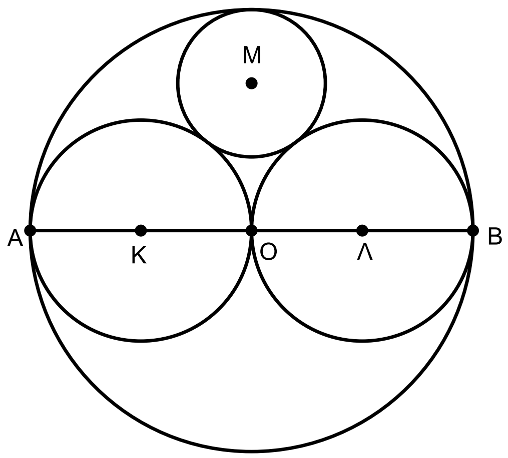
14500

ΘΕΜΑ 4

Δύο ίσοι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ο. Ένας τρίτος κύκλος (Μ,ρ) εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων Κ και Λ. Με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα 2R γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Στον παρακάτω πίνακα, στη στήλη Α είναι οι διάκεντροι ΚΜ, ΛΜ και ΟΜ των κύκλων με κέντρα Κ, Λ, Μ και Ο και στη στήλη Β τα μήκη των διακέντρων αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα αντίστοιχα της στήλης Β, γράφοντας στην κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίσεις. (Μονάδες 06)

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Διάκεντρος	Μήκος
1. ΚΛ	i. R
2. ΛΜ	ii. 2R
3. ΟΜ	iii. R+ρ
	iv. 2R-ρ

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

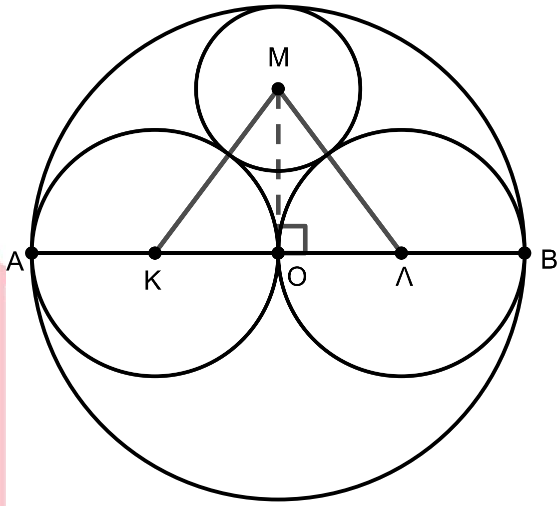
β)

i. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΚΛ είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα ΜΟ είναι το ύψος προς τη βάση του. (Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου κέντρου Μ ως συνάρτηση του R, όπου R η ακτίνα των κύκλων κέντρων Κ και Λ. (Μονάδες 13)

14500-Λύση

ΛΥΣΗ



α) 1 $\rightarrow$ ii., 2 $\rightarrow$ iii. , 3 $\rightarrow$ iv.

Δηλαδή ΚΛ=2R γιατί οι κύκλοι κέντρων Κ και Λ εφάπτονται εξωτερικά, οπότε η διάκεντρός τους ισούται με το άθροισμα των ακτινών τους. Ομοίως ΛΜ= R+ρ γιατί οι κύκλοι κέντρων Λ και Μ εφάπτονται εξωτερικά. Τέλος ΟΜ=2R-ρ γιατί ο κύκλος κέντρου Ο με τον κύκλο κέντρου Μ εφάπτονται εσωτερικά, οπότε η διάκεντρός τους θα ισούται με τη διαφορά των ακτινών τους.

β)

i. Οι κύκλοι (Κ,R) και (Μ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά, οπότε η διάκεντρός τους θα ισούται με το άθροισμα των ακτινών τους, δηλαδή ΚΜ = R+ρ = ΛΜ από το ερώτημα α). Άρα το τρίγωνο ΜΚΛ έχει δύο πλευρές ίσες, οπότε είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΚΛ. Το σημείο Ο είναι το μέσο του τμήματος ΚΛ γιατί ΟΚ=ΟΛ=R, επομένως το τμήμα ΜΟ είναι διάμεσος της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου, άρα είναι και ύψος, δηλαδή ΟΜ$\perp$ΚΛ.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΛ με $\widehat{O}$ = 90^o εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε: $OM^2 + O\Lambda^2 = \Lambda M^2$

$(2R-\rho)^2 + R^2 = (R+\rho)^2$

$4R^2 - 4R\rho + \rho^2 + R^2 = R^2 + 2R\rho + \rho^2$

$4R^2 = 6R\rho$

$2R = 3\rho$

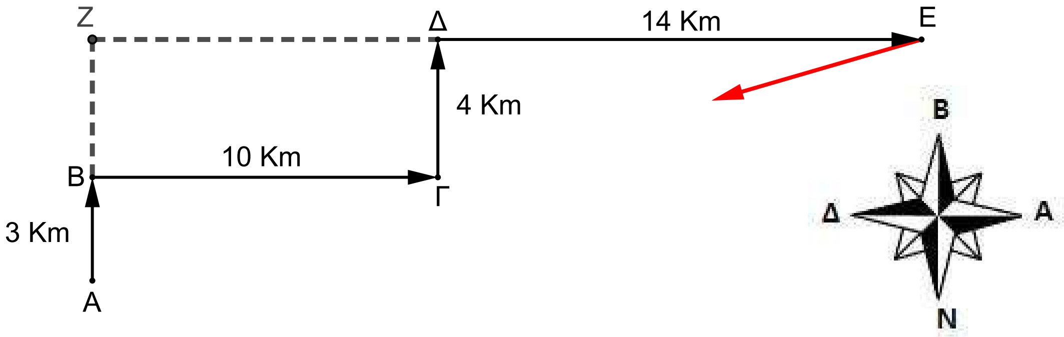
$\rho = \frac{2R}{3}$.

αλμπινιόνς
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14533

ΘΕΜΑ 4

Δύο κινητά βρίσκονται στο σημείο Α και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο Ε, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε. Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο Α κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Ζ και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο Ε. Όταν συναντιούνται στο σημείο Ε επιστρέφουν μαζί στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.



α)

i. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο Α στο σημείο Ε με τον τρόπο που κινήθηκε; (Μονάδες 05)

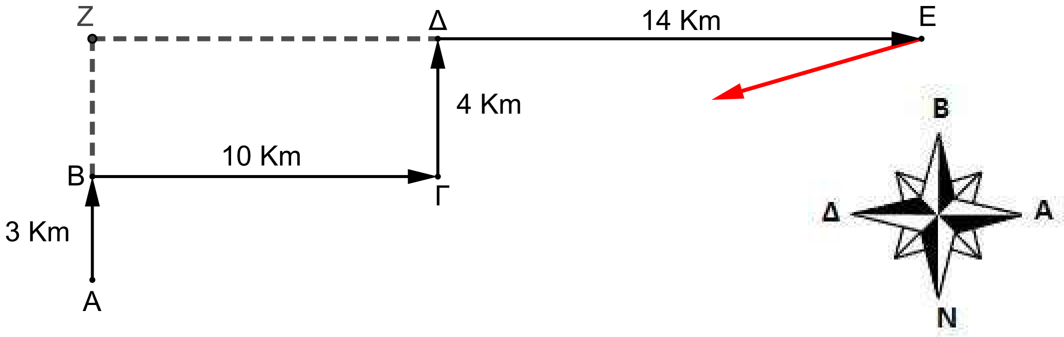
ii. Να βρείτε την απόσταση ΑΕ που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο Ε στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα. (Μονάδες 12)

β) Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο Ε στο σημείο Α, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 08)

αλμπινιόνης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14533-Λύση

ΛΥΣΗ



α)

i. Το πρώτο κινητό που έκανε τη διαδρομή ΑΒΓΔΕ διάνυσε συνολικά (3+10+4+14) km = 31 km.

Για το δεύτερο κινητό που έκανε τη διαδρομή ΑΖΕ έχουμε:

ΑΖ//ΓΔ γιατί η κίνηση από το σημείο Α στο σημείο Ζ είναι βόρεια όπως και η κίνηση από το σημείο Γ στο σημείο Δ. Επίσης, η κίνηση από το σημείο Ζ στο σημείο Ε είναι ανατολικά όπως και η κίνηση από το σημείο Β στο σημείο Γ, άρα ΖΕ//ΒΓ. Στο τετράπλευρο ΒΓΔΖ οι απέναντι πλευρές τους είναι παράλληλες, οπότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο και επειδή οι γωνίες του είναι ορθές είναι ορθογώνιο.

Άρα ΒΖ=ΓΔ=4 και ΖΔ=ΒΓ=10. Η συνολική διαδρομή του δεύτερου κινητού είναι (7+10+14) km =31km

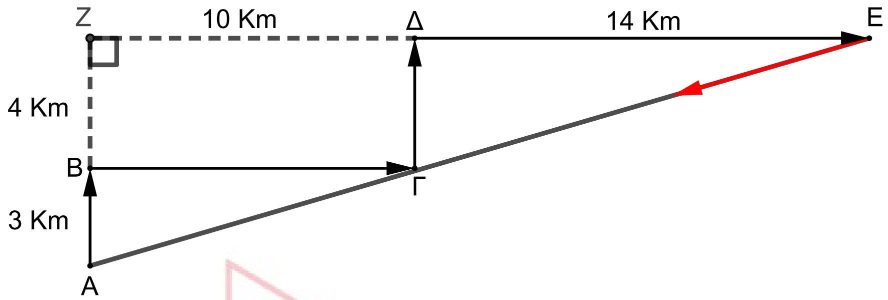
ii.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΕ με $\widehat{Z} = 90^o$ εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$EA^2 = AZ^2 + ZE^2$ ή $EA^2 = 7^2 + 24^2$, δηλαδή $EA^2 = 49 + 576$, οπότε $EA^2 = 625$ ή ΕΑ = 25 km.

β) Αν τα κινητά, κατά την επιστροφή τους από το σημείο Ε στο Α περάσουν από το σημείο Γ, τότε τα σημεία Α, Γ και Ε είναι συνευθειακά.

14533-Λύση



Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή έχουμε ότι το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

Το τρίγωνο ΓΔΕ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΕ και ΖΕ του ΑΖΕ και την παράλληλη ΓΔ προς την πλευρά του ΑΖ. Επομένως τα τρίγωνα ΓΔΕ και ΑΖΕ έχουν πλευρές ανάλογες, άρα $\frac{Γ\Delta}{AZ} = \frac{\Delta E}{ZE}$ ή $\frac{4}{7} = \frac{14}{24}$ ή $\frac{4}{7} = \frac{7}{12}$ ή $48 = 49$, που είναι άτοπο.

Επομένως, τα κινητά κατά την επιστροφή τους από το Ε δεν περνούν από το Γ.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14549

ΘΕΜΑ 2

Τα μήκη των πλευρών α, β, γ του τριγώνου ΑΒΓ είναι : $\alpha=7$, $\beta=3$ και $\gamma=5$.

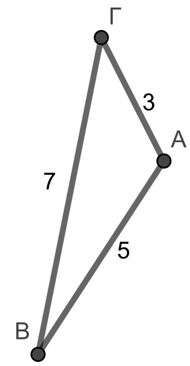
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ και να υπολογίσετε το μήκος της. (Μονάδες 13)

αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

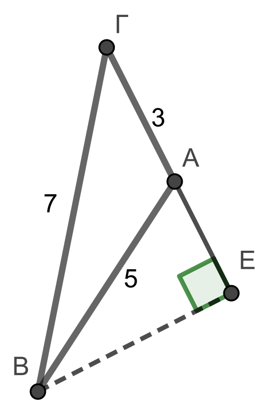
ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών ΑΒ = γ = 5, ΑΓ = β = 3 και ΒΓ = α =7. Συγκρίνουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του.



Παρατηρούμε ότι $\alpha^2 = 7^2 = 49$ και $\beta^2 + \gamma^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$. Δηλαδή ισχύει ότι $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με αμβλεία τη γωνία που είναι απέναντι από την πλευρά α , δηλαδή αμβλεία είναι η γωνία Α.

β)



Για να σχεδιάσουμε την προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ φέρουμε κάθετο τμήμα από την κορυφή Β προς το φορέα της πλευράς ΑΓ. Αν Ε είναι το σημείο τομής της καθέτου αυτής με το φορέα της ΑΓ, τότε η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ. Από τη γενίκευση του πυθαγορείου θεωρήματος για την πλευρά που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία έχουμε: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2 \cdot \beta \cdot AE$ ή $7^2 = 3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot AE$ ή $49 = 34 + 6 \cdot AE$ ή $49 - 34 = 6 \cdot AE$ ή $15 = 6 \cdot AE$ ή $AE = \frac{15}{6}$.

15979

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ=5 και $\widehat{A} = 120^0$. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΓ = $5\sqrt{3}$. (Μονάδες 13)

β) (ΑΒΓ) = $\frac{25\sqrt{3}}{4}$. (Μονάδες 12)

αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

15979-Λύση

ΛΥΣΗ

Έχουμε: ΑΒ = ΑΓ = 5 και $\widehat{A}$ = 120^0.

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, από το νόμο των συνημιτόνων είναι:

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 – 2·ΑΒ·ΑΓ·συνΑ = 5^2 + 5^2 – 2·5·5·συν120^0 = 25 + 25 – 50·(-\frac{1}{2}) = 75$,

οπότε ΒΓ = $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

β) Επίσης (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}·ΑΒ·ΑΓ·ημΑ = \frac{1}{2}·5·5·ημ120^0 = \frac{1}{2}·25·\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

16080

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5, ΒΓ= $\sqrt{41}$ και ΑΓ = 8.

α) Να σχεδιάσετε την προβολή ΑΔ, της ΑΒ στην ΑΓ και να υπολογίσετε το μήκος της.

(Μονάδες 13)

β) Αν ΑΔ = 3, να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΒΔ. (Μονάδες 12)

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

16080-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Φέρουμε το ύψος ΒΔ. Η προβολή της ΑΒ στην ΑΓ είναι η ΑΔ.

Εφαρμόζοντας το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα για την οξεία γωνία Α, έχουμε:

$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 - 2\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{A\Delta}$. Αντικαθιστούμε τα γνωστά τμήματα,

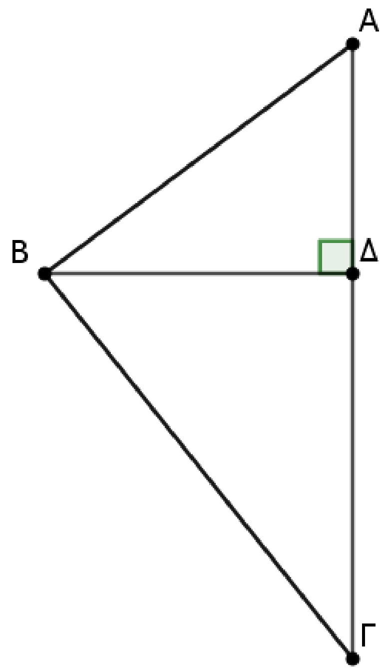
$\sqrt{41}^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 8\cdot \mathrm{A\Delta}$, άρα $16\mathrm{A\Delta} = 25 + 64 - 41 = 48$, άρα ΑΔ = 3

β) ΑΔ = 3.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{B\Delta}^2 + \mathrm{A\Delta}^2$. Αντικαθιστώντας έχουμε: $5^2 = \mathrm{B\Delta}^2 + 3^2$, άρα $\mathrm{B\Delta}^2 = 25 - 9 = 16$,

άρα ΒΔ = 4.



αλημάθεια
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

16097

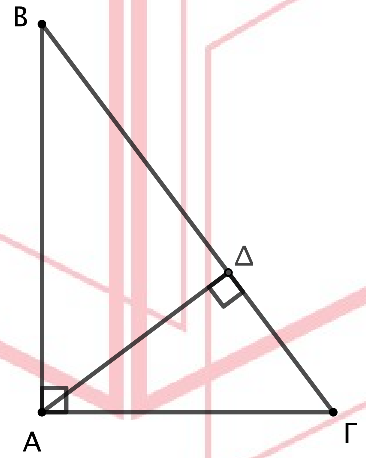
ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.

ii. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Στο σχήμα, η προβολή της πλευράς ΑΒ στην υποτείνουσα ΒΓ είναι το τμήμα ΓΔ.



iv. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

v. Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

(Μονάδες 15)

αλφανιόσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

16097-Λύση

ΛΥΣΗ

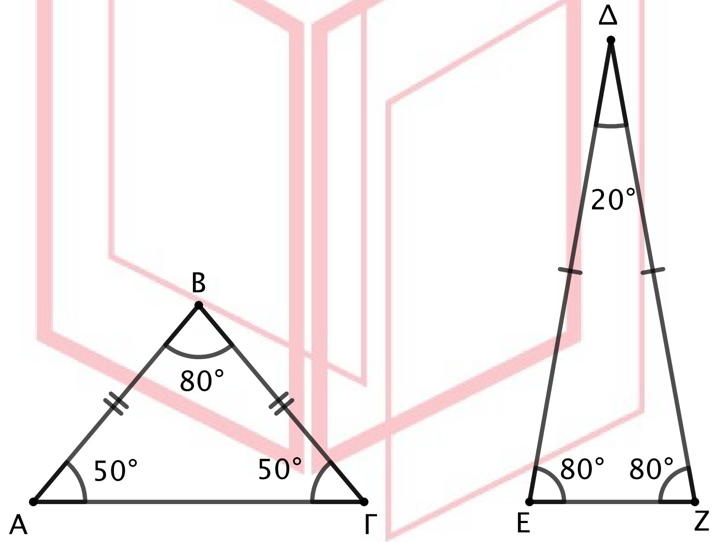
α)

i. Σωστό

Πόρισμα, σελίδα 15 σχολικό βιβλίο.

ii. Λάθος

Για παράδειγμα, τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΒΓ) και ΕΔΖ (ΕΔ = ΔΖ) του σχήματος έχουν $\hat{B} = \hat{E} = 80^o$. Ωστόσο, δεν είναι όμοια, αφού δεν έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.



iii. Λάθος

Η προβολή της πλευράς ΑΒ στην υποτείνουσα ΒΓ είναι το τμήμα ΒΔ.

iv. Λάθος

Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

v. Σωστό

Θεώρημα Ι, σελίδα 91 σχολικό βιβλίο.

β) §10.3, Θεώρημα Ι (απόδειξη), σελίδα 72 σχολικό βιβλίο (Σχήμα 7).

αλμπινιόσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

16101

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ΑΒ = 8$, $ΑΓ = 6$ και $ΒΓ = 11$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ΑΒ και να υπολογίσετε το μήκος της.

(Μονάδες 15)

αλιμπινίσης

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

16101-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με τα δεδομένα της εκφώνησης έχουμε:

$$ΒΓ^2 = 11^2 = 121$$

και

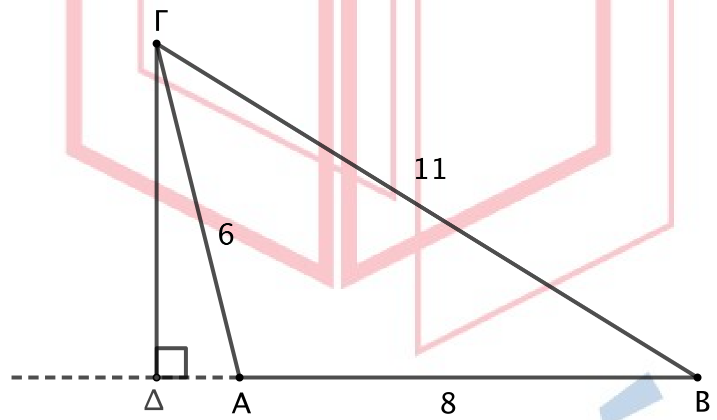
$$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

Αφού είναι

$$ΒΓ^2 > ΑΒ^2 + ΑΓ^2$$

συμπεραίνουμε ότι $\widehat{Α} > 1∟$, οπότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

β) Έστω Δ η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην ΑΒ. Τότε, η προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ΑΒ είναι το τμήμα ΑΔ, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Αφού η γωνία $\widehat{Α}$ είναι αμβλεία, σύμφωνα με το γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα θα είναι:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 + 2ΑΒ.ΑΔ$$

Οπότε:

$$121 = 64 + 36 + 16ΑΔ \text{ ή } 21 = 16ΑΔ$$

Άρα, το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΓ πάνω στην ΑΒ είναι:

$$ΑΔ = \frac{21}{16}$$

αλιμπινίσης ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

16133

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, BΓ, ΓΔ$ και $ΔE$ έχουν μήκη αντίστοιχα $12, 16, 8$ και 10, οι γωνίες $A\hat{B}Γ$ και $Δ\hat{Γ}E$ είναι ορθές και τα σημεία $A, Γ$ και E ανήκουν στην ίδια ευθεία.

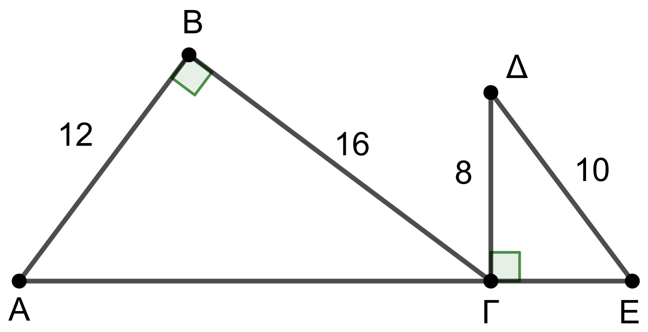
α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AE. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ABΓ$ και $EΓΔ$ είναι όμοια. (Μονάδες 7)

γ) Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών AB και $EΔ$ είναι το Z και ZH είναι το ύψος του τριγώνου ZAE από την κορυφή του Z. Να αποδείξετε ότι:

i. $EH = 13$, (Μονάδες 6)

ii. $ZH = \frac{52}{3}$. (Μονάδες 5)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

16133-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{B}=90°$), έχουμε

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 \quad \text{ή} \quad ΑΓ^2 = 12^2 + 16^2 \quad \text{ή} \quad ΑΓ^2 = 400 \quad \text{ή} \quad ΑΓ = 20.$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΓΔΕ$ ($\hat{Γ}=90°$), έχουμε

$$ΓΕ^2 = ΔΕ^2 - ΓΔ^2 \quad \text{ή} \quad ΓΕ^2 = 10^2 - 8^2 \quad \text{ή} \quad ΓΕ^2 = 36 \quad \text{ή} \quad ΓΕ = 6.$$

Επομένως το μήκος του τμήματος $ΑΕ$ είναι $ΑΕ = ΑΓ + ΓΕ = 20 + 6 = 26$.

β) Στο α) ερώτημα βρήκαμε ότι $ΑΓ = 20$ και $ΓΕ = 6$, άρα τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΕΓΔ$ έχουν:

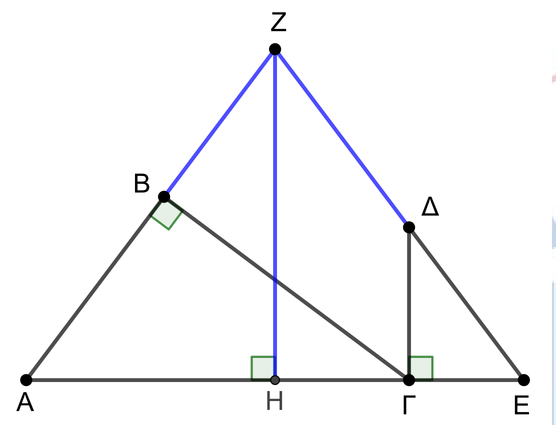
$$\frac{ΑΒ}{ΓΕ} = \frac{12}{6} = 2\,,$$

$$\frac{ΒΓ}{ΓΔ} = \frac{16}{8} = 2\,,$$

$$\frac{ΑΓ}{ΔΕ} = \frac{20}{10} = 2\,,$$

οπότε είναι όμοια, αφού έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.

γ)



i) Αφού τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΕΓΔ$ είναι όμοια, θα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, άρα $\hat{A} = \hat{E}$, οπότε το τρίγωνο $ΖΑΕ$ είναι ισοσκελές με βάση την $ΑΕ$. Επειδή το $ΖΗ$ είναι ύψος θα είναι και διάμεσος οπότε το σημείο $Η$ είναι το μέσο της $ΑΕ$. Επομένως θα είναι

$$ΗΕ = \frac{ΑΕ}{2} = \frac{26}{2} = 13.$$

ii) Είναι $ΔΓ \parallel ΖΗ$, ως κάθετες στην $ΑΕ$, οπότε από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο $ΓΔΕ$ θα έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου $ΗΖΕ$. Επομένως έχουμε

$$\frac{ΔΓ}{ΖΗ} = \frac{ΓΕ}{ΗΕ} \quad \text{ή} \quad \frac{8}{ΖΗ} = \frac{6}{13} \quad \text{ή} \quad ΖΗ = \frac{52}{3}\ .$$

αλμα... σης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

16135

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με υποτείνουσα $ΒΓ = 10$ και έστω ότι $Δ$ είναι η προβολή της κορυφής $Α$ στην $ΒΓ$.

α) Αν $ΔΒ = 2$ να υπολογίσετε:

i. το ύψος $ΑΔ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$, (Μονάδες 7)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$. (Μονάδες 5)

β) Υποθέστε ότι το σημείο $Α$ κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $ΒΓ$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι $(ΑΒΓ) = 5ΑΔ$.

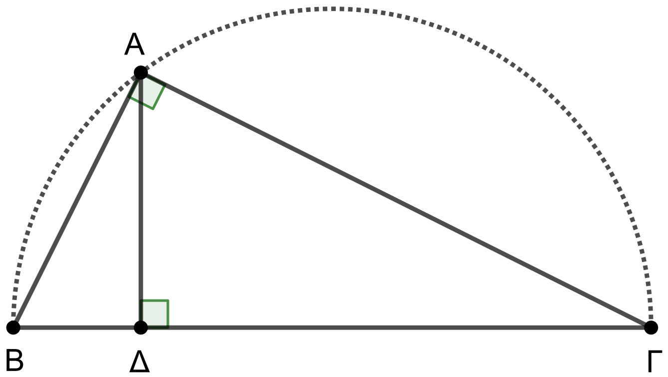
(Μονάδες 7)

ii. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για όλες τις θέσεις του $Α$ πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $ΒΓ$, το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ δεν υπερβαίνει το 25».

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)



αλ... σης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

16135-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Είναι $ΔB = 2$ οπότε $ΔΓ = BΓ - ΔB = 10 - 2 = 8$. Όμως σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα. Επομένως

$$AΔ^2 = ΔB \cdot ΔΓ \quad \text{ή} \quad AΔ^2 = 2 \cdot 8 \quad \text{ή} \quad AΔ^2 = 16 \quad \text{ή} \quad AΔ = 4\,.$$

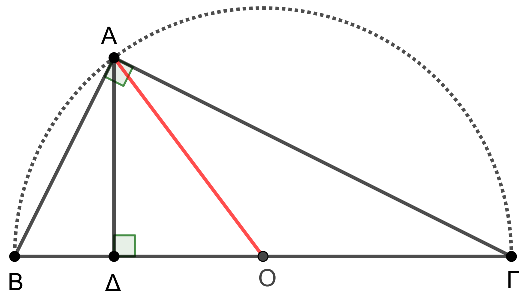
ii. Είναι $BΓ = 10$ και $AΔ = 4$ οπότε το εμβαδόν του τριγώνου $ABΓ$ είναι

$$(ABΓ) = \frac{BΓ \cdot AΔ}{2} \quad \text{ή} \quad (ABΓ) = \frac{10 \cdot 4}{2} \quad \text{ή} \quad (ABΓ) = 20.$$

β) i. Καθώς το σημείο A κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $BΓ$, η βάση του τριγώνου $BΓ$ παραμένει σταθερή και ίση με 10, ενώ το αντίστοιχο ύψος $AΔ$ μεταβάλλεται. Επομένως μεταβάλλεται και το εμβαδόν του τριγώνου $ABΓ$, το οποίο θα είναι

$$(ABΓ) = \frac{BΓ \cdot AΔ}{2} \quad \text{ή} \quad (ABΓ) = \frac{10 \cdot AΔ}{2} \quad \text{ή} \quad (ABΓ) = 5AΔ.$$

ii. Έστω O το κέντρο του κύκλου με διάμετρο τη $BΓ$.



- Το A ανήκει στον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα $\frac{BΓ}{2} = 5$. Επομένως $OA = 5$ (1).
- Το $Δ$ είναι η προβολή του A στη $BΓ$ και το O σημείο της $BΓ$. Επομένως $AΔ \leq AO$ (2).
- $(ABΓ) = 5AΔ$ (από το β(i))
  $\leq 5AO$ (από την (2))
  $= 25$ (από την (1)) .

Επομένως $(ABΓ) \leq 25$, οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής.

αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

16757

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^o$, $ΑΒ = 6$ και $ΑΓ = 3$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ, τέτοιο ώστε $ΑΔ = 4$. Φέρουμε την απόσταση ΒΕ της κορυφής Β από την ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ.

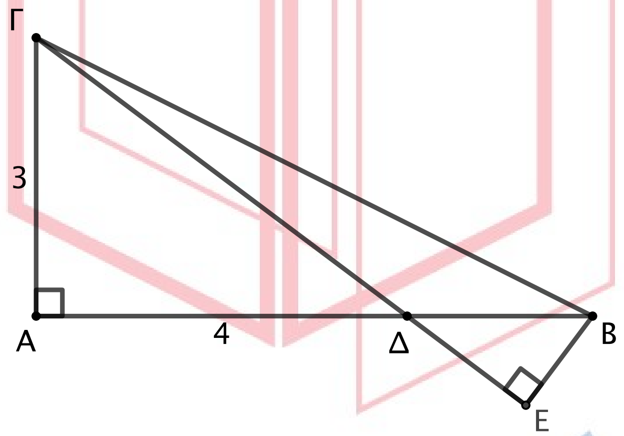
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ.

