

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α.

A1. Απόδειξη σελ.111, σχολικό βιβλίο.

A2. Ορισμός σελ.104, σχολικό βιβλίο.

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 74.

A4. (α) Ψευδής. (β) Παράδειγμα σελ. 61 σχολικό βιβλίο, $f(x) = \frac{1}{x}$ και $x_0 = 0$.

A5. (α) Σωστό. (β) Σωστό. (γ) Λάθος.

ΘΕΜΑ Β.

B1. Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$, $x \neq 3$.

Για $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{3\}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{3x_1 + 1}{x_1 - 3} = \frac{3x_2 + 1}{x_2 - 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3x_1 + 1) \cdot (x_2 - 3) = (3x_2 + 1) \cdot (x_1 - 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x_1x_2 - 9x_1 + x_2 - 3 = 3x_1x_2 - 9x_2 + x_1 - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9x_1 + x_2 = -9x_2 + x_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10x_1 = -10x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι 1 – 1 και επομένως, αντιστρέφεται.

B2. Λύνουμε ως προς x την εξίσωση

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{3x+1}{x-3} \Leftrightarrow yx - 3y = 3x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow yx - 3x = 3y + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-3)x = 3y + 1 \Leftrightarrow \quad (\text{πρέπει } y-3 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 3)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3y+1}{y-3}$$

(πρέπει $\frac{3y+1}{y-3} \neq 3$. Έχουμε $\frac{3y+1}{y-3} = 3 \Leftrightarrow 3y+1 = 3y-9 \Leftrightarrow 0y = -10$ (αδύνατη εξίσωση)

Άρα $\frac{3y+1}{y-3} \neq 3$ ισχύει για κάθε $y \neq 3$)

Άρα, $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3}$, με $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{3\}$.

Επομένως, $D_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{3\}$ και $f(x) = f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

Άρα, οι f, f^{-1} είναι ίσες.

B3. Το πεδίο ορισμού της $f \circ f$ είναι:

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_f\} = \{x \neq 3 : f(x) \neq 3\} = \left\{x \neq 3 : \frac{3x+1}{x-3} \neq 3\right\}.$$

Όπως δείξαμε στο πρώτο ερώτημα, ισχύει $\frac{3x+1}{x-3} \neq 3$ για κάθε $x \neq 3$. Άρα, $D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{3\}$.

Επίσης, έχουμε:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{3 \cdot \frac{3x+1}{x-3} + 1}{\frac{3x+1}{x-3} - 3} = \frac{9x+3+x-3}{3x+1-3x+9} = \frac{10x}{10} = x.$$

Άρα, ισχύει $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

B4. Ψάχνουμε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left(\frac{3x+1}{x-3} \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right).$$

Έχουμε για κάθε $x \neq -\frac{1}{3}, 3$:

$$\left| f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| = |f(x)| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \leq |f(x)|,$$

και άρα

$$-|f(x)| \leq f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \leq |f(x)|.$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{3x+1}{x-3} = \frac{0}{-\frac{10}{3}} = 0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} |f(x)| = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} (-|f(x)|) = 0.$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής, προκύπτει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right) = 0.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 . Το ύψος που φέρουμε από την κορυφή Α είναι και διάμεσος , άρα είναι και μεσοκάθετος στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, επομένως θα διέρχεται και από το κέντρο Ο .

Επομένως το ΑΜ είναι και διάμεσος και ύψος.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΜ: $\eta\mu\theta = \frac{BM}{OB} \Leftrightarrow BM = \eta\mu\theta$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{OM}{OB} \Leftrightarrow OM = \sigma\upsilon\nu\theta$$

Άρα $B\Gamma = 2BM = 2\eta\mu\theta$ και $AM = AO + OM = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta$

Άρα $E = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot AM = \eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta), \theta \in (0, \pi)$

Τελικά $E(\theta) = \eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta), \theta \in (0, \pi)$

Γ2 . $E'(\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta) + \eta\mu\theta(-\eta\mu\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta = \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - 1 + \sigma\upsilon\nu^2\theta =$
 $= 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 2(\sigma\upsilon\nu\theta + 1) \left(\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{2} \right) \quad \theta \in (0, \pi)$

