ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2022

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

06/06/2022

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 186

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 142

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 161

Α4. α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_{fog}: \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,+\infty) \\ \sqrt{x} \in (-\infty,1] \Leftrightarrow \sqrt{x} \le 1 \Leftrightarrow x \le 1 \end{cases}$ Άρα $x \in [0,1]$

Επομένως, $D_h = [0,1]$

Είναι $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2$

• $(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(\sqrt{x}) = \left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1\right)^2 = (x-1)^2$

Αρα $h(x) = (x-1)^2$, $D_h = [0,1]$

Β2. $h'(x) = 2(x-1)$, $x \in [0,1]$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 2(x-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ αδύνατο

Άρα $h'(x) < 0$, για κάθε $x \in [0.1)$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$h'(x)$			$-$		
h			$\searrow$		

Άρα h ↘ [0,1], 1-1, άρα αντιστρέφεται

$$D_{h^{-1}} = h([0,1]) \underset{\text{φθιν.}}{\overset{\text{συνεχής}}{=}} [h(1), h(0)] = [0,1]$$

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = (x-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = |x-1| \overset{x\in[0,1]}{\Longleftrightarrow} \sqrt{y} = -x+1 \Leftrightarrow x = 1-\sqrt{y}$$

Άρα : $h^{-1}(x) = 1-\sqrt{x}$, $D_{h^{-1}} = [0,1]$

B3. $$\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} & , \quad x\in[0,1) \\[2mm] \dfrac{1}{2} & , \quad x=1 \end{cases}$$

i)

- Η φ : συνεχής στο [0,1) ως πηλίκο και διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- $$\lim_{x\to1^-}\phi(x) = \lim_{x\to1^-}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to1^-}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to1^-}\frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} =$$
$$= \lim_{x\to1^-}\frac{1}{(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{2}$$

και $\phi(1) = \dfrac{1}{2}$

άρα $\lim\limits_{x\to1^-}\phi(x) = \phi(1)$, όποτε η φ συνεχής στο $x_o = 1$

Άρα η φ συνεχής στο [0,1]

- φ(0)= 1

  $\phi(1) = \dfrac{1}{2}$ άρα φ(0) ≠ φ(1) οπότε η φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Ε.Τ. στο [0,1]

ii)

- αφού $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \xRightarrow{\eta\mu x \uparrow \sigma\tau o\ \left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)} \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1 \Rightarrow$ $\varphi(1) < \eta\mu\alpha < \varphi(0)$
- Από Θ.Ε.Τ. για κάθε αριθμό ημα , με $\varphi(1) < \eta\mu\alpha < \varphi(0)$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \epsilon (0,1)$ $\tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon$ $\varphi(x_0)$=ημα

Β΄ τρόπος

ii) Θα δείξω ότι η εξίσωση φ(x) – ημα = 0 έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)

Θεωρώ κ(x) = φ(x) - ημα, x∈[0,1]

● κ συνεχής [0,1] ως άθροισμα συνεχών

● κ(0) = φ(0) – ημα = 1 – ημα > 0

κ(1) = φ(1) – ημα = $\frac{1}{2}$ – ημα < 0

Αφού $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \xLeftrightarrow{\eta\mu x \uparrow \sigma\tau o\ (\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})}$ ημ$\frac{\pi}{6}$ < ημα < ημ$\frac{\pi}{2}$ ⟺ $\frac{1}{2}$ < ημα < 1

Άρα κ(0)κ(1) < 0

Οπότε από θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 ∈ (0,1) τέτοιο ώστε κ$(x_0) = 0$ ⟺ φ(x_0) - ημα = 0.