(Μονάδες 8)

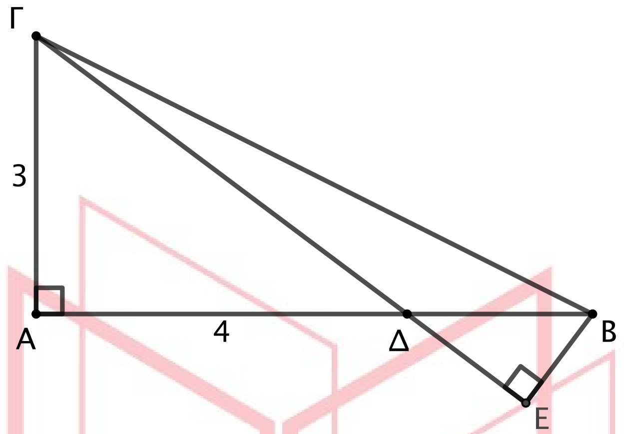


αλιμπινίσης

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

16757-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$ΔΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΔ^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

Άρα, $ΓΔ = 5$.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ έχουν $Α\hat{Δ}Γ = Ε\hat{Δ}Β$ (ως κατακορυφήν) και $\hat{Α} = \hat{Ε} = 90^{o}$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

γ) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{Α} = \hat{Ε}$	$Α\hat{Δ}Γ = Ε\hat{Δ}Β$	$Α\hat{Γ}Δ = Ε\hat{Β}Δ$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΓ	ΓΔ	ΑΓ	ΑΔ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΕΔΒ	ΔΒ	ΕΒ	ΕΔ

Έτσι έχουμε:

$$\frac{ΑΓ}{ΕΒ} = \frac{ΓΔ}{ΔΒ} \text{ ή } \frac{3}{ΕΒ} = \frac{5}{2} \text{ ή } ΕΒ = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{6}{5}$$

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

16804

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη του ΑΗ και ΒΘ.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή της πλευράς ΒΓ στην πλευρά ΑΓ είναι το τμήμα …….

ii. Η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΒΓ είναι το τμήμα ……

iii. Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς …….. στην πλευρά …….

iv. Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ……… στην πλευρά ……..

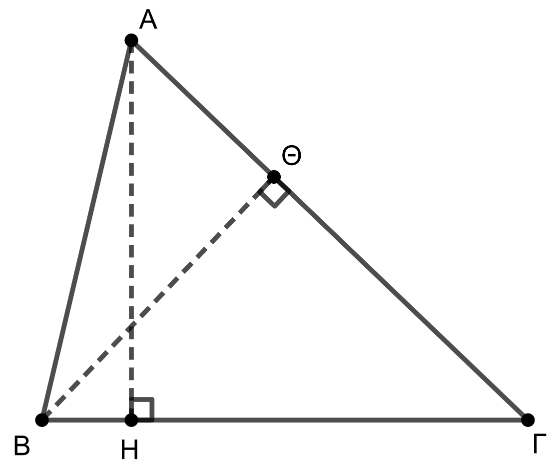
v. $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ... - 2\cdot ΒΓ \cdot ...$

vi. $ΒΓ^2 = ... + ΑΓ^2 - 2\cdot ... \cdot ΑΘ$

(Μονάδες 15)

β) Αν ΑΒ = 4, ΒΓ=5 και ΑΓ = 6, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΘ.

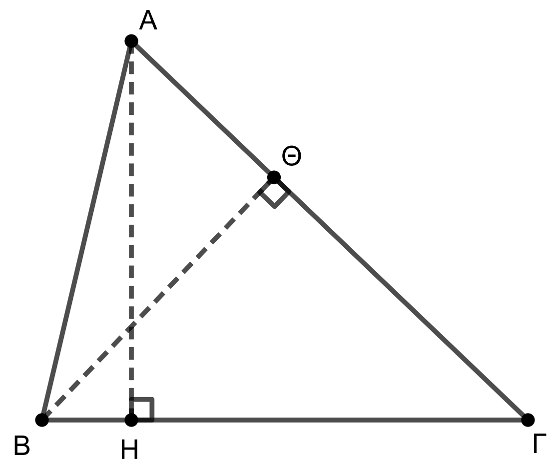
(Μονάδες 10)



αλμ…ισης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

16804-Λύση

ΛΥΣΗ



α)

i. Η προβολή της πλευράς ΒΓ στην πλευρά ΑΓ είναι το τμήμα **ΘΓ**

ii. Η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΒΓ είναι το τμήμα **ΒΗ**

iii. Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς **ΑΓ** στην πλευρά **ΒΓ**

iv. Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς **ΑΒ** στην πλευρά **ΑΓ**

v. $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + \mathbf{ΒΓ^2} - 2\cdot ΒΓ\cdot \mathbf{ΒΗ}$

vi. $ΒΓ^2 = \mathbf{ΑΒ^2} + ΑΓ^2 - 2\mathbf{ΑΓ}\cdot ΑΘ$

β) Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ΑΒ στην ΑΓ, οπότε εφαρμόζοντας Γενικευμένο Πυθαγόρειο για την πλευρά ΒΓ έχουμε:

i. $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ\cdot ΑΘ$ ή $25=16+36-2\cdot 6\cdot ΑΘ$ ή $12ΑΘ=27$, άρα $ΑΘ = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

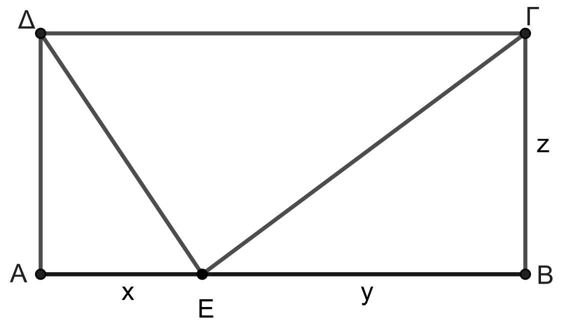
16805

ΘΕΜΑ 2

Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 72 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $x = 8$, $y = 16$ και $z = 12$. (Μονάδες 13)

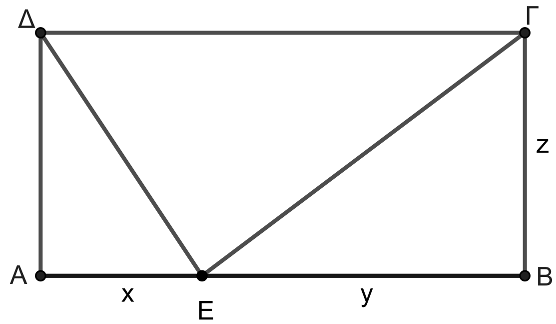
β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ. (Μονάδες 12)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

16805-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι 72. Οπότε 2 ΑΒ + 2 ΒΓ = 72 ή 2 (x + y) + 2 z = 72 ή x + y + z = 36. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα, άρα ισχύει $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{2+4+3} = \frac{36}{9} = 4$. Άρα x = 2·4 = 8, y = 4·4 = 16 και z = 3·4 = 12.

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΓΒΕ έχουμε $\Gamma E^2 = y^2 + z^2$ ή $\Gamma E^2 = 16^2 + 12^2$, οπότε $\Gamma E^2 = 400$ ή ΓΕ = 20. Αντίστοιχα στο τρίγωνο ΔΑΕ για την υποτείνουσα ΔΕ έχουμε $\Delta E^2 = AE^2 + \Delta A^2$ ή $\Delta E^2 = 8^2 + 12^2 = 208$, οπότε ΔΕ = $\sqrt{208} = \sqrt{16 \cdot 13} = 4\sqrt{13}$. Άρα η περίμετρος του τριγώνου ΔΕΓ ισούται με : ΔΕ + ΕΓ + ΔΓ = $4\sqrt{13} + 20 + (8 + 16) = 44 + 4\sqrt{13}$.

αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

16807

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις $AB = 24$, $B\Gamma = 12$ και σημείο Ε στην ευθεία ΑΒ.

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ όταν :

i. Το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ.

ii. Το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α του ορθογωνίου.

(Μονάδες 16)

β) Αφήνουμε το σημείο Ε να κινηθεί στην προέκταση του τμήματος ΑΒ προς το Β, απομακρυνόμενο από το σημείο Β.

i. Να εξετάσετε αν η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ αυξάνεται ή μειώνεται.

(Μονάδες 05)

ii. Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ συμβαίνει η ίδια μεταβολή με αυτή που απαντήσατε για την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ στο ερώτημα β)i.; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 04)

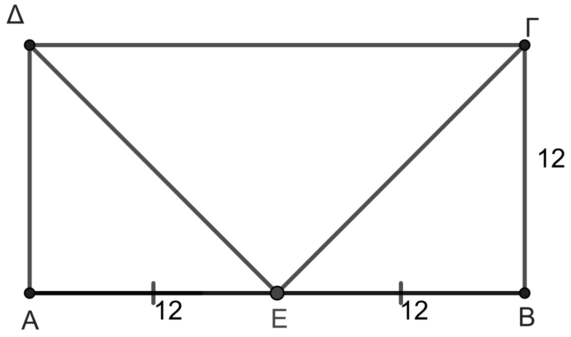
αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

16807-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i.

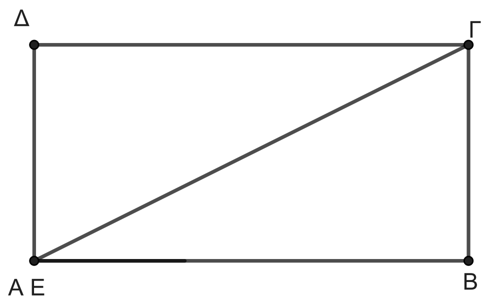


Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΕ είναι ορθογώνια με καθεμιά από τις κάθετες πλευρές τους 12. Οπότε είναι ίσα και ισχύει ΓΕ = ΔΕ. Από το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει $\Gamma\mathrm{E}^2 = \Delta E^2 = 12^2 + 12^2 = 2\cdot 12^2$. Οπότε ΓΕ = ΔΕ = $12\sqrt{2}$.

Η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ είναι ίση με $24 + 12\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 24 + 24\sqrt{2}$.

Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\frac{\beta\cdot\upsilon}{2}$, όπου η βάση έχει μήκος ΔΓ = ΑΒ = 24 και το ύψος είναι το κάθετο τμήμα από την κορυφή Ε προς την πλευρά ΔΓ που έχει μήκος όσο η απόσταση των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ, δηλαδή ίσο με 12. Άρα (ΓΕΔ) = $\frac{24\cdot 12}{2} = 12\cdot 12 = 144$.

ii.

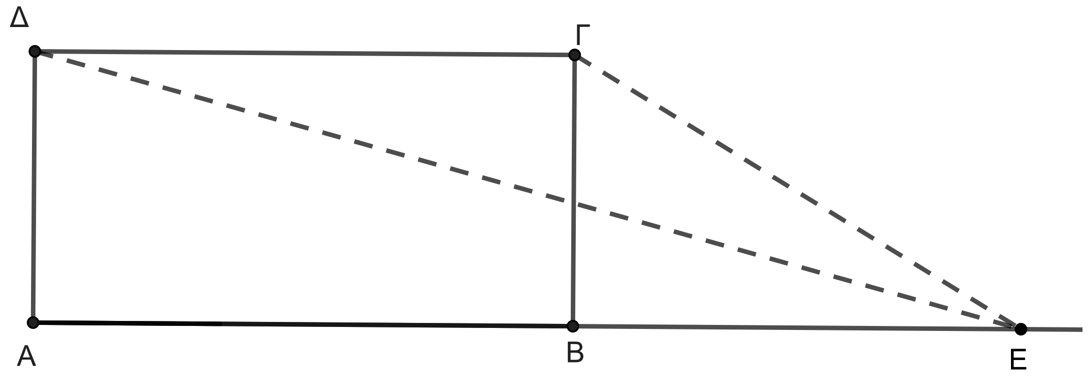


Αν το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α του ορθογωνίου τότε το τρίγωνο ΓΕΔ ταυτίζεται με το τρίγωνο ΓΑΔ. Οπότε η περίμετρος του τριγώνου είναι ίση με ΓΑ + ΑΔ + ΔΓ (1). Για την πλευρά ΓΑ που είναι υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε $\Gamma\mathrm{A}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{B}\Gamma^2$ ή $\Gamma\mathrm{A}^2 = 24^2 + 12^2 = 2^2\cdot 12^2 + 12^2 = 5\cdot 12^2$ ή ΓΑ = $12\sqrt{5}$. Οπότε η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ από τη σχέση (1) ισούται με $12\sqrt{5} + 12 + 24 = 36 + 12\sqrt{5}$.

Το εμβαδό του τριγώνου όταν το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α ισούται με το εμβαδό του τριγώνου ΓΑΔ που είναι ίσο με $\frac{\Delta\Gamma\cdot \mathrm{A}\Delta}{2} = \frac{24\cdot 12}{2} = 12\cdot 12 = 144$.

16807-Λύση

β)



i. Αν το σημείο Ε κινηθεί πάνω στη ευθεία ΑΒ που είναι παράλληλη στην πλευρά ΔΓ τότε η πλευρά ΔΓ παραμένει σταθερή αλλά οι δυο άλλες πλευρές του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλονται. Αν το σημείο Ε κινείται στην προέκταση της ΑΒ προς το Β, απομακρυνόμενο από το σημείο Β, τα πλάγια τμήματα ΓΕ και ΔΕ συνεχώς μεγαλώνουν, αφού το ίχνος τους Ε απέχει ολοένα και περισσότερο από τα ίχνη Β και Α των κάθετων τμημάτων ΓΒ και ΔΑ αντίστοιχα. Οπότε η περίμετρος η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλεται και συνεχώς αυξάνεται.

ii. Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ, θα πάρουμε ως βάση τη σταθερή πλευρά του ΔΓ, οπότε το ύψος του προς τη ΔΓ ισούται με την απόσταση των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που είναι σταθερή και ίση με 12. Το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ σε οποιαδήποτε θέση της κορυφής Ε πάνω στην ευθεία ΑΒ είναι ίσο με : $\frac{24 \cdot 12}{2} = 12 \cdot 12 = 144$.

Παρατηρούμε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι: (ΑΒΓΔ) = 24 · 12 = 288.

Άρα (ΓΕΔ) = 144 = $\frac{288}{2} = \frac{(\text{ΑΒΓΔ})}{2}$.

Συμπερασματικά αν το σημείο Ε κινείται στην προέκταση του τμήματος ΑΒ προς το Β απομακρυνόμενο από το σημείο Β, οι πλευρές ΓΕ και ΔΕ του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλονται, η περίμετρος μεταβάλλεται (αυξάνεται) όπως έχει προκύψει στο βi) αλλά το εμβαδό του τριγώνου μένει σταθερό και ίσο με το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου.

αλμπινιόσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

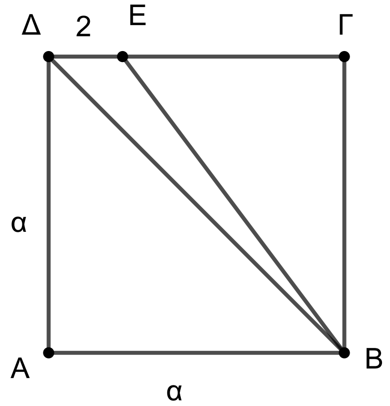
16817

ΘΕΜΑ 2

Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α, θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς του ΔΓ έτσι ώστε ΔΕ = 2. Αν γνωρίζουμε ότι: (ΒΕΔ) = $\frac{(\text{ΑΒΓΔ})}{8}$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου α είναι ίση με 8. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ. (Μονάδες 12)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

16817-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΕ ισούται με: (ΒΔΕ) = $\frac{1}{2}\cdot$ ΔΕ $\cdot$ΒΓ= $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\alpha=\alpha$.

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ ισούται με: (ΑΒΓΔ)= α^2.

Από την υπόθεση έχουμε: (ΒΕΔ) = $\frac{(ΑΒΓΔ)}{8}$, άρα α = $\frac{\alpha^2}{8}$ ή 8α = α^2 ή 8 = α.

Άρα η πλευρά του τετραγώνου είναι α = 8.

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ΒΓ = α = 8, ΔΕ = 2 οπότε η ΓΕ = ΓΔ – ΔΕ = 8 – 2 = 6.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ από πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $BE^2 = B\Gamma^2 + \Gamma E^2$ ή $BE^2 = 8^2 + 6^2$ ή $BE^2 = 64 + 36 = 100$ ή ΒΕ = 10.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

17342

ΘΕΜΑ 2

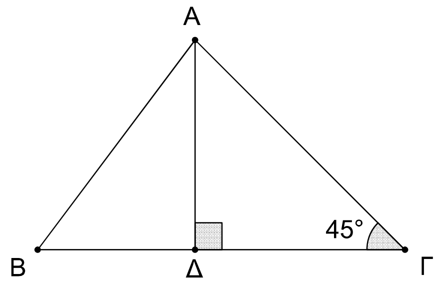
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = 7$, $\hat{Γ} = 45^o$ και ύψος $ΑΔ = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΓΔ = 4$. (Μονάδες 5)

ii. $ΑΓ = 4\sqrt{2}$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ. (Μονάδες 12)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

17342-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο με $\text{Α}\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$, γιατί το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ είναι κάθετο στη ΒΓ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ οι οξείες γωνίες του $\Gamma\hat{\text{Α}}\Delta$ και $\hat{\Gamma} = 45^o$ είναι συμπληρωματικές, άρα $\Gamma\hat{\text{Α}}\Delta + 45^o = 90^o$ ή $\Gamma\hat{\text{Α}}\Delta = 45^o$.

Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές, γιατί έχει δύο γωνίες ίσες, τις $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{\text{Α}}\Delta = 45^o$. Οπότε θα είναι $\text{Α}\Delta = \Gamma\Delta$ ως πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΑΓΔ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες του $\hat{\Gamma}, \Gamma\hat{\text{Α}}\Delta$. Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι $\text{Α}\Delta = 4$, άρα $\Gamma\Delta = 4$.

ii. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε ότι

$\text{Α}\Gamma^2 = \text{Α}\Delta^2 + \Gamma\Delta^2$.

Όμως $\text{Α}\Delta = \Gamma\Delta = 4$, άρα $\text{Α}\Gamma^2 = 4^2 + 4^2$ ή $\text{Α}\Gamma^2 = 32$ ή $\text{Α}\Gamma = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

β) Είναι $\text{Β}\Delta = \text{Β}\Gamma - \Gamma\Delta = 7 - 4 = 3$. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι $\text{ΑΒ}^2 = \text{Α}\Delta^2 + \text{Β}\Delta^2$.

Όμως $\text{Α}\Delta = 4$ και $\text{Β}\Delta = 3$, άρα $\text{ΑΒ}^2 = 4^2 + 3^2$ ή $\text{ΑΒ}^2 = 25$ ή $\text{ΑΒ} = 5$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

17343

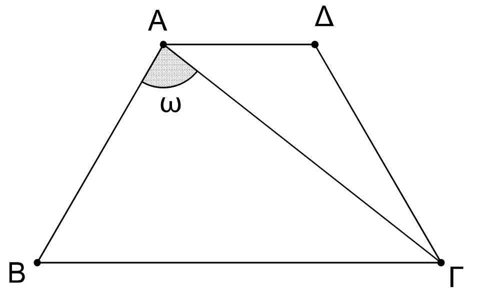
ΘΕΜΑ 2

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος είναι $ΑΔ = 3$, $ΑΒ = ΓΔ = 5$, $ΒΓ = 8$ και $\hat{Δ} = 120^o$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 7$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $συνω = \frac{1}{7}$, όπου ω είναι η γωνία $Β\hat{Α}Γ$. (Μονάδες 15)

Δίνεται ότι $συν120^o = -\frac{1}{2}$.



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

17343-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΓΔ ισχύει

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΓΔ^2 - 2ΑΔ \cdot ΓΔ \cdot συν\hat{Δ}.$$

Όμως $ΓΔ = 5$, $ΑΔ = 3$ και $\hat{Δ} = 120^o$, άρα $ΑΓ^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3συν120^o$ ή

$ΑΓ^2 = 25 + 9 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ ή $ΑΓ^2 = 49$ ή $ΑΓ = 7$.

Β) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot συνω.$$

Όμως $ΑΒ = 5$, $ΒΓ = 8$ και $ΑΓ = 7$, άρα

$$8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot συνω \quad ή \quad 64 = 74 - 70συνω \quad ή \quad 70συνω = 10$$

επομένως $συνω = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

17346

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = 6$, $ΒΓ = 4$ και $\hat{Β} = 60^o$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 2\sqrt{7}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

Δίνεται ότι $ημ60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $συν60^o = \frac{1}{2}$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

17346-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΒΓ \cdot συν\hat{B}.$$

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $ΑΒ = 6$, $ΒΓ = 4$ και $\hat{B} = 60^o$, άρα

$ΑΓ^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4συν60^o$ ή $ΑΓ^2 = 36 + 16 - 48 \cdot \frac{1}{2}$ ή $ΑΓ^2 = 28$ ή $ΑΓ = 2\sqrt{7}$.

β) Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ είναι η ΑΒ, αφού $ΑΒ = 6 = 2 \cdot 3 > 2\sqrt{7} = ΑΓ$, άρα η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου είναι η $\hat{Γ}$, γιατί βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά. Όμως $ΑΒ^2 = 6^2 = 36$ και $ΑΓ^2 + ΒΓ^2 = (2\sqrt{7})^2 + 4^2 = 28 + 16 = 44$, άρα $ΑΒ^2 < ΑΓ^2 + ΒΓ^2$. Επομένως $\hat{Γ} < 90^o$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

γ) Για τον υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΒΓ \cdot ημ\hat{B}.$$

Όμως $ΑΒ = 6$, $ΒΓ = 4$ και $\hat{B} = 60^o$, άρα $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot ημ60^o = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

17348

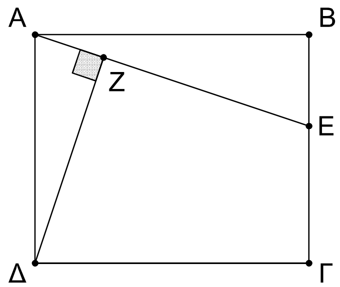
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $ΑΒ = 6$ και το Ε σημείο της πλευράς ΒΓ, ώστε $ΒΕ = 2$. Έστω ΔΖ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο Δ προς την ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = 2\sqrt{10}$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 9)

γ) Αν $ΔΖ = ΖΕ$, να υπολογίσετε το μήκος του ΑΔ. (Μονάδες 8)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

17348-Λύση

ΛΥΣΗ

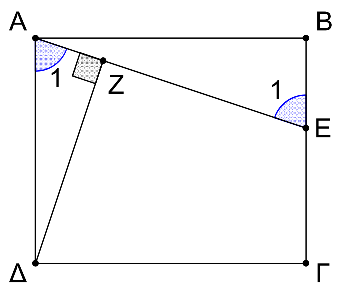
α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε ότι

$$\text{ΑΕ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΕ}^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\text{ΑΒ} = 6$, $\text{ΒΕ} = 2$, οπότε

$$\text{ΑΕ}^2 = 6^2 + 2^2 \text{ ή } \text{ΑΕ}^2 = 40 \text{ ή } \text{ΑΕ} = 2\sqrt{10}.$$

β)



Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ έχουν:

- $\widehat{\text{Α}}_1 = \widehat{\text{Ε}}_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ που τέμνονται από την ΑΕ.
- $\widehat{\text{Β}} = \widehat{\text{Ζ}} = 90^o$, γιατί από την υπόθεση έχουμε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και η ΔΖ κάθετη στην ΑΕ.

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία. Επομένως θα ισχύει

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΖ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΑΖ}} \ (1).$$

γ) Είναι $\text{ΑΒ} = 6$, $\text{ΒΕ} = 2$ και $\text{ΑΕ} = 2\sqrt{10}$, οπότε η (1) γίνεται

$$\frac{6}{\text{ΔΖ}} = \frac{2\sqrt{10}}{\text{ΑΔ}} = \frac{2}{\text{ΑΖ}} \ (2).$$

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $\text{ΔΖ} = \text{ΖΕ}$, έτσι η ισότητα $\frac{6}{\text{ΔΖ}} = \frac{2}{\text{ΑΖ}}$ γίνεται $\frac{6}{\text{ΖΕ}} = \frac{2}{\text{ΑΖ}}$ και με ιδιότητα των αναλογιών προκύπτει ότι

$$\frac{6}{\text{ΖΕ}} = \frac{2}{\text{ΑΖ}} = \frac{6+2}{\text{ΖΕ}+\text{ΑΖ}} = \frac{8}{\text{ΑΕ}} = \frac{8}{2\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \ (3).$$

Από τις ισότητες (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\frac{2\sqrt{10}}{\text{ΑΔ}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \text{ ή } 4\text{ΑΔ} = 2(\sqrt{10})^2 \text{ ή } \text{ΑΔ} = 5.$$

αλιμηνίσης ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

17349

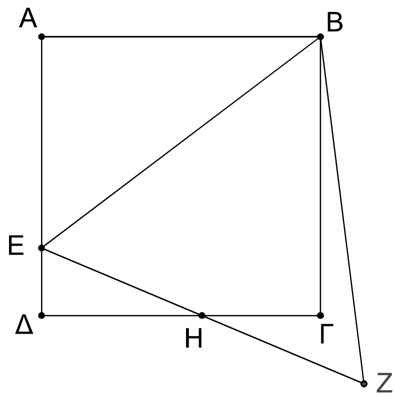
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3 και σημείο Ε της πλευράς ΑΔ, ώστε $ΑΕ = 4 - \sqrt{3}$. Στο ημιεπίπεδο που ορίζουν η ευθεία ΒΕ και το σημείο Γ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΒΕΖ. Οι ΓΔ και ΕΖ τέμνονται στο σημείο Η και $ΔΗ = \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΒΕ = 2\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε το Η είναι το μέσο της ΕΖ. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου ΒΕΖ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 9)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

17349-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε ότι

$$\text{ΒΕ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΕ}^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\text{ΑΒ} = 3$, $\text{ΑΕ} = 4 - \sqrt{3}$, οπότε

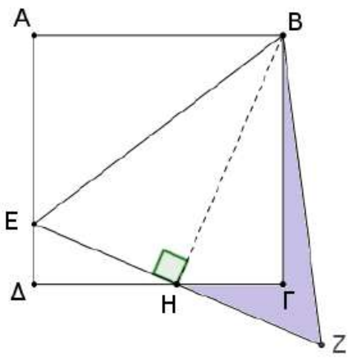
$$\text{ΒΕ}^2 = 3^2 + (4-\sqrt{3})^2 \text{ ή } \text{ΒΕ}^2 = 28 - 8\sqrt{3} = 4(7-2\sqrt{3}) \text{ ή } \text{ΒΕ} = 2\sqrt{7-2\sqrt{3}}.$$

β) Είναι $\text{ΔΕ} = \text{ΑΔ} - \text{ΑΕ} = 3 - \left(4-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - 1$. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΗ έχουμε ότι $\text{ΕΗ}^2 = \text{ΔΕ}^2 + \text{ΔΗ}^2$. Όμως $\text{ΔΗ} = \sqrt{3}$ από τα δεδομένα και $\text{ΔΕ} = \sqrt{3} - 1$, οπότε

$$\text{ΕΗ}^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3})^2 \text{ ή } \text{ΕΗ}^2 = 7 - 2\sqrt{3} \text{ ή } \text{ΕΗ} = \sqrt{7-2\sqrt{3}} \quad (1).$$

Από την ισότητα (1) και το ερώτημα α) προκύπτει ότι $\text{ΒΕ} = 2\text{ΕΗ}$. Από τα δεδομένα το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ισόπλευρο οπότε $\text{ΕΖ} = \text{ΒΕ}$. Επομένως $\text{ΕΖ} = 2\text{ΕΗ}$, δηλαδή το Η είναι το μέσο της ΕΖ.

γ)



Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου ισούται με τη διαφορά του εμβαδού του τριγώνου ΒΓΗ από το τρίγωνο ΒΖΗ, δηλαδή $(\text{ΒΖΗ}) - (\text{ΒΓΗ})$.

Το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α ισούται με $\dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$. Η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου ΒΕΖ ισούται με $2\sqrt{7-2\sqrt{3}}$, επομένως

$$(\text{ΒΕΖ}) = \frac{4(7-2\sqrt{3})\sqrt{3}}{4} \text{ ή } (\text{ΒΕΖ}) = 7\sqrt{3} - 6.$$

Το σημείο Η είναι το μέσο της πλευράς του ισόπλευρου τριγώνου ΒΕΖ, οπότε

$$(\text{ΒΖΗ}) = \frac{(\text{ΒΕΖ})}{2} = \frac{7\sqrt{3}-6}{2} \quad (2).$$

Το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου ΒΓΗ είναι $(\text{ΒΓΗ}) = \dfrac{\text{ΒΓ}\cdot\text{ΓΗ}}{2}$ με $\text{ΒΓ} = 3$ και $\text{ΓΗ} = \text{ΓΔ} - \text{ΔΗ} = 3 - \sqrt{3}$, οπότε

17349-Λύση

$$(\text{ΒΓΗ}) = \frac{3(3-\sqrt{3})}{2} = \frac{9-3\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

Από τις ισότητες (2) και (3) προκύπτει ότι

$$(\text{ΒΖΗ}) - (\text{ΒΓΗ}) = \frac{7\sqrt{3}-6}{2} - \frac{9-3\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}-15}{2}.$$

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

17354

ΘΕΜΑ 2

Στα παρακάτω τρίγωνο ΔΕΖ φέρουμε τα ύψη του ΔΚ και ΖΙ.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα …….

ii. Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα …….

iii. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς …….. στην πλευρά …….

iv. Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς ……… στην πλευρά ……..

