

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

20/4/2023

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

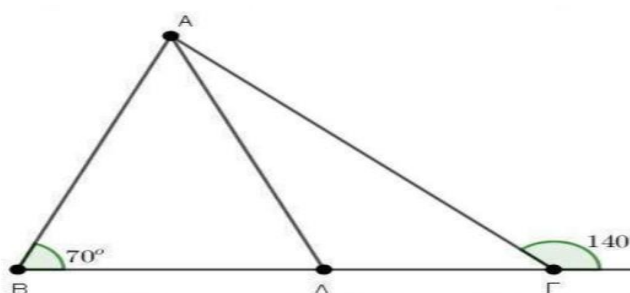
A1: απόδειξη σχολικού βιβλίου παράγραφος 5.6

A2: σχολικό βιβλίο παράγραφοι 5.3, 5.4

A3: Λ-Λ-Λ-Λ-Λ

ΘΕΜΑ Β

B1:

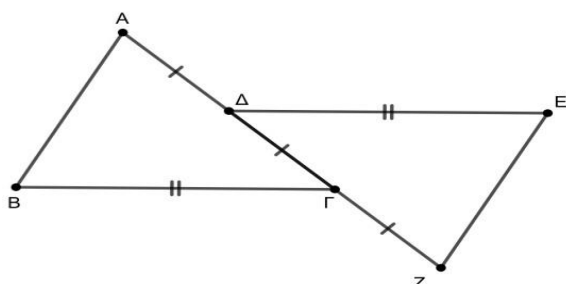


α) Από την υπόθεση έχουμε $AD = AB$, οπότε το τρίγωνο ABD είναι ισοσκελές με $\hat{A}BD = \hat{A}DB$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές AD και AB αντίστοιχα. Άρα $\hat{A}DB = 70^\circ$. Στο τρίγωνο ABD είναι: $\hat{B}AD + \hat{A}BD + \hat{A}DB = 180^\circ$. Άρα $\hat{B}AD + 70^\circ + 70^\circ = 180^\circ$, δηλαδή $\hat{B}AD = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.

β) Στο τρίγωνο ABD ισχύει ότι η εξωτερική γωνία $\hat{A}DG = \hat{A}BD + \hat{B}AD = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ$.

γ) $\hat{A}GB = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ άρα $\hat{A}GB = 180^\circ - 40^\circ - 70^\circ = 70^\circ = \hat{A}BG$ οπότε το τρίγωνο ABG έχει 2 ίσες γωνίες και είναι ισοσκελές.

B2:

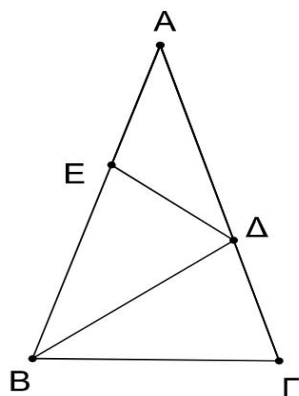


α) Για το τμήμα ΔΖ έχουμε: $\Delta Z = \Delta \Gamma + \Gamma Z = 2\Delta \Gamma$. Όμως το Δ είναι το μέσο του ΑΓ, άρα $2\Delta \Gamma = \text{ΑΓ}$, οπότε θα είναι $\Delta Z = \text{ΑΓ}$ (1). Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΔ έχουν: $\text{ΒΓ} = \text{ΔΕ}$, από την υπόθεση, $\text{ΑΓ} = \text{ΔΖ}$, από τη σχέση (1) και $\hat{\text{ΑΒΓ}} = \hat{\text{ΖΔΕ}}$, ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΓ και ΔΕ που τέμνονται από την ΔΓ. Άρα είναι ίσα από το κριτήριο ΠΓΠ

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΖΕΔ, προκύπτει ότι $\hat{\text{ΒΑΓ}} = \hat{\text{ΕΖΔ}}$ γιατί είναι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΓ και ΕΔ αντίστοιχα. Όμως, είναι γωνίες εντός εναλλάξ των ΑΒ και ΕΖ που τέμνονται από την ΑΖ, άρα $\text{ΑΒ} \parallel \text{ΕΖ}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1:



