

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σελ 76 σχολικό βιβλίο **A2.** Σελ 104 σχολικό βιβλίο.

A3. (α) Ψευδής (β) σχόλιο σελ 136

A4. (α) Λάθος (β) Σωστό (γ) Σωστό (δ) Σωστό (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+2}{x-1}, \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^x$$

B1

$$\text{πρέπει } \begin{cases} x \in Dg \\ g(x) \in Df \end{cases} = \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0 \end{cases} \quad \text{άρα } D_{f \circ g} = (0, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$$

$$\text{άρα } (f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}, \quad D_{f \circ g} = (0, +\infty)$$

$$\mathbf{B2} \quad (f \circ g)'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - (e^x + 2)e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2}, \quad D_{(f \circ g)'} = (0, +\infty)$$

Προφανώς για κάθε $x > 0$ ισχύει $(f \circ g)'(x) < 0$

Άρα η $f \circ g$ είναι γν.φθίνουσα, άρα είναι 1-1.

Λύνουμε ως προς x την εξίσωση

$$y = (f \circ g)(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \Leftrightarrow ye^x - y = e^x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ye^x - e^x = y + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y - 1)e^x = y + 2 \Leftrightarrow \quad (\text{πρέπει } y - 1 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{y + 2}{y - 1} \Leftrightarrow \quad (\text{πρέπει } \frac{y + 2}{y - 1} > 0 \Leftrightarrow (y + 2)(y - 1) > 0 \Leftrightarrow y < -2 \text{ ή } y > 1)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y + 2}{y - 1}\right)$$

$$(\text{πρέπει } \ln\left(\frac{y + 2}{y - 1}\right) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y + 2}{y - 1}\right) > \ln 1 \Leftrightarrow \frac{y + 2}{y - 1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y + 2}{y - 1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{y - 1} > 0 \Leftrightarrow y - 1 > 0 \Leftrightarrow y > 1)$$

Άρα $(f \circ g)^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y + 2}{y - 1}\right), y > 1$. Τελικά $(f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x + 2}{x - 1}\right), D_{(f \circ g)^{-1}} = (1, +\infty)$

B3. $\varphi(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right), x > 1$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+2}{x-1}\right)' = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x-1-(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x+2)(x-1)} < 0 \text{ για κάθε } x > 1$$

άρα φ γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$

B4. 1ος τρόπος

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \stackrel{u=\frac{x+2}{x-1}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

(αφού $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+2) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$)

διότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x+2) = 3$ και

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$ και $x-1 > 0$ όταν $x \rightarrow 1^+$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \stackrel{u=\frac{x+2}{x-1}}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$$

(αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$)

2ος τρόπος

Η συνάρτηση $\varphi = (f \circ g)^{-1}$ έχει σύνολο τιμών το $D_{f \circ g}$ δηλαδή το $(0, +\infty)$

Αφού η συνάρτηση $\varphi = (f \circ g)^{-1}$ είναι συνεχής στο $D_{(f \circ g)^{-1}} = (1, +\infty)$ ως σύνθεση συνεχών

συναρτήσεων και γν. φθίνουσα τότε η συνάρτηση $\varphi = (f \circ g)^{-1}$ έχει συνολο τιμών το

$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x)\right)$. Επομένως $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x)\right) = (0, +\infty)$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = +\infty$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 . Έχουμε $f(0) = 1 - \ln \lambda$

f συνεχής στο $(-\infty, \frac{3\pi}{2})$ άρα και στο $x = 0$ οπότε

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad (*)$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x + \lambda \sigma\upsilon\nu x) = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1-x} - \ln \lambda \right) = 1 - \ln \lambda$$

από (*) προκύπτει $1 - \ln \lambda = \lambda \Leftrightarrow \lambda + \ln \lambda - 1 = 0 \quad (**)$

Θεωρούμε $K(\lambda) = \ln \lambda + \lambda - 1 \quad D_K = (0, +\infty)$

$$K'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + 1 > 0 \text{ για κάθε } \lambda > 0$$

άρα $K \uparrow$ στο $(0, +\infty)$ άρα $K \geq K(1) = 0$

Η σχέση (**) γράφεται $K(\lambda) = 0 \Leftrightarrow K(\lambda) = K(1) \stackrel{K \uparrow}{\Leftrightarrow} \lambda = 1$.