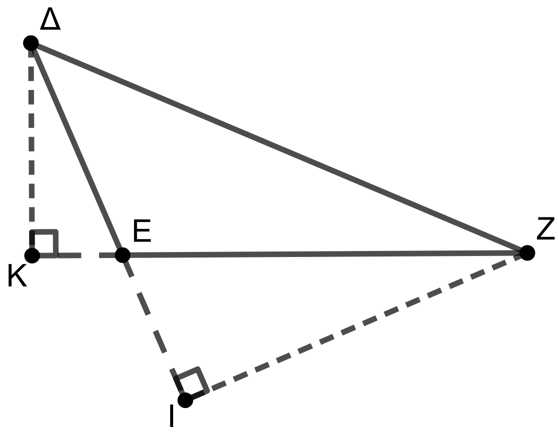
v. $ΔΖ^2 = ΔΕ^2 + ... + 2 \cdot ΕΖ \cdot ...$

vi. $ΕΖ^2 = ... + ΔΖ^2 - 2 \cdot ... \cdot ΔΙ$

(Μονάδες 15)

β) Αν ΔΕ = 2, ΕΖ = 4 και ΔΖ = 5, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΙ.

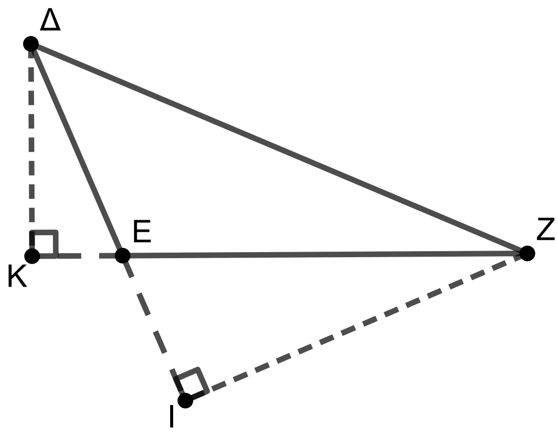
(Μονάδες 10)



αλ… …σης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

17354-Λύση

ΛΥΣΗ



α)

i. Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα **ΚΕ**
ii. Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα **ΚΖ**
iii. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς **ΔΖ** στην πλευρά **ΔΕ**
iv. Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς **ΕΖ** στην πλευρά **ΔΕ**
v. $ΔΖ^2 = ΔΕ^2 + \mathbf{ΕΖ^2} + 2 \cdot ΕΖ \cdot \mathbf{ΚΕ}$
vi. $ΕΖ^2 = \mathbf{ΔΕ^2} + ΔΖ^2 - 2 \cdot \mathbf{ΔΕ} \cdot ΔΙ$

β) Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΔΕ.

Η γωνία $Ε\widehat{Δ}Ζ$ είναι οξεία γιατί ανήκει στο ίδιο τρίγωνο με τη γωνία $Δ\hat{Ε}Ζ$, η οποία είναι αμβλεία, αφού τα ύψη ΖΙ και ΔΚ που αντιστοιχούν στις πλευρές της ΔΕ και ΕΖ αντίστοιχα, βρίσκονται εκτός του τριγώνου. Επομένως, εφαρμόζουμε το θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο ΔΕΖ για την πλευρά ΕΖ και έχουμε:

$ΕΖ^2 = ΔΕ^2 + ΔΖ^2 - 2 \cdot ΔΕ \cdot ΔΙ$ ή $16=4+25-2 \cdot 2 \cdot ΔΙ$ ή $4ΔΙ=13$ ή $ΔΙ = \frac{13}{4}$.

αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

17599

ΘΕΜΑ 4

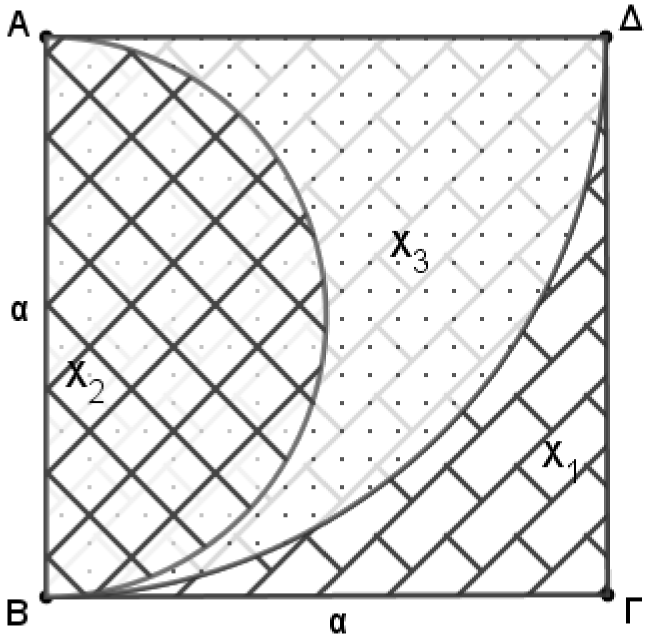
Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α του παρακάτω σχήματος, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο Α και ακτίνα α.

α) Αν X_1 είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκυκλίου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ισούται με: $(X_1) = \frac{\alpha^2}{4} \cdot (4-\pi)$ (Μονάδες 5)

β) Με διάμετρο ΑΒ κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν X_2 είναι το χωρίο του ημικυκλίου και X_3 το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων X_2 και X_3.

(Μονάδες 11)

γ) Ποιο από τα χωρία X_1 κι X_2 έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)



αλ... σης
ΦΡΟΝΤ... ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

17599-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του χωρίου $Χ_1$ θα υπολογιστεί, αν από το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΒ. Έχουμε: (ΑΒΓΔ) = α · α = α^2 και $(\mathrm{AB\Delta}) = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2 \cdot 90^o}{360^o} = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{4}$.

$(Χ_1) = (ΑΒΓΔ) - (\mathrm{AB\Delta}) = \alpha^2 - \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{4} = \dfrac{\alpha^2}{4} \cdot (4-\pi)$

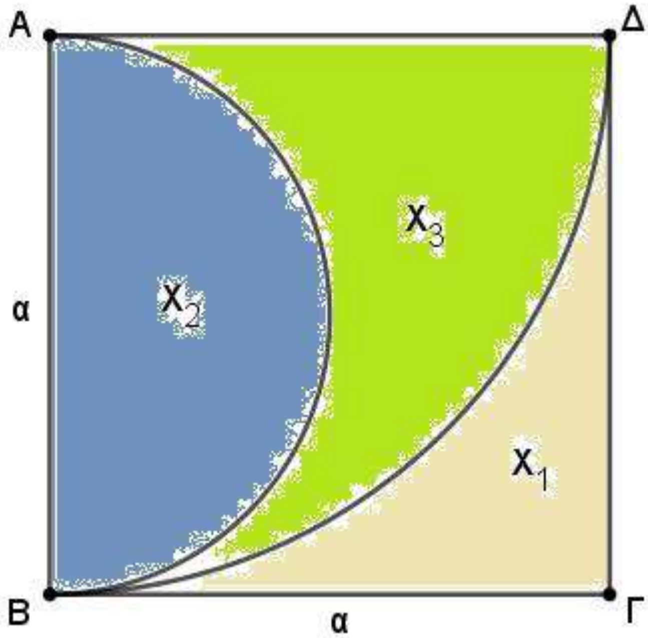
β) Το εμβαδόν $Χ_2$ του ημικυκλίου με διάμετρο ΑΒ ισούται με:

$(Χ_2) = \dfrac{\pi \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \cdot 180^o}{360^o} = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{8}$ Το εμβαδόν $Χ_3$ θα υπολογισθεί αν από το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου αφαιρέσουμε το $Χ_2$ και θα έχουμε:

$Χ_3 = (\mathrm{AB\Delta}) - Χ_2 = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{4} - \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{8} = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{8}$.

γ) $Χ_2 - Χ_1 = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{8} - \dfrac{\alpha^2}{4} \cdot (4-\pi) = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{8} - \dfrac{2 \cdot \alpha^2}{8} \cdot (4-\pi) = \dfrac{\alpha^2}{8} \cdot [\pi - 2(4-\pi)] =$

$\dfrac{\alpha^2}{8} \cdot (\pi - 8 + 2\,\pi) = \dfrac{\alpha^2}{8} \cdot (3\,\pi - 8) > 0$ που σημαίνει ότι ισχύει $Χ_2 > Χ_1$



17907

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Με πλευρές τις ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ, τα τετράγωνα ΑΒΗΖ, ΑΓΘΙ, ΒΓΡΔ. Έστω Ε, $Ε_1$, $Ε_2$, τα εμβαδά των τετραγώνων ΑΓΘΙ, ΑΒΗΖ, ΒΓΡΔ αντίστοιχα. Αν ισχύουν οι ισότητες $Ε_1 = 4Ε$, $Ε_2 = 5Ε$ τότε:

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α.

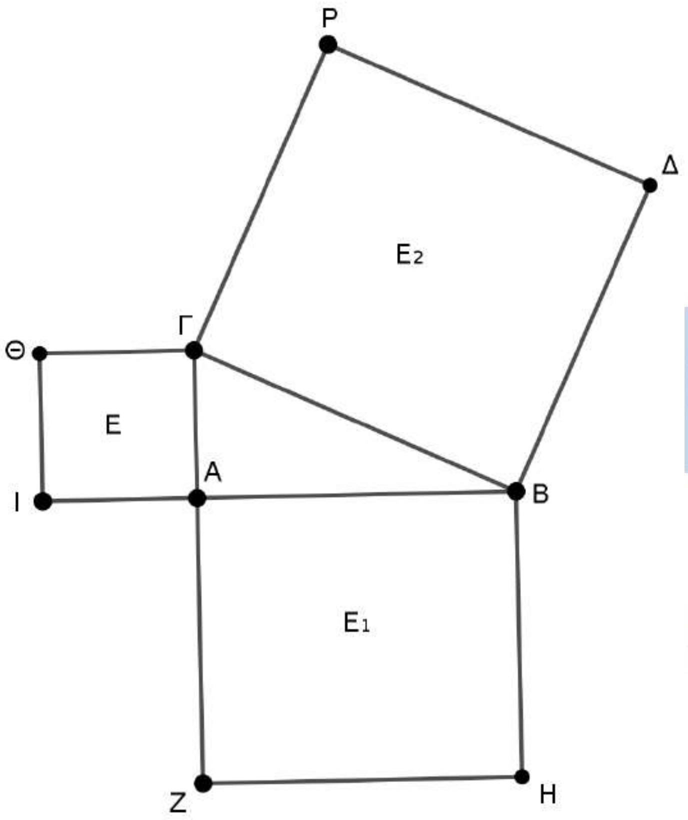
(Μονάδες 9)

β) να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΙΖ, ΒΗΔ, ΓΡΘ είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

γ) αν η ΑΓ=1 να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου ΖΗΔΡΘΙ.

(Μονάδες 7)



17907-Λύση

ΛΥΣΗ

Από τα δεδομένα έχουμε: (ΑΓΘΙ) = Ε, (ΑΒΗΖ) = $Ε_1$, (ΒΓΡΔ) = $Ε_2$ και ισχύουν:

$Ε_1$=4Ε (1), $Ε_2$=5Ε (2).

α) Θέτουμε ΒΓ = α, ΑΓ = β, ΑΒ = γ, τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, τότε:

$Ε = β^2$ (3), $Ε_1 = γ^2$ (4) και $Ε_2 = α^2$ (5).

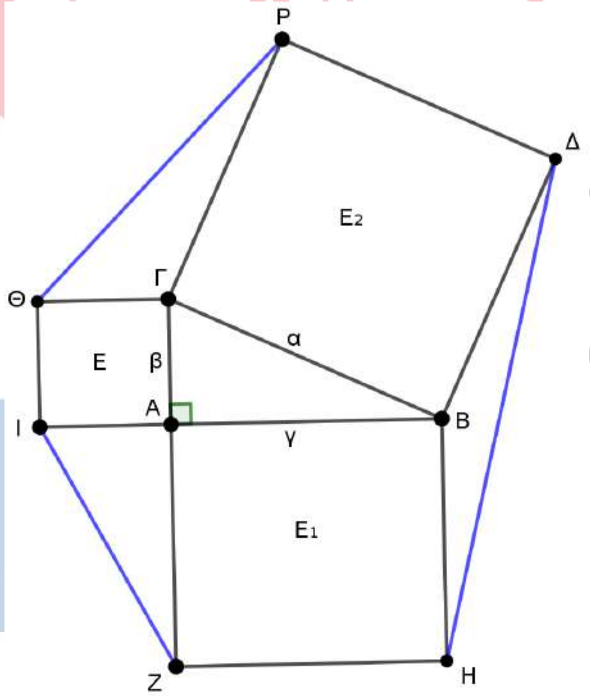
Οι (1), (2) λόγω των (3), (4), (5) γράφονται:

- $γ^2 = 4\,β^2$ ή $β^2 + γ^2 = β^2 + 4\,β^2$ ή $β^2 + γ^2 = 5β^2$
- $α^2 = 5\,β^2$

Οι τελευταίες δύο ισότητες έχουν τα δεύτερα μέλη τους ίσα, οπότε θα είναι και

$β^2 + γ^2 = α^2$, που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, με υποτείνουσα την πλευρά α, άρα ορθή γωνία την Α.

β)



Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές β και γ, άρα (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}$ β·γ.

Το τρίγωνο ΑΙΖ, είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές β, γ, άρα (ΑΙΖ) = $\frac{1}{2}$ β·γ.

Άρα (ΑΒΓ) =(ΑΙΖ).

Λόγω των τετραγώνων, για τις γωνίες με κορυφή το Β έχουμε:

$Η\hat{Β}Δ + Δ\hat{Β}Γ + Α\hat{Β}Γ + Α\hat{Β}Η = 360^0$ ή $Η\hat{Β}Δ + 90^o + Α\hat{Β}Γ + 90^o = 360^0$ ή $Η\hat{Β}Δ + Α\hat{Β}Γ = 180^0$.

17907-Λύση

Δηλαδή οι γωνίες ΗΒΔ και ΑΒΓ είναι παραπληρωματικές. Άρα ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΒΗΔ, ΑΒΓ θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις παραπληρωματικές γωνίες. Δηλαδή $\frac{(ΒΗΔ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΒΗ \cdot ΒΔ}{ΒΓ \cdot ΒΑ} = \frac{γ \cdot α}{α \cdot γ} = 1$, οπότε

$\frac{(ΒΗΔ)}{(ΑΒΓ)} = 1$, άρα (ΒΗΔ) = (ΑΒΓ).

Όμοια, για τις γωνίες με κορυφή το Γ έχουμε:

$Θ\hat{Γ}Ρ + Θ\hat{Γ}Α + Α\hat{Γ}Β + Β\hat{Γ}Ρ = 360^0$ ή $Θ\hat{Γ}Ρ + 90^o + Α\hat{Γ}Β + 90^o = 360^0$ ή $Θ\hat{Γ}Ρ + Α\hat{Γ}Β = 180^0$.

Δηλαδή οι γωνίες ΘΓΡ και ΑΓΒ είναι παραπληρωματικές. Άρα ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΓΡΘ, ΑΒΓ θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις παραπληρωματικές γωνίες. Δηλαδή $\frac{(ΓΡΘ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΓΡ \cdot ΓΘ}{ΓΑ \cdot ΓΒ} = \frac{α \cdot β}{β \cdot α} = 1$, οπότε

$\frac{(ΓΡΘ)}{(ΑΒΓ)} = 1$, άρα (ΓΡΘ) = (ΑΒΓ).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι: (ΑΒΓ) = (ΑΙΖ) = (ΒΗΔ) = (ΓΡΘ).

γ) Είναι ΑΓ = 1 ή β = 1, οπότε από τις ισότητες του ερωτήματος (α):

$α^2 = 5\,β^2$ και $γ^2 = 4\,β^2$, παίρνουμε: $α^2 = 5$ και $γ^2 = 4$, άρα $α = \sqrt{5}$ και γ =2.

Έτσι λόγω του ερωτήματος (β), είναι: (ΑΙΖ) = (ΒΗΔ) = (ΓΡΘ) = (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}\,β \cdot γ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$.

Επίσης $Ε = β^2$, $Ε_1 = γ^2$ και $Ε_2 = α^2$ ή Ε = 1, $Ε_1 = 4$ και $Ε_2 = 5$. Οπότε:

(ΖΗΔΡΘΙ) = $Ε + Ε_1 + Ε_2$ + (ΑΙΖ) + (ΒΗΔ) + (ΓΡΘ) + (ΑΒΓ) = 1 + 4 + 5 + 1 +1 + 1 +1 = 14.

αλφαβητικός
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

17908

ΘΕΜΑ 3

Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα μήκη των πλευρών του είναι $\alpha = 4$, $\beta = \sqrt{17}$ και $\gamma = 5$.

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 9)

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή Α, τότε:

i. να υπολογίσετε το ΔΒ. (Μονάδες 9)

ii. να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

17908-Λύση

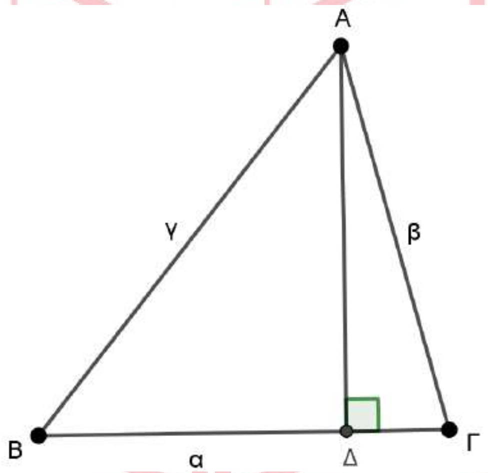
ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε: $\alpha = 4$, $\beta = \sqrt{17}$ και $\gamma = 5$, οπότε η πλευρά γ είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου. Θα συγκρίνουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων.

Είναι: $\gamma^2 = 5^2 = 25$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 4^2 + \sqrt{17}^2 = 16 + 17 = 33$.

Οπότε $\gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2$ άρα η $\hat{\Gamma} < 90^0$, επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, εφόσον απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία του.

β)



i. Λόγω του ερωτήματος (α), η γωνία Γ είναι οξεία. Οπότε από τη γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος είναι:

   $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \cdot \Delta\Gamma$ ή $25 = 33 - 2 \cdot 4 \cdot \Delta\Gamma$ ή $8 \cdot \Delta\Gamma = 8$ ή $\Delta\Gamma = 1$.

   Οπότε $\Delta B = B\Gamma - \Delta\Gamma = 4 - 1 = 3$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, από το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι:

   $A\Delta^2 = \beta^2 - \Delta\Gamma^2$ ή $A\Delta^2 = \sqrt{17}^2 - 1^2$ ή $A\Delta^2 = 16$, οπότε $A\Delta = 4$.

   Έτσι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

αλφαπινόσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

18097

ΘΕΜΑ 2

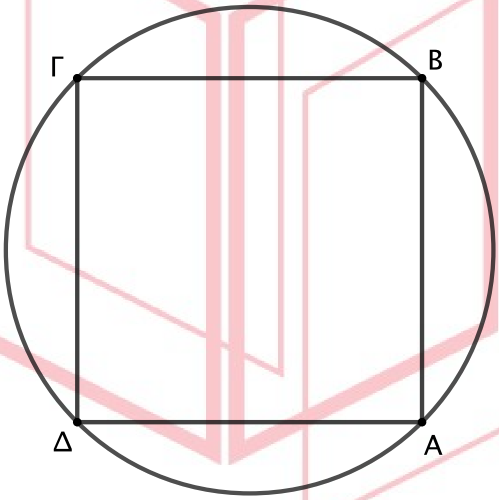
Τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν το εμβαδόν του τετραγώνου είναι ίσο με 4, τότε:

α) Να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του τετραγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι ίσο με $2\pi - 4$.

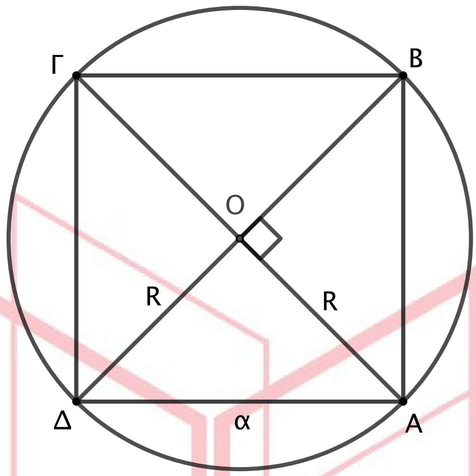
(Μονάδες 12)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

18097-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του τετραγώνου είναι κάθετες και το σημείο τομής τους είναι το κέντρο Ο του περιγεγραμμένου κύκλου. Έστω α η πλευρά του τετραγώνου. Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο τρίγωνο ΟΔΑ έχουμε:

$$\alpha^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$$

Από την υπόθεση, το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E_\tau = \alpha^2 = 4$, οπότε προκύπτει:

$$2R^2 = 4 \text{ ή } R^2 = 2$$

Άρα, $R = \sqrt{2}$.

β) Το εμβαδόν του κύκλου είναι:

$$E_\kappa = \pi R^2 = 2\pi$$

Επομένως, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του τετραγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι:

$$E = E_\kappa - E_\tau = 2\pi - 4$$

αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

18370

ΘΕΜΑ 4

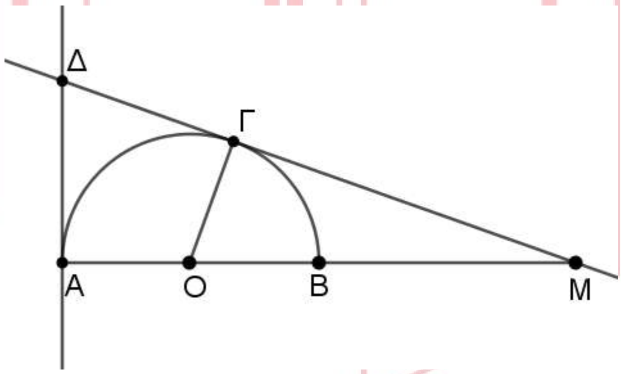
Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ = 2ρ. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Μ. Από το Μ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ στο ημικύκλιο. Αν η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο Α τέμνει την προέκταση της ΜΓ στο Δ τότε:

α) Αν ΒΜ = 2ρ να αποδείξετε ότι ΜΓ = $2\sqrt{2}$ρ. (Μονάδες 09)

β)

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{MO}{M\Gamma}=\frac{M\Delta}{MA}$. (Μονάδες 09)

ii. Αν για το Μ ισχύει ότι ΒΜ = λ·ρ, όπου λ θετικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, τέτοια ώστε (ΑΔΜ) = 9(ΜΟΓ). (Μονάδες 07)

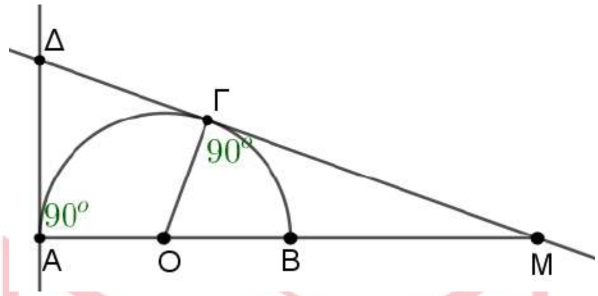


αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

18370-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



Το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ είναι κάθετο στην ακτίνα ΟΓ.

ΜΟ = ΜΒ+ΒΟ = 2ρ+ρ = 3ρ.

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΓ:

$\mathrm{OM}^2 = \mathrm{O\Gamma}^2 + \mathrm{M\Gamma}^2$, άρα $\mathrm{M\Gamma}^2 = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{O\Gamma}^2 = (3\rho)^2 - \rho^2 = 8\rho^2$, δηλαδή ΜΓ = $2\sqrt{2}\rho$.

β)

i. Τα τρίγωνα ΟΜΓ και ΑΔΜ είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία αντίστοιχα: $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Gamma} = 90^o$ και την γωνία $\widehat{\mathrm{M}}$ κοινή. Επομένως οι ομόλογες πλευρές τους θα είναι ανάλογες:

	Ίσες γωνίες		
	$\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Gamma}$	Μ κοινή	$\widehat{\mathrm{O}} = \widehat{\Delta}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΟΜΓ	ΜΟ	ΟΓ	ΜΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΜ	ΜΔ	ΔΑ	ΜΑ

$\frac{\mathrm{M\Delta}}{\mathrm{MO}} = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{M\Gamma}}$ ή $\frac{\mathrm{M\Delta}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{M\Gamma}}$.

ii. Δείξαμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΟΜΓ είναι όμοια, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

$\frac{(\mathrm{AM\Delta})}{(\mathrm{OM\Gamma})} = \left(\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{\Gamma M}}\right)^2 = \frac{\mathrm{AM}^2}{\mathrm{\Gamma M}^2}$. (1)

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΟΜ = ΜΒ+ΒΟ = λρ+ρ = (λ+1)ρ.

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΓ:

$\mathrm{OM}^2 = \mathrm{O\Gamma}^2 + \mathrm{\Gamma M}^2$, άρα

$\mathrm{\Gamma M}^2 = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{O\Gamma}^2 = \left((\lambda+1)\rho\right)^2 - \rho^2 = \left(\lambda^2 + 2\lambda + 1 - 1\right)\rho^2 = \left(\lambda^2 + 2\lambda\right)\rho^2$.

ΑΜ = 2ρ+λρ= (λ+2)ρ.

Η (1) γίνεται $\frac{(\mathrm{AM\Delta})}{(\mathrm{MO\Gamma})} = \frac{\mathrm{AM}^2}{\mathrm{\Gamma M}^2} = \frac{(\lambda+2)^2\rho^2}{\left(\lambda^2+2\lambda\right)\rho^2} = \frac{(\lambda+2)^2}{\lambda(\lambda+2)} = \frac{\lambda+2}{\lambda}$.

18370-Λύση

Αφού (ΑΔΜ) = 9(ΜΟΓ) θα έχουμε $\frac{(\text{ΑΜΔ})}{(\text{ΜΟΓ})}=\frac{9(\text{ΜΟΓ})}{(\text{ΜΟΓ})}=9$ και επομένως $\frac{\lambda+2}{\lambda}=9$ ή $\lambda+2=9\lambda$ ή 8λ =2, άρα λ = $\frac{1}{4}$.

αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

18553

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο με πλευρά α και σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς ΑΒ προς το Β τέτοιο ώστε ΒΣ = ΑΒ.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α:

i. Το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ.

ii. Το μήκος της πλευράς ΣΓ του τριγώνου ΣΔΓ.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε τυχαίο σημείο Σ' στην προέκταση της πλευράς ΑΒ προς το Β τέτοιο ώστε ΒΣ' > ΒΣ. Να συγκρίνετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

i. Το εμβαδό του τριγώνου Σ'ΔΓ με το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ.

ii. Το μήκος της πλευράς Σ'Γ με το μήκος της πλευράς ΣΓ των τριγώνων Σ'ΔΓ και ΣΔΓ αντίστοιχα.

iii. Τις αποστάσεις του σημείου Δ από τις ευθείες ΣΓ και Σ'Γ.

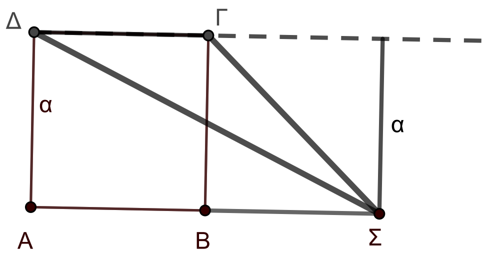
(Μονάδες 15)

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

18553-Λύση

ΛΥΣΗ

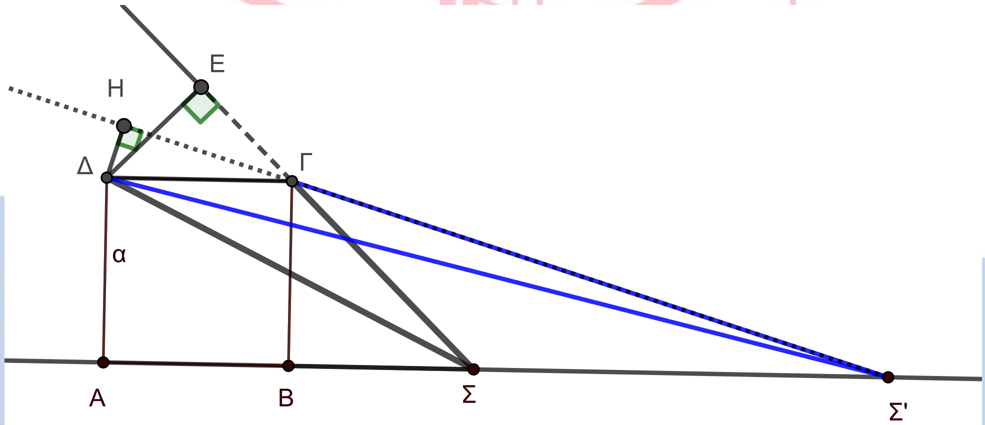
α)



i. Για να υπολογίσουμε το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ μπορούμε να πάρουμε ως βάση την πλευρά ΔΓ, οπότε το ύψος είναι η απόσταση της κορυφής Σ από την ευθεία ΔΓ που είναι ίση με α. Άρα (ΣΔΓ) = $\frac{1}{2}\cdot α \cdot α = \frac{α^2}{2}$.

ii. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΣΒΓ έχουμε $ΣΓ^2 = ΣΒ^2 + ΒΓ^2$ ή $ΣΓ^2 = α^2 + α^2$ ή $ΣΓ^2 = 2α^2$ ή ΣΓ = $α\sqrt{2}$.