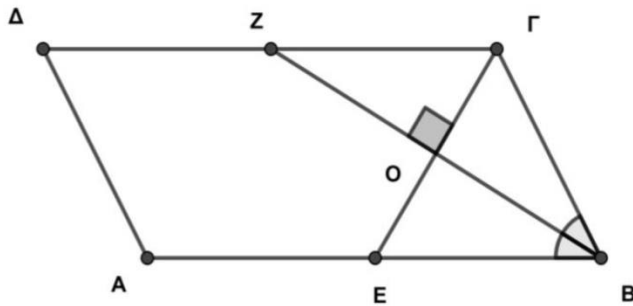
α) Αφού $BΔ = BΓ$ έχουμε $\hat{\Gamma} = B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{A} + \Delta\hat{B}A$ (γιατί η $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $AB\Delta$). Όμως $A\Delta = B\Delta$ άρα και $\hat{A} = \Delta\hat{B}A$ επομένως $\hat{\Gamma} = 2\hat{A}$

β) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{\Gamma} = 2\hat{A}$

άρα $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 2\hat{A} + 2\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow 5\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 36^\circ$

γ) Ένας τρόπος να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές είναι να αποδείξουμε ότι $AE = \Delta E$. Όμως από τα δεδομένα είναι $AE = \Delta\Gamma$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $\Delta E = \Delta\Gamma$. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $BE\Delta$ τα οποία έχουν: $B\Delta = B\Delta$ ως κοινή πλευρά, $B\Gamma = BE$ (γιατί $B\Gamma = A\Delta$ από τα δεδομένα και $BE = A\Delta$ ως διαφορές των ίσων τμημάτων $AB = A\Gamma$ και $AE = \Delta\Gamma$) και $\Delta\hat{B}E = \Delta\hat{B}\Gamma = 36^\circ$ (γιατί $\Delta\hat{B}E = \hat{A}$ και $\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{B} - \Delta\hat{B}E = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ$). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα από ΠΓΠ και $\Delta E = \Delta\Gamma$ δηλαδή $\Delta E = AE$ και άρα το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

Γ2:



α) Έχουμε ΒΖ διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ και $ΒΟ \perp ΓΕ$ από υπόθεση.
 Συνεπώς το τμήμα ΒΟ στο τρίγωνο ΕΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΕΓ.

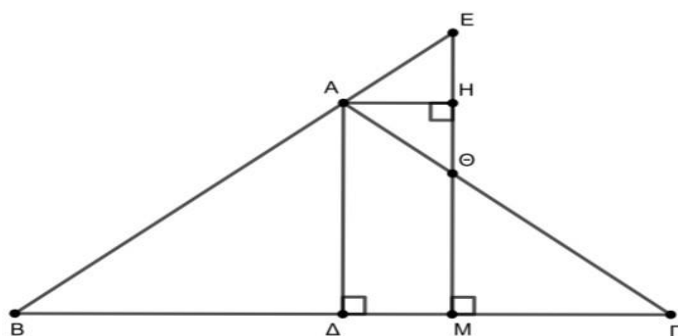
β) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ τα οποία έχουν: $\Gamma\hat{O}Z = E\hat{O}B = 90^\circ$,
 $ΟΓ = ΟΕ$ (Ο μέσο της ΓΕ γιατί το ΒΟ είναι διχοτόμος άρα και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΕΒΓ) και $Z\hat{\Gamma}O = B\hat{E}O$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΕ, ΓΖ που τέμνονται από την ΓΕ). Τα τρίγωνα ΟΖΓ, ΟΒΕ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

γ) Από τη σύγκριση στο ερώτημα β) έχουμε $OZ = OB$ ως πλευρές των ίσων τριγώνων ΖΟΓ και ΒΟΕ απέναντι από τις ίσες γωνίες $Z\hat{\Gamma}O$ και $B\hat{E}O$ και $ΟΓ = ΟΕ$ (Ο μέσο της ΓΕ γιατί το ΒΟ είναι διχοτόμος άρα και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΕΒΓ). Το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι ΓΕ και ΒΖ διχοτομούνται στο σημείο Ο και επειδή είναι και κάθετες από υπόθεση ($BZ \perp ΓΕ$) είναι ρόμβος.

