

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2023**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**06/06/2023**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Σχολικό σελ. 111

**A2.** Σχολικό σελ. 104

**A3.** Σχολικό σελ. 128

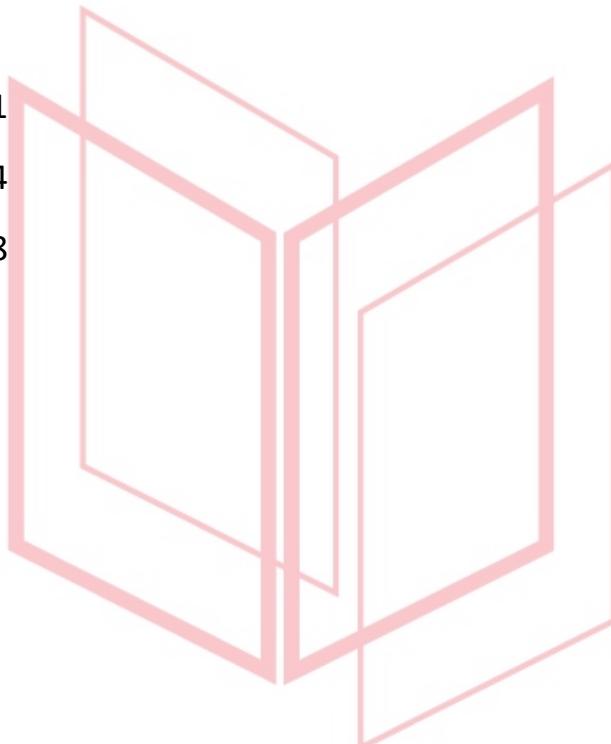
**A4.** α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό



**ΘΕΜΑ Β**

**B1.**  $D_{goh} = \left\{ \begin{array}{l} x \in D_h \\ h(x) \in D_g \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} x \in (0, +\infty) \\ \ln x \in \mathbb{R} \end{array} \right., \text{άρα } D_{goh} = (0, +\infty)$

$$goh(x) = g(h(x)) = g(\ln x) = \frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4-e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}} = \frac{4-x^2}{x}, \text{ οπότε :}$$

$$f(x) = \frac{4-x^2}{x}, x > 0$$

**B2. i)**  $f$  συνεχής στο  $(0, +\infty)$  ως ρητή

**ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**

$$f'(x) = \frac{(4-x^2)'x - (4-x^2)(x)'}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-x^2 - 4}{x^2} < 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα  $f \downarrow (0, +\infty)$

**ii)**  $\frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e} \stackrel{4-e^2 < 0}{\iff} \frac{4-\pi^2}{\pi} > \frac{4-e^2}{e} \iff f(\pi) < f(e) \stackrel{f \downarrow}{\iff} \pi > e$  ισχύει

**B3.** • Κατακόρυφες Ασύμπτωτες :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(4-x^2) \cdot \frac{1}{x}] = 4 \cdot (+\infty) = +\infty,$$

άρα η  $x = 0$  (ή γ'γ) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$ .

• Πλάγιες – Οριζόντιες ασύμπτωτες :  $y = \lambda x + \beta$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4-x^2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1, \text{ άρα } \lambda = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4-x^2}{x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2+x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0, \text{ άρα}$$

$$\beta = 0$$

Οπότε η  $y = -x$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

$$\mathbf{B4.} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma v v(1+x^2)}{f(x)}$$

$$\bullet \text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty,$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

$$\text{Κοντά στο } +\infty : \left| \frac{\sigma v v(1+x^2)}{f(x)} \right| = \frac{|\sigma v v(1+x^2)|}{|f(x)|} \leq \frac{1}{|f(x)|}, \text{ άρα :}$$

$$\left| \frac{\sigma v v(1+x^2)}{f(x)} \right| \leq \frac{1}{|f(x)|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\sigma v v(1+x^2)}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|} \Leftrightarrow$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{|f(x)|} \right) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{|f(x)|} \right) = 0$$

$$\text{Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma v v(1+x^2)}{f(x)} = 0.$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

## ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\begin{aligned} \int_2^3 xf(x)dx = 1 &\Leftrightarrow \int_2^3 x\left(\frac{1}{x} + a\right)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1+ax)dx = 1 \\ &\Leftrightarrow \left[x + \frac{ax^2}{2}\right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow 3 + a \cdot \frac{3^2}{2} - \left(2 + a \cdot \frac{2^2}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \\ &3 + \frac{9a}{2} - 2 - 2a = 1 \Leftrightarrow \frac{5a}{2} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \end{aligned}$$

