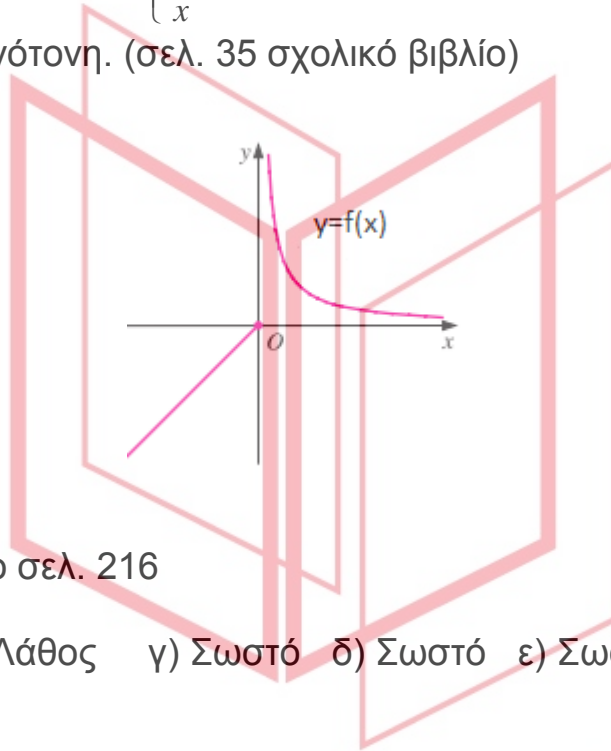


ΘΕΜΑ Α:

A.1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 99

A.2. α) Ψ

β) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη. (σελ. 35 σχολικό βιβλίο)



A.3. Σχολικό Βιβλίο σελ. 216

A.4 α) Λάθος β) Λάθος γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β:

B.1. $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$, $D_f = \mathbb{R}^*$. Η f είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$f'(x) = 1 + \frac{8x}{x^4} = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{x^3}, D_{f'} = \mathbb{R}^*$$

Λύνουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$

και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 8}{x^3} > 0 \Leftrightarrow (x^3 + 8)x^3 > 0$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$x^3 + 8$		-	+	+
x^3		-	-	+
$(x^3 + 8)x^3$		+	-	+

Άρα $f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x^3 + 8)x^3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Επομένως προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μελέτης:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f'	+		-	+
f	↗		↘	↗

Επομένως :

η f είναι γν.αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$

η f είναι γν.φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 0)$

και η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x = -2$, το οποίο είναι το $f(-2) = -3$

B.2. Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x) = -\frac{24}{x^4}, x \in \mathbb{R}^*$.

Παρατηρούμε ότι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, αφού $x^4 > 0$ για κάθε $x \neq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-		
f	↘		↘

Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

B.3. Κατακόρυφες Ασύμπτωτες

Αφού η f ορίζεται στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και είναι συνεχής, τότε η μοναδική πιθανή θέση κατακόρυφης ασύμπτωτης είναι $x=0$.

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = -\infty$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

και $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{4}{x^2} \right) = -\infty$ (αφού $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, x^2 > 0$ κοντά στο 0 και $-4 < 0$).

Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Πλάγιες-Οριζόντιες Ασύμπτωτες

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η ασύμπτωτη στο $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(x - \frac{4}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3}\right) = 1$$

αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^3} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} - x\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0.$$

Άρα, η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(x - \frac{4}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3}\right) = 1$$

αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^3} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} - x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B.4. $D_f = \mathbb{R}^*$ και f είναι συνεχής.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty$$

αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = +\infty$$

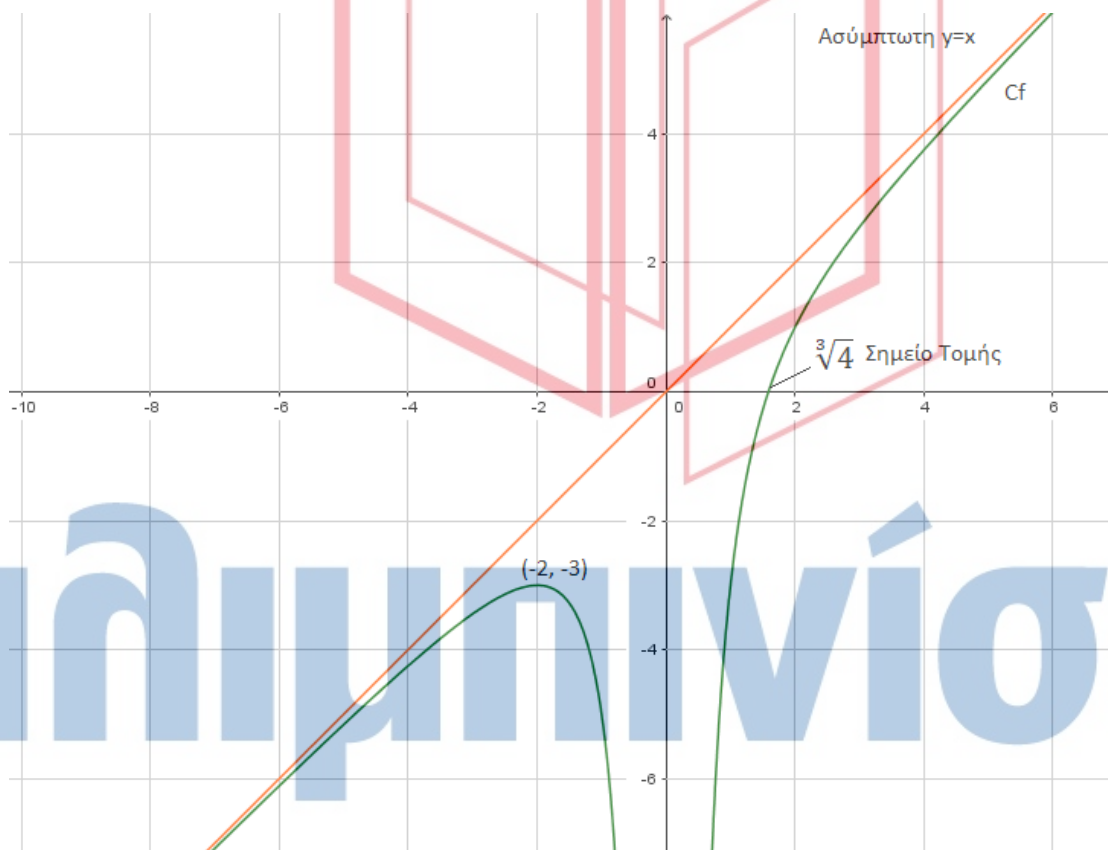
αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Πίνακας Μεταβολών

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f''	-	-		-
f'	+	-		+
f				

Με βάση όλα τα παραπάνω προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

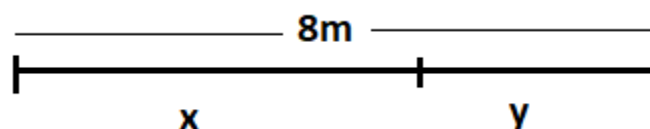


ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ Γ.

Γ.1. Έστω x , y τα δυο τμήματα.

(y είναι το τμήμα από το οποίο κατασκευάζουμε τον κύκλο)



Το τετράγωνο έχει περίμετρο x , άρα η πλευρά του είναι ίση με $\frac{x}{4}$.

Το εμβαδό του τετραγώνου είναι:

$$E_{\text{τετρ}} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}.$$

Αν ρ είναι η ακτίνα του κύκλου και αφού y είναι η περίμετρος του κύκλου, τότε

$$y = 2\pi\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{y}{2\pi} \Leftrightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi}.$$

Άρα, το εμβαδό του κύκλου είναι:

$$E_{\text{κύκλου}} = \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \pi \cdot \frac{64-16x+x^2}{4\pi^2} = \frac{64-16x+x^2}{4\pi}.$$

Άρα, το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

$$\begin{aligned} E(x) = E_{\text{τετρ}} + E_{\text{κύκλου}} &= \frac{x^2}{16} + \frac{64-16x+x^2}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 4(64-16x+x^2)}{16\pi} = \\ &= \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} \end{aligned}$$

Πρέπει $x > 0$ και $y > 0 \Leftrightarrow 8-x > 0 \Leftrightarrow x < 8$.

Άρα η συνάρτηση $E(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $D_E = (0,8)$.

Γ2. Η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,8)$ με

$$E'(x) = \frac{1}{16\pi} \cdot (2(\pi+4)x - 64) = \frac{1}{8\pi} \cdot ((\pi+4)x - 32).$$

Έχουμε:

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8\pi} \cdot ((\pi+4)x - 32) = 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x - 32 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi+4}.$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8\pi} \cdot ((\pi+4)x - 32) > 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x - 32 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{32}{\pi+4}.$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

x	$-\infty$	0	$\frac{32}{\pi+4}$	8	$+\infty$
$E'(x)$			+	-	
$E(x)$			↘	↗	

Η συνάρτηση E παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = \frac{32}{\pi+4}$, το

οποίο είναι το $E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi+4}$.

Τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι

$$\frac{x}{4} = \frac{32}{4(\pi + 4)} = \frac{8}{\pi + 4}.$$

Η διάμετρος του κύκλου είναι:

$$\delta = 2\rho = \frac{y}{\pi} = \frac{8-x}{\pi} = \frac{8 - \frac{32}{\pi+4}}{\pi} = \frac{8\pi + 32 - 32}{\pi(\pi + 4)} = \frac{8\pi}{\pi(\pi + 4)} = \frac{8}{\pi + 4}.$$

Παρατηρούμε ότι $\delta = \frac{x}{4}$.

Άρα, το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ.3. Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,8)$.

Η E είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right)$, οπότε:

$$\begin{aligned} E\left(\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right)\right) &= \left(\lim_{x \rightarrow \frac{32}{\pi+4}^-} E(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} E(x)\right) = \left(E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}\right) = \\ &= \left(\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right) \end{aligned}$$

Έχουμε ότι: $5 < \frac{16}{\pi} \Leftrightarrow 5\pi < 16$ που ισχύει

$$\frac{16}{\pi+4} < 5 \Leftrightarrow 16 < 5\pi + 20 \Leftrightarrow -4 < 5\pi \text{ που ισχύει}$$

Επομένως, $5 \in E\left(\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right)\right) = \left(\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right)$, άρα η εξίσωση $E(x) = 5$

έχει μοναδική ρίζα στο $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right)$ αφού η E είναι γν. φθίνουσα στο $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right)$.

Η E είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$, οπότε:

$$\begin{aligned} E\left(\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)\right) &= \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 8^-} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}\right) = \\ &= \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right) \end{aligned}$$

Προφανώς, $5 \notin E\left(\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$, άρα η εξίσωση $E(x) = 5$

δεν έχει καμία ρίζα στο $\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$.

Τελικά η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,8)$.

ΘΕΜΑ Δ:

Δ1. Έχουμε $f(x) = 2e^{x-a} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$, με $a > 1$. Επομένως,

$$f'(x) = 2e^{x-a} - 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 2e^{x-a} - 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

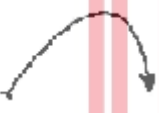
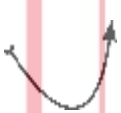
Έχουμε:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-a} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} > 1 \Leftrightarrow x - a > 0 \Leftrightarrow x > a.$$

Ομοίως,

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < a$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = a.$$

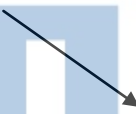

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
$f(x)$			

Επομένως, η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής που είναι το $A(\alpha, f(\alpha))$, δηλαδή το σημείο $A(\alpha, 2 - \alpha^2)$, με $\alpha > 1$.

Δ2. Ισχύει ότι:

$$f''(x) = 2e^{x-a} - 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2e^{x-a} - 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
$f'(x)$			

Η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, a]$ και άρα

$$f'((-\infty, a]) = [f'(a), \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)] = [2 - 2a, +\infty),$$

αφού:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{x-a} - 2x) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

Το 0 ανήκει στο διάστημα $f'((-\infty, a]) = [2 - 2a, +\infty)$ (διότι $a > 1$ και άρα $2 - 2a < 0$).

Επομένως, υπάρχει $x_1 \in (-\infty, a]$ έτσι ώστε $f'(x_1) = 0$, και μάλιστα είναι μοναδικό στο διάστημα $(-\infty, a]$, διότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, a]$.

Επίσης $x_1 \neq a$ (αν $x_1 = a$, τότε $f'(x_1) = f'(a) \Leftrightarrow 0 = 2 - 2a$, άτοπο)

Άρα $x_1 \in (-\infty, a)$.

Ακόμη:

$$x < x_1 \stackrel{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

$$x_1 < x \leq a \stackrel{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(x_1) > f'(x) \Leftrightarrow 0 > f'(x).$$

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(\alpha, +\infty)$ και άρα

$$f'((\alpha, +\infty)) = (f'(\alpha), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)) = (2 - 2\alpha, +\infty),$$

εφόσον:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{x-a} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x \left(\frac{e^{x-a}}{x} - 1 \right) \right] =$$

$$= (+\infty) \cdot (+\infty - 1) = +\infty,$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-a}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-a} = +\infty.$$

Το 0 ανήκει στο διάστημα $f'((\alpha, +\infty)) = (2 - 2\alpha, +\infty)$, και άρα υπάρχει $x_2 \in (\alpha, +\infty)$ έτσι ώστε $f'(x_2) = 0$, και μάλιστα είναι μοναδικό στο διάστημα $(\alpha, +\infty)$, διότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(\alpha, +\infty)$.

Ακόμη:

$$x > x_2 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

$$a < x < x_2 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) < 0.$$

Τελικά:

x	$-\infty$	x_1	α	x_2	$+\infty$
$f'(x)$		○	-	○	
$f(x)$	↗		↘		↗

Άρα υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έτσι ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .

Δ3. 1^{ος} τρόπος

Έχουμε $f'(1) = 2e^{1-\alpha} - 2 = 2(e^{1-\alpha} - 1) < 0$

αφού $\alpha > 1 \Leftrightarrow 1 - \alpha < 0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} < e^0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} < 1$.

Επομένως $1 \in (x_1, x_2)$, αφού σε αυτό το διάστημα και μόνο σε αυτό η f' παίρνει αρνητικό πρόσημο.

Για κάθε $x \in (\alpha, x_2)$ έχουμε

$$x_1 < 1 < \alpha < x < x_2 \stackrel{f \downarrow_{(x_1, x_2)}}{\Leftrightarrow} f(1) > f(\alpha) > f(x)$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο διάστημα (α, x_2) .

2^{ος} τρόπος

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (α, x_2) , άρα

$$f((\alpha, x_2)) = (f(x_2), f(\alpha)) = (f(x_2), 2 - \alpha^2).$$

Ακόμη, $f(1) = 2e^{1-\alpha} - 1$.

Για να είναι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ αδύνατη στο (α, x_2) , αρκεί να δείξουμε ότι $f(1) \notin f((\alpha, x_2))$.

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$f(1) > f(\alpha) \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} - 1 > 2 - \alpha^2 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0, \quad \text{για } \alpha > 1.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2e^{1-x} + x^2 - 3$, με πεδίο ορισμού

$$D_h = [1, +\infty).$$

Η h είναι παραγωγίσιμη με

$$h'(x) = -2e^{1-x} + 2x, \quad x \in [1, +\infty).$$

$$h''(x) = 2e^{1-x} + 2 > 0, \quad \text{για κάθε } x \in [1, +\infty)$$

$$h' \nearrow [1, +\infty)$$

Άρα $x \geq 1 \Leftrightarrow h'(x) \geq h'(1) = 0$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$		○	+
$h(x)$			↗

Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ άρα,

$$\alpha > 1 \Leftrightarrow h(\alpha) > h(1) \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow f(1) > f(\alpha).$$

Συνεπώς, $f(1) \notin f((\alpha, x_2))$.

Άρα, η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2) .

Δ4. Αν $\alpha = 2$, έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[2,3]$.

Επίσης $f(2) = -2$ και $f'(2) = -2$.

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο $x_0 = 2$ είναι:

$$(\varepsilon): y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - (-2) = -2(x - 2) \Leftrightarrow y = -2x + 2.$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
Αφού η f είναι κυρτή στο $[2,3]$, σύμφωνα με γνωστό σχόλιο του σχολικού έχουμε:

$$f(x) \geq -2x + 2$$

για κάθε $x \in [2,3]$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$).

Επομένως,

$$f(x) \cdot \sqrt{x-2} \geq (-2x + 2) \cdot \sqrt{x-2}$$

για κάθε $x \in [2,3]$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$).

Άρα,

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2} dx > \int_2^3 (-2x + 2)\sqrt{x-2} dx \quad (1)$$

Έστω

$$I = \int_2^3 (-2x + 2)\sqrt{x-2} dx.$$

Θέτουμε $u = \sqrt{x-2}$ οπότε $x = u^2 + 2$, και επομένως $dx = 2u du$.

Επίσης, για $x_1 = 2$ έχουμε $u_1 = 0$, και για $x_2 = 3$ έχουμε $u_2 = 1$. Άρα,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (-2u^2 - 4 + 2) \cdot u \cdot 2u du = \int_0^1 (-2u^2 - 4 + 2) \cdot 2u^2 du \\ &= \int_0^1 (-4u^4 - 4u^2) du \\ &= \left[-\frac{4u^5}{5} - \frac{4u^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{32}{15}. \end{aligned}$$

Τελικά από την (1) έχουμε ότι:

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2} dx > -\frac{32}{15}.$$

Δεύτερος τρόπος υπολογισμού του ολοκληρώματος

$$I = \int_2^3 (-2x + 2)\sqrt{x-2} dx.$$

Θέτουμε $u = x - 2 \Leftrightarrow x = u + 2$.

Επομένως, $dx = du$.

Επιπλέον, για $x_1 = 2$ έχουμε $u_1 = 0$ και για $x_2 = 3$ έχουμε $u_2 = 1$.

Άρα,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (-2u - 4 + 2)\sqrt{u} du = \int_0^1 (-2u - 2)\sqrt{u} du = \int_0^1 (-2u - 2) \cdot u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \int_0^1 \left(-2u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} \right) du = \left[-2 \cdot \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - 2 \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \left[-\frac{4}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{32}{15} \end{aligned}$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