β)



i. Τα τρίγωνα Σ'ΔΓ και ΣΔΓ έχουν κοινή βάση τη ΔΓ και ύψος ίσο με την απόσταση των παραλλήλων πλευρών ΑΒ και ΔΓ, αφού οι κορυφές τους Σ και Σ' βρίσκονται στην ευθεία ΑΒ // ΔΓ. Οπότε τα τρίγωνα αυτά έχουν και ίσα εμβαδά.

(Σ'ΔΓ) = (ΣΔΓ) = $\frac{1}{2}\cdot α \cdot α = \frac{α^2}{2}$.

ii. Από το σημείο Γ έχουμε το κάθετο τμήμα ΓΒ προς την ευθεία ΑΒ και τα πλάγια ΓΣ και ΓΣ'. Τα ίχνη Σ και Σ' των πλάγιων τμημάτων ΓΣ και ΓΣ' αντίστοιχα είναι τέτοια ώστε οι αποστάσεις τους από το ίχνος Β του κάθετου ΓΒ να είναι άνισες και συγκεκριμένα ΒΣ’ > ΒΣ, οπότε και τα αντίστοιχα πλάγια είναι ομοίως άνισα δηλαδή ΓΣ’ > ΓΣ.

iii. Η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία ΣΓ είναι ίση με το μήκος του τμήματος ΔΕ και η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία Σ’Γ είναι ίση με το μήκος του τμήματος ΔΗ. Ισχύει (Σ’ΔΓ) = $\frac{1}{2}\cdot$Σ’Γ $\cdot$ΔΗ και (ΣΔΓ) = $\frac{1}{2}\cdot$ΣΓ $\cdot$ΔΕ. Δείξαμε στο ερώτημα βi) ότι τα τρίγωνα Σ’ΔΓ και ΣΔΓ είναι ισεμβαδικά οπότε θα έχουμε:

$\frac{1}{2}\cdot$Σ’Γ $\cdot$ΔΗ = $\frac{1}{2}\cdot$ΣΓ $\cdot$ΔΕ ή Σ’Γ $\cdot$ΔΗ = ΣΓ $\cdot$ΔΕ ή $\frac{Σ'Γ}{ΣΓ} = \frac{ΔΕ}{ΔΗ}$ και επειδή Σ’Γ > ΣΓ θα έχουμε ΔΕ > ΔΗ. Δηλαδή η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία Σ’Γ είναι μικρότερη από την απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία ΣΓ.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

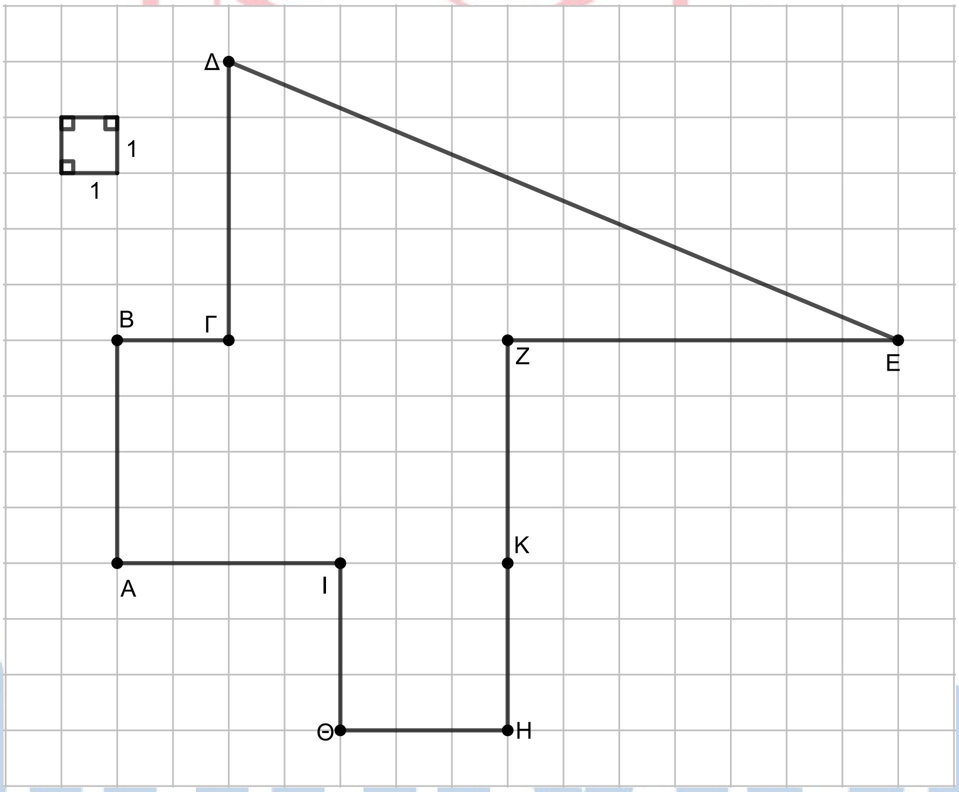
18558

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα:

α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΔΕ. (Μονάδες 10)

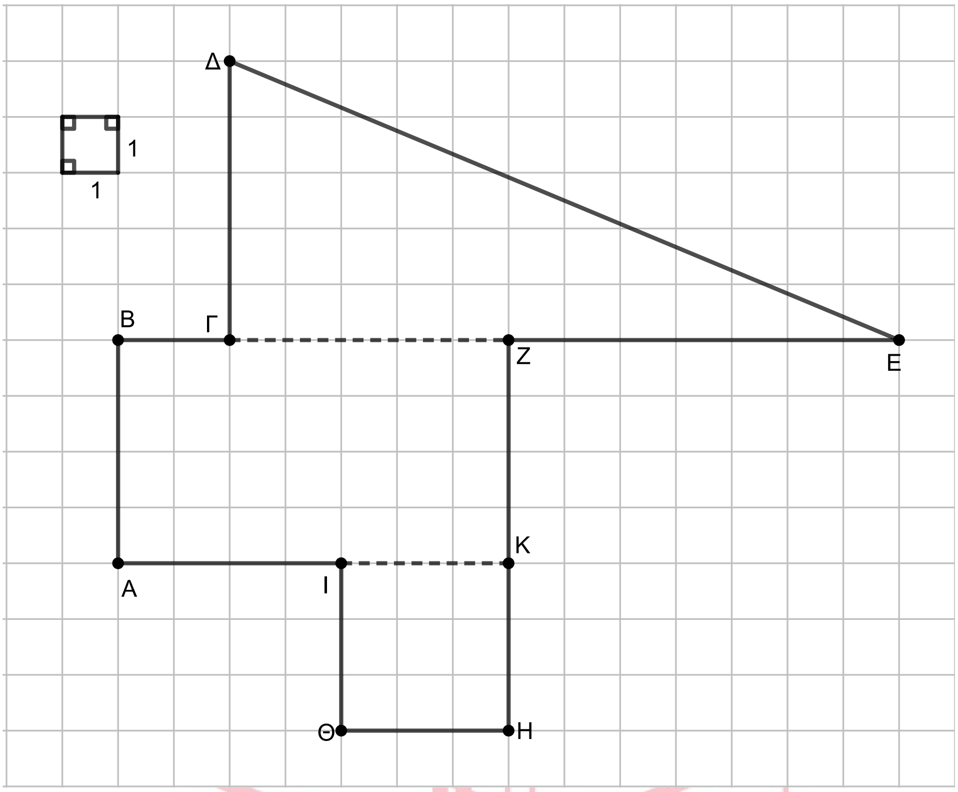
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΑ. (Μονάδες 15)



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

18558-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Φέροντας το τμήμα ΓΖ, το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο με ΔΓ= 5 και ΓΕ=12. Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $ΔΕ^2=ΔΓ^2+ΓΕ^2$ ή $ΔΕ^2=5^2+12^2$ ή $ΔΕ^2=25+144$ ή $ΔΕ^2=169$, άρα ΔΕ=13.

β) Το χωρίο αποτελείται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΕ, το ορθογώνιο ΒΖΚΑ και το τετράγωνο ΚΗΘΙ. Υπολογίζουμε τα εμβαδά τους ξεχωριστά.

$(ΔΓΕ) = \frac{1}{2} \cdot ΓΕ \cdot ΔΓ = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30$ τ.μ.

$(ΒΖΚΑ) = ΒΖ \cdot ΑΒ = 7 \cdot 4 = 28$ τ.μ.

$(ΚΗΘΙ) = 3^2 = 9$ τ.μ.

Άρα (ΑΒΓΔΕΖΗΘΙ) = (ΔΓΕ) + (ΒΖΚΑ) + (ΚΗΘΙ) = 30 + 28 + 9 = 67 τ.μ.

18559

ΘΕΜΑ 2

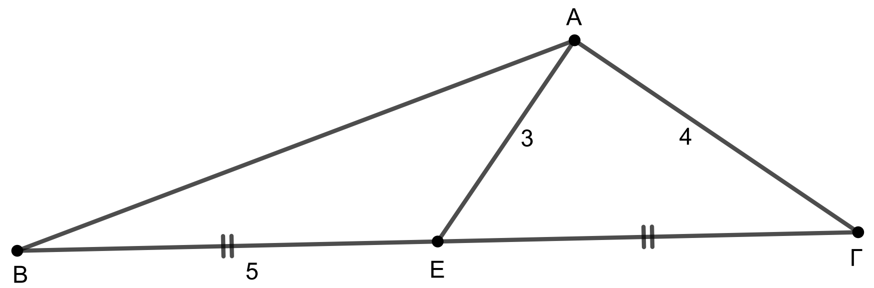
Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ έχει μήκος 3 και η πλευρά ΑΓ είναι ίση με 4. Αν ΒΕ=5, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΑΕ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΓ. (Μονάδες 10)

β)

i. Να δικαιολογήσετε γιατί (ΑΒΕ)=(ΑΓΕ). (Μονάδες 05)

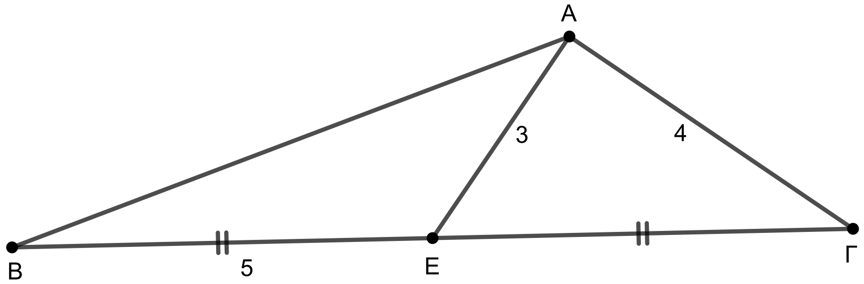
ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 10)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

18559-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Το τμήμα ΒΕ είναι το μισό της πλευράς ΒΓ, αφού η ΑΕ είναι διάμεσος στην πλευρά ΒΓ, άρα ΕΓ=5. Στο τρίγωνο ΑΓΕ μεγαλύτερη πλευρά του είναι η ΓΕ και θα εξετάσουμε αν το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του. Δηλαδή αν $ΓΕ^2 = ΑΓ^2 + ΑΕ^2 \Leftrightarrow 5^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow 25 = 16 + 9 \Leftrightarrow 25 = 25$ που ισχύει. Άρα το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο με $Ε\widehat{Α}Γ = 90^o$, οπότε $ΑΕ \perp ΑΓ$.

β)

i. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, άρα (ΑΒΕ) = (ΑΓΕ).

ii. Το ΑΓΕ είναι ορθογώνιο τρίγωνο, άρα το εμβαδό του θα ισούται με το ημιγινόμενο των κάθετων πλευρών του, δηλαδή $(ΑΓΕ) = \frac{1}{2} \cdot ΑΕ \cdot ΑΓ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ τ.μ.

Από το β) i. ερώτημα έχουμε ότι (ΑΒΕ)=(ΑΓΕ), άρα (ΑΒΓ)=2(ΑΓΕ). Βρήκαμε ότι (ΑΓΕ)=6, επομένως (ΑΒΓ) = 2·6 =12 τ.μ.

αλιμινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

18560

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Αν ΓΕ είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά ΑΒ και το τμήμα ΑΕ έχει μήκος 9, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό

i. του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

ii. του τραπεζίου ΑΕΓΔ.

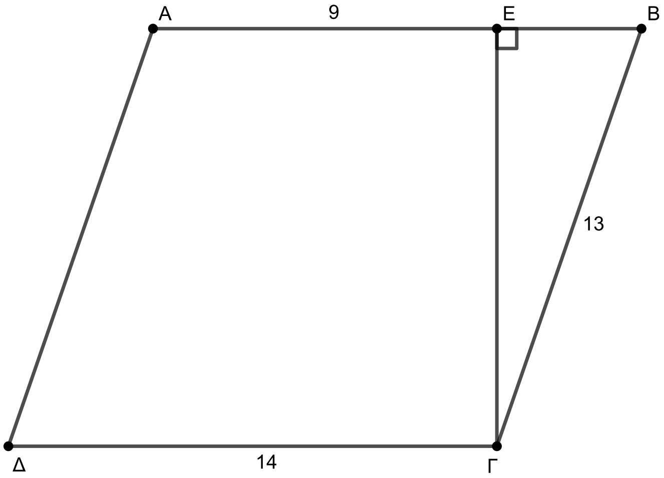
(Μονάδες 12)

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

18560-Λύση

ΛΥΣΗ

Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Φέρουμε ΓΕ⊥ΑΒ.



α) ΑΒ = ΓΔ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Για το τμήμα ΒΕ έχουμε: ΒΕ = ΑΒ − ΑΕ = 14 − 9 = 5. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$\Gamma E^2=\Gamma B^2-BE^2$ ή $\Gamma E^2=13^2-5^2$ ή $\Gamma E^2=169-25$ ή $\Gamma E^2=144$, άρα ΓΕ=12.

β)

i. Το μήκος ΓΕ είναι η απόσταση των απέναντι πλευρών ΑΒ και ΓΔ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Άρα (ΑΒΓΔ)= $AB\cdot\Gamma E=14\cdot 12$, δηλαδή (ΑΒΓΔ)=168 τ.μ.

ii. Το τραπέζιο ΑΕΓΔ είναι ορθογώνιο και οι βάσεις του είναι οι ΑΕ και ΓΔ. Άρα (ΑΕΓΔ)= $\frac{AE+\Gamma\Delta}{2}\cdot\Gamma E=\frac{9+14}{2}\cdot 12=23\cdot 6$, δηλαδή (ΑΕΓΔ)=138 τ.μ.

αλμπινιώσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

18562

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος της διαγωνίου ΒΔ ισούται με $\alpha\sqrt{2}$ και να βρείτε το εμβαδό του. (Μονάδες 05)

β)

i. Να σχεδιάσετε το τετράγωνο ΒΔΖΗ έτσι ώστε το σημείο Α να είναι εσωτερικό σημείο του και να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι το κέντρο του τετραγώνου ΒΔΖΗ. (Μονάδες 07)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΒΔΖΗ και να το συγκρίνετε με το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 08)

γ) Επαναλαμβάνουμε το σχεδιασμό όπως περιγράφηκε παραπάνω και σχηματίζουμε νέο τετράγωνο, με πλευρά κάθε φορά, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου.
Δηλαδή με πλευρά τη διαγώνιο ΔΗ του τετραγώνου ΒΔΖΗ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο, το ΔΗΘΚ. Με πλευρά τη διαγώνιο ΗΚ του ΔΗΘΚ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο κ.ο.κ. Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του θα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, πόσες φορές ακόμη πρέπει να επαναλάβουμε το σχεδιασμό αυτό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 05)

αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

18562-Λύση

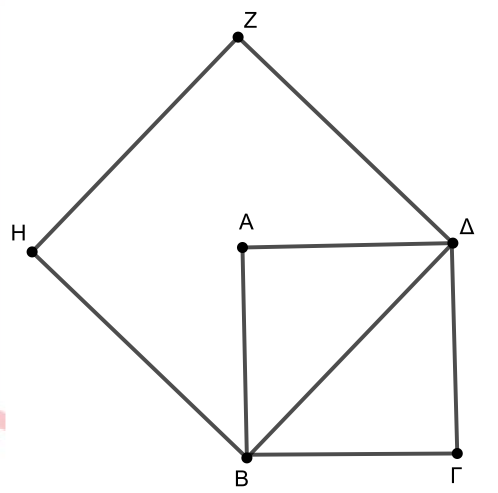
ΛΥΣΗ

α) Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$BΔ^2=AB^2+AΔ^2$ ή $BΔ^2 = α^2 + α^2$ ή $BΔ^2 = 2α^2$, οπότε $BΔ= α\sqrt{2}$. Για το εμβαδόν του ΑΒΓΔ, έχουμε $(ΑΒΓΔ) = α^2$.

β)

i.



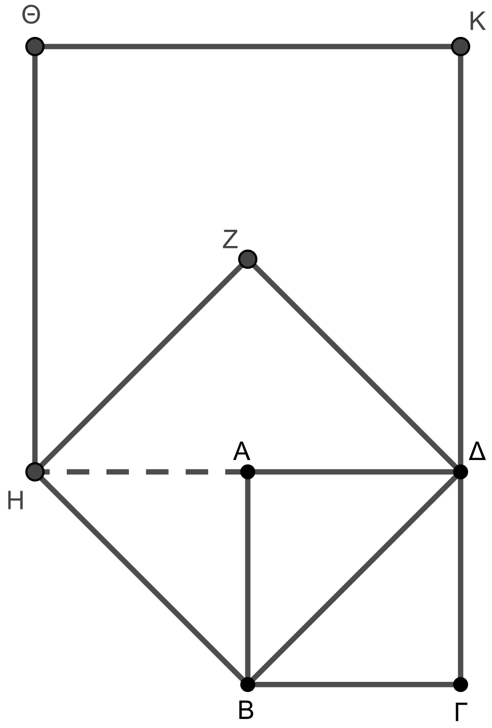
Τα τμήματα ΔΑ και ΒΑ είναι κάθετα μεταξύ τους ως πλευρές του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ. Η γωνία $B\widehat{Δ}A$ είναι 45^o αφού η διαγώνιος ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{Δ}$ του τετραγώνου. Επειδή $B\widehat{Δ}Z = 90^o$ ως γωνία του τετραγώνου ΒΔΖΗ, $A\widehat{Δ}Z = 45^o$. Οπότε το τμήμα ΔΑ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{Δ}$ του τετραγώνου, άρα το ΔΑ ανήκει στη διαγώνιο του τετραγώνου ΒΔΖΗ. Ομοίως η ΒΑ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{B}$ του τετραγώνου ΒΔΖΗ και το ΒΑ ανήκει στην άλλη διαγώνιό του. Οι δύο διαγώνιες του τετραγώνου ΒΔΖΗ τέμνονται στο σημείο Α, δηλαδή το Α είναι το κέντρο του.

ii. Η πλευρά του τετραγώνου ΒΔΖΗ είναι ίση με $α\sqrt{2}$, οπότε για το εμβαδον του έχουμε: $(ΒΔΖΗ) = (α\sqrt{2})^2$ ή $(ΒΔΖΗ) = 2α^2$. Στο α) ερώτημα βρήκαμε ότι το εμβαδό του ΑΒΓΔ είναι $α^2$, οπότε παρατηρούμε ότι (ΒΔΖΗ) = 2(ΑΒΓΔ).

αλφαβητικός
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

18562-Λύση

γ)



Στο τετράγωνο ΒΔΖΗ η πλευρά του ισούται με $\alpha\sqrt{2}$. Επομένως η διαγώνιός του ΔΗ , σύμφωνα με το α) ερώτημα, θα είναι ίση με $\alpha\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2\alpha$. Επομένως η πλευρά του τετραγώνου ΔΗΘΚ είναι 2α, οπότε (ΔΗΘΚ) = $4\alpha^2$. Συγκρίνοντας το εμβαδό του τετραγώνου ΔΗΘΚ με το εμβαδό του ΒΔΖΗ παρατηρούμε ότι (ΔΗΘΚ) = 2(ΒΔΖΗ), όπως και (ΒΔΖΗ) = 2(ΑΒΓΔ). Επομένως (ΔΗΘΚ) = 2(ΒΔΖΗ) = 4(ΑΒΓΔ). Δηλαδή, σχεδιάζοντας τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο ενός τετραγώνου, το νέο τετράγωνο έχει διπλάσιο εμβαδό από το προηγούμενό του. Το αρχικό τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά ίση με α, έχει εμβαδό α^2, το ΒΔΖΗ έχει εμβαδό $2\alpha^2$, το ΔΗΘΚ έχει εμβαδό $4\alpha^2$. Σχεδιάζοντας τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο του ΔΗΘΚ θα προκύψει τετράγωνο με εμβαδό $8\alpha^2$.

Επομένως για να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του θα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, θα πρέπει να κάνουμε τη διαδικασία αυτή συνολικά τέσσερις (4) φορές. Δηλαδή, μετά το τετράγωνο ΔΗΘΚ του σχήματος θα χρειαστεί να φτιάξουμε, όπως περιγράφηκε, δύο ακόμη τετράγωνα.

αλφανιόσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

18565

ΘΕΜΑ 4

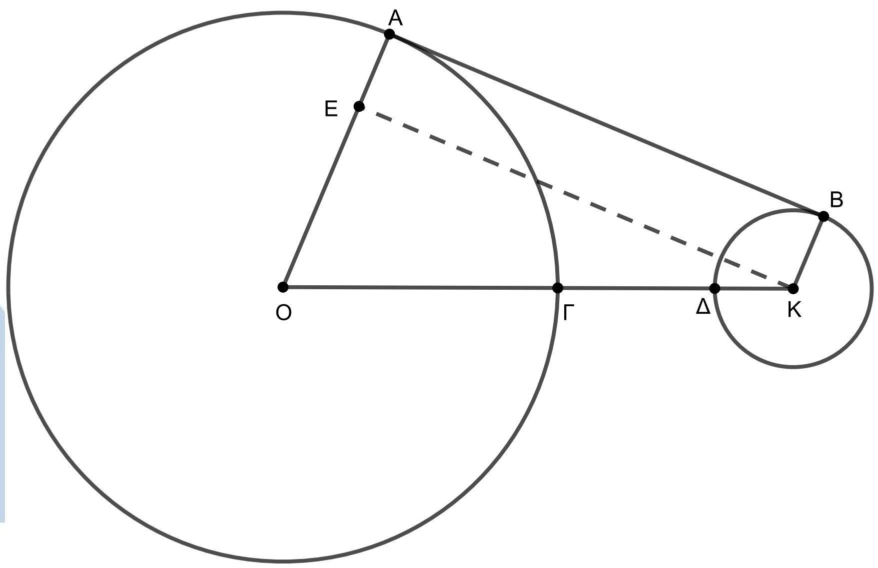
Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα Ο και Κ. Ο κύκλος με κέντρο Ο έχει ακτίνα R=7 ενώ ο κύκλος με κέντρο Κ έχει ακτίνα ρ=2. Το τμήμα ΑΒ είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων και το τμήμα ΚΕ είναι παράλληλο στο τμήμα ΑΒ με Ε σημείο του τμήματος ΟΑ. Η διάκεντρος ΟΚ τέμνει τον κύκλο (Ο,R) στο σημείο Γ και τον κύκλο (Κ,ρ) στο σημείο Δ.

α) Αν η θέση των δύο κύκλων είναι τέτοια ώστε, η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι ΓΔ=4, τότε:

i. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΚΟ. (Μονάδες 07)

β) Ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των 2 κύκλων, ώστε το εμβαδόν του ΑΒΚΕ να ισούται με $4\sqrt{14}$ τ.μ.; (Μονάδες 08)



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

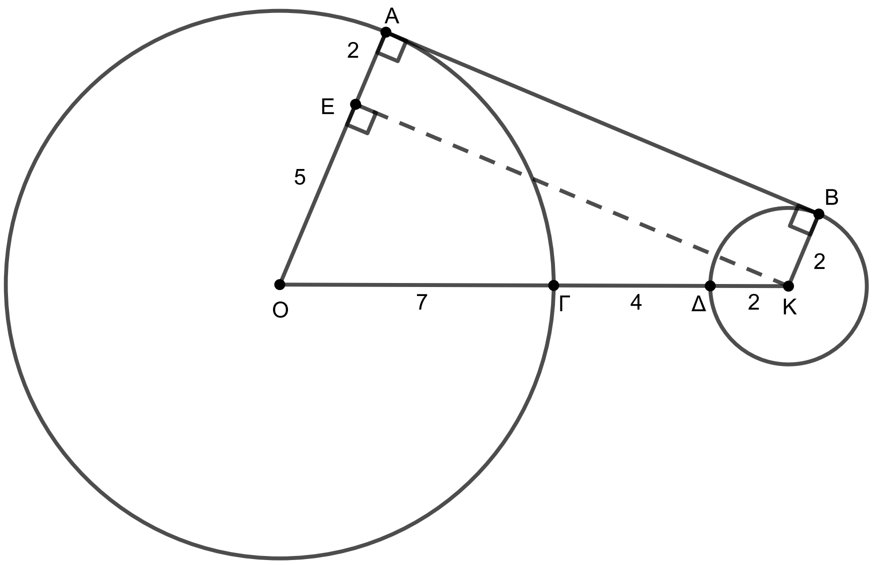
18565

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

18565-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



i. Οι ακτίνες ΟΑ και ΚΒ είναι κάθετες στο εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ στα σημεία επαφής Α και Β. Το τμήμα ΚΕ είναι παράλληλο στο ΑΒ και αφού ΑΒ⊥ΟΑ, θα είναι και ΚΕ⊥ΟΑ. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΚΕ έχει 3 ορθές γωνίες και είναι ορθογώνιο. Επομένως ΑΕ=ΚΒ=2 και ΟΕ=ΟΑ-ΕΑ=7-2=5. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΚ η υποτείνουσά του ΟΚ είναι ΟΓ+ΓΔ+ΔΚ=7+4+2=13. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $KE^2=OK^2-OE^2$ ή $KE^2=13^2-5^2$ ή $KE^2=169-25$ ή $KE^2=144$, άρα ΚΕ=12. Άρα ΑΒ = ΚΕ =12.

ii. Στο τετράπλευρο ΑΒΚΟ είναι ΟΑ⊥ΑΒ και ΚΒ⊥ΑΒ, άρα ΟΑ//ΚΒ. Επίσης ΟΑ=7≠2=ΚΒ, άρα οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και άνισες, οπότε δεν είναι παραλληλόγραμμο. Άρα το ΑΒΚΟ είναι τραπέζιο, στο οποίο η μικρή του βάση είναι η ΚΒ, η μεγάλη βάση του η ΟΑ και το ύψος του είναι το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΑΒ. Οπότε (ΑΒΚΟ) = $\frac{\mathrm{KB+OA}}{2}\cdot$ ΑΒ = $\frac{2+7}{2}\cdot 12$ = 54 τ.μ.