Γ τρόπος

Θα δείξω ότι η εξίσωση φ(x) = ημα ⟺ φ(x) – ημα = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1)

Θεωρώ κ(x) = φ(x) – ημα, x ∈ (0, 1)

$\kappa'(x) = \varphi'(x) = \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)' = \frac{-x-1+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1-x)^2} = -\frac{x+1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1-x)^2} = -\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(1-x)^2} < 0$, για κάθε x ∈ (0, 1),

Άρα κ ↓ (0,1)

Οπότε κ((0,1)) $\underset{\text{φθιν.}}{\overset{\text{συνεχής}}{=}}$ $(\lim_{x\to 1^-} k(x), \lim_{x\to 0^+} k(x))$ = ($\frac{1}{2}$ – ημα, 1 – ημα), αφού

$\lim_{x\to 1^-} k(x) = \lim_{x\to 1^-}(\varphi(x) - \eta\mu\alpha) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} - \eta\mu\alpha\right) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} - \eta\mu\alpha\right) =$

$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{(1-x)}{(1-x)(1+\sqrt{x})} - \eta\mu\alpha\right) = \frac{1}{2}$ – ημα, και

$\lim_{x\to 0^+} k(x) = \lim_{x\to 0^+}(\varphi(x) - \eta\mu\alpha) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} - \eta\mu\alpha\right)$ = 1 – ημα

Όμως $\frac{\pi}{6} < α < \frac{\pi}{2} \xLeftrightarrow{\eta\mu x \uparrow (\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})}$ ημ$\frac{\pi}{6}$ < ημα < ημ$\frac{\pi}{2}$ ⟺ $\frac{1}{2}$ < ημα < 1

●ημα < 1 ⟺ 1 – ημα > 0

● $\frac{1}{2}$ < ημα ⟺ $\frac{1}{2}$ – ημα < 0

Οπότε η κ είναι συνεχής και γν. φθίνουσα στο (0,1) και

0∈κ((0,1))= ($\frac{1}{2}$ – ημα, 1 – ημα) ,

Άρα η εξίσωση κ(x) = 0 ⇔ φ(x) = ημα έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Για x<-1 $f'(x) = -2 \Leftrightarrow f'(x) = (-2x)'$

$από\ συνέπειες\ Θ.Μ.Τ.\ \ f(x) = -2x + c_1\ \ (1)$

Για x>-1 $f'(x) = 3x^2 - 1 \Leftrightarrow f'(x) = (x^3 - x)'$

$από\ συνέπειες\ Θ.Μ.Τ.\ \ f(x) = x^3 - x + c_2\ (2)$

$Η\ C_f\ διέρχεται\ από\ το\ O(0,0)\ \ άρα\ f(0) = 0$

$(2) \overset{x=0}{\Longrightarrow} f(0) = 0^3 - 0 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$

$$Άρα\ f(x) = \begin{cases} -2x + c_1, x < -1 \\ a, x = -1 \\ x^3 - x, x > -1 \end{cases}$$

$f\ συνεχής\ στο\ x = -1 \quad \Leftrightarrow \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to -1^+}(x^3 - x) = \lim_{x\to -1^-}(-2x + c_1) = a \Leftrightarrow 0 = 2 + c_1 = a \Leftrightarrow$

$a = 0\ και\ c_1 = -2$

$$Άρα\ f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x < -1 \\ 0, & x = -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Γ2. Η εφαπτομένη της C_f στο Α$(x_0, f(x_0))$ είναι

(ε) : y - $f(x_0)$ = $f'(x_0)$(x – x_0) (1)