Λύνουμε : $E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = -1$ αδύνατο στο $(0, \pi)$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$$E'(\theta) > 0 \Leftrightarrow 2(\sigma\upsilon\nu\theta + 1) \left(\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{2} \right) > 0 \quad \theta \in (0, \pi) \quad -1 < \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\theta \in (0, \pi) \quad -1 < \sigma\upsilon\nu\theta \quad \sigma\upsilon\nu\theta > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta > \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \quad \downarrow \quad \Leftrightarrow \theta < \frac{\pi}{3}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$+\infty$
$E'(\theta)$			+	-	
$E(\theta)$			↗	↘	

Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $\theta = \frac{\pi}{3}$

Γ3 .

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} E(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} ((1 + \sigma\eta\theta)\eta\mu\theta) = 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} E(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \pi} ((1 + \sigma\eta\theta)\eta\mu\theta) = 0$$

$$A_1 = E \left(\left(0, \frac{\pi}{3}\right] \right) = \left(\lim_{\theta \rightarrow 0} E(\theta), E \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4} \right]$$

$$A_2 = E \left(\left(\frac{\pi}{3}, \pi \right) \right) = \left(\lim_{\theta \rightarrow \pi} E(\theta), \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} E(\theta) \right) = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$\frac{3}{4} \in A_1 \text{ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα } \theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right] : E(\theta_1) = \frac{3}{4}$$

που είναι μοναδικό στο $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$ αφού $E \uparrow \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$

$$\frac{3}{4} \in A_2 \text{ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα } \theta_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right) : E(\theta_2) = \frac{3}{4}$$

που είναι μοναδικό στο $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ αφού $E \downarrow \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$

Γ4 . Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την συνάρτηση E στα $\left[\theta_1, \frac{\pi}{3}\right], \left[\frac{\pi}{3}, \theta_2\right]$

E συνεχής στα $\left[\theta_1, \frac{\pi}{3}\right], \left[\frac{\pi}{3}, \theta_2\right]$ ως γινόμενο και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

E παραγωγίσιμη στα $\left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$ ως γινόμενο και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων

Υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right), \xi_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$ ώστε :

$$E'(\xi_1) = \frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{\pi}{3} - \theta_1}$$

$$E'(\xi_2) = \frac{E(\theta_2) - E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Άρα } \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \cdot E'(\xi_1) + \left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right) \cdot E'(\xi_2) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \cdot \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} + \left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} = 0$$

$$\text{Άρα } \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \cdot E'(\xi_1) = \left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right) \cdot E'(\xi_2).$$

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. $f(x) = x \cdot \ln x - \ln(\lambda x)$, $x \in (0, +\infty)$, $\lambda \in (0, +\infty)$.

$$f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}, \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}, \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Παρατηρούμε ότι $f''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Άρα, η f' είναι γνησίως αύξουσα και άρα και $1 - 1$.

Λύνουμε :

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f'(1) \xleftrightarrow{f': 1-1} x = 1$, και
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \xleftrightarrow{f': \text{γν.αύξουσα}} x > 1$.

Άρα, για την f έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

Ο πίνακας παραπάνω έχει τον πρώτο στήλη (για $x < 0$) σκιασμένο. Η στήλη $x=0$ είναι διακεκομμένη. Η στήλη $x=1$ έχει ένα οριζόντιο κύκλο. Η στήλη $x > 1$ έχει δύο βέλη που δείχνουν προς τα πάνω και δεξιά.

Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = -\ln \lambda$.

Το σημείο ακρότατου της f είναι το $A(1, -\ln \lambda)$. Άρα, το σημείο αυτό ανήκει στην ευθεία $x = 1$, καθώς το λ μεταβάλλεται.

Δ2. Έχουμε για κάθε $x > 0$:

$$x^x \geq \lambda x \Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln(\lambda x) \Leftrightarrow x \ln x - \ln(\lambda x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0.$$

Εφόσον η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$, η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με:

$$f(1) \geq 0 \Leftrightarrow -\ln \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \ln \lambda \leq 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda \leq 1.$$

Άρα, η μεγαλύτερη τιμή του λ για την οποία ισχύει το ζητούμενο είναι $\lambda_{max} = 1$.