Γ2. i)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)}{x(x-1)} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-2)(x-1)}{x-1} = -1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1 \text{ árho } f'(1) = -1$$

Επομένως ορίζεται η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $x_0 = 1$

ii) ( $\varepsilon$ ):  $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$

Έστω  $\omega$  η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ( $\varepsilon$ ) με τον  $x'$ .

$$\text{Άρα } f'(x_0) = \varepsilon \varphi \omega \Leftrightarrow -1 = \varepsilon \varphi \omega \stackrel{\omega \in [0, \pi)}{\Leftrightarrow} \omega = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

Γ3. Για  $x < 1$  η  $f$  παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με  $f'(x) = 2x - 3$

$$\text{Για } x > 1 \text{ η } f \text{ παραγωγίσιμη ως ρητή με } f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ  
Για  $x = 1$  η  $f$  παραγωγίσιμη με  $f'(1) = -1$

$$\text{Άρα } f'(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{αν } x < 1 \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Για κάθε  $x \geq 1$   $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

Για κάθε  $x < 1 \Leftrightarrow 2x < 2 \Leftrightarrow 2x - 3 < -1 < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Άρα  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

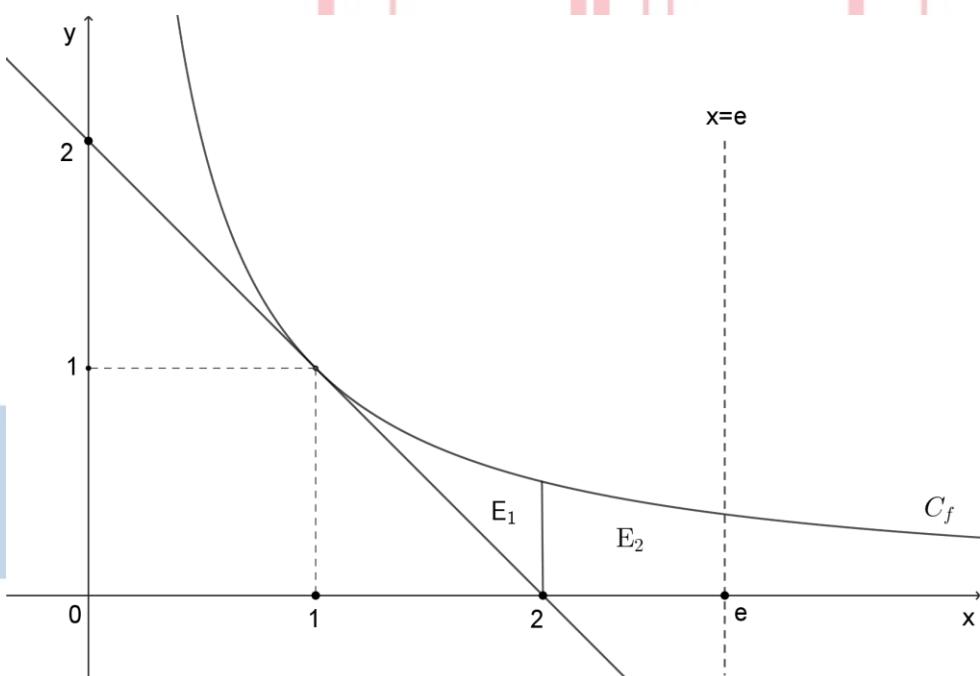
Οπότε  $f \downarrow \mathbb{R}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$f$  συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$

$$f(\mathbb{R}) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

Γ4.



## ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

$$E = E_1 + E_2 = \int_1^2 f(x) - (-x + 2) dx + \int_2^e f(x) =$$

$$\int_1^2 \left( \frac{1}{x} + x - 2 \right) dx + \int_2^e \frac{1}{x} dx = \left[ \ln|x| + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 + [\ln|x|]_2^e =$$

$$\ln 2 + 2 - 4 - \left( \ln 1 + \frac{1}{2} - 2 \right) + (\ln e - \ln 2) =$$

$$\ln 2 - 2 - \frac{1}{2} + 2 + 1 - \ln 2 = \frac{1}{2} \tau. \mu ov.$$

## ΘΕΜΑ Δ

$$D_f = (0, 2)$$

**Δ1.** Θεωρώ  $A(x) = \frac{f(x)-2x}{x-1}$ ,  $D_A = (0, 1) \cup (1, 2)$  με  $\lim_{x \rightarrow 1} A(x) = \ell \in \mathbb{R}$

$$\text{Οπότε } f(x) = (x-1)A(x) + 2x$$

Η  $f$  είναι συνεχής ως σύνθεση και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, άρα