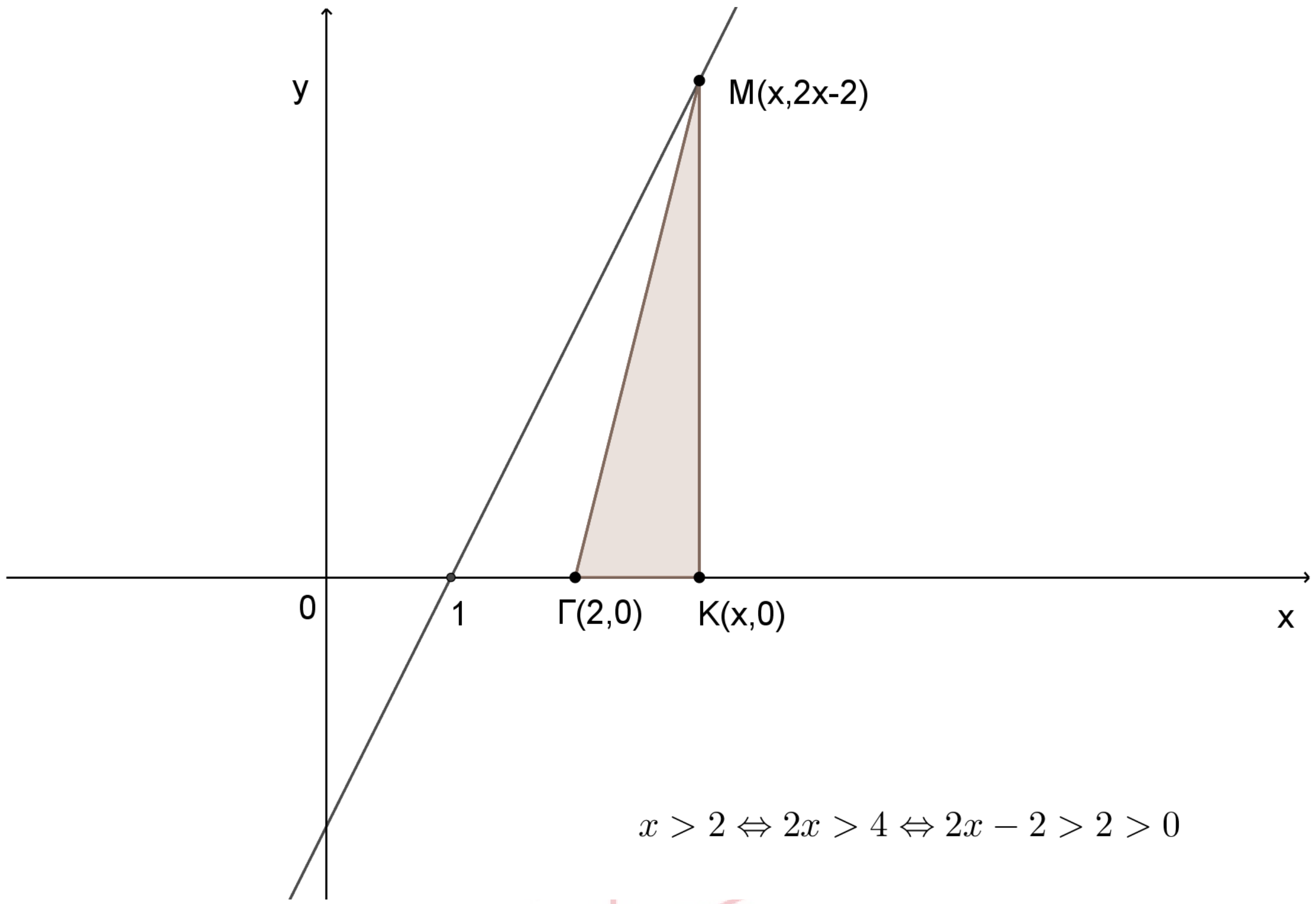
Η (ε) διέρχεται από το (0, – 2)

(1) $\xRightarrow{x=0, y=-2}$ – 2 - $f(x_0)$ = $f'(x_0)$(0 – x_0) $\xLeftrightarrow{x_0 > -1}$

– 2 – (x_0^3 – x_0) = ($3x_0^2$ – 1)(–x_0) ⟺ – 2 – x_0^3 + x_0= -3x_0^3 + x_0 ⟺

$2x_0^3$ = 2 ⟺ x_0 = 1 (δεκτή)

Γ3.



$$x > 2 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow 2x - 2 > 2 > 0$$

Τη χρονική στιγμή t_0 το Μ διέρχεται από το Β(3,4) άρα $x(t_0) = 3$,

$y(t_0) = 4$ και $x'(t_0) = 2\ μονάδες/sec$

$$(ΜΚΓ) = \frac{1}{2}(ΚΓ)(ΜΚ) = \frac{1}{2}(x-2)(2x-2) = (x-2)(x-1) = x^2 - 3x + 2$$