Δ3. Για $\lambda = 1$, έχουμε: $f(x) = x \cdot \ln x - \ln x = (x - 1) \cdot \ln x$.

Έστω $M(x_0, g(x_0))$ σημείο της γραφικής παράστασης της g . Η εφαπτομένη ε της C_g στο σημείο M έχει εξίσωση

$$\varepsilon: y - g(x_0) = g'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

όπου $g'(x) = (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = x^x \cdot (\ln x + 1)$, για κάθε $x > 0$.

Το $O(0,0)$ είναι σημείο της ε αν και μόνο αν:

$$-g(x_0) = g'(x_0) \cdot (-x_0) \Leftrightarrow g(x_0) = x_0 \cdot g'(x_0) \Leftrightarrow x_0^{x_0} = x_0 \cdot x_0^{x_0} \cdot (\ln x_0 + 1)$$

$$\stackrel{x_0^{x_0} \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 = x_0 \cdot (\ln x_0 + 1) \stackrel{x_0 \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x_0} = \ln x_0 + 1$$

$$\Leftrightarrow \ln x_0 + 1 - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = f'(1) \stackrel{f': 1-1}{\Leftrightarrow} x_0 = 1.$$

Συνεπώς, υπάρχει ακριβώς μία εφαπτομένη της C_g που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι η εφαπτομένη στο σημείο $x_0 = 1$, με εξίσωση:

$$\varepsilon: y - g(1) = g'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = x.$$

Δ4. (i) Για $x > 0$, η συνάρτηση h είναι συνεχής, ως σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Για να δείξουμε ότι είναι συνεχής στο 0, υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x}.$$

Θέτουμε $u = x \cdot \ln x$. Τότε, από τον κανόνα De L' Hospital παίρνουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = e^0 = 1 = h(0).$$

Συνεπώς, η h είναι συνεχής στο 0.

Άρα η h είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $D_h = [0, +\infty)$.

(ii) Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$ για την εξίσωση:

$$x^{2020} \cdot \left(3 - 2 \cdot \int_1^2 g(t) dt \right) + (1-x) \cdot \int_0^1 h(1-t) dt = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$K(x) = x^{2020} \cdot \left(3 - 2 \cdot \int_1^2 g(t) dt \right) + (1-x) \cdot \int_0^1 h(1-t) dt, \quad \text{με } x \in \mathbb{R}.$$

- Η K είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως γινόμενο και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $K(0) = \int_0^1 h(1-t) dt$.
- $K(1) = 3 - 2 \int_1^2 g(t) dt$.

Προφανώς ισχύει ότι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in D_h = [0, +\infty)$.

Άρα $h(1-t) > 0$ για κάθε $t \in [0,1]$.

Άρα από γνωστή ιδιότητα ισχύει $\int_0^1 h(1-t) dt > 0$. Άρα $K(0) = \int_0^1 h(1-t) dt > 0$.

Η g είναι κυρτή στο διάστημα $[1,2]$ αφού για κάθε $x \in [1,2]$ ισχύει

$$g''(x) = x^x \cdot (\ln x + 1) \cdot (\ln x + 1) + x^x \cdot \frac{1}{x} = x^x \cdot (\ln x + 1)^2 + x^x \cdot \frac{1}{x} > 0$$

Άρα αφού η $y=x$ είναι εφαπτομένη, τότε από γνωστό

$$g(t) \geq t \text{ για κάθε } t > 0, \text{ με την ισότητα να ισχύει μόνο για } t = 1.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \int_1^2 g(t) dt > \int_1^2 t dt &\Leftrightarrow \int_1^2 g(t) dt > \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^2 \Leftrightarrow \int_1^2 g(t) dt > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 \int_1^2 g(t) dt > 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 > 3 - 2 \int_1^2 g(t) dt \Leftrightarrow 0 > K(1) \Leftrightarrow K(1) < 0. \end{aligned}$$

Τελικά, $K(0) \cdot K(1) < 0$. Από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $K(x_0) = 0$. Άρα, η ζητούμενη εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