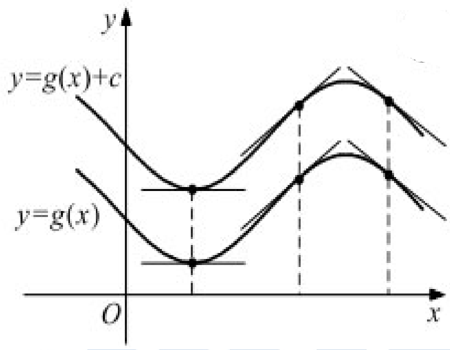
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$.

Επομένως σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια ,ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει

$f(x) - g(x) = c$ άρα $f(x) = g(x) + c$



■

ΕΡΩΤΗΣΗ 21.

Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ

- αν $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ,

τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

- αν $f'(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ

τότε να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το διάστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

•Θα αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση που $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Πράγματι στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ

Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$.

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

•Στην περίπτωση που $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως. ■

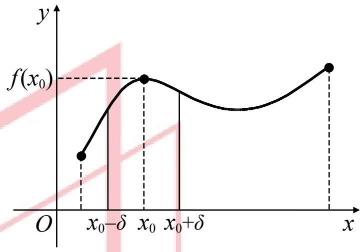
ΕΡΩΤΗΣΗ 22.

Να διατυπώσεις και να αποδείξεις το Θ. FERMAT.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0)=0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε

$(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq \Delta$ και

$f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

—αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε $x<x_0 \Leftrightarrow x-x_0<0$ και λόγω της (1) θα είναι $f(x)-f(x_0)\le 0$

άρα $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, οπότε θα έχουμε $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$ (2)

— αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$, τότε $x>x_0 \Leftrightarrow x-x_0>0$ και λόγω της (1), θα είναι $f(x)-f(x_0)\le 0$

άρα $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, οπότε θα έχουμε $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$ (3)

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$.
Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

ΕΡΩΤΗΣΗ 23. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

i) Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

ii) Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

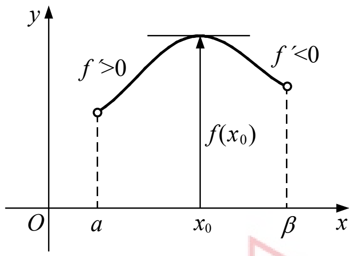
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

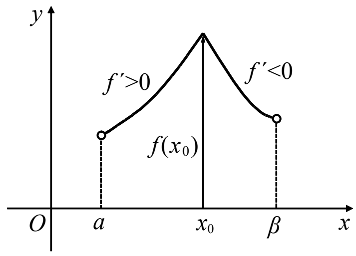
i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ x\in(\alpha,x_0]. \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \le f(x_0),\ \text{ για κάθε }\ x \in [x_0, \beta). \qquad (2)$$



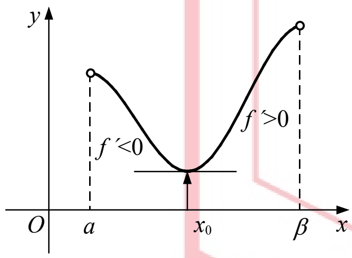


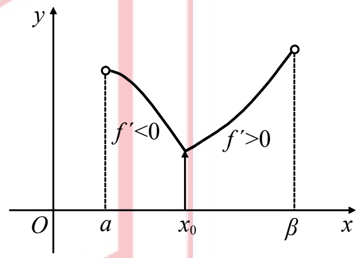
Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \le f(x_0),\ \text{ για κάθε }\ x \in (\alpha, \beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής. ■

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως



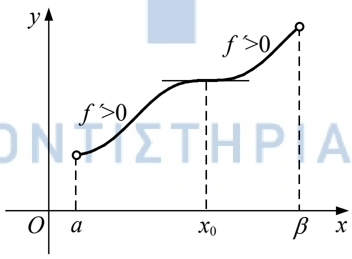


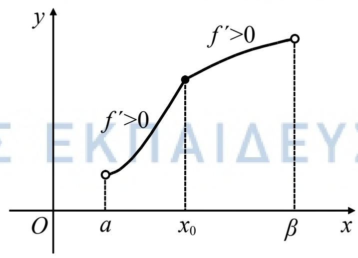
ΕΡΩΤΗΣΗ 24. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι

$$f'(x) > 0,\ \text{ για κάθε }\ x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta).$$





Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).
Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. ■

ΕΡΩΤΗΣΗ 25. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να δείξετε ότι :

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

  είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

● Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

● Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε

$$G'(x) = F'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta. \quad ■$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 26.

Να δοθεί εποπτική απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος .

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\,,\ x\in\Delta\,,$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_{a}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)\,,\quad \text{για κάθε} \quad x\in\Delta\,.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ως εξής:

$F(x+h)-F(x)=\int_{x}^{x+h} f(t)dt$

$=$Εμβαδόν του χωρίου Ω.

$\approx f(x)\cdot h$,

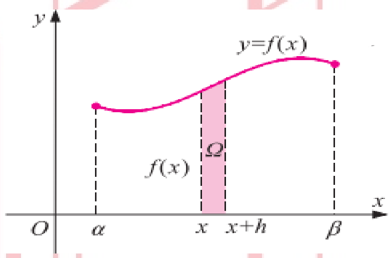
για μικρά $h>0$.