Γ2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - 1 + x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \in \mathbb{R} \text{ άρα } f \text{ παραγωγίσιμη στο } x = 0$$

με $f'(0) = 1$ άρα $\varepsilon\phi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$, όπου ω η γωνία που σχηματίζει η

εφαπτομένη της C_f με τον άξονα $x'x$.

Γ3.

$$\text{Για } x < 0 : f'(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} > 0 \text{ για κάθε } x < 0$$

Άρα δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία στο $(-\infty, 0)$

$$\text{Για } x \in \left(0, \frac{3\pi}{2} \right) f'(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$$

Λύνουμε την εξίσωση

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \Leftrightarrow (\eta\mu x \neq 0 \text{ γιατί αν } \eta\mu x = 0 \text{ τότε και } \sigma\upsilon\nu x = 0,$$

άτοπο)

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\phi x = \sigma\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Πρέπει $0 < \kappa\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \kappa + \frac{1}{4} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < \kappa < \frac{5}{4} \stackrel{\kappa \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \kappa = 0 \text{ ή } \kappa = 1$

για $\kappa = 0$: $x = \frac{\pi}{4}$, για $\kappa = 1$: $x = \frac{5\pi}{4}$

Άρα κρίσιμα σημεία της f για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ είναι τα $x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{5\pi}{4}$

$f'(0) = 1$ άρα το $x = 0$ δεν είναι κρίσιμο σημείο.

Τελικά κρίσιμα σημεία της f είναι τα $x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{5\pi}{4}$.

Γ4. Από τα ερωτήματα Γ2, Γ3 έχουμε $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ για κάθε $x \leq 0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $M(a, f(a))$ έχει εξίσωση (ε): $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Η (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $B(x_B, 0)$ άρα $0 - f(a) = f'(a)(x_B - a)$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{1-a} = \frac{1}{(1-a)^2}(x_B - a)$$

$$\Leftrightarrow a - 1 = x_B - a \Leftrightarrow x_B = 2a - 1$$

Άρα $B(2a - 1, 0)$ $a \leq 0$

$$X_B(t) = 2a(t) - 1 \text{ όπου } t \geq 0$$

$$X'_B(t) = 2a'(t) = -2 \frac{a(t)}{3} \text{ όπου } t \geq 0$$

$$\text{για } t = t_0 \text{ } X'_B(t_0) = -\frac{2}{3}a(t_0) = -\frac{2}{3}(-1) = \frac{2}{3} .$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $D_f = \mathbb{R}$. $f'(x) = e^x + 2x - e$, $D_{f'} = \mathbb{R}$. $f''(x) = e^x + 2$, $D_{f''} = \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ προφανώς ισχύει $f''(x) > 0$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Επιπλέον, η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, και

- $f'(0) = 1 - e < 0$,
- $f'(1) = 2 > 0$.

Άρα, $f'(0) \cdot f'(1) < 0$. Από Θεώρημα Bolzano, υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (0,1)$

για την εξίσωση $f'(x) = 0$. Η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο \mathbb{R} αφού η f' είναι γν. αύξουσα.