β) Το ΑΒΚΕ είναι ορθογώνιο, άρα (ΑΒΚΕ) = ΑΒ·ΚΒ. Επειδή (ΑΒΚΕ) = $4\sqrt{14}$, έχουμε: $4\sqrt{14}$ = ΑΒ·2 άρα ΑΒ = $2\sqrt{14}$. Από το α) ερώτημα ΑΒ=ΚΕ, οπότε ΚΕ=$2\sqrt{14}$ και από το Π.Θ. στο τρίγωνο ΟΚΕ είναι: $OK^2 = OE^2+KE^2$ ή $OK^2=5^2+(2\sqrt{14})^2$, ή $OK^2 = 25+56$, ή $OK^2=81$, άρα ΟΚ=9. Για το τμήμα ΟΚ ισχύει ότι ΟΚ=ΟΓ+ΓΔ+ΔΚ, ή 9=7+ΓΔ+2, δηλαδή 9=9+ΓΔ, οπότε ΓΔ=0. Δηλαδή η διάκεντρος ΟΚ των δύο κύκλων ισούται με το άθροισμα των ακτινών τους. Άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

20361

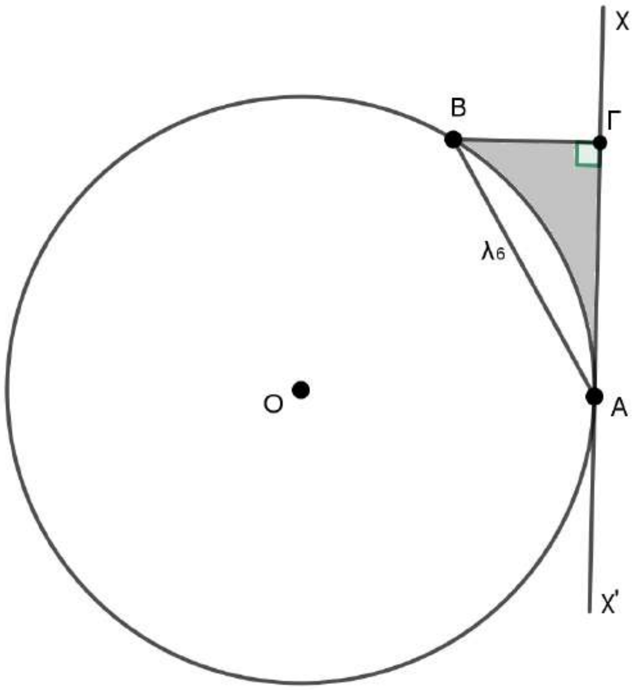
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (O,R) και η χορδή του AB ίση με την πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Στο σημείο Α φέρνουμε την εφαπτομένη x'x του κύκλου και από το B την κάθετη στην x'x που την τέμνει στο Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΓ = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 8)

β) $(ΟΑΓΒ) = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{8}$. (Μονάδες 7)

γ) το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα είναι: $Ε = \dfrac{(9\sqrt{3}-4π)R^2}{24}$. (Μονάδες 10)

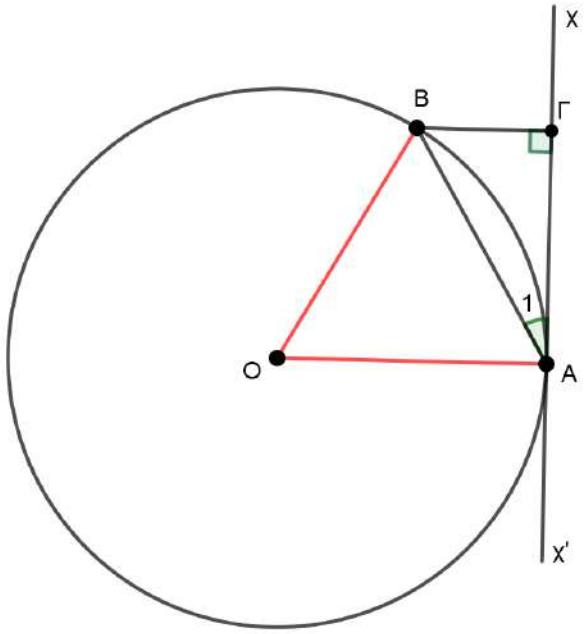


αλι σης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

20361-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



Φέρνουμε τις ακτίνες ΟΑ, ΟΒ.

Από τα δεδομένα, η ΑΒ είναι πλευρά κανονικού 6-γώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο οπότε το τόξο ΑΒ θα ισούται με $\frac{360^0}{6}$ = 60^0. Άρα και η επίκεντρη γωνία ΑΟΒ θα ισούται με 60^0 επομένως το τρίγωνο ΟΑΒ θα είναι ισόπλευρο πλευράς R. Δηλαδή ΑΒ = R = ΟΑ = ΟΒ και επιπλέον θα έχει όλες του τις γωνίες ίσες με 60^0.

Η ΟΑ ως ακτίνα που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής, είναι κάθετη στην εφαπτομένη x'x, επομένως η γωνία ΟΑΓ είναι ορθή.

Άρα η γωνία A_1 θα ισούται με 30^0, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΒΓ = $\frac{AB}{2}$ = $\frac{R}{2}$.

Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$A\Gamma^2 = AB^2 - B\Gamma^2$ ή $A\Gamma^2 = R^2 - (\frac{R}{2})^2$ ή $A\Gamma^2 = R^2 - \frac{R^2}{4}$ ή $A\Gamma^2 = \frac{3R^2}{4}$, οπότε $A\Gamma = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

β) Λόγω του ερωτήματος (α), οι ΟΑ, ΒΓ ως κάθετες στην x'x, θα είναι μεταξύ τους παράλληλες. Άρα το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι τραπέζιο με βάσεις ΟΑ, ΒΓ και ύψος ΑΓ.

Οπότε (ΟΑΓΒ) = $\frac{OA+B\Gamma}{2} \cdot A\Gamma = \frac{R+\frac{R}{2}}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{4} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$.

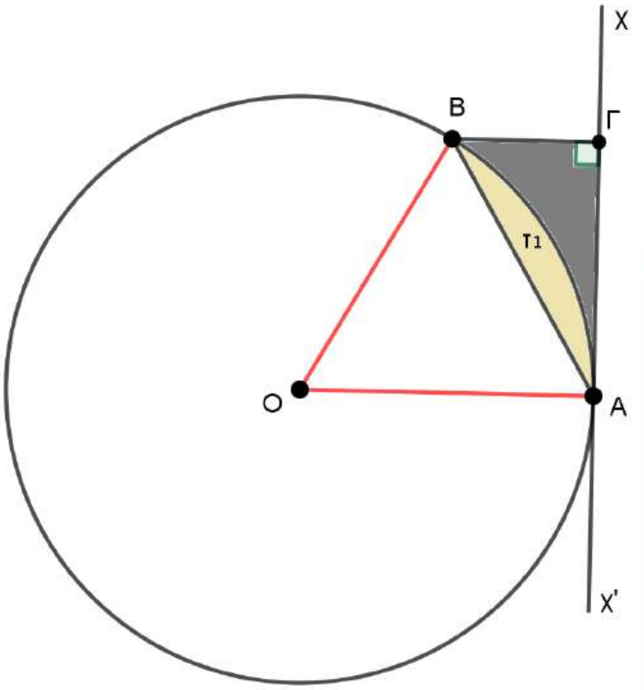
γ) Το ζητούμενο εμβαδό θα βρεθεί αν από το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ, αφαιρέσουμε το εμβαδό του κυκλικού τμήματος τ_1. Δηλαδή Ε = (ΑΒΓ) – (τ_1)(1).

αλμυνίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

20361-Λύση

Λόγω του ερωτήματος (α) έχουμε:

$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2} \cdot \text{ΒΓ} \cdot \text{ΑΓ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{8}$.



$(\tau_1) = (\text{Ο}\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}) - (\text{ΟΑΒ}) = \frac{\pi R^2 \mu}{360} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2 \cdot 60^0}{360} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi R^2 - 3\sqrt{3}R^2}{12}$.

Έτσι η (1) δίνει: $E = \frac{R^2\sqrt{3}}{8} - \frac{2\pi R^2 - 3\sqrt{3}R^2}{12} = \frac{3\sqrt{3}R^2 - 4\pi R^2 + 6\sqrt{3}R^2}{24} = \frac{9\sqrt{3}R^2 - 4\pi R^2}{24} = \frac{(9\sqrt{3} - 4\pi)R^2}{24}$.

Εναλλακτικά: Το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E = (\text{ΟΑΓΒ}) - (\text{Ο}\overset{\frown}{\text{ΑΒ}})$.

Λόγω του ερωτήματος (β) το $(\text{ΟΑΓΒ}) = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$.

Επίσης: $(\text{Ο}\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}) = \frac{\pi R^2 \mu}{360} = \frac{\pi R^2 \cdot 60^0}{360} = \frac{\pi R^2}{6}$.

Έτσι $E = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8} - \frac{\pi R^2}{6} = \frac{9\sqrt{3}R^2 - 4\pi R^2}{24} = \frac{(9\sqrt{3} - 4\pi)R^2}{24}$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21067

ΘΕΜΑ 2

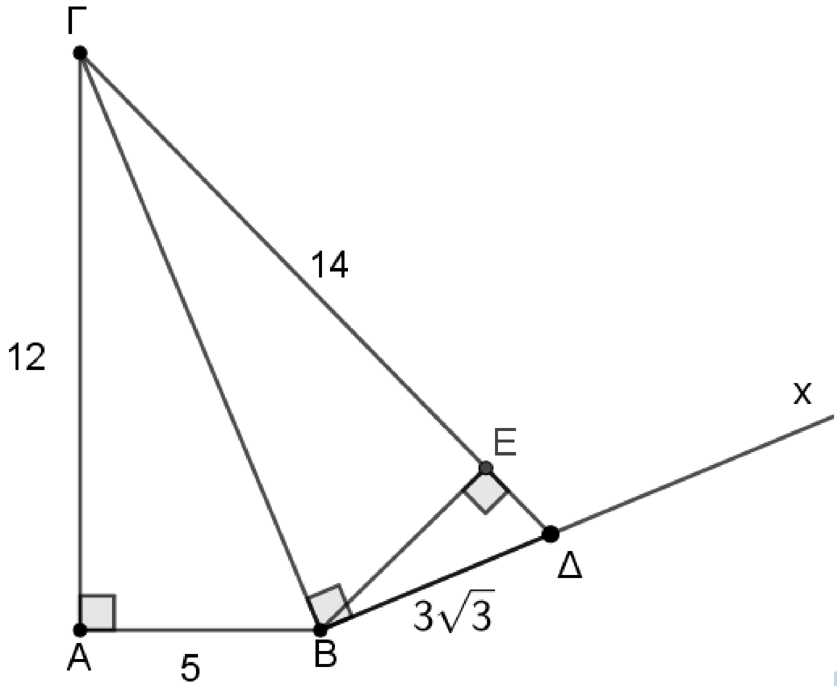
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^o$, ΑΓ = 12 και ΑΒ = 5.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 13. (Μονάδες 08)

β) Φέρουμε ημιευθεία Βx κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Β και παίρνουμε σε αυτή σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΔΓ = 14, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι ΒΔ = $3\sqrt{3}$. (Μονάδες 08)

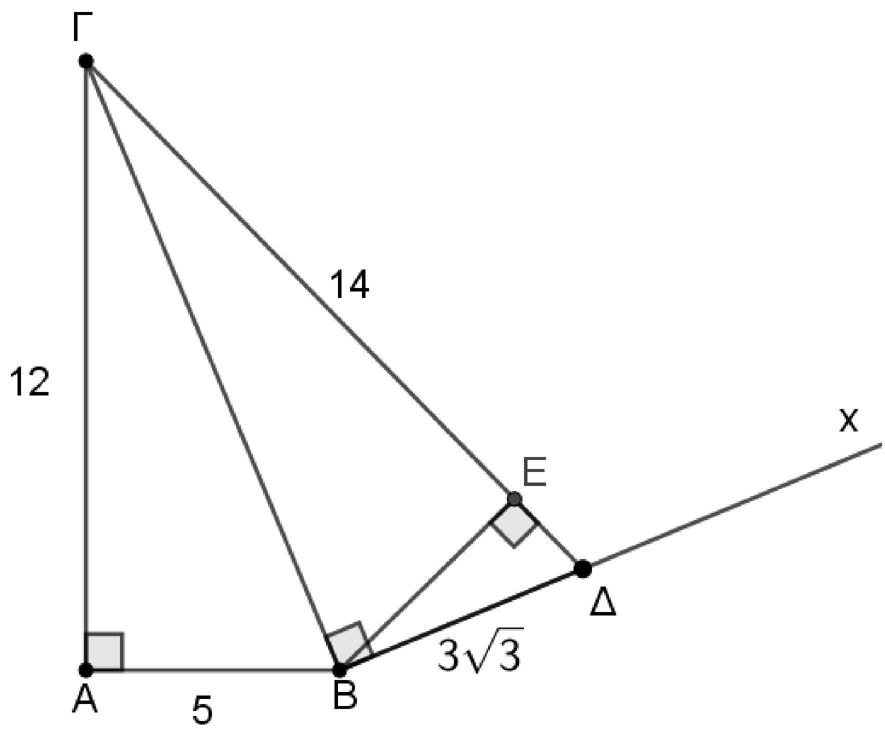
ii. Να υπολογίσετε την προβολή της ΒΔ στην ΔΓ. (Μονάδες 09)



αλμπινισης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21067-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 \text{ ή } \mathrm{B\Gamma}^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169, \text{ άρα ΒΓ} = \sqrt{169} = 13$$

β)

i. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΔΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$\Delta\Gamma^2 = \mathrm{B\Gamma}^2 + \mathrm{B}\Delta^2 \text{ ή } \mathrm{B}\Delta^2 = \Delta\Gamma^2 - \mathrm{B\Gamma}^2 = 14^2 - 13^2 = 196 - 169 = 27$$

Άρα ΒΔ = $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$.

ii. Φέρνουμε την ΒΕ κάθετη στην ΔΓ, οπότε η προβολή του ΒΔ στην ΔΓ είναι η ΔΕ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΔ ισχύει ότι:

$$\mathrm{B}\Delta^2 = \Delta\mathrm{E} \cdot \Delta\Gamma \text{ ή } \left(3\sqrt{3}\right)^2 = \Delta\mathrm{E} \cdot 14 \text{ ή } 27 = 14\Delta\mathrm{E} \text{ ή } \Delta\mathrm{E} = \frac{27}{14}$$

αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21101

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΒΓ = $\sqrt{3}$, ΑΒ = $\sqrt{2}$, ΑΓ = 1.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{A} = 90^o$. (Μονάδες 09)

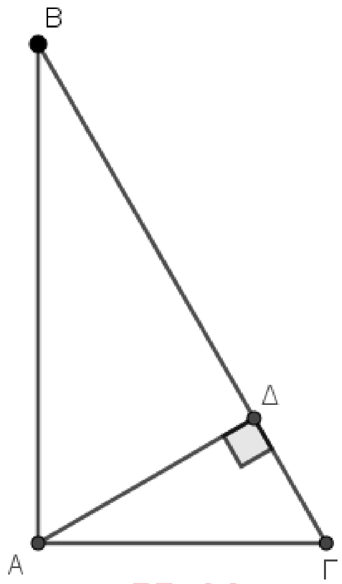
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ. (Μονάδες 09)

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21101-Λύση

ΛΥΣΗ



α)

Έχουμε:

$Β Γ^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3$

Επομένως, είναι $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$, άρα η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΒΓ είναι ορθή, δηλαδή $\widehat{Α} = 90^o$.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΑΓ = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

γ) Φέρουμε το ύψος ΑΔ. Το εμβαδόν του τριγώνου μπορεί να δοθεί και από τον τύπο

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΒΓ\cdot ΑΔ$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Στο ερώτημα β) βρήκαμε ότι $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Έτσι έχουμε:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot ΑΔ \quad \text{ή} \quad \sqrt{2} = \sqrt{3} \cdot ΑΔ \quad \text{ή} \quad ΑΔ = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

21102

ΘΕΜΑ 3

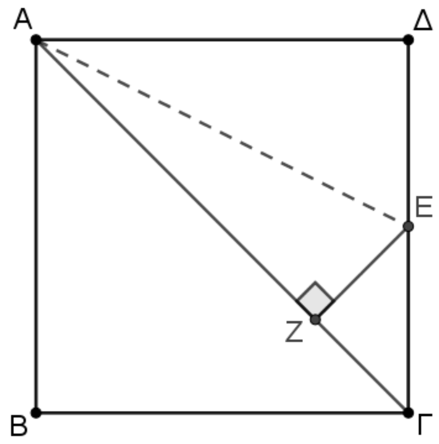
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και έστω Ε το μέσο της ΔΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΑΓ = α\sqrt{2}$. (Μονάδες 09)

ii. $ΑΕ = α\frac{\sqrt{5}}{2}$. (Μονάδες 09)

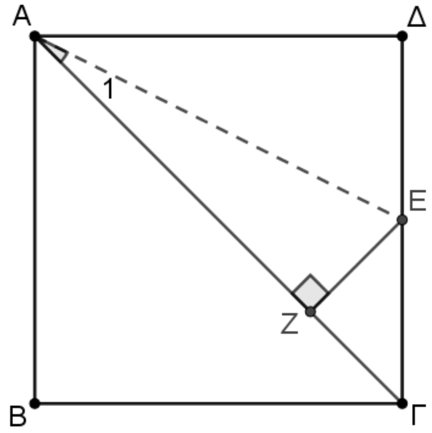
β) Να υπολογίσετε την προβολή του τμήματος ΑΕ στην ΑΓ. (Μονάδες 07)



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21102-Λύση

ΛΥΣΗ



α)

i. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ:

$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2$, άρα ΑΓ = $\alpha\sqrt{2}$.

ii. ΔΕ = $\dfrac{\Delta\Gamma}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$.

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ:

$A E^2 = A\Delta^2 + \Delta E^2 = \alpha^2 + \left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{4} = \dfrac{5\alpha^2}{4}$, άρα ΑΕ = $\alpha\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

β) Η προβολή του ΑΕ στην ΑΓ είναι το τμήμα ΑΖ.

Η γωνία $\widehat{A}_1$ είναι οξεία γωνία επειδή οι πλευρές της περιέχονται στην ορθή γωνία $B\widehat{A}\Delta$ του τετραγώνου.

ΕΓ = $\dfrac{\Delta\Gamma}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$.

Εφαρμόζουμε το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΕΓ:

$$E\Gamma^2 = AE^2 + A\Gamma^2 - 2\cdot A\Gamma \cdot AZ \text{ ή } \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\alpha\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot\alpha\sqrt{2}\cdot AZ \text{ ή}$$

$$\frac{\alpha^2}{4} = \frac{5\alpha^2}{4} + 2\alpha^2 - 2\alpha\sqrt{2}\cdot AZ \text{ ή } \alpha^2 = 5\alpha^2 + 8\alpha^2 - 8\alpha\sqrt{2}\cdot AZ \text{ ή}$$

$$8\alpha\sqrt{2}\cdot AZ = 5\alpha^2 + 8\alpha^2 - \alpha^2 = 12\alpha^2 \text{ ή } AZ = \frac{12\alpha^2}{8\alpha\sqrt{2}} = \frac{3\alpha}{2\sqrt{2}} = \frac{3\alpha\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3\alpha\sqrt{2}}{4}.$$

αλμπινιόσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21103

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α και με διαμέτρους τις ΒΓ και ΒΑ φτιάχνουμε εξωτερικά του τετραγώνου ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος κάθε ημικυκλίου ισούται με π·α. (Μονάδες 07)

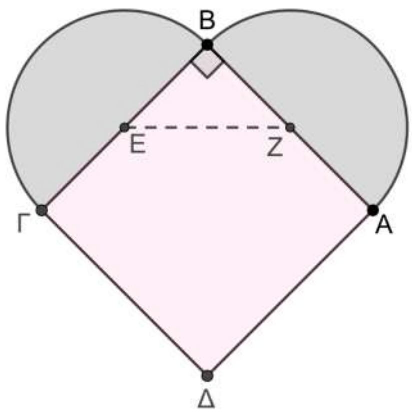
β)

i. Αν η περίμετρος της καρδιάς είναι 2π+4, να υπολογίσετε το α. (Μονάδες 06)

ii. Αν α = 1 να βρείτε το μήκος του τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο ημικυκλίων.

(Μονάδες 06)

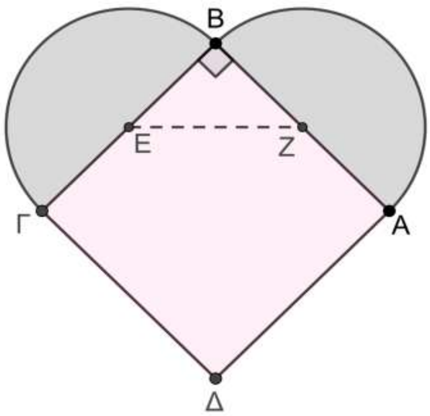
γ) Αν (τ) είναι το άθροισμα των εμβαδών των δυο ημικυκλίων να συγκρίνετε τον λόγο $\frac{(\tau)}{(\text{ΑΒΓΔ})}$ με την μονάδα. Να αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 06)



αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21103-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Το κάθε ημικύκλιο έχει ακτίνα ρ ίση με το μισό της πλευράς του τετραγώνου, δηλαδή

ρ = $\frac{2\alpha}{2} = \alpha$. Το μήκος τόξου μ° θα είναι $\frac{\pi\rho\mu^o}{180^o}$, δηλαδή $\frac{\pi\alpha 180^o}{180^o} = \pi\alpha$.

β)

i. Η περίμετρος της καρδιάς αποτελείται από τα δύο ημικύκλια και τις πλευρές ΑΔ και ΔΓ. Από το α) ερώτημα το κάθε ημικύκλιο έχει μήκος πα οπότε η περίμετρος θα ισούται με πα + πα + 2α + 2α = 2πα + 4α. Από υπόθεση έχουμε ότι η περίμετρος είναι 2π + 4, οπότε 2πα + 4α = 2π + 4 ή (2π + 4)α = 2π + 4, άρα α = 1.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΖ ($\widehat{B} = 90^o$) έχουμε ΒΕ = ΒΖ = α. Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα: $EZ^2 = BE^2 + BZ^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2$ ή $EZ = \alpha\sqrt{2}$. Για α = 1 έχουμε $EZ = \sqrt{2}$.

γ) Τα δύο ημικύκλια είναι ίσα γιατί έχουν την ίδια ακτίνα α, οπότε το άθροισμά τους θα είναι ένας κυκλικός δίσκος με ακτίνα α. Το εμβαδόν του θα είναι (τ) = $\pi\rho^2 = \pi\alpha^2$.

Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει εμβαδόν $(AB)^2 = (2\alpha)^2 = 4\alpha^2$.

Ο ζητούμενος λόγος $\frac{(\tau)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{\pi\alpha^2}{4\alpha^2} = \frac{\pi}{4}$.

Επειδή π < 4 το κλάσμα $\frac{\pi}{4}$ θα είναι μικρότερο της μονάδας, το ίδιο και ο ζητούμενος λόγος.

Εναλλακτική λύση γ).

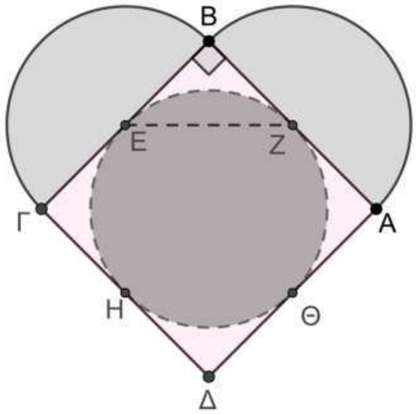
Το εμβαδόν των δύο ημικυκλίων θα είναι ίσο με το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου του τετραγώνου, διότι τα ημικύκλια έχουν ακτίνα α και ο εγγεγραμμένος στο τετράγωνο κύκλος έχει και αυτός ακτίνα α (η διάμετρος ισούται με 2α). Επειδή ο κύκλος είναι

αλφαριθμήσεις ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21103-Λύση

εγγεγραμμένος στο τετράγωνο (σχήμα) το εμβαδόν του είναι μικρότερο από αυτό του τετραγώνου, οπότε το κλάσμα

$$\frac{(\tau)}{(\text{ΑΒΓΔ})} < 1$$



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

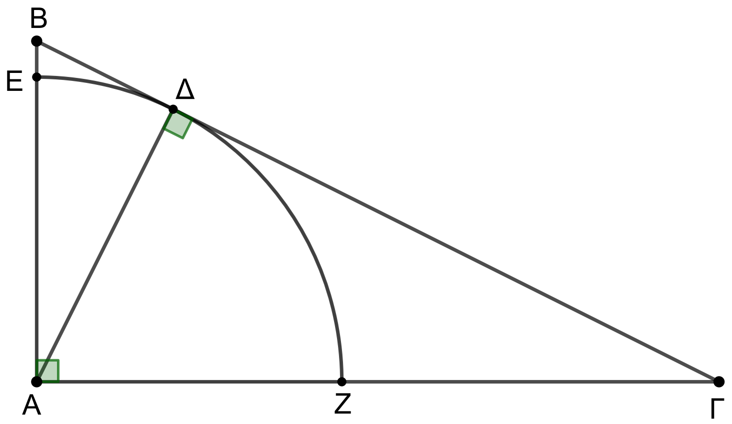
21122

ΘΕΜΑ 2

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ του σχήματος, το $Δ$ είναι η προβολή της κορυφής $Α$ στην υποτείνουσα $ΒΓ$ και είναι $ΒΔ = 1$ και $ΔΓ = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = 2$. (Μονάδες 12)

β) Με κέντρο το $Α$ και ακτίνα $ΑΔ$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$, στα σημεία $Ε$ και $Ζ$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου $\widehat{ΕΔΖ}$. (Μονάδες 13)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21122-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα. Επομένως είναι

$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$ ή $A\Delta^2 = 1 \cdot 4$ ή $A\Delta^2 = 2^2$ ή $A\Delta = 2$.

β) Το τόξο $\widehat{\mathrm{E\Delta Z}}$ είναι $\mu = 90°$ (επειδή $\hat{A} = 90°$) και είναι σε κύκλο ακτίνας $R = A\Delta = 2$. Επομένως το μήκος του είναι $l = \frac{\pi R \mu}{180°} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 90°}{180°} = \pi$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21124

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με πλευρές $\alpha = 40,\ \beta = 25,\ \gamma = 25$ και αντίστοιχα ύψη υ_α , υ_β , υ_γ. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι $Ε = 300$ και τα ύψη του είναι $\upsilon_\alpha = 15$ και $\upsilon_\beta = \upsilon_\gamma = 24$. (Μονάδες 7)

iii. Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη υ_α , υ_β , υ_γ είναι οξυγώνιο. (Μονάδες 7)

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου, είναι ισοσκελές και οξυγώνιο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

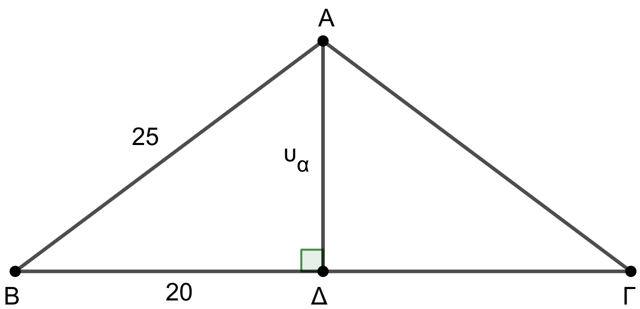
21124-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Θα συγκρίνουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του τριγώνου $ΑΒΓ$ με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του.

Είναι $\alpha^2 = 40^2 = 1600$ και $\beta^2 + \gamma^2 = 25^2 + 25^2 = 1250$, άρα $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ οπότε $\hat{A} > 90°$, άρα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ θα είναι αμβλυγώνιο.

ii) Το ύψος $\upsilon_\alpha = ΑΔ$ από την κορυφή $Α$ του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι και διάμεσος, οπότε $ΒΔ = \frac{\alpha}{2} = \frac{40}{2} = 20$.



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΒ$ ($\hat{Δ} = 90°$), έχουμε

$\upsilon_\alpha{}^2 = \gamma^2 - ΒΔ^2$ ή $\upsilon_\alpha{}^2 = 25^2 - 20^2$ ή $\upsilon_\alpha{}^2 = 225$ ή $\upsilon_\alpha = 15$.

Το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι $Ε = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 15 = 300$.

Επίσης $Ε = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta$ ή $\upsilon_\beta = \frac{2Ε}{\beta} = \frac{600}{25} = 24$ και $Ε = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma$ ή $\upsilon_\gamma = \frac{2Ε}{\gamma} = \frac{600}{25} = 24$.

iii) Είναι $\upsilon_\beta = \upsilon_\gamma = 24$ και $\upsilon_\alpha = 15$.

Είναι $\upsilon_\beta{}^2 < \upsilon_\gamma{}^2 + \upsilon_\alpha{}^2$ ή $24^2 < 24^2 + 15^2$ ή $0 < 15^2$ που ισχύει.

Άρα το τρίγωνο με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου $ΑΒΓ$, είναι οξυγώνιο.

β) Έστω α, β, γ οι πλευρές οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου$ΑΒΓ$ με $\beta = \gamma$ και υ_α, υ_β, υ_γ τα αντίστοιχα ύψη. Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι αμβλυγώνιο, η αμβλεία γωνία θα είναι η $\hat{A}$. Τότε $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ ή $\alpha^2 > 2\beta^2$ ή $\frac{\alpha}{\beta} > \sqrt{2}$ ή $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ (1).

Είναι $Ε = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma$, άρα $\frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma$ και επειδή $\beta = \gamma$ προκύπτει $\upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$.

Επομένως το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου $ΑΒΓ$, είναι ισοσκελές.

Επίσης είναι $\frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta$ ή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\upsilon_\beta}{\upsilon_\alpha}$ άρα η από την (1) έχουμε $\frac{\upsilon_\beta}{\upsilon_\alpha} > 1$ ή $\upsilon_\beta > \upsilon_\alpha$ άρα $\upsilon_\beta = \upsilon_\gamma > \upsilon_\alpha$. Επομένως $\upsilon_\beta{}^2 < \upsilon_\gamma{}^2 + \upsilon_\alpha{}^2$ ή $0 < \upsilon_\alpha{}^2$ που ισχύει. Άρα το τρίγωνο που

αλφαγνώσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου $AB\Gamma$, είναι οξυγώνιο. Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21138

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα ο κύκλος c_1 έχει κέντρο K και ακτίνα R και ο κύκλος c_2 έχει κέντρο Λ και ακτίνα $\rho = 2$. Οι αποστάσεις των K και Λ από την κοινή χορδή AB των δύο κύκλων είναι $\mathrm{KO} = \sqrt{3}$ και $\Lambda\mathrm{O} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι:

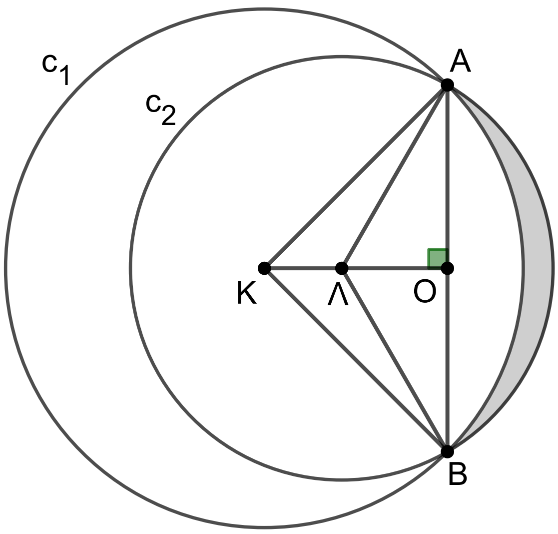
i. $\mathrm{OA} = \sqrt{3}$, (Μονάδες 6)

ii. $\mathrm{R} = \sqrt{6}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα εμβαδά:

i. των κυκλικών τομέων $\mathrm{K}\,\widehat{\mathrm{AB}}$ και $\Lambda\,\widehat{\mathrm{AB}}$, (Μονάδες 8)

ii. του σκιασμένου μηνίσκου του σχήματος. (Μονάδες 5)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21138-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΛ η υποτείνουσα $ΑΛ = ρ = 2$ και η $ΛΟ = 1$, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι $ΟΑ^2 = ΑΛ^2 - ΛΟ^2$ ή $ΟΑ^2 = 2^2 - 1^2 = 3$ ή $ΟΑ = \sqrt{3}$.

ii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ η υποτείνουσα $ΑΚ = R$ και η $ΚΟ = \sqrt{3}$, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα και λόγω του ερωτήματος (i) είναι

$ΑΚ^2 = ΚΟ^2 + ΟΑ^2$ ή $R^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 6$ ή $R = \sqrt{6}$.