$E(t) = x^2(t) - 3x(t) + 2, \quad t \geq 0$

$E'(t) = 2x(t)x'(t) - 3x'(t)\ , \quad t \geq 0$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$$E'(t_0) = 2\,x(t_0)\,x'(t_0) - 3x'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 6\ τετρ.μονάδες/sec$$

Γ4. $\left|\frac{ημf(x)}{f(x)}\right| = \frac{|ημf(x)|}{|f(x)|} \leq \frac{1}{|f(x)|}$ $\quad άρα$

$$-\left|\frac{1}{f(x)}\right| \leq \frac{ημ\big(f(x)\big)}{f(x)} \leq \left|\frac{1}{f(x)}\right| \quad (1)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-2x-2} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2x} = 0$$

$ά\rho\alpha \lim_{x\to-\infty}\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \lim_{x\to-\infty}\left(-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\right) = 0 \ (2)$

$\xrightarrow{(1),(2)K.\Pi.} \lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)} = 0$

$\Upsilon\pi o\lambda o\gamma ί\zeta o\upsilon\mu\varepsilon\ \tau o\text{:} \lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}$

$\Theta έ\tau o\upsilon\mu\varepsilon -x = u \quad \Leftrightarrow \quad x = -u \quad Ά\rho\alpha \quad \lim_{x\to-\infty} u = \lim_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$

$A\rho\alpha\ \tau o\ ό\rho\iota o \lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}\ \gamma\rho ά\varphi\varepsilon\tau\alpha\iota\text{:} \lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{1+u^2} = \lim_{u\to+\infty}\frac{u^3-u}{1+u^3} = \lim_{u\to+\infty}\frac{u^3}{u^3} = 1$

$E\pi o\mu έ\nu\omega\varsigma, \quad \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3} =$

$0 + 1 = 1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i.) Η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(3\cdot x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

παράγωγο τη $f'(x) = 1 - \frac{1}{3\cdot x}(3\cdot x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Ελέγχουμε πότε $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Αντίστοιχα $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$ και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Άρα

X	0		1	+∞
$f'(x)$		-	0	+
F		↘		↗

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x=1 το $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$ και είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Ακόμη

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(x - \ln(3\cdot x)) \overset{0-(-\infty)}{=} +\infty$, αφού

$\lim_{x\to0^+}\ln(3\cdot x) \overset{3\cdot x=u}{=} \lim_{u\to0^+}\ln u = -\infty$, και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln(3\cdot x)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\left(1-\frac{\ln(3\cdot x)}{x}\right)\right) \overset{+\infty\cdot(1-0)}{=} +\infty,$$

αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3\cdot x)}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$.

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, άρα

$f((0,1]) = \left[f(1), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = [1-\ln 3, +\infty)$. Το $0 \in f((0,1]) = [1-\ln 3, +\infty)$ άρα υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ έτσι ώστε $f(x_1) = 0$, $x_1 \neq 1$ γιατί $f(1) = 1-\ln 3$. Το x_1 είναι μοναδικό γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα.

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα φθίνουσα στο $(1,+\infty)$, άρα $f((1,+\infty)) = \left(\lim_{x\to 1^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (1-\ln 3, +\infty)$.

Το $0 \in f((1,+\infty)) = (1-\ln 3, +\infty)$ άρα υπάρχει $x_2 \in (1,+\infty)$ έτσι ώστε $f(x_2) = 0$. Το x_2 είναι μοναδικό γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα.

