ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2021

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

16/06/2021

Θέμα Α.

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 153

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 51

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 23

Α4.

α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β.

Β1. Από τη σχέση που μας δίνουν,

$$f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-x} \quad (1)$$

θέτοντας όπου $u = x + 1 \Leftrightarrow x = u - 1$, προκύπτει ότι:

$$f(u) = u \cdot e^{-(u-1)} \Leftrightarrow f(u) = u \cdot e^{1-u}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Άρα, $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \cdot (1-x)' = e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} = e^{1-x} \cdot (1-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Λύνουμε:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x} \cdot (1-x) = 0 \xLeftrightarrow{e^{1-x}>0} 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{1-x} \cdot (1-x) > 0 \xLeftrightarrow{e^{1-x}>0} 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1.$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	Ο.Μ. 1	$\searrow$

Συνεπώς, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$. Στο $x_0 = 1$, η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(1) = 1$.

Επομένως, ισχύει $f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

B3. Η συνάρτηση f είναι και δεύτερη φορά παραγωγίσιμη, με

$$\begin{aligned} f''(x) &= (e^{1-x})' \cdot (1-x) + e^{1-x} \cdot (1-x)' = e^{1-x}(1-x)' \cdot (1-x) + e^{1-x} \cdot (-1) \\ &= -e^{1-x} \cdot (1-x) - e^{1-x} = -e^{1-x} \cdot (1 - x + 1) \\ &= -e^{1-x} \cdot (2-x) \qquad = e^{1-x} \cdot (x-2), \ \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$f''(x) = e^{1-x} \cdot (x-2), \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Λύνουμε:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x} \cdot (x-2) = 0 \xLeftrightarrow{e^{1-x}>0} x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^{1-x} \cdot (x-2) > 0 \xLeftrightarrow{e^{1-x}>0} x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2.$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$		Σ.Κ. $\left(2,\frac{2}{\varepsilon}\right)$	

Συνεπώς, η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$. Η f έχει σημείο καμπής το $A\left(2,\frac{2}{e}\right)$.

Κατακόρυφες ασύμπτωτες: Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και άρα δεν παρουσιάζει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Πλάγιες-οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$: Έχουμε:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot e^{1-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{1-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e}{e^x} = e\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = e\cdot 0 = 0.$$

(αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0.$)

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x] = \lim_{x\to+\infty}[x\cdot e^{1-x} - 0\cdot x] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot e}{e^x} \underset{DHL}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(x\cdot e)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e}{e^x} = e\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0.$$

Άρα, $\lambda = 0$ και $\beta = 0$ και επομένως, η ευθεία $y = 0$ (δηλαδή ο άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Πλάγιες-οριζόντιες ασύμπτωτες στο $-\infty$: Έχουμε:

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot e^{1-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e}{e^x} = e\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} = e\cdot(+\infty) = +\infty.$$

(αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, και $e^x > 0$ κοντά στο $-\infty$, έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} = +\infty.$)

Άρα, η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$.

B4. (i) Υπολογίζουμε:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^{1-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x\cdot e}{e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} [xe\cdot\frac{1}{e^x}] = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty,$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0,$ (από το ερώτημα **B3**).

Συνεπώς,

- στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 1]$, η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Άρα,
$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 1].$$
- στο διάστημα $\Delta_2 = (1, +\infty)$, η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Άρα,
$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to1^+} f(x)\right) = (0,1),$$
(είναι $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1) = 1,$, αφού η f είναι συνεχής).

Τελικά, το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f(\mathbb{R}) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (-\infty, 1] \cup (0,1) = (-\infty, 1].$$

Άρα, $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 1]$.

(ii)

λ	$-\infty$ $+\infty$	0		1	
Πλήθος ριζών	1	1	2	1	0

- Για $\lambda < 0$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει 1 ρίζα.
- Για $\lambda = 0$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει 1 ρίζα.
- Για $0 < \lambda < 1$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει 2 ρίζες.
- Για $\lambda = 1$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει 1 ρίζα.
- Για $\lambda > 1$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ δεν έχει ρίζες.