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Leftrightarrow f(1) = 0 \cdot \ell + 2 \Leftrightarrow \ln 1 - 1 + k = 2 \Leftrightarrow k = 3$$

**Δ2.** Τότε  $f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3$ ,  $x \in (0, 2)$

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}, x \in (0, 2)$$

$$\text{Για } x \in (0, 2) \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (δεκτή)} \quad \text{ή} \quad x = -2 \text{ (απορ.)}$$

$x$	$-\infty$	0	$x_1$	1	$x_2$	2	$+\infty$
$x^2+x-2$			—	+	+		
$x^2$			+		+		
$x-2$			-		-		
$f'(x)$			+	0	-		
$f(x)$							O.M $f(1) = 2$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right) = \ln 2 + (-\infty) + 3 = -\infty$$

$$\text{διότι} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(2-x) \stackrel{u=2-x}{=} \lim_{u \rightarrow 2^-} \ln u = \ln 2$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[ \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right] = (-\infty) - \frac{1}{2} + 3 = -\infty$$

$$\text{διότι} \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(2-x) \stackrel{\text{για } x < 2 \text{ } u = 2-x}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

Θεωρώ τα διαστήματα  $\Delta_1 = (0, 1)$  και  $\Delta_2 = [1, +\infty)$

$$f(\Delta_1) \underset{f \text{ συνεχής}}{\overset{f \uparrow \Delta_1}{=}} \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = (-\infty, 2)$$

$$f(\Delta_2) \underset{f \text{ συνεχής}}{\overset{f \downarrow \Delta_2}{=}} (\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), f(1)] = (-\infty, 2]$$

$0 \in f(\Delta_1)$  }  $\left. \begin{array}{l} \text{άρα υπάρχει μοναδικό } x_1 \in \Delta_1 \text{ με } f(x_1) = 0 \\ f \uparrow \Delta_1 \end{array} \right\}$

$0 \in f(\Delta_2)$  }  $\left. \begin{array}{l} \text{άρα υπάρχει μοναδικό } x_2 \in \Delta_2 \text{ με } f(x_2) = 0 \\ f \downarrow \Delta_2 \end{array} \right\}$

$(x_2 \neq 1 \text{ αφού } f(x_2) = 0 \text{ και } f(1) = 2)$

Άρα η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει 2 ακριβώς ρίζες

Έχουμε  $x_1, \frac{1}{3} \in \Delta_1$

$$\text{Έστω } x_1 \geq \frac{1}{3} \overset{f \uparrow \Delta_1}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 \geq \ln \frac{5}{3} \Leftrightarrow \ln 1 \geq \ln \frac{5}{3} \overset{\ln x \uparrow (0,+\infty)}{\Leftrightarrow} 1 \geq \frac{5}{3} \text{ áτοπο}$$

Άρα  $x_1 < \frac{1}{3}$

$f$  συνεχής στο  $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$

$f$  παραγωγίσιμη στο  $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$

Άρα από ΘΜΤ υπάρχει  $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$  με  $f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1}$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$$

### ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

$$f''(x) = -\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{2}{x^3}, \quad D_{f''} = (0,2)$$

Για κάθε  $x \in (0,2)$ :  $-\frac{1}{(2-x)^2} < 0, -\frac{2}{x^3} < 0$  άρα  $f''(x) < 0$

άρα  $f' \downarrow (0,2)$  άρα η εξίσωση  $f'(x) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x}$  έχει το πολύ μία ρίζα

**Δ4.** i) Αφού  $F, G$  αρχικές της  $f$  στο  $(0,2)$  τότε (από γνωστό θεώρημα) υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$ , ώστε  $F(x) = G(x) + c$ , για κάθε  $x \in (0,2)$ .

$$\text{Άρα } F(x_2) = G(x_2) + c \stackrel{G(x_2)=0}{\iff} c = F(x_2)$$

$$F(x_1) = G(x_1) + c \iff c = -G(x_1) \iff G(x_1) = -c$$

$$\text{Άρα } F(x_2) = -G(x_1) \iff F(x_2) + G(x_1) = 0$$

$$\text{Άρα } F(x) = G(x) + F(x_2) \iff G(x) = F(x) - F(x_2), x \in (0,2)$$

ii) Αφού  $F$  αρχική της  $f$  στο  $(0,2)$ , τότε  $F'(x) = f(x)$ , για κάθε  $x \in (0,2)$

Έχουμε :  $f(x) \neq 0$  στο  $(x_1, x_2)$

$f$  συνεχής στο  $(x_1, x_2)$ , άρα η  $f$  διατηρεί πρόσημο στο  $(x_1, x_2)$

$f(1) = 2 > 0$  άρα  $f(x) > 0$  στο  $(x_1, x_2)$ .