β) Η ευθεία ΚΛ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής, άρα το Ο είναι το μέσο της ΑΒ, οπότε $ΑΒ = 2 \cdot ΟΑ$ ή $ΑΒ = 2\sqrt{3}$.

i) Επειδή $ΑΒ = 2\sqrt{3} = \sqrt{12} = \sqrt{2 \cdot 6} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = R\sqrt{2}$, η ΑΒ είναι πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο c_1, άρα η κεντρική του γωνία είναι $Α\widehat{Κ}Β = 90°$.

Εναλλακτικά: Είναι $ΟΚ = ΟΑ = \sqrt{3}$, άρα το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισοσκελές, οπότε $Α\widehat{Κ}Ο = 45°$. Επειδή η ΚΟ διχοτομεί την $Α\widehat{Κ}Β$ είναι $Α\widehat{Κ}Β = 90°$.

Ο κυκλικός τομέας $Κ\overset{\frown}{ΑΒ}$ είναι γωνίας $μ = Α\widehat{Κ}Β = 90°$ και ακτίνας $R = \sqrt{6}$, οπότε το εμβαδόν του είναι $\left(Κ\overset{\frown}{ΑΒ}\right) = \frac{πR^2μ}{360°} = \frac{π\cdot\left(\sqrt{6}\right)^2\cdot 90°}{360°} = \frac{3π}{2}$.

Επειδή $ΑΒ = 2\sqrt{3} = ρ\sqrt{3}$, η ΑΒ είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο c_2, άρα η κεντρική του γωνία είναι $Α\widehat{Λ}Β = 120°$.

Εναλλακτικά: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΛ η υποτείνουσα $ΑΛ = 2$ και η $ΛΟ = 1 = \frac{ΑΛ}{2}$, άρα $Ο\widehat{Α}Λ = 30°$, οπότε $Α\widehat{Λ}Ο = 60°$. Επειδή η ΛΟ διχοτομεί την $Α\widehat{Λ}Β$ είναι $Α\widehat{Λ}Β = 120°$.

Ο κυκλικός τομέας $Λ\overset{\frown}{ΑΒ}$ είναι γωνίας $μ = Α\widehat{Λ}Β = 120°$ και ακτίνας $ρ = 2$, οπότε το εμβαδόν του είναι $\left(Λ\overset{\frown}{ΑΒ}\right) = \frac{πρ^2μ}{360°} = \frac{π\cdot 2^2\cdot 120°}{360°} = \frac{4π}{3}$.

ii) Αν (ΚΑΒ) και (ΛΑΒ) είναι τα εμβαδά των τριγώνων ΚΑΒ και ΛΑΒ τότε το εμβαδόν Ε του σκιασμένου μηνίσκου θα είναι $Ε = \left(Λ\overset{\frown}{ΑΒ}\right) - \left(Κ\overset{\frown}{ΑΒ}\right) + (ΚΑΒ) - (ΛΑΒ)$.

Είναι $(ΚΑΒ) = \frac{ΚΑ\cdot ΚΒ}{2} = \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}{2} = 3$ και $(ΛΑΒ) = \frac{ΑΒ\cdot ΛΟ}{2} = \frac{2\sqrt{3}\cdot 1}{2} = \sqrt{3}$.

Επίσης από το β)i), $\left(Κ\overset{\frown}{ΑΒ}\right) = \frac{3π}{2}$ και $\left(Λ\overset{\frown}{ΑΒ}\right) = \frac{4π}{3}$, επομένως έχουμε

$Ε = \frac{4π}{3} - \frac{3π}{2} + 3 - \sqrt{3}$ ή $Ε = 3 - \sqrt{3} - \frac{π}{6}$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21149

ΘΕΜΑ 4

Σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε $B\widehat{A}\Gamma = 30^{o}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $B\Gamma = 2$, τότε:

α) Να υπολογίσετε:

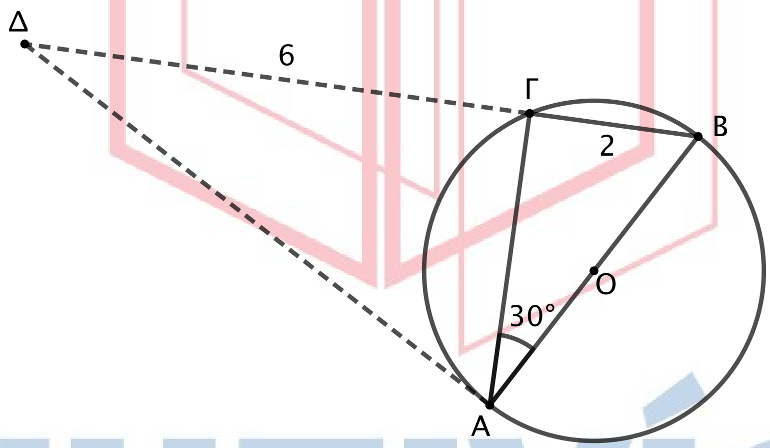
i. Την ακτίνα R.

ii. Το μήκος της πλευράς ΑΓ.

(Μονάδες 16)

β) Θεωρούμε σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = 6$. Να εξετάσετε αν το τμήμα ΔΑ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

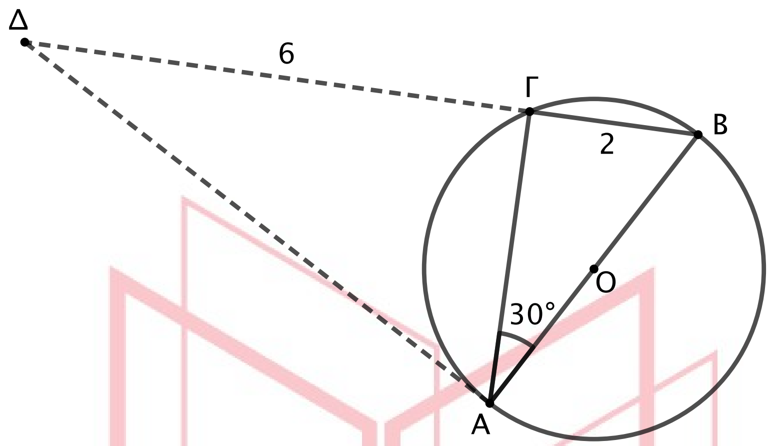
(Μονάδες 9)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21149-Λύση

ΛΥΣΗ



α)

i. Η γωνία $B\widehat{\Gamma}A$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ημικύκλιο ΑΒ, οπότε είναι ορθή. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $B\widehat{A}\Gamma = 30^o$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας $B\widehat{A}\Gamma$ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΑΒ, δηλαδή

$$B\Gamma = \frac{AB}{2} \quad ή \quad 2 = \frac{2R}{2} \quad ή \quad R = 2$$

ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$A\Gamma^2 = AB^2 - B\Gamma^2$$

$$A\Gamma^2 = 4^2 - 2^2$$

$$A\Gamma^2 = 16 - 4$$

$$A\Gamma^2 = 12$$

$$A\Gamma = \sqrt{12}$$

β) Η γωνία $A\widehat{\Gamma}\Delta$ είναι ορθή ως παραπληρωματική της ορθής γωνίας $B\widehat{\Gamma}A$. Αρχικά, υπολογίζουμε το μήκος του τμήματος ΑΔ. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ. Έχουμε διαδοχικά:

$$A\Delta^2 = A\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2$$

$$A\Delta^2 = \sqrt{12}^2 + 6^2$$

$$A\Delta^2 = 12 + 36$$

$$A\Delta^2 = 48$$

$$A\Delta = \sqrt{48}$$

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21149-Λύση

Στη συνέχεια, εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΒΔ με μήκη πλευρών $AB = 4$, $\Delta B = 8$, $A\Delta = \sqrt{48}$. Έχουμε:

$\Delta B^2 = 8^2 = 64$

$AB^2 + A\Delta^2 = 4^2 + \sqrt{48}^2 = 16 + 48 = 64$

Αφού είναι $\Delta B^2 = AB^2 + A\Delta^2$, συμπεραίνουμε ότι $B\widehat{A}\Delta = 90^o$. Επομένως, το τμήμα ΔΑ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21183

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά $\sqrt{2}$ και το τετράγωνο ΔΕΖΗ έχει πλευρά 1.

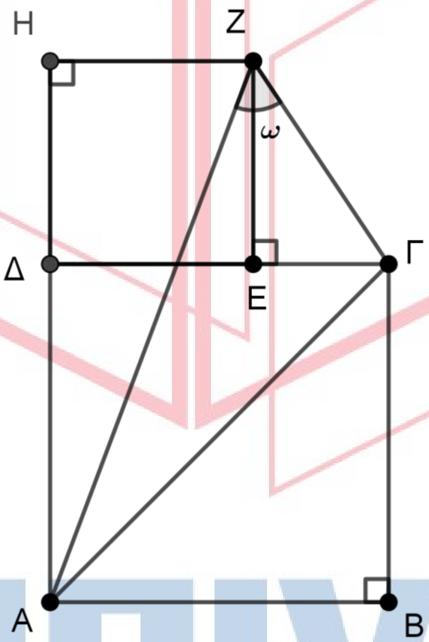
α) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = 2. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι

i. $\mathrm{A}\mathrm{Z}^2 = 4 + 2\sqrt{2}$. (Μονάδες 7)

ii. $\Gamma\mathrm{Z}^2 = 4 - 2\sqrt{2}$. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίστε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \hat{\omega}$. (Μονάδες 5)



αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21183-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 4 \text{ επομένως } ΑΓ = 2.$$

β)

i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΖ είναι $ΑΗ = ΑΔ + ΔΗ = \sqrt{2} + 1$, επομένως έχουμε:

$$ΑΖ^2 = ΑΗ^2 + ΗΖ^2 = (\sqrt{2}+1)^2 + 1^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1 = 4 + 2\sqrt{2}.$$

ii. Είναι $ΕΓ = ΔΓ - ΔΕ = \sqrt{2} - 1$. Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΕΓ έχουμε:

$$ΖΓ^2 = ΖΕ^2 + ΕΓ^2 = 1^2 + (\sqrt{2}-1)^2 = 1 + 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 4 - 2\sqrt{2}.$$

γ) Από το β ερώτημα προκύπτει ότι

$$ΑΖ = \sqrt{4+2\sqrt{2}} \text{ και } ΖΓ = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

Στο τρίγωνο ΑΖΓ με εφαρμογή του νόμου των συνημιτόνων προκύπτει

$$ΑΓ^2 = ΑΖ^2 + ΖΓ^2 - 2ΑΖ \cdot ΖΓ \cdot συνω \text{ ή}$$

$$2^2 = 4 + 2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4-2\sqrt{2}} \cdot συνω \text{ ή}$$

$$2 \cdot \sqrt{\left(4+2\sqrt{2}\right)\left(4-2\sqrt{2}\right)} \cdot συνω = 4 \text{ ή}$$

$$2 \cdot \sqrt{4^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} \cdot συνω = 4 \text{ ή}$$

$$συνω = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ άρα } \hat{ω} = 45^\circ.$$

αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21185

ΘΕΜΑ 4

Τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα αυτά μπορούν να σχηματίσουν ορθογώνιο τρίγωνο. (Μονάδες 8)

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ είναι σχεδιασμένα πάνω σε ένα χαρτί και αυτό το φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση λ%, να αποδείξετε ότι και με τα νέα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζεται πάλι ορθογώνιο τρίγωνο. (Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με πλευρές 10α, 8β και 6γ. (Μονάδες 7)

αλιμπινίσης

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21185-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αφού τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα, τότε έχουμε την αναλογία:

$$\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{4}=\frac{\gamma}{3}$$

Αν ονομάσουμε τους ίσους λόγους κ (κ > 0), τότε έχουμε:

$$\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{4}=\frac{\gamma}{3}=\kappa \ \text{ ή } \ \begin{Bmatrix} \frac{\alpha}{5}=\kappa \\ \frac{\beta}{4}=\kappa \\ \frac{\gamma}{3}=\kappa \end{Bmatrix} \ \text{ ή } \ \begin{Bmatrix} \alpha=5\kappa \\ \beta=4\kappa \\ \gamma=3\kappa \end{Bmatrix}$$

Αφού κ > 0 το μεγαλύτερο μήκος είναι εκείνο που έχει μέτρο 5κ, τότε:

$$\alpha^2=(5\kappa)^2=25\kappa^2$$

$$\beta^2+\gamma^2=(4\kappa)^2+(3\kappa)^2=16\kappa^2+9\kappa^2=25\kappa^2$$

συγκρίνοντας τις παραπάνω ισότητες έχουμε: $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, δηλαδή τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ σχηματίζουν τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά α.

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ σχεδιαστούν πάνω σε ένα χαρτί που φωτοτυπηθεί με μεγέθυνση λ%, τότε τα μέτρα αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων θα πολλαπλασιαστούν επί $\frac{\lambda}{100}$ (λ>100). Έτσι προκύπτουν νέα ευθύγραμμα τμήματα με μήκη που έχουν μέτρα:

$$\frac{\lambda}{100}\cdot\alpha,\ \frac{\lambda}{100}\cdot\beta \ \text{ και } \ \frac{\lambda}{100}\cdot\gamma.$$

Για τα νέα ευθύγραμμα τμήματα ισχύει:

$$(\frac{\lambda}{100}\cdot\beta)^2+(\frac{\lambda}{100}\cdot\gamma)^2=\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2\cdot\beta^2+\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2\cdot\gamma^2=\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2(\beta^2+\gamma^2)=\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2\cdot\alpha^2=(\frac{\lambda}{100}\cdot\alpha)^2$$

δηλαδή ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα, συνεπώς σχηματίζουν πάλι νέο ορθογώνιο τρίγωνο.

γ) Επειδή τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα, έχουμε από το (α) ερώτημα ότι:

$$\alpha=5\kappa,\ \beta=4\kappa \text{ και } \gamma=3\kappa$$

Έστω ότι σχηματίζεται τρίγωνο με τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν μήκη με μέτρα 10α, 8β και 6γ, τότε ισχύει η τριγωνική ανισότητα και θα έχουμε:

$$10\alpha<8\beta+6\gamma \Leftrightarrow 10\cdot5\kappa<8\cdot4\kappa+6\cdot3\kappa$$

αλιμπινίσης ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21185-Λύση

$$\Leftrightarrow 50\kappa < 32\kappa + 18\kappa$$

$$\Leftrightarrow 50\kappa < 50\kappa \text{ , \quad άτοπο}$$

επομένως δεν σχηματίζεται τέτοιο τρίγωνο.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21197

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 2α και Λ το μέσο της πλευράς του ΓΔ. Έστω ότι το ημικύκλιο, που σχεδιάζεται στο εσωτερικό του τετραγώνου με διάμετρο την πλευρά του ΑΒ, έχει εμβαδόν 10. Τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

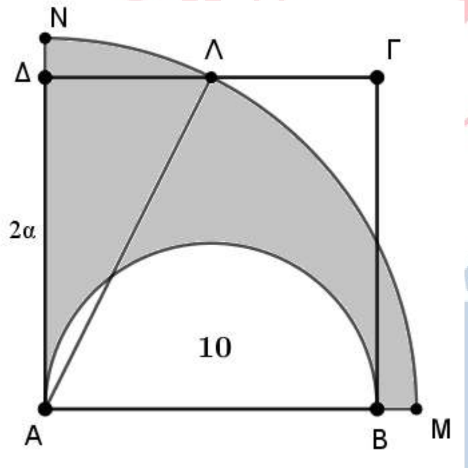
i. Το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι (ΑΒΓΔ) = $\frac{80}{\pi}$. (Μονάδες 6)

ii. $ΑΛ^2 = \frac{100}{\pi}$ (Μονάδες 6)

β) Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΛ κατασκευάζουμε τεταρτοκύκλιο $Α\widehat{ΜΝ}$, και έστω Μ, Ν είναι τα σημεία τομής του με τις προεκτάσεις των πλευρών του τετραγώνου ΑΒ, ΑΔ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου ΑΒΜΝΑ. (Μονάδες 8)

ii. Τον λόγο του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου $Α\widehat{ΜΝ}$ προς το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 5)



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21197-Λύση

ΘΕΜΑ 4

α)

i. Το ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 2\alpha$ έχει ακτίνα α και εμβαδόν $E_{AB} = \frac{\pi\alpha^2}{2}$. Αφού το εμβαδό του ημικυκλίου είναι 10 τότε:

$$E_{AB} = \frac{\pi\alpha^2}{2} \quad ή \quad 10 = \frac{\pi\alpha^2}{2} \quad ή \quad \pi\alpha^2 = 20 \quad ή \quad \alpha^2 = \frac{20}{\pi}$$

Το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ με πλευρά 2α είναι:

$$(ΑΒΓΔ) = (2\alpha)^2 = 4\alpha^2 = 4 \cdot \frac{20}{\pi} = \frac{80}{\pi}$$

ii. Το σημείο Λ είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ του τετραγώνου, επομένως $ΔΛ = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΛ εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$ΑΛ^2 = ΑΔ^2 + ΔΛ^2 = (2\alpha)^2 + \alpha^2 = 5\alpha^2$$

Από το α) i. ερώτημα είναι $\alpha^2 = \frac{20}{\pi}$, επομένως $ΑΛ^2 = 5\alpha^2 = 5 \cdot \frac{20}{\pi} = \frac{100}{\pi}$

β)

i. Το ζητούμενο εμβαδό Ε του σκιασμένου σχήματος, υπολογίζεται αν από το εμβαδό του τεταρτοκυκλίου $Α\widehat{ΜΝ}$ αφαιρέσουμε το εμβαδό E_{AB} του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΒ.

Το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου $Α\widehat{ΜΝ}$ είναι:

$$\left(Α\widehat{ΜΝ}\right) = \frac{\pi \cdot ΑΛ^2}{4} = \frac{\pi \cdot \frac{100}{\pi}}{4} = \frac{100}{4} = 25$$

επομένως το ζητούμενο εμβαδό Ε του σκιασμένου σχήματος είναι:

$$E = \left(Α\widehat{ΜΝ}\right) - E_{AB} = 25 - 10 = 15$$

ii. Από το ερώτημα (β.i) το εμβαδό του τεταρτοκυκλίου $Α\widehat{ΜΝ}$ είναι $\left(Α\widehat{ΜΝ}\right) = 25$και από το α) i. ερώτημα το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $(ΑΒΓΔ) = \frac{80}{\pi}$, επομένως ο λόγος του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου $\left(Α\widehat{ΜΝ}\right)$ προς το εμβαδό του τετραγώνου (ΑΒΓΔ) θα είναι:

$$\frac{\left(Α\widehat{ΜΝ}\right)}{(ΑΒΓΔ)} = \frac{25}{\frac{80}{\pi}} = \frac{25\pi}{80} = \frac{5\pi}{16}$$

αλμινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21298

ΘΕΜΑ 2

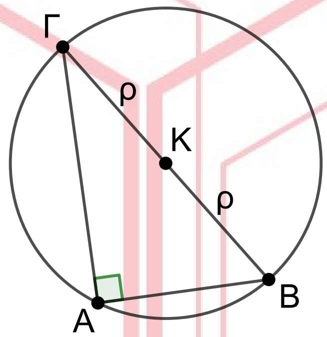
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A}$ ορθή γωνία και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου, που έχει κέντρο το Κ και ακτίνα ρ. Επίσης δίνεται ότι το μήκος του κύκλου ισούται με 10π.

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου έχει μήκος 5. (Μονάδες 08)

β) Αν η χορδή ΑΒ έχει μήκος 6 να υπολογίσετε:

i. το μήκος της χορδής ΑΓ του κύκλου, (Μονάδες 10)

ii. το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21298-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το μήκος του κύκλου (K,ρ) είναι $L = 2\pi \cdot \rho$. Άρα, $\rho = \frac{L}{2\pi}$.

Εφόσον $L = 10\pi$ θα είναι $\rho = \frac{10\pi}{2\pi}$ ή $\rho = 5$.

β) i. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει κάθετες πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ και υποτείνουσα τη ΒΓ, που είναι διάμετρος του κύκλου.

Για τη διάμετρο ΒΓ ισχύει ότι $B\Gamma = 2\rho = 10$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$ ή $A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2$ ή $A\Gamma^2 = 100 - 36$ ή $A\Gamma^2 = 64$ ή $A\Gamma = 8$.

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με $(AB\Gamma) = \frac{AB \cdot A\Gamma}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = \frac{48}{2} = 24$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21300

ΘΕΜΑ 2

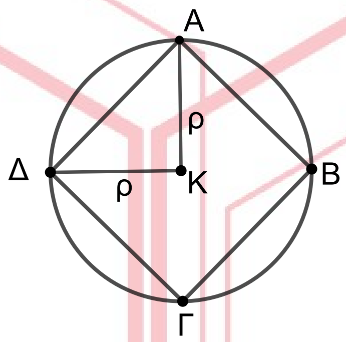
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Κ, ρ), όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 08)

β) Αν επιπλέον το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΔ είναι 4:

i. Να αποδείξετε ότι $\rho = \sqrt{8}$. (Μονάδες 07)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου (Κ, ρ). (Μονάδες 10)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21300-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η γωνία $\hat{AK\Delta}$ είναι η κεντρική γωνία $\hat{\omega}_4$ του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Άρα $A\hat{K}\Delta = \frac{360^o}{4} = 90^o$.

Επομένως το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την $\hat{AK\Delta}$ και υποτείνουσα την ΑΔ.

β) i. Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΔ είναι $(AK\Delta) = \frac{1}{2} \cdot K\Delta \cdot KA = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \rho = \frac{1}{2}\rho^2$.

Όμως $(AK\Delta) = 4$, οπότε $\frac{1}{2}\rho^2 = 4$ ή $\rho^2 = 8$ ή $\rho = \sqrt{8}$.

ii. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E = \pi\rho^2 = \pi \cdot (\sqrt{8})^2 = 8\pi$.

αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21301

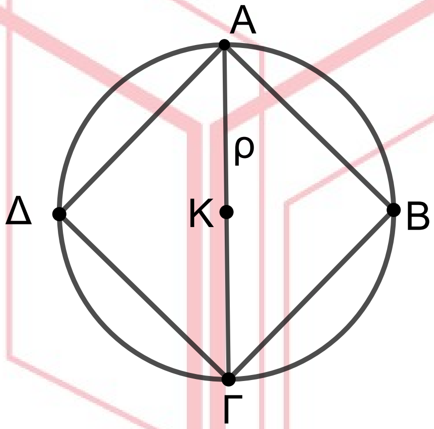
ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο (Κ, ρ) εμβαδού Ε = 4π είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο ΑΒΓΔ, όπως στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε:

α) την ακτίνα ρ του κύκλου (Κ, ρ). (Μονάδες 07)

β) το μήκος της διαμέτρου ΑΓ του κύκλου (Κ, ρ) και της πλευράς ΑΒ του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 10)

γ) το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 08)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21301-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για το εμβαδόν Ε του κύκλου (Κ, ρ) ισχύει ότι $E = \pi\rho^2$. Όμως $E = 4\pi$, άρα $\pi\rho^2 = 4\pi$ ή $\rho^2 = 4$ ή $\rho = 2$.

β) Για τη διάμετρο ΑΓ του κύκλου (Κ, ρ) ισχύει ότι $A\Gamma = 2\rho = 4$.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{B} = 90^\circ$ και ισοσκελές με ΑΒ = ΒΓ, που είναι ίσες ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$ ή $A\Gamma^2 = AB^2 + AB^2$ ή $2AB^2 = 16$ ή $AB^2 = 8$ ή $AB = \sqrt{8}$.

(εναλλακτικά:

Γνωρίζουμε ότι το μήκος της πλευράς λ_4 του τετραγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας ρ είναι $\lambda_4 = \rho\sqrt{2}$. Άρα $\lambda_4 = 2\sqrt{2} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{8}$.)

γ) Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $(AB\Gamma\Delta) = AB^2 = (\sqrt{8})^2 = 8$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21302

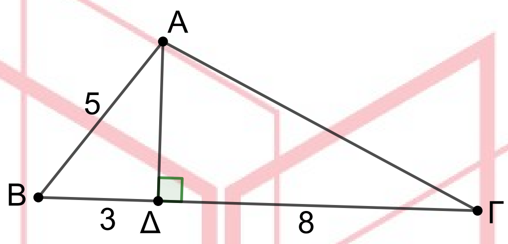
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5 και ΑΔ το ύψος του από την κορυφή Α. Αν ΒΔ = 3 και ΓΔ = 8 να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΔ = 4$. (Μονάδες 07)

β) $ΑΓ = \sqrt{80}$. (Μονάδες 08)

γ) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 10)



αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21302-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο με $\Delta = 90^o$ οπότε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$ ή $A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2$ ή $A\Delta^2 = 5^2 - 3^2$ ή $A\Delta^2 = 16$ ή $A\Delta = 4$.

β) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο με $\Delta = 90^o$ οπότε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:

$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2$ ή $A\Gamma^2 = 4^2 + 8^2$ ή $A\Gamma^2 = 16 + 64$ ή $A\Gamma^2 = 80$ ή $A\Gamma = \sqrt{80}$.

γ) Για τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$AB = 5$, $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma = 3 + 8 = 11$ και $A\Gamma = \sqrt{80}$. Επίσης $B\Gamma^2 = 121$ και $A\Gamma^2 = (\sqrt{80})^2 = 80$.

Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ είναι η ΒΓ, εφόσον $B\Gamma^2 > A\Gamma^2$.

Συνεπώς η $\hat{A}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ, εφόσον βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά του ΒΓ.

Επιπλέον $AB^2 + A\Gamma^2 = 25 + 80 = 105$ και $B\Gamma^2 = 121$ οπότε είναι $B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2$, άρα η γωνία $\hat{A} > 90^o$ επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21636

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με μήκη πλευρών ΑΒ=6, ΑΓ=8, και ΒΓ=10.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)

β) Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{3}{4}$. (Μονάδες 10)

ii. Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$. (Μονάδες 5)

αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21636-Λύση

ΛΥΣΗ

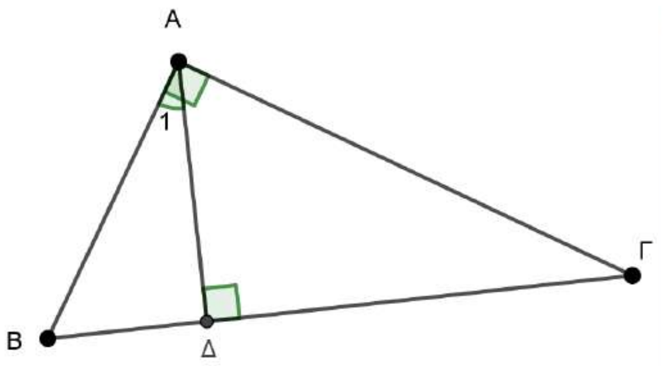
α) Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΒ=6, ΑΓ=8, και ΒΓ=10, οπότε ΒΓ > ΑΒ, ΑΓ.

Επίσης $ΒΓ^2 = 10^2 = 100$ και $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$.

Άρα $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ, είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΒΓ και ορθή γωνία την Α.

β)

i.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι: $\widehat{A}_1 + \widehat{B} = 90^0$.

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\widehat{\Gamma} + \widehat{B} = 90^0$.

Οπότε $\widehat{A}_1 + \widehat{B} = \widehat{\Gamma} + \widehat{B}$ ή $\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}$. Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας $λ = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

ii. Γνωρίζουμε ότι ο λόγος των εμβαδών ομοίων τριγώνων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Οπότε λόγω του ερωτήματος (β, ι) θα είναι: $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)} = λ^2 = (\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$.

αλφανιόσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21783

ΘΕΜΑ 3

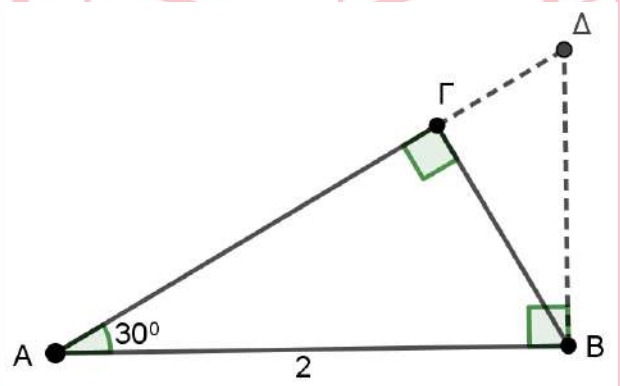
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\widehat{\Gamma} = 90^0$, $\widehat{A} = 30^0$ και ΑΒ = 2.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = $\sqrt{3}$. (Μονάδες 7)

β) Φέρνουμε κάθετη στην ΑΒ, στο σημείο Β, που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο Δ.