B4. (ii) (<u>Δεύτερος τρόπος</u>)

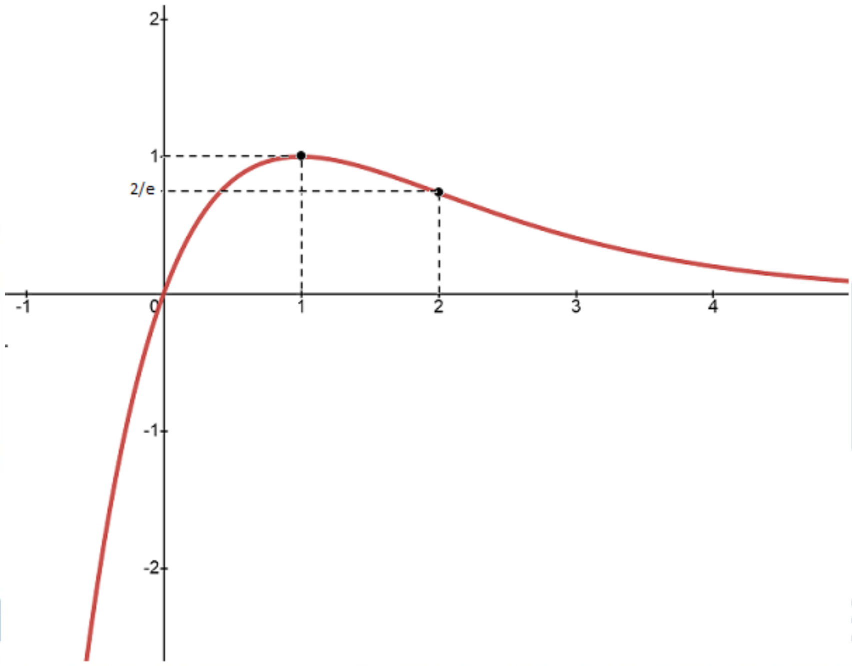
Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1 Ο.Μ	$\searrow$	2/e Σ.Κ	$\searrow$	0

Έχουμε:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα, η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Το σύνολο τιμών της f είναι $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 1]$.

- Αν $\lambda \leq 0$, τότε η C_f με την $y = \lambda$τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο, άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα.
- Αν $0 < \lambda < 1$, τότε η C_f με την $y = \lambda$ τέμνονται σε δύο σημεία, άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.
- Αν $\lambda > 1$, τότε η C_f με την $y = \lambda$ δεν έχουν κοινά σημεία, άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη.

Θέμα Γ.

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 - 3x^2 - x + 1 \ , & x \le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x \ , & 0 < x \le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \qquad a < -3$$

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής για $x < 0$, ως πολυωνυμική. Επίσης, η f είναι συνεχής για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ ως τριγωνομετρική.

Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια στο 0:

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (ax^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$

$f(0) = 1$

Άρα,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow f \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ x = 0$$

$\lim_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{ax^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{x(ax^2 - 3x - 1)}{x} =$

$\lim_{x \to 0^-} (ax^2 - 3x - 1) = -1 \qquad (1)$

$\lim_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0 \qquad (2)$

$A\rho\alpha\ \alpha\pi o\ (1)\ \kappa\alpha\iota\ (2)\ \lim_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$A\rho\alpha\ \delta\varepsilon\nu\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \tau o\ \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$E\pi o\mu\acute{\varepsilon}\nu\omega\varsigma\ \eta\ f\ \delta\varepsilon\nu\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ \sigma\tau o\ x_0 = 0$

Γ2.