$F$  συνεχής στο  $[x_1, x_2]$  ως παραγωγίσιμη, άρα  $F \uparrow [x_1, x_2]$ .

$$x_1 < x_2 \stackrel{F \uparrow [x_1, x_2]}{\implies} F(x_1) < F(x_2) \stackrel{F(x_1)=0}{\iff} 0 < F(x_2)$$

Θεωρώ τη συνάρτηση

$$B(x) = x_1 F(x) + x_2 G(x) + 2x - x_1 - x_2, x \in [x_1, x_2].$$

$$B(x) = x_1 F(x) + x_2 [F(x) - F(x_2)] + 2x - x_1 - x_2$$

- $B$  συνεχής στο  $[x_1, x_2]$  ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

- $B(x_1) = x_1 F(x_1) + x_2 [F(x_1) - F(x_2)] + 2x_1 - x_1 - x_2 = -x_2 F(x_2) + (x_1 - x_2) < 0$

(Αφού  $x_2 > 0$  και  $F(x_2) > 0$  και  $x_1 < x_2$ , άρα:  $-x_2 F(x_2) < 0$  και  $x_1 - x_2 < 0$ )

- $B(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 [F(x_2) - F(x_1)] + 2x_2 - x_1 - x_2 = x_1 F(x_2) + (x_2 - x_1) > 0$

(Αφού  $x_1 > 0$  και  $F(x_2) > 0$  και  $x_2 > x_1$ , άρα:  $x_1 F(x_2) > 0$  και  $x_2 - x_1 > 0$ )

Άρα  $B(x_1)B(x_2) < 0$  και σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση

$$B(x) = 0 \text{ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο } (x_1, x_2) \text{ (1)}$$

Η  $B$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(x_1, x_2)$  ως πράξεις παραγωγίσιμων

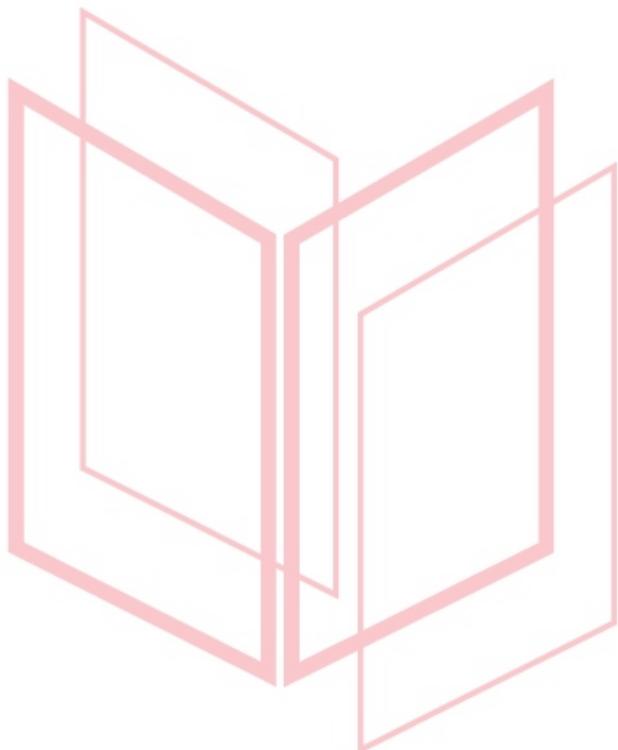
συναρτήσεων με  $B'(x) = x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 = (x_1 + x_2) f(x) + 2 > 0$  για κάθε

$x \in (x_1, x_2)$  αφού  $(x_1 + x_2) > 0$  και  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in (x_1, x_2)$  και  $2 > 0$ )

Άρα  $B \uparrow$   $(x_1, x_2)$ . Άρα η εξίσωση  $B(x) = 0$  έχει μια το πολύ ρίζα στο  $(x_1, x_2)$  (2).

Από (1), (2) προκύπτει ότι η εξίσωση  $B(x)=0 \Leftrightarrow$

$x_1 F(x) + x_2 G(x) = x_1 + x_2 - 2x$  έχει μοναδική ρίζα στο  $(x_1, x_2)$ .



# αθηναγόρας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