Τελικά η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1<1<x_2$.

ii. Η συνάρτηση f′ είναι παραγωγίσιμη με $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$, άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ άρα η f διατηρεί πρόσημο στο (x_1, x_2). Εφόσον $f(1) = 1-\ln 3 < 0$ τότε και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$. Συνεπώς $f(x) \le 0$ στο $[x_1, x_2]$, άρα

$$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} x - \ln(3\cdot x)\,dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \ln(3\cdot x) - x dx = \int_{x_1}^{x_2} \ln(3\cdot x) - x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \ln(3\cdot x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} x\,dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} (x)'\cdot\ln(3\cdot x)\,dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = \left[x\cdot\ln(3\cdot x)\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x\cdot\frac{1}{3\cdot x}\cdot 3\,dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} =$$

$$=x_2\cdot\ln(3\cdot x_2)-x_1\cdot\ln(3\cdot x_1)-[x]_{x_1}^{x_2}-\left(\frac{x_2^2-x_1^2}{2}\right)=$$

$$=x_2\cdot\ln(3\cdot x_2)-x_1\cdot\ln(3\cdot x_1)-x_2+x_1-\frac{x_2^2-x_1^2}{2}\underset{x_1=\ln(3\cdot x_1)}{\overset{x_2=\ln(3\cdot x_2)}{=}}$$

$$=x_2^2-x_1^2-(x_2-x_1)-\frac{x_2^2-x_1^2}{2}=(x_2-x_1)\cdot\left[(x_2+x_1)-1-\frac{x_2+x_1}{2}\right]=$$

$$=(x_2-x_1)\cdot\left(\frac{x_2+x_1-2}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2+x_1-2)$$

Δ3. Ισχύει ότι $0<x_1<1\Leftrightarrow -1<-x_1<0\Leftrightarrow 1<2-x_1<2$

Αρκεί να δείξουμε ότι $2-x_1<x_2\Leftrightarrow 2<x_2+x_1$

(Αφού $f(x)<0$ στο (x_1,x_2) από Δ2).

Όμως $E>0\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2+x_1-2)>0 \overset{\frac{1}{2}\cdot(x_2-x_1)>0}{\Leftrightarrow} x_2+x_1-2>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_2+x_1>2.$

Δ4. Για κάθε x>0

$$2\cdot f(x)+\ln 3=1+f'(x_2)\cdot(x-x_2)\Leftrightarrow$$

$$2\cdot f(x)=1-\ln 3+f'(x_2)\cdot(x-x_2)\Leftrightarrow$$

$$2\cdot f(x)=f(1)+f'(x_2)\cdot(x-x_2)\Leftrightarrow$$

$$f(x)-f(1)+f(x)-f'(x_2)\cdot(x-x_2)=0\Leftrightarrow$$

$$[f(x)-f(1)]+[f(x)-f'(x_2)\cdot(x-x_2)-f(x_2)]=0 \quad \underline{\textbf{(1)}}$$

- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x=1 το f(1), συνεπώς

$f(x)\ge f(1)\Leftrightarrow f(x)-f(1)\ge 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=1. **<u>(2)</u>**

- Η εφαπτομένη (ε) της Cf στο x_2 είναι η

$(\varepsilon): y - f(x_2) = f'(x_2)\cdot(x - x_2) \Leftrightarrow \quad (\varepsilon): y = f'(x_2)\cdot(x - x_2) + f(x_2)$.

Ακόμη η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, συνεπώς η Cf θα βρίσκεται ολόκληρη πάνω από την (ε) εξαιρουμένου του σημείου επαφής, άρα

$f(x) \geq f'(x_2)\cdot(x - x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow f(x) - \left[f'(x_2)\cdot(x - x_2) + f(x_2)\right] \geq 0$,

για κάθε $x \in (0,+\infty)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=x_2$. **(3)**

Συνεπώς από **(2)** και **(3)** η **(1)** γίνεται

$$\begin{cases} f(x) - f(1) = 0 \\ f(x) - \left[f'(x_2)\cdot(x - x_2) + f(x_2)\right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = x_2 \end{cases} \quad \text{ΑΔΥΝΑΤΟ}$$

αφού $x_2 \neq 1$. Άρα η εξίσωση δεν έχει λύσεις.