Να αποδείξετε ότι ΑΔ = $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 10)

γ) Αν Κ είναι το μέσο της ΑΔ, να αποδείξετε ότι (ΚΑΒ) = $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 8)

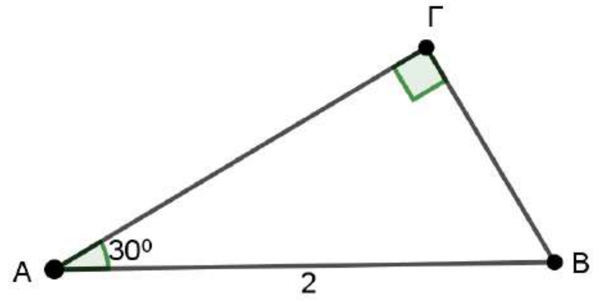


αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21783-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

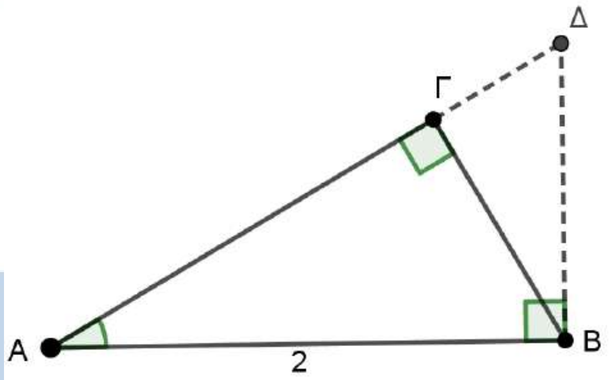


Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΒ = 2, $\hat{\Gamma} = 90^0$ και $\hat{A} = 30^0$ οπότε η ΒΓ = $\frac{AB}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι:

$A\Gamma^2 = AB^2 - B\Gamma^2$ ή $A\Gamma^2 = 2^2 - 1^2$ ή $A\Gamma^2 = 3$, οπότε $A\Gamma = \sqrt{3}$.

β)



Από τα δεδομένα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι ορθογώνια.

Επίσης, έχουν τη γωνία Α κοινή, οπότε θα είναι όμοια. Επομένως θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Άρα $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

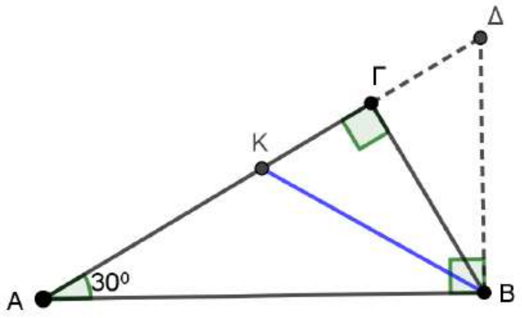
Όμως η ΑΒ = 2 και λόγω του ερωτήματος (α) η $A\Gamma = \sqrt{3}$ οπότε έχουμε:

$\frac{A\Delta}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ή $A\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

γ) Το Κ είναι μέσο του ΑΔ επομένως η $AK = \frac{A\Delta}{2}$.

Η τελευταία ισότητα λόγω του ερωτήματος (β, i) δίνει: $AK = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

21783-Λύση



Έτσι $(ΚΑΒ) = \frac{1}{2} \cdot ΑΒ \cdot ΑΚ \cdot ημ30^0 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21823

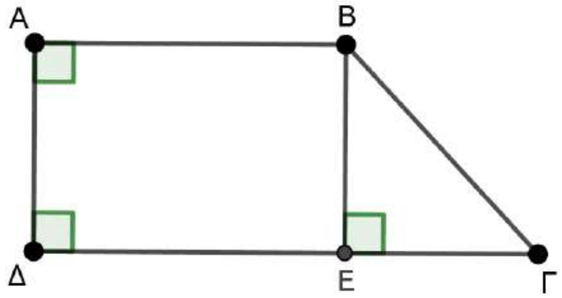
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, με $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^0$ και ΑΔ = 4, ΑΒ = 5, Δ Γ= 8. Από την κορυφή Β του τραπεζίου, φέρνουμε την ΒΕ κάθετη στην πλευρά ΔΓ.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΕΓ. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ του τραπεζίου. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(\mathrm{B\Delta\Gamma})}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}$. (Μονάδες 8)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21823-Λύση

ΛΥΣΗ

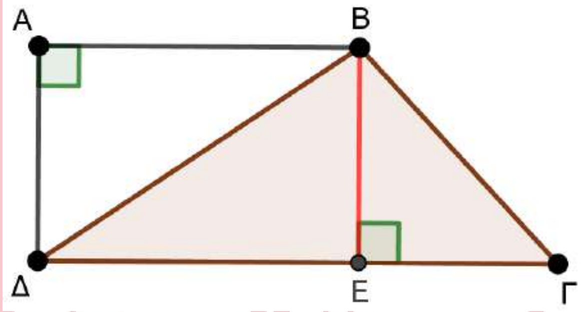
α) Από τα δεδομένα έχουμε: $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^0$ και ΑΔ=4, ΑΒ=5, ΔΓ=8.

Το ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο (έχει τρείς γωνίες ορθές), οπότε ΒΕ = ΑΔ = 4 και ΔΕ = ΑΒ = 5. Άρα η ΕΓ = ΔΓ – ΔΕ = 8 – 5 = 3.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$B\Gamma^2 = BE^2 + E\Gamma^2$ ή $B\Gamma^2 = 4^2 + 3^2$ ή $B\Gamma^2 = 25$, άρα ΒΓ = 5.

γ)



Λόγω του ερωτήματος (α) είναι:

- $(B\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}\Delta\Gamma \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$
- $(AB\Gamma\Delta) = \frac{AB+\Delta\Gamma}{2} \cdot A\Delta = \frac{5+8}{2} \cdot 4 = 26$

οπότε: $\frac{(B\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$.

αλμπινιώσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21840

ΘΕΜΑ 4

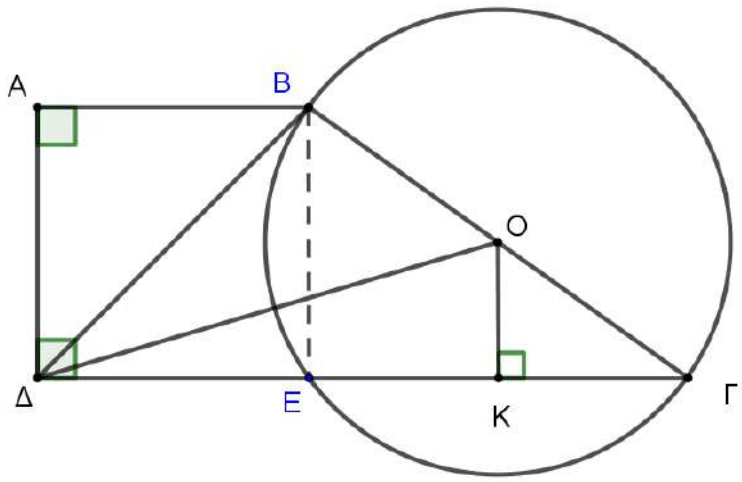
Έστω ΑΒΓΔ τραπέζιο με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$, ΑΒ=5 , ΓΔ=13 και εμβαδόν (ΑΒΓΔ)=54. Ο κύκλος με διάμετρο τη ΒΓ τέμνει τη ΓΔ στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ = 6. (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μήκος των ΒΕ και ΒΓ. (Μονάδες 6)

γ) Αν ΟΚ είναι η κάθετη από το σημείο Ο στην ΕΓ, να αποδείξετε ότι ΟΚ=3, και να υπολογίσετε το μήκος της ΟΔ. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΟ. (Μονάδες 7)



αλφαβητος
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

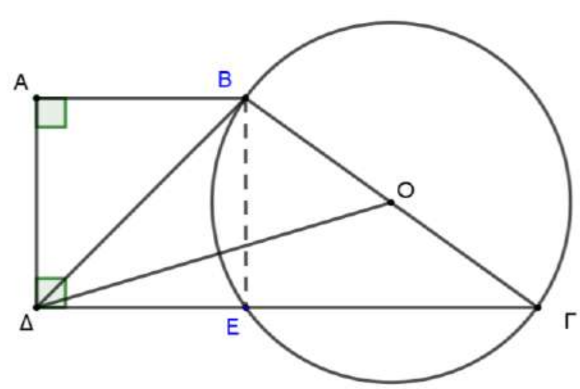
21840-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι 54 είναι:

$(ΑΒΓΔ)=\frac{(ΑΒ+ΓΔ)\cdot ΑΔ}{2} \Longrightarrow 54=\frac{(5+13)\cdot ΑΔ}{2} \Longrightarrow 54 = 9 \cdot ΑΔ \Longrightarrow ΑΔ=\frac{54}{9} = 6$

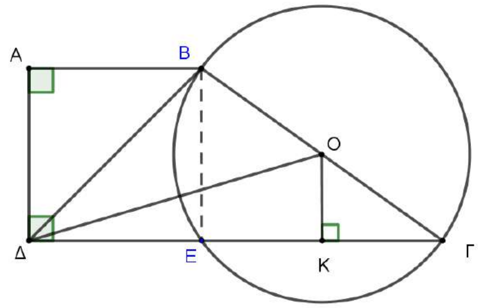
β)



Η γωνία $Β\hat{Ε}Γ=90^o$ (εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο), άρα και $Β\hat{Ε}Δ=90^o$, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχοντας σύμφωνα με την υπόθεση $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^o$ και $Β\hat{Ε}Δ=90^o$, δηλαδή τρεις γωνίες ορθές, είναι ορθογώνιο και επομένως ΒΕ=ΑΔ (απέναντι πλευρές ορθογωνίου), άρα ΒΕ=6.

Ακόμη ΔΕ=ΑΒ=5, οπότε ΕΓ=ΔΓ-ΔΕ=13-5=8. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε $ΒΓ^2=ΒΕ^2+ΕΓ^2= 36+64=100$. Άρα ΒΓ=10.

γ)



Η κάθετος ΟΚ από το κέντρο Ο στη χορδή ΕΓ του κύκλου διχοτομεί τη χορδή, άρα το Κ είναι το μέσο του τμήματος ΕΓ. Το Ο ως κέντρο του κύκλου είναι το μέσο της διαμέτρου ΒΓ.

21840-Λύση

Οπότε το ΟΚ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΕΓ του τριγώνου ΒΕΓ και άρα ΟΚ = $\frac{ΒΕ}{2}$ = 3.

Αφού η ΟΚ είναι κάθετος στην ΕΓ, άρα θα είναι κάθετος και στην ΔΓ, οπότε το τρίγωνο ΔΟΚ είναι ορθογώνιο και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΔΟΚ έχουμε:

$ΔΟ^2=ΔΚ^2+ΟΚ^2 = 81+9 =90$. Άρα $ΔΟ=3\sqrt{10}$.

δ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΓ είναι (ΒΔΓ) = $\frac{ΔΓ.ΒΕ}{2} = \frac{13.6}{2}$ = 39. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα και εφόσον η ΔΟ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΔΓ, άρα :

$$(ΒΔΟ) = \frac{(ΒΔΓ)}{2} = \frac{39}{2} .$$

αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21975

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

ii. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

iv. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.

v. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

(Μονάδες 15)

αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21975-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Σωστό
ii. Λάθος
iii. Σωστό
iv. Λάθος
v. Σωστό

β) Θεώρημα ΙΙΙ σελίδα 82.

αλιμπινίσης

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21979

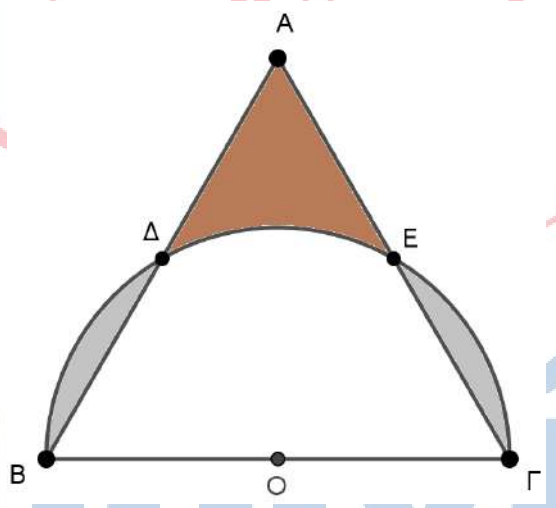
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, πλευράς 2α. Με διάμετρο τη ΒΓ γράφουμε ημικύκλιο, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ,Ε αντίστοιχα. Αν Ο είναι το κέντρο του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΓ = α\sqrt{3}$. (Μονάδες 8)

β) το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται στο εξωτερικό του τριγώνου ισούται με $Ε = \frac{(2π-3\sqrt{3})α^2}{6}$. (Μονάδες 9)

γ) το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου που ορίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΑΕ και το τόξο ΔΕ είναι: $Ε' = \frac{(3\sqrt{3}-π)α^2}{6}$. (Μονάδες 8)

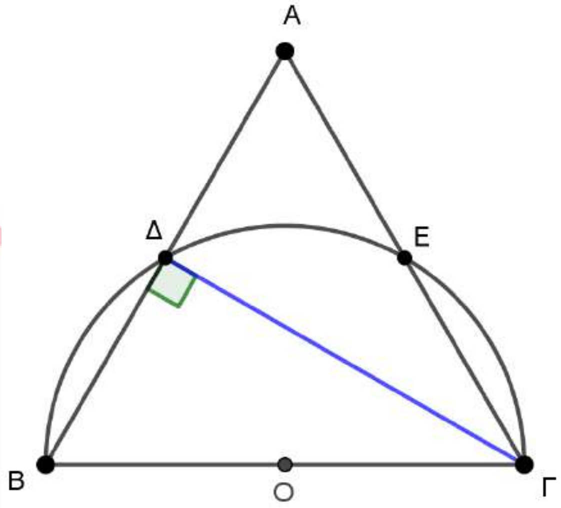


αλμ...ίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21979-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



Από τα δεδομένα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς 2α. Άρα έχουμε:

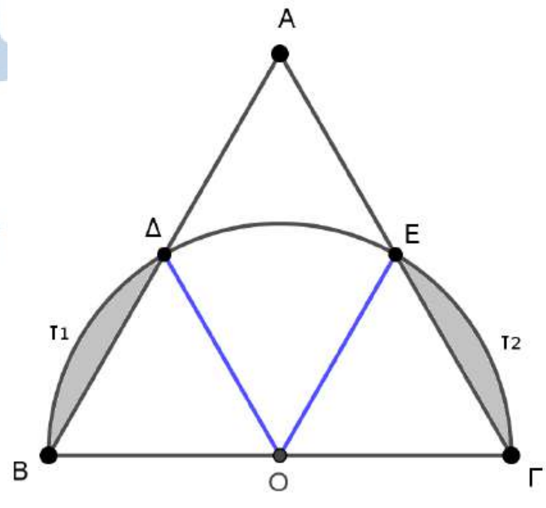
ΑΒ = ΒΓ = ΓΑ = 2α, ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ = ΟΕ = α και $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 60^0$.

Επίσης η ΒΓ είναι διάμετρος του ημικυκλίου, άρα $B\widehat{\Delta}\Gamma = 90^0$. Δηλαδή στο ισόπλευρο τρίγωνο ΓΑΒ, το ΓΔ είναι ύψος, οπότε θα είναι και διάμεσος. Άρα το Δ είναι μέσο της ΑΒ και όμοια το Ε, είναι μέσο της ΑΓ, οπότε ΔΒ = ΔΑ = ΕΑ = ΕΓ = α.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ, από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$\Delta\Gamma^2 = B\Gamma^2 - B\Delta^2$ ή $\Delta\Gamma^2 = (2\alpha)^2 - \alpha^2$ ή $\Delta\Gamma^2 = 3\alpha^2$, επομένως $\Delta\Gamma = \alpha\sqrt{3}$.

β)



21979-Λύση

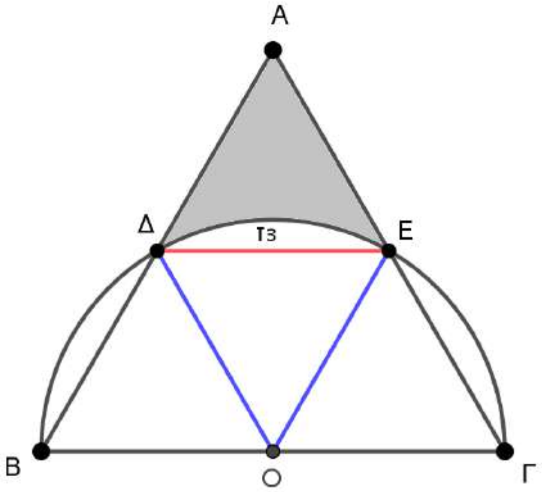
Λόγω του ερωτήματος (α), τα τρίγωνα ΟΒΔ, ΟΓΕ είναι ισόπλευρα πλευράς α, οπότε θα είναι ίσα. Επομένως τα εμβαδά τ_1, τ_2 των δύο κυκλικών τμημάτων θα είναι ίσα. Άρα Ε = $\tau_1 + \tau_2 = 2\tau_1$ (1).

Όμως $\tau_1 = (\text{O}\overset{\frown}{\text{B}\Delta}) - (\text{OB}\Delta) =$

$$\frac{\pi\alpha^2 60}{360} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi\alpha^2}{6} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi\alpha^2 - 3\alpha^2\sqrt{3}}{12} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})\alpha^2}{12}.$$

Οπότε από την (1): $E = 2\frac{(2\pi-3\sqrt{3})\alpha^2}{12} = \frac{(2\pi-3\sqrt{3})\alpha^2}{6}$.

γ)



Λόγω του ερωτήματος (α), τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΟΔΕ είναι ισόπλευρα πλευράς α. Οπότε το εμβαδό τ_3, του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από τη χορδή ΔΕ θα ισούται με τα εμβαδά τ_1 και τ_2. Δηλαδή $\tau_3 = \frac{(2\pi-3\sqrt{3})\alpha^2}{12}$.

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E' = (\text{A}\Delta\text{E}) - \tau_3 = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} - \frac{(2\pi-3\sqrt{3})\alpha^2}{12} = \frac{3\sqrt{3}\alpha^2 - 2\pi\alpha^2 + 3\sqrt{3}\alpha^2}{12} = \frac{6\sqrt{3}\alpha^2 - 2\pi\alpha^2}{12} =$$

$$\frac{2(3\sqrt{3}-\pi)\alpha^2}{12} = \frac{(3\sqrt{3}-\pi)\alpha^2}{6}.$$

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22021

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^o$ και $ΒΓ = 2ρ$. Με διάμετρο ΒΓ γράφουμε ημικύκλιο εξωτερικά του τριγώνου. Επίσης, γράφουμε τον κυκλικό τομέα $Α\widehat{ΒΓ}$ με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΒ = ρ\sqrt{2}$.

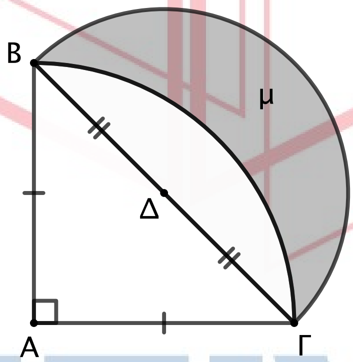
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου μ ως συνάρτηση του ρ.

(Μονάδες 10)

γ) Να συγκρίνετε το εμβαδόν του μηνίσκου μ με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Τι συμπέρασμα προκύπτει;

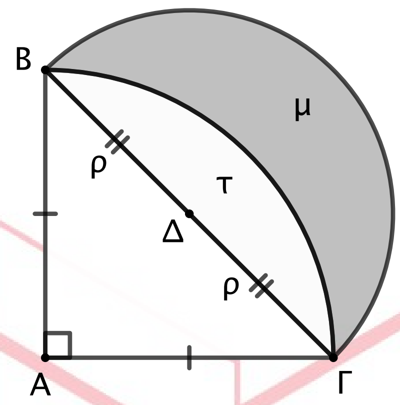
(Μονάδες 05)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22021-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο είναι $ΑΒ = ΑΓ$. Έχουμε διαδοχικά:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$$

$$(2ρ)^2 = ΑΒ^2 + ΑΒ^2$$

$$4ρ^2 = 2ΑΒ^2$$

$$ΑΒ^2 = 2ρ^2$$

Επομένως, $ΑΒ = ρ\sqrt{2}$.

β) Το εμβαδόν (μ) του σχηματιζόμενου μηνίσκου προκύπτει αν από το εμβαδόν του ημικυκλίου διαμέτρου ΒΓ αφαιρέσουμε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος με χορδή ΒΓ, δηλαδή:

$$(μ) = (Δ\,\overset{\frown}{ΒΓ}) - (τ)$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου $Δ\,\overset{\frown}{ΒΓ}$ είναι:

$$(Δ\,\overset{\frown}{ΒΓ}) = \frac{π \cdot ΔΓ^2 \cdot 180^o}{360^o} = \frac{π \cdot ρ^2}{2}$$

Το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος με χορδή ΒΓ υπολογίζεται αφαιρώντας από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $Α\,\overset{\frown}{ΒΓ}$ το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή:

$$(τ) = (Α\,\overset{\frown}{ΒΓ}) - (ΑΒΓ) = \frac{π \cdot ΑΒ^2 \cdot 90^o}{360^o} - \frac{1}{2}ΑΒ \cdot ΑΓ = \frac{π \cdot 2ρ^2}{4} - \frac{1}{2}2ρ^2 = \frac{π \cdot ρ^2}{2} - ρ^2$$

Επομένως, έχουμε τελικά:

$$(μ) = \frac{π \cdot ρ^2}{2} - \left(\frac{π \cdot ρ^2}{2} - ρ^2\right) = ρ^2$$

γ) Στο προηγούμενο ερώτημα βρέθηκε ότι $(μ) = ρ^2$.

Επίσης, είναι:

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22021-Λύση

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΑΓ = \frac{1}{2} 2ρ^2 = ρ^2$$

Επομένως, $(μ) = (ΑΒΓ)$, δηλαδή ο σχηματιζόμενος μηνίσκος είναι ισοδύναμος με το τρίγωνο ΑΒΓ.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22024

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και τυχαίο σημείο του Μ, τέτοιο ώστε $AM = 2\alpha$ και $MB = 2\beta$. Με διαμέτρους ΑΜ, ΜΒ και ΑΒ γράφουμε ημικύκλια προς το ίδιο μέρος του ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Γ το σημείο τομής του ημικυκλίου ΑΒ και της κάθετης από το Μ στο ΑΒ.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα τρία ημικύκλια $Z\overset{\frown}{AM}$, $E\overset{\frown}{MB}$ και $\Delta\overset{\frown}{AB}$, όπου Ζ, Ε, Δ είναι τα μέσα των ΑΜ, ΜΒ και ΑΒ αντίστοιχα.

(Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καμπυλόγραμμου σχήματος τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.

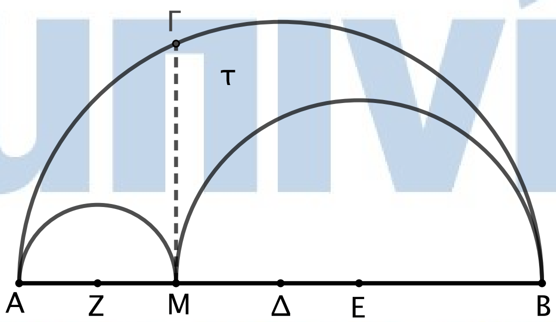
(Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων έχει το ίδιο εμβαδόν με τον κύκλο διαμέτρου ΜΓ.

(Μονάδες 05)

δ) Για ποια θέση του Μ μεγιστοποιείται το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ;

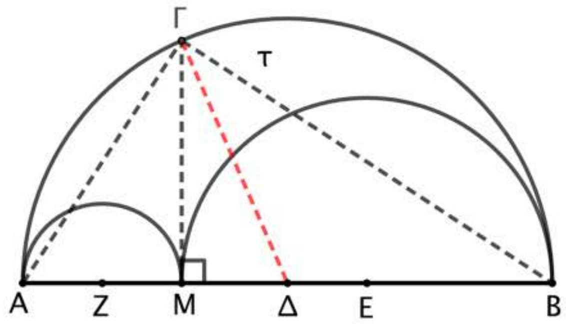
(Μονάδες 05)



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22024-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης είναι $ΑΖ = ΖΜ = α$, $ΜΕ = ΕΒ = β$ και $ΑΔ = ΔΒ = α + β$.

Το εμβαδόν του ημικυκλίου $Ζ\widehat{ΑΜ}$ είναι:

$$(Ζ\widehat{ΑΜ}) = \frac{π \cdot ΖΜ^2 \cdot 180^o}{360^o} = \frac{π \cdot α^2}{2}$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου $Ε\widehat{ΜΒ}$ είναι:

$$(Ε\widehat{ΜΒ}) = \frac{π \cdot ΕΒ^2 \cdot 180^o}{360^o} = \frac{π \cdot β^2}{2}$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου $Δ\widehat{ΑΒ}$ είναι:

$$(Δ\widehat{ΑΒ}) = \frac{π \cdot ΔΒ^2 \cdot 180^o}{360^o} = \frac{π \cdot (α + β)^2}{2}$$

β) Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων υπολογίζεται αν αφαιρέσουμε από το εμβαδόν του ημικυκλίου $Δ\widehat{ΑΒ}$ τα εμβαδά των ημικυκλίων $Ζ\widehat{ΑΜ}$ και $Ε\widehat{ΜΒ}$, δηλαδή:

$$(τ) = (Δ\widehat{ΑΒ}) - (Ζ\widehat{ΑΜ}) - (Ε\widehat{ΜΒ}) = \frac{π \cdot (α + β)^2}{2} - \frac{π \cdot α^2}{2} - \frac{π \cdot β^2}{2}$$

Οπότε

$$(τ) = \frac{π}{2}(α^2 + 2αβ + β^2 - α^2 - β^2) = \frac{π}{2}2αβ = παβ$$

γ) Ο κύκλος με διάμετρο ΜΓ έχει ακτίνα $ρ = \frac{ΜΓ}{2}$ και εμβαδόν

$$Ε = π \cdot ρ^2 = π \cdot \left(\frac{ΜΓ}{2}\right)^2 = \frac{π \cdot ΜΓ^2}{4}$$

Όμως, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Γ, αφού η γωνία $Α\hat{Γ}Β$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ημικύκλιο ΑΒ. Οπότε:

$$ΜΓ^2 = ΑΜ \cdot ΜΒ = 2α \cdot 2β = 4αβ$$

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22024-Λύση

Άρα, έχουμε τελικά:

$$E = \frac{\pi \cdot 4\alpha\beta}{4} = \pi\alpha\beta$$

Επομένως, $E = (\tau)$, δηλαδή ο κύκλος με διάμετρο ΜΓ είναι ισοδύναμος με το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.

δ) Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ θα γίνει μέγιστο όταν το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο ΜΓ γίνει μέγιστο, δηλαδή όταν μεγιστοποιηθεί το κλάσμα

$$\frac{\pi \cdot \text{ΜΓ}^2}{4}$$

Το κλάσμα αυτό παίρνει τη μέγιστη τιμή του όταν το κάθετο τμήμα ΜΓ γίνει μέγιστο, δηλαδή όταν $\text{ΜΓ} = R$, αφού $\text{ΜΓ} \leq \text{ΔΓ} = R$. Άρα, το σημείο Μ θα είναι το μέσο του ΑΒ, δηλαδή θα είναι $\alpha = \beta$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22035

ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος παριστάνει την κάτοψη ενός κτήματος με $AB = 60$ m, $B\Gamma = 80$ m, $\hat{\Delta} = 60^o$, $\hat{B} = 90^o$ και $A\Delta = \Gamma\Delta$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου ΑΓ.

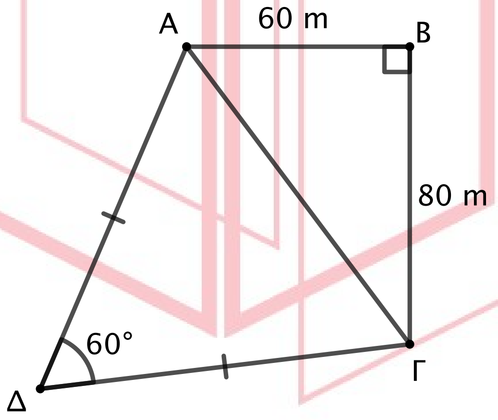
(Μονάδες 09)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 04)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ. Πόσο είναι το συνολικό εμβαδόν του κτήματος;

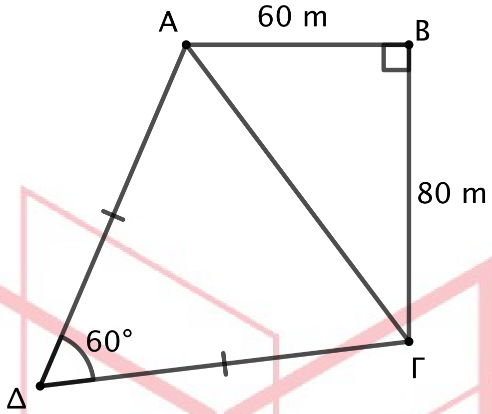
(Μονάδες 12)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22035-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$$

$$ΑΓ^2 = 60^2 + 80^2$$

$$ΑΓ^2 = 3600 + 6400$$

$$ΑΓ^2 = 10000$$

Επομένως, $ΑΓ = 100$ m.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ είναι $\hat{Δ} = 60^o$. Οπότε, το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο με $ΑΔ = ΑΓ = ΓΔ = 100$ m.