δ) Για να είναι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ τετράγωνο θα πρέπει να είναι εκτός από ρόμβος (ερώτημα γ) και ορθογώνιο άρα θα πρέπει $\hat{B} = 90^\circ$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1:

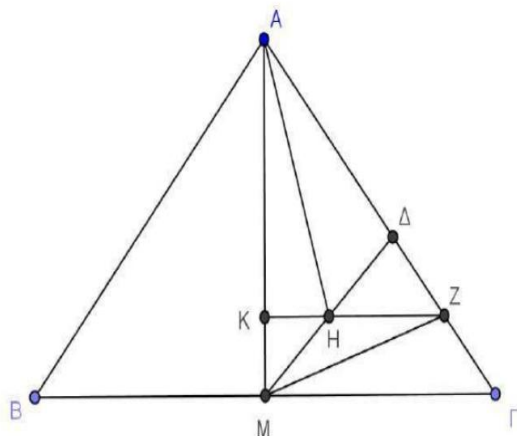


α) Το τετράπλευρο ΔΜΗΑ έχει τρεις ορθές γωνίες οπότε είναι ορθογώνιο. Άρα $\angle \hat{A}H = 90^\circ$.

β) Το τμήμα ΑΗ είναι παράλληλο ς στην ΒΓ αφού και τα δύο είναι κάθετα στην ΕΜ. Ισχύει ότι $\angle \hat{A}H = \angle \hat{A}B$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΗ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ. Επίσης, $\angle \hat{B}G = \angle \hat{A}H$ ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΗ και ΒΓ που τέμνονται από την ΒΕ. Όμως, λόγω του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, με βάση ΒΓ, είναι $\angle \hat{A}B = \angle \hat{B}G$. Άρα τελικά $\angle \hat{A}H = \angle \hat{A}H$ και η ΑΗ είναι διχοτόμος στο τρίγωνο ΑΘΕ. Επιπλέον το ΑΗ είναι και ύψος, οπότε το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΘ και ΑΕ.

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΘΕ το ύψος ΑΗ θα είναι και διάμεσος, άρα $\Theta H = H E$ και $\Theta E = 2\Theta H$. Για το τμήμα ΜΕ έχουμε: $ME = M\Theta + \Theta E = M\Theta + 2\Theta H$ (1). Άρα λόγω της (1) έχουμε: $M\Theta + ME = M\Theta + M\Theta + 2\Theta H = 2M\Theta + 2\Theta H = 2(M\Theta + \Theta H) = 2MH$. Επιπλέον είναι $AD = MH$ διότι είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΔΜΗΑ από το α) ερώτημα, επομένως $M\Theta + ME = 2AD$.

Δ2:



α) Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ το AM είναι ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του, οπότε είναι και διάμεσος του τριγώνου. Άρα $GM = BG/2$ (1). Στο τρίγωνο $M\Delta\Gamma$ το H είναι μέσο της $M\Delta$ και $HZ \parallel MG$, άρα το Z είναι μέσο της $\Delta\Gamma$ και ισχύει ότι: $HZ = GM/2$ (2) Από (1), (2) βρίσκουμε: $HZ = GM/2 = (BG/2)/2 = BG/4$

β) Στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ το MZ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του, άρα $MZ \parallel B\Delta$.

γ) Είναι $KZ \parallel B\Gamma$ και $B\Gamma \perp AM$, άρα $KZ \perp AM$. Στο τρίγωνο AMZ τα $M\Delta$, ZK είναι ύψη, άρα το σημείο τομής τους H , είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Επομένως το AH είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου. Δηλαδή $AH \perp MZ$ και επειδή $MZ \parallel B\Delta$ είναι και $AH \perp B\Delta$.