(i) $f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]\ \alpha\rho\alpha\ \eta\ f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

$f\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \sigma\tau o\ \left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)\ \omega\varsigma\ \tau\rho\iota\gamma\omega\nu o\mu\varepsilon\tau\rho\iota\kappa\acute{\eta}$

$f(0) = 1$

$f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu \dfrac{3\pi}{2} = 0$

$A\rho\alpha\ f(0) \neq f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$

Αρα δεν ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle

(ii) Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ $f'(x) = -\eta\mu x$

$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\xi = \eta\mu 0 \Leftrightarrow \xi = \pi \quad \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ x\epsilon \left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

Γ3.
Για x<0, έχουμε

$$f^{'}(x) = 3ax^2 - 6x - 1.$$

Η εφαπτομένη (ε) της C_f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ αν και μόνο αν ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι 0, $\lambda_\varepsilon = 0$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) ισούται με την παράγωγο της f. Άρα,

$$\lambda_\varepsilon = 0 \iff f^{'}(x) = 0 \iff 3ax^2 - 6x - 1 = 0 \quad (1)$$
$$\Delta = 36 + 12\alpha = 12(3 + \alpha) < 0$$
$$\alpha < -3 \iff \alpha + 3 < 0$$
$$A\rho\alpha\ \eta\ (1)\ \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta$$

Επομένως δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον $x'x$.

Γ4.
Για x<0

$f^{'}(x) = 3ax^2 - 6x - 1 \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\epsilon(-\infty, 0) \qquad (\Delta < 0)$

$\Gamma\iota\alpha\ x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right] \ f^{'}(x) = -\eta\mu x$

$f^{'}(x) = 0 \iff -\eta\mu x = 0 \iff x = \pi$

$f^{'}(x) > 0 \iff -\eta\mu x > 0 \iff \eta\mu x < 0 \overset{x\epsilon\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]}{\iff} x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

x	-∞	0		π	$\frac{3\pi}{2}$	+∞
f'(x)	−		−	0	+	
f(x)	↘		↘		↗	

f συνεχής στο x=0 f γνησίως φθίνουσα στο (-∞,0] , [0,π] αρα f γνησίως φθίνουσα στο
(-∞,π] και f γνησίως αύξουσα στο [π, $\frac{3\pi}{2}$]
Η f παρουσιάζει στο $x = \pi$ ολικό ελάχιστο το $f(\pi) = \sigma\upsilon\nu\pi = -1$. Άρα,

$$f(x) \geq f(\pi) \iff f(x) \geq -1 \ \text{για κάθε}\ x\epsilon\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$$

<u>Θέμα Δ.</u>
Δ1. Θεωρώ τη συνάρτηση:

$\Lambda(x) = lnx - \frac{1}{x} \quad , x > 0$

$\Lambda^{'}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad , x > 0$

Έχουμε ότι $\Lambda^{'}(x) > 0$ *για κάθε* $x \in (0, +\infty)$

Επομένως Λ *γνησίως αύξουσα στο* $(0, +\infty)$

$Αρα\ η\ εξίσωση\ Λ(x) = 0\ έχει\ μία\ το\ πολύ\ ρίζα\ στο\ (0, +\infty) \qquad (*)$
$Λ\ συνεχής\ στο\ [1, e]\ \ πράξεις\ συνεχών\ συναρτήσεων$
$Λ(1) = -1 < 0$
$Λ(e) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$
$Λ(1)Λ(e) < 0 \quad αρα\ απο\ θεώρημα\ Bolzano\ η\ εξίσωση\ Λ(x) = 0$
$έχει\ τουλάχιστον\ μία\ ρίζα\ στο\ (1, e) \subseteq (0, +\infty) \qquad (**)$

$Αρα\ απο\ (*) και\ (**)\ υπάρχει\ μοναδικό\ x_0 \in (0, +\infty)$
$\big(το\ οποίο\ μάλιστα\ ανήκει\ στο\ (1, e)\big), ώστε\ Λ(x_0) = 0 \Leftrightarrow lnx_0 = \frac{1}{x_0}$

Δ2. Έχουμε:

$$f(x) = (\ln x_0)(x+1) - \ln x - 1, \qquad x > 0$$

$$\overset{(Δ1)}{\Longleftrightarrow} f(x) = \frac{1}{x_0}(x+1) - \ln x - 1, \qquad x > 0$$

Η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Για $x > 0$, έχουμε:

$$f'(x) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{x_0 x}.$$

Για $x > 0$, λύνουμε

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-x_0}{x_0 \cdot x} > 0 \overset{x_0 \cdot x > 0}{\Longleftrightarrow} x - x_0 > 0 \Leftrightarrow x > x_0$.

x	-∞ 0		x_0		+∞
f ′(x)		−	0	+	
f(x)		↘		↗	

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο για $x = x_0$, το $f(x_0) = \frac{1}{x_0}(x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 = 0$ (διότι, από **Δ1**, έχουμε $\ln x_0 = \frac{1}{x_0}$).