Άρα, για μικρά $h>0$ είναι

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\approx f(x)\,,$$

οπότε

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)\ \blacksquare$$



ΕΡΩΤΗΣΗ 27.

Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x)=F(x)+c\,. \qquad (1)$$

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$.

Επομένως,

$$G(x)=F(x)+G(\alpha)\,,$$

οπότε, για $x=\beta$, έχουμε

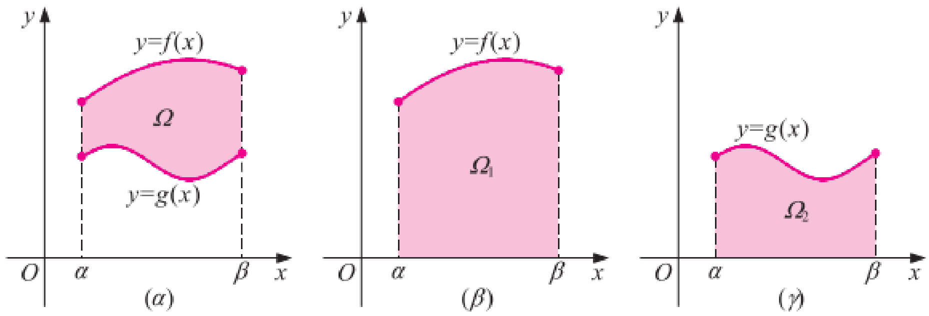
$$G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+G(\alpha)$$

κα. άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 28.

Έστω δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$, να δείξετε ότι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Παρατηρούμε ότι

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)-E(\Omega_2)=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx\,.$$

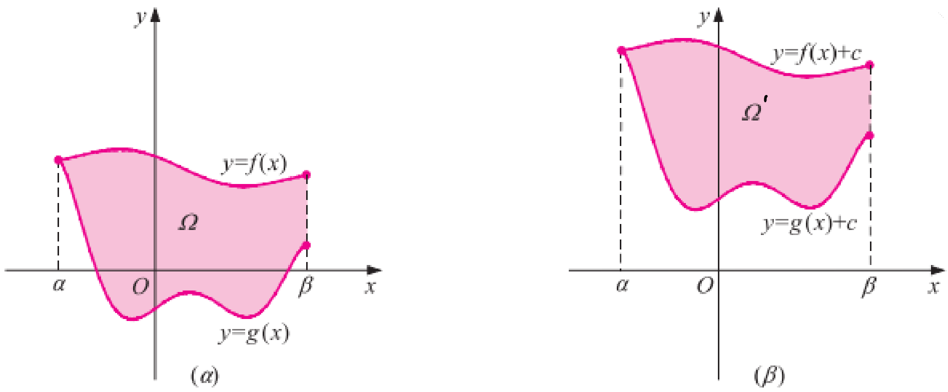
Επομένως, $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$ ■

ΕΡΩΤΗΣΗ 29.

Έστω δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$, να δείξετε ότι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x)+c\geq g(x)+c\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ.α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω' (Σχ.β)



Επομένως έχουμε:

$$E(\Omega)=E(\Omega')=\int_\alpha^\beta [(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx\,.$$

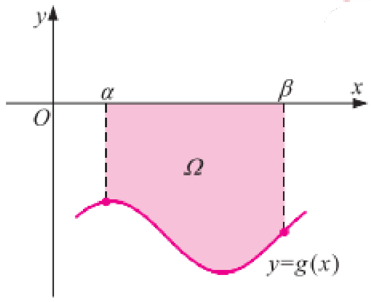
Άρα $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$ ■

ΕΡΩΤΗΣΗ 30.

Μια συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g και τις ευθείες με εξισώσεις x=α και x=β είναι $E(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0$,

Το χωρίο Ω που περικλείεται από τη C_g, τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες με εξισώσεις x=α και x=β είναι το χωρίο που περικλείεται από τη C_g,τη C_f και τις ευθείες με εξισώσεις x=α και x=β . Επειδή ισχύει $f(x)\ge g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

το εμβαδό του χωρίου Ω είναι

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx=\int_{\alpha}^{\beta}[-g(x)]dx=-\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx.$$

Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$,

τότε $E(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.■

ΕΡΩΤΗΣΗ 31.

Έστω συναρτήσεις f, g που είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και η διαφορά f(x)-g(x) δε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β].

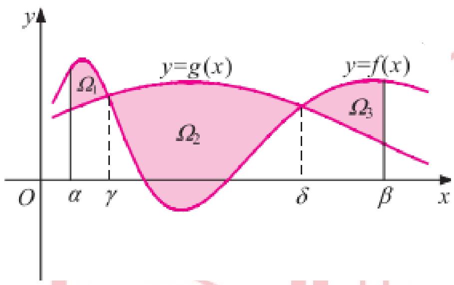
Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες με εξισώσεις x=α και x=β

είναι $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|\,dx$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$,

όπως στο παρακάτω σχήμα ,



τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1,Ω_2 και Ω_3. Δηλαδή

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)$$

$$=\int_{\alpha}^{\gamma}(f(x)-g(x))dx+\int_{\gamma}^{\delta}(g(x)-f(x))dx+\int_{\delta}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\gamma}|f(x)-g(x)|\,dx+\int_{\gamma}^{\delta}|f(x)-g(x)|\,dx+\int_{\delta}^{\beta}|f(x)-g(x)|\,dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|\,dx\ .$$

Επομένως $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|\,dx$ ■