Τότε:

- για κάθε $x < x_0$, έχουμε:

$$x < x_0 \xleftrightarrow{f' \text{ γν.αύξουσα}} f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0.$$

- για κάθε $x > x_0$, έχουμε:

$$x > x_0 \xleftrightarrow{f' \text{ γν.αύξουσα}} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0.$$

Άρα, για την f έχουμε:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	↘		↗

Συνεπώς, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Ακόμη,

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$$

και

$$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - e \cdot x_0 - 1 = e - 2x_0 + x_0^2 - e \cdot x_0 - 1 = x_0^2 - (e + 2)x_0 + e - 1.$$

Δ2. 1ος τρόπος

Το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} \cdot \left(1 + (f(x) - f(x_0)) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right) \right]$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$, έχουμε:

$$\left| (f(x) - f(x_0)) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right| \leq |f(x) - f(x_0)|.$$

Άρα,

$$-|f(x) - f(x_0)| \leq (f(x) - f(x_0)) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \leq |f(x) - f(x_0)|.$$

Αφού η f είναι συνεχής στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (-|f(x) - f(x_0)|) = -|f(x_0) - f(x_0)| = 0.$$

Επομένως, από Κριτήριο Παρεμβολής,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [(f(x) - f(x_0)) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right)] = 0.$$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στο x_0 .

Άρα, $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = x_0$.

Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$ ισχύει ότι $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$. Εφόσον,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \quad \text{και} \quad f(x) - f(x_0) > 0 \quad \text{για κάθε } x \neq x_0,$$

συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty.$$

Αφού

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + (f(x) - f(x_0)) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \right) = 1 + 0 = 1,$$

έχουμε ότι το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} \cdot \left(1 + (f(x) - f(x_0)) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \right) \right] = +\infty.$$

2ος τρόπος

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στο x_0 .

Άρα, $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = x_0$.

Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$ ισχύει ότι $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$.

$$\text{Έχουμε για κάθε } x \neq x_0: \quad \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \geq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1$$

Εφόσον,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \quad \text{και} \quad f(x) - f(x_0) > 0 \quad \text{για κάθε } x \neq x_0,$$

συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty.$$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \right) = +\infty$$

Άρα απο γνωστή ιδιότητα $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right) = +\infty$

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = f(x) + x - x_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Η φ είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ (ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων).
- $\varphi(1) = f(1) + 1 - x_0 = 1 - x_0 > 0$.
- $\varphi(x_0) = f(x_0) + x_0 - x_0 = f(x_0)$. Έχουμε $x_0 < 1$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, 1]$. Άρα, $f(x_0) < f(1) \Leftrightarrow f(x_0) < 0$. Επομένως, $\varphi(x_0) = f(x_0) < 0$.

Συνεπώς, $\varphi(1) \cdot \varphi(x_0) < 0$.

Από το Θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\rho \in (x_0, 1)$.

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη με $\varphi'(x) = f'(x) + 1$. Για κάθε $x > x_0$ είναι $f'(x) > f'(x_0) = 0$ (διότι η f' είναι γνησίως αύξουσα). Άρα, $f'(x) + 1 > 0$ για κάθε $x > x_0$. Συνεπώς, $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, 1)$. Άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0, 1)$,

άρα για την εξίσωση $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + x = x_0$ η παραπάνω ρίζα ρ είναι μοναδική στο $(x_0, 1)$.

Δ4. Έχουμε ότι ρ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) + x = x_0$ στο διάστημα $(x_0, 1)$.

Άρα, $\rho \in (x_0, 1)$ και $f(\rho) + \rho = x_0 \Leftrightarrow f(\rho) = x_0 - \rho$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[x_0, \rho]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, ρ) . Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $\xi \in (x_0, \rho)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho}.$$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , οπότε έχουμε:

$$x_0 < \xi < \rho < \kappa \Rightarrow f'(\xi) < f'(\kappa) \Rightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa) \stackrel{x_0 - \rho < 0}{\Rightarrow} f(x_0) - f(\rho) > (x_0 - \rho)f'(\kappa) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0) - f(\rho) > f(\rho)f'(\kappa) \Rightarrow f(x_0) > f(\rho) + f(\rho)f'(\kappa) \Rightarrow f(x_0) > f(\rho)(1 + f'(\kappa))$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