Άρα,

$$f(x) \geq f(0) = 0, \ \ για\ κάθε\ x \in (0, +\infty) \quad (4)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = x_0$.

Δ3. Έχουμε $g(x) = xe^{-x}, \quad D_g = \mathbb{R}$, με

$$g'(x) = e^{-x}(1-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επίσης, $h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$, $x \in \mathbb{R}$, με

$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \ln\left(\frac{x_0}{e}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Το κοινό σημείο των C_f, C_h έχει τετμημένη τη ρίζα της εξίσωσης:

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}, \quad για \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Αφού $\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει $x \cdot e^{-x} > 0 \overset{e^{-x}>0}{\Longleftrightarrow} x > 0$. Για $x > 0$,

$$(5) \Leftrightarrow \ln(xe^{-x}) = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \ln x + \ln e^{-x} = (x+1)\ln\left(\frac{x_0}{e}\right) \Leftrightarrow \ln x - x$$
$$= (x+1)(\ln x_0 - \ln e) \Leftrightarrow \ln x - x = (x+1)\ln x_0 - (x+1)$$
$$\Leftrightarrow \ln x - (x+1)\ln x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow -f(x) = 0 \overset{(4)}{\Leftrightarrow} x = x_0.$$

Άρα, οι C_g, C_h έχουν μοναδικό κοινό σημείο στο x_0. Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο x_0, αρκεί να δείξουμε ότι $g'(x_0) = h'(x_0)$. Έχουμε:

$$g'(x_0) = h'(x_0) \Leftrightarrow e^{-x_0}(1 - x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) \Leftrightarrow e^{-x_0} - x_0 e^{-x_0}$$
$$= \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} (\ln x_0 - 1) \Leftrightarrow e^{-x_0} - g(x_0)$$
$$= h(x_0)\left(\frac{1}{x_0} - 1\right) \overset{g(x_0)=h(x_0)}{\Longleftrightarrow} e^{-x_0} - h(x_0) = \frac{h(x_0)}{x_0} - h(x_0)$$
$$\Leftrightarrow e^{-x_0} = \frac{h(x_0)}{x_0} \Leftrightarrow x_0 e^{-x_0} = h(x_0) \Leftrightarrow g(x_0) = h(x_0),$$

που ισχύει.

Άρα, οι C_g, C_h έχουν μοναδικό κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Δ4. Για κάθε x∈ $(0, +\infty)$ η απόσταση των σημείων A(x, f(x)) , B(x,f(x)) δίνεται από τη συνάρτηση d(x) = |f(x)-φ(x)| = f(x) – φ(x) , x>0 (αφου f(x)>φ(x) για κάθε x>0)
Διακρίνω τις περιπτώσεις:
(α) Αν η φ παραγωγίσιμη στο x_o (ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:
$d'(x_o) = f'(x_o) - φ'(x_o) = 0 - φ'(x_o) = - φ'(x_o)$ (απο Δ1 ερώτημα)
Το x_o εσωτερικό σημείο του (0,+∞)
Η d παρουσιάζει ελάχιστο στο x_o
Αρα απο θεώρημα Fermat θα έχουμε ότι: $d'(x_o)=0 \Leftrightarrow - φ'(x_o) = 0 \Leftrightarrow φ'(x_o) = 0$
και άρα x_o κρίσιμο σημείο της φ
(β) Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o τότε το x_o κρίσιμο σημείο της φ
επομένως απο (α) και (β) προκύπτει ότι σε κάθε περίπτωση το x_o είναι κρίσιμο σημείο της φ.