γ) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΒΓ = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 80 = 2400 \ \ m^2$$

Το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΔΓ είναι:

$$(ΑΔΓ) = \frac{ΑΓ^2\sqrt{3}}{4} = 2500 \cdot \sqrt{3} \ \ m^2$$

Το συνολικό εμβαδόν του κτήματος θα είναι:

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΔΓ) = (2400 + 2500 \cdot \sqrt{3}\ )\ m^2$$

22046

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα $R = 1$. Θεωρούμε ακτίνα ΟΓ την οποία προεκτείνουμε κατά τμήμα $ΓΒ = ΟΓ = R$ και το εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $Ο\hat{Β}Α = 30^o$.

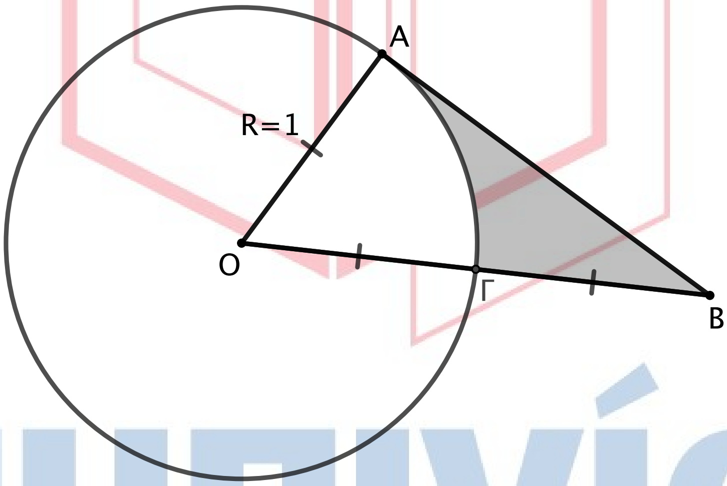
(Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι $ΑΒ = \sqrt{3}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

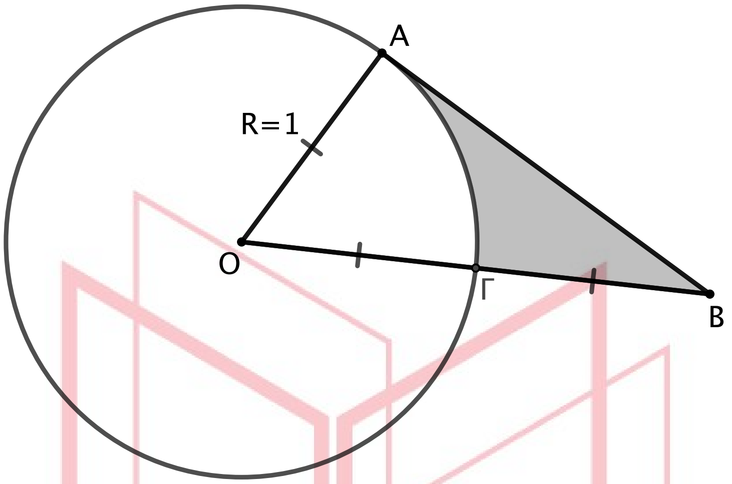
(Μονάδες 10)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22046-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής, οπότε $BA \perp OA$. Άρα, η γωνία $O\widehat{A}B$ είναι ορθή.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ η κάθετη πλευρά ΟΑ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΟΒ, οπότε η απέναντι γωνία της $O\widehat{B}A$ ισούται με 30^o.

β) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε:

$$AB^2 = OB^2 - OA^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

Άρα, $AB = \sqrt{3}$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ είναι $A\widehat{O}B = 90^o - 30^o = 60^o$. Έτσι, το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$ είναι:

$$\ell_{\overset{\frown}{A\Gamma}} = \frac{\pi R 60^o}{180^o} = \frac{\pi}{3}$$

Οπότε, η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου μικτόγραμμου χωρίου ΑΒΓ είναι:

$$L = (AB) + (B\Gamma) + \ell_{\overset{\frown}{A\Gamma}} = \sqrt{3} + 1 + \frac{\pi}{3}$$

22070

ΘΕΜΑ 2

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει μήκη πλευρών α = 17, β = 8, γ = 15.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ:

i. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους λ.

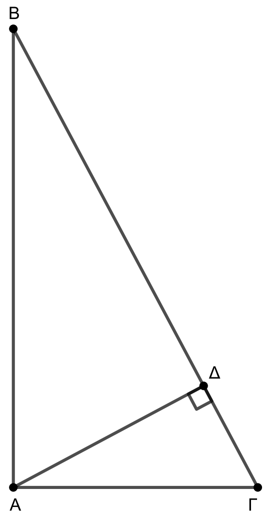
ii. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΑΓΔ})}$.

(Μονάδες 12)

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22070-Λύση

ΛΥΣΗ



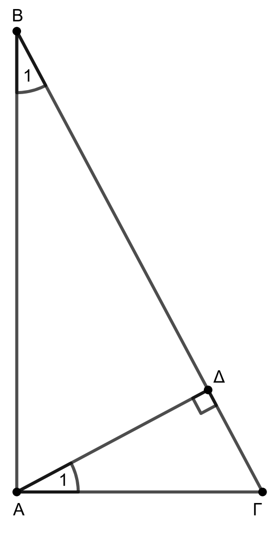
α) Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι η α. Θα εξετάσουμε αν το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της πλευράς α.

$$\beta^2+\gamma^2=8^2+15^2 \text{ ή } \beta^2+\gamma^2=64+225 \text{ ή } \beta^2+\gamma^2=289$$

$$\alpha^2=17^2 \text{ ή } \alpha^2=289$$

Άρα $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά α=17 και $\widehat{A}=90^o$.

β)



i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ορθογώνια με $\widehat{B} = \widehat{A}_1$ αφού είναι και οι δύο γωνίες συμπληρωματικές της γωνίας $\widehat{\Gamma}$. Άρα είναι όμοια και ο λόγος ομοιότητάς τους θα είναι ίσος με το λόγο των υποτεινουσών τους. Δηλαδή $\lambda = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{15}{8}$.

22070-Λύση

ii. Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, αφού είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι αυτά είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ = $\frac{15}{8}$.

Άρα $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)} = \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{225}{64}$.

αλιμπινίσης

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22098

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $ΑΒ = 4α$ και $ΑΔ = πα$. Στο εσωτερικό του ορθογωνίου σχεδιάστηκε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ.

α) Να αποδείξετε ότι το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

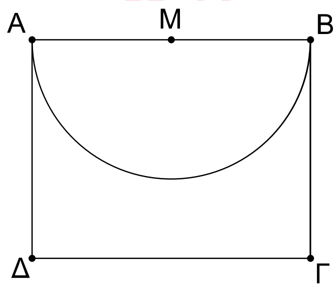
(Μονάδες 8)

β) Αν η διαγώνιος ΒΔ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Ε και Μ είναι το μέσο της ΑΒ,

i. να αποδείξετε ότι $ΑΒ^2 = ΒΔ \cdot ΒΕ$ και $ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΕ$. (Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $ΒΕ = \frac{16α}{\sqrt{16+π^2}}$ και $ΔΕ = \frac{π^2α}{\sqrt{16+π^2}}$, (Μονάδες 6)

iii. να υπολογίσετε το $συν\widehat{ΒΜΕ}$. (Μονάδες 5)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22098-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο

$$(\mathrm{ΑΒΓΔ}) = \mathrm{ΑΒ} \cdot \mathrm{ΑΔ} = 4α \cdot πα = 4πα^2.$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου ακτίνας $R = \frac{\mathrm{AB}}{2} = \frac{4α}{2} = 2α$ δίνεται από τον τύπο

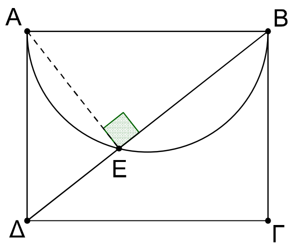
$$E_1 = \frac{πR^2}{2} = \frac{π(2α)^2}{2} = \frac{4πα^2}{2} = 2πα^2 \ (1).$$

Το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και εξωτερικά του ημικυκλίου γίνεται από τον τύπο

$$E_2 = (\mathrm{ΑΒΓΔ}) - E_1 = 4πα^2 - 2πα^2 = 2πα^2 \ (2).$$

Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι $E_1 = E_2$, επομένως το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

β) Η διαγώνιος ΒΔ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Ε. Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ.



i. Η γωνία $\mathrm{A\hat{E}B}$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, επομένως $\mathrm{A\hat{E}B} = 90^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΕ είναι η προβολή της κάθετης πλευράς ΑΒ πάνω στην υποτείνουσα ΒΔ, επομένως

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BΔ} \cdot \mathrm{BE} \quad (1).$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΔΕ είναι η προβολή της κάθετης πλευράς ΑΔ πάνω στην υποτείνουσα ΒΔ, επομένως

$$\mathrm{AΔ}^2 = \mathrm{BΔ} \cdot \mathrm{ΔE} \quad (2).$$

ii. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι

$$\mathrm{BΔ}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AΔ}^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\mathrm{AB} = 4α$, $\mathrm{AΔ} = πα$, οπότε

$$\mathrm{BΔ}^2 = (4α)^2 + (πα)^2 \ \text{ ή } \ \mathrm{BΔ}^2 = (16 + π^2)α^2 \ \text{ ή } \ \mathrm{BΔ} = α\sqrt{16 + π^2}.$$

Είναι $\mathrm{AB} = 4α$ και $\mathrm{BΔ} = α\sqrt{16 + π^2}$, επομένως η (1) γίνεται

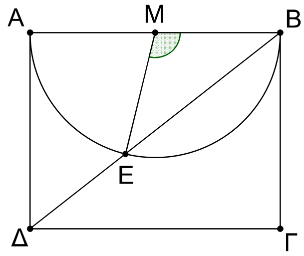
$$(4α)^2 = α\sqrt{16 + π^2} \cdot \mathrm{BE} \ \text{ ή } \ \mathrm{BE} = \frac{16α}{\sqrt{16+π^2}}.$$

Είναι $\mathrm{AΔ} = πα$ και $\mathrm{BΔ} = α\sqrt{16 + π^2}$, επομένως η (2) γίνεται

22098-Λύση

$$(\pi\alpha)^2 = \alpha\sqrt{16+\pi^2}\cdot \Delta E \quad ή \quad \Delta E = \frac{\pi^2\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}.$$

iii. Έστω Μ το μέσο της ΑΒ.



Τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΕ και ΜΒ είναι ακτίνες του ημικυκλίου διαμέτρου ΑΒ, επομένως

$$ME = MB = \frac{AB}{2} = \frac{4\alpha}{2} = 2\alpha.$$

Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΒΕΜ ισχύει

$$BE^2 = MB^2 + ME^2 - 2MB\cdot ME\cdot συν B\widehat{M}E \quad ή \quad συν B\widehat{M}E = \frac{MB^2+ME^2-BE^2}{2MB\cdot ME}.$$

Όμως $ME = MB = 2\alpha$ και $BE = \frac{16\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}$, οπότε

$$συν B\widehat{M}E = \frac{(2\alpha)^2+(2\alpha)^2-\frac{256\alpha^2}{16+\pi^2}}{2\cdot 2\alpha\cdot 2\alpha} \quad ή \quad συν B\widehat{M}E = \frac{\left(8-\frac{256}{16+\pi^2}\right)\alpha^2}{8\alpha^2} \quad ή \quad συν B\widehat{M}E = \frac{\pi^2-16}{16+\pi^2}.$$

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22130

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$) εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Αν οι πλευρές του τριγώνου είναι $ΒΓ = α$, $ΑΓ = β$ και $ΑΒ = γ$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $α = 2R$.

(Μονάδες 12)

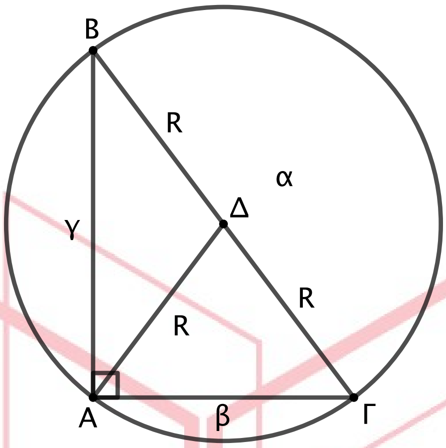
β) $α^2 + β^2 + γ^2 = 8R^2$.

(Μονάδες 13)

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22130-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Στο σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Αφού η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{A}$ είναι ορθή, τότε θα βαίνει σε ημικύκλιο. Επομένως, η υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου είναι διάμετρος του κύκλου. Άρα $ΒΓ = α = 2R$.

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$ΒΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΒ^2 \quad ή \quad α^2 = β^2 + γ^2$$

Οπότε:

$$α^2 + β^2 + γ^2 = α^2 + α^2 = 2α^2 = 2 \cdot (2R)^2 = 2 \cdot 4R^2 = 8R^2$$

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22243

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ζ στην πλευρά ΑΔ, ώστε $\mathrm{AZ} = \frac{3}{4}\mathrm{AB}$.

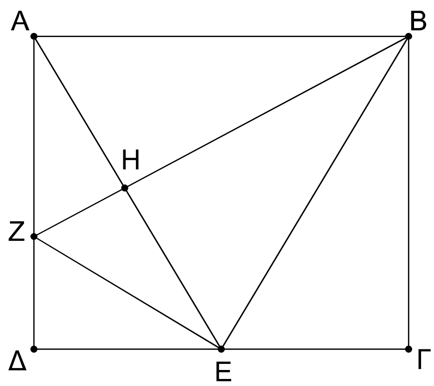
α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{BZ} = \frac{5}{4}\mathrm{AB}$. (Μονάδες 6)

β) Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, Ε το μέσο της ΓΔ και Η είναι το σημείο τομής των ΑΕ, ΒΖ, να αποδείξετε ότι:

i. $\mathrm{BE}^2 = \frac{5}{4}\mathrm{AB}^2$ και $\mathrm{ZE}^2 = \frac{5}{16}\mathrm{AB}^2$, (Μονάδες 6)

ii. το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια και να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών τους. (Μονάδες 8)



αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22243-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ έχουμε ότι

$$\mathrm{BZ}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AZ}^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\mathrm{AZ}=\frac{3}{4}\mathrm{AB}$, οπότε

$$\mathrm{BZ}^2=\mathrm{AB}^2+\left(\frac{3}{4}\mathrm{AB}\right)^2 \text{ ή } \mathrm{BZ}^2=\frac{25}{16}\mathrm{AB}^2 \text{ ή } \mathrm{BZ}=\frac{5}{4}\mathrm{AB}.$$

β) Αφού το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, θα είναι $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{AB}$.

Επιπλέον,

$$\mathrm{\Delta Z}=\mathrm{A\Delta}-\mathrm{AZ}=\mathrm{AB}-\frac{3}{4}\mathrm{AB}=\frac{1}{4}\mathrm{AB}.$$

i. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ έχουμε ότι

$$\mathrm{BE}^2=\mathrm{B\Gamma}^2+\mathrm{\Gamma E}^2 \text{ ή } \mathrm{BE}^2=\mathrm{AB}^2+\left(\frac{1}{2}\mathrm{AB}\right)^2 \text{ ή } \mathrm{BE}^2=\frac{5}{4}\mathrm{AB}^2.$$

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ έχουμε ότι

$$\mathrm{ZE}^2=\mathrm{\Delta Z}^2+\mathrm{\Delta E}^2 \text{ ή } \mathrm{ZE}^2=\left(\frac{1}{4}\mathrm{AB}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\mathrm{AB}\right)^2 \text{ ή } \mathrm{ZE}^2=\frac{5}{16}\mathrm{AB}^2.$$

ii. Από το ερωτήματα α και βi έχουμε ότι

$$\mathrm{BE}^2+\mathrm{ZE}^2=\frac{5}{4}\mathrm{AB}^2+\frac{5}{16}\mathrm{AB}^2=\frac{25}{16}\mathrm{AB}^2=\mathrm{BZ}^2.$$

Σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο με $\mathrm{B\hat{E}Z}=90^\circ$.

γ) Είναι $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{\sqrt{\frac{5}{4}}\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ και $\frac{\mathrm{ZE}}{\mathrm{E\Gamma}}=\frac{\sqrt{\frac{5}{16}}\mathrm{AB}}{\frac{1}{2}\mathrm{AB}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ έχουν:

- $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{\mathrm{ZE}}{\mathrm{E\Gamma}}$ και
- $\mathrm{B\hat{E}Z}=\mathrm{B\hat{\Gamma}E}=90^\circ$.

Άρα τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

Ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, οπότε

$$\frac{(\mathrm{BEZ})}{(\mathrm{B\Gamma E})}=\left(\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{B\Gamma}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{5}{4}.$$

αλφαβητικόν ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22248

ΘΕΜΑ 2

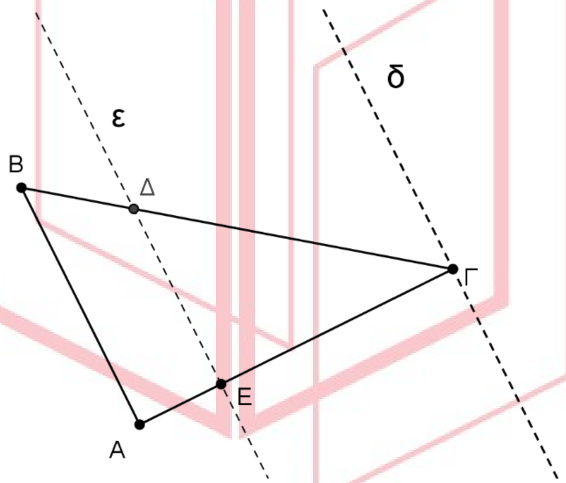
Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 9, ΓΑ = 12 και ΓΒ = 15 και ευθείες ε, δ παράλληλες στην ΑΒ, όπως αυτές του σχήματος.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να βρείτε ποια πλευρά είναι η υποτείνουσά του. (Μονάδες 8)

β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει τις πλευρές ΓΑ, ΓΒ σε σημεία Ε και Δ αντίστοιχα έτσι ώστε ΕΑ = 4 και η ευθεία (δ) διέρχεται από το σημείο Γ, τότε να υπολογίσετε

i. το τμήμα ΔΒ, (Μονάδες 8)

ii. τις πλευρές του τριγώνου ΔΕΓ. (Μονάδες 9)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22248-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ η μεγαλύτερη πλευρά του είναι η ΓΒ =15. Θα εξετάσουμε αν το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του ΑΒ και ΑΓ είναι ίσο με το τετράγωνο της πλευράς ΓΒ.

$$ΓΒ^2 = 15^2 = 225$$

$$ΑΒ^2 + ΓΑ^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

Άρα $ΑΒ^2 + ΓΑ^2 = ΓΒ^2$, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο $\widehat{Α}=90^o$ και υποτείνουσα την πλευρά ΓΒ = 15.

β)

i. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες ε, δ και ΑΒ που τέμνουν τις ΓΑ και ΓΒ θα ισχύει η αναλογία $\frac{ΓΔ}{ΓΕ} = \frac{ΔΒ}{ΕΑ} = \frac{ΓΒ}{ΓΑ}$ ή $\frac{ΓΔ}{ΓΕ} = \frac{ΔΒ}{4} = \frac{15}{12}$, αφού ΓΑ = 12 και ΓΒ = 15 και ΕΑ = 4 από τα δεδομένα. Οπότε από την ισότητα $\frac{ΔΒ}{4} = \frac{15}{12}$ έχουμε ότι $12 \cdot ΔΒ = 4 \cdot 15$ ή ΔΒ = 5.

ii. Είναι ΓΔ = ΓΒ – ΔΒ = 15 – 5 = 10 και ΓΕ = ΓΑ – ΕΑ = 12 – 4 = 8.

Το τρίγωνο ΔΕΓ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΓΑ και ΓΒ του τριγώνου ΑΒΓ και την ευθεία ε που είναι παράλληλη στην πλευρά του ΑΒ, οπότε θα έχει πλευρές ανάλογες στις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή θα ισχύει $\frac{ΓΔ}{ΓΒ} = \frac{ΓΕ}{ΓΑ} = \frac{ΕΔ}{ΑΒ}$ (1) όπου ΑΒ = 9, ΓΑ = 12, ΓΔ = 10 και ΓΕ = 8.

Οπότε η σχέση (1) γίνεται $\frac{10}{15} = \frac{8}{12} = \frac{ΕΔ}{9}$ και από την ισότητα $\frac{10}{15} = \frac{ΕΔ}{9}$ προκύπτει ότι ΕΔ = 6.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22261

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) με ΑΒ= γ , ΑΓ= β και ΒΓ= $\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με $\widehat{\mathrm{A}} > 90^0$. (Μονάδες 8)

β) η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με 120^0. Δίνεται συν120^0 = $-\frac{1}{2}$. (Μονάδες 5)

γ) η γωνία ΒΟΓ ισούται με 120^0. (Μονάδες 5)

δ) το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος, που ορίζεται από τη χορδή ΒΓ και το κυρτογώνιο τόξο ΒΓ, είναι: Ε = $\frac{(4\pi-3\sqrt{3})\mathrm{R}^2}{12}$. Δίνεται ημ$120^0$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 7)

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22261-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΒ= γ , ΑΓ= β και ΒΓ= $\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma}$.

Είναι: $ΒΓ^2 = \beta^2+\gamma^2+\beta\gamma$ και $ΑΓ^2 + ΑΒ^2 = \beta^2+\gamma^2$.

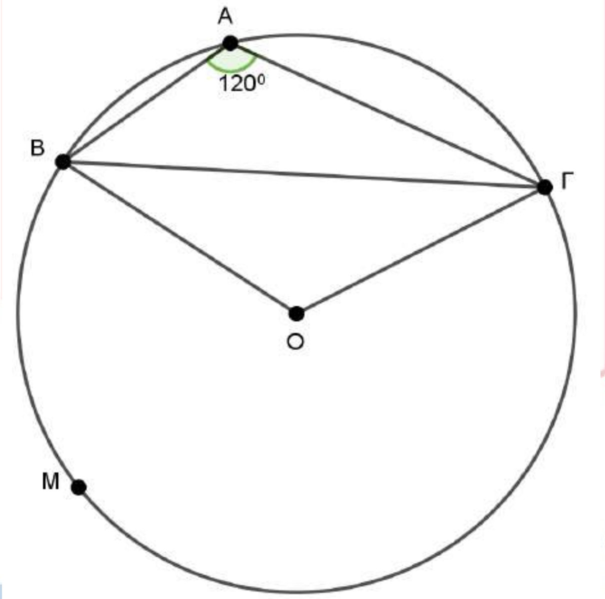
Οπότε: $ΒΓ^2 > ΑΓ^2 + ΑΒ^2 \Rightarrow \widehat{Α} > 90^0$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$ΒΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΒ^2 – 2ΑΓ\cdot ΑΒ\cdot συνΑ = \beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cdot συνΑ$.

Επίσης από το ερώτημα (α): $ΒΓ^2 = \beta^2+\gamma^2+\beta\gamma$.

Άρα: $\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cdot συνΑ = \beta^2+\gamma^2+\beta\gamma$ ή συνΑ = $-\frac{1}{2}$, άρα $\widehat{Α} = 120^0$.



γ) Η γωνία ΒΑΓ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, οπότε το τόξο στο οποίο βαίνει θα έχει μέτρο διπλάσιο από αυτήν. Άρα $\overset{\frown}{ΒΜΓ} = 2\cdot 120^0 = 240^0$.

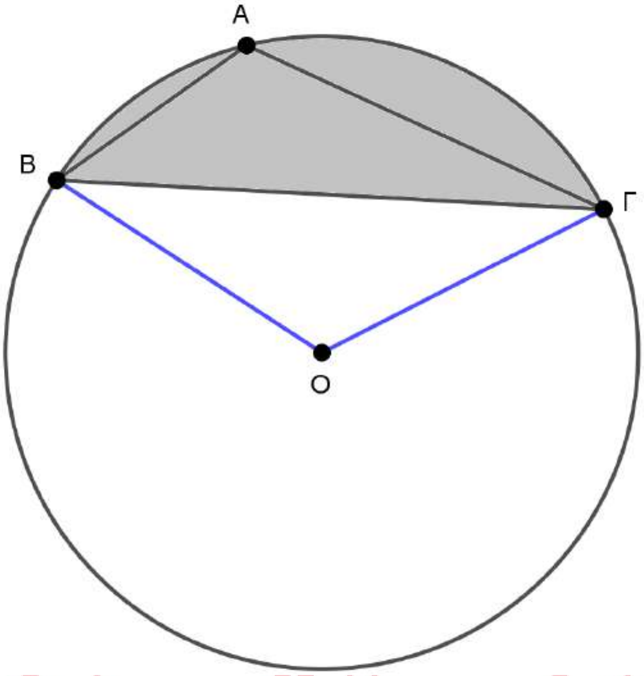
Έτσι για το κυρτογώνιο τόξο ΒΑΓ θα ισχύει: $\overset{\frown}{ΒΑΓ} = 360^0 - 240^0 = 120^0$, οπότε η επίκεντρη γωνία ΒΟΓ ισούται με 120^0.

δ) Λόγω του ερωτήματος (γ) είναι: $Β\widehat{Ο}Γ = 120^0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$Ε = (Ο\ \overset{\frown}{ΒΑΓ}) – (ΟΒΓ) = \frac{\pi R^2 \mu}{360} - \frac{1}{2}ΟΒ\cdot ΟΓ\cdot ημ120^0 = \frac{\pi R^2 120}{360} - \frac{1}{2}\cdot R\cdot R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi R^2 - 3\sqrt{3}R^2}{12} = \frac{(4\pi-3\sqrt{3})R^2}{12}$.

22261-Λύση



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22331

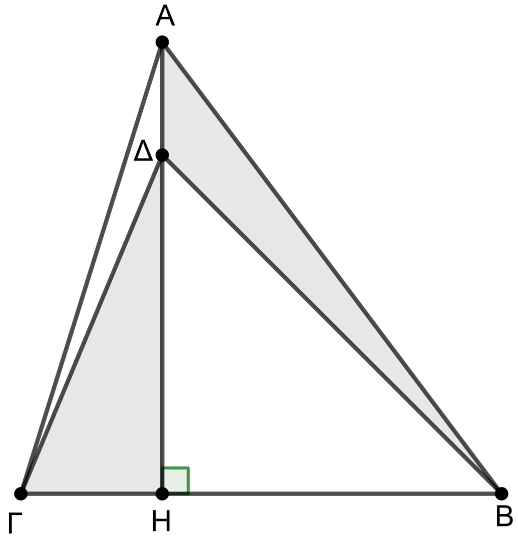
ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ του σχήματος το $ΑΗ$ είναι ύψος και το $Δ$ σημείο του $ΑΗ$. Δίνονται $ΑΒ = 20,\ ΒΗ = 12,\ ΓΗ = 5$ και ότι το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΔ$ είναι $(ΑΒΔ) = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΗ = 16$. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = 4$. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $ΓΔΗ$. (Μονάδες 6)



αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22331-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΒ $(\widehat{\mathrm{H}} = 90°)$, είναι $\mathrm{AB} = 20$ και $\mathrm{BH} = 12$, άρα από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$\mathrm{AH}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BH}^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256 = 16^2$ ή $\mathrm{AH} = 16$.

β) Το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση ΑΔ του τριγώνου ΑΒΔ είναι το $\mathrm{BH} = 12$, και επειδή το εμβαδόν του είναι $(\mathrm{AB\Delta}) = 24$, θα έχουμε

$(\mathrm{AB\Delta}) = \frac{\mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{BH}}{2}$ ή $24 = \frac{\mathrm{A\Delta} \cdot 12}{2}$ ή $6\mathrm{A\Delta} = 24$ ή $\mathrm{A\Delta} = 4$.

γ) Το τρίγωνο ΓΔΗ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές $\Delta\mathrm{H} = \mathrm{AH} - \mathrm{A\Delta} = 16 - 4 = 12$ και $\Gamma\mathrm{H} = 5$.

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΗ είναι $(\Gamma\Delta\mathrm{H}) = \frac{\mathrm{H\Gamma} \cdot \mathrm{H\Delta}}{2} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$.

αλμπινιόσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

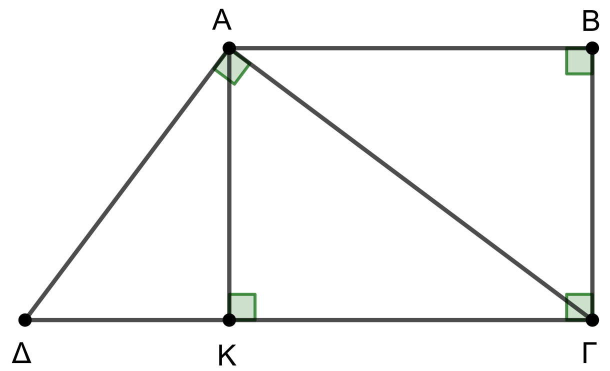
22338

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $\widehat{Β} = \widehat{Γ} = 90°$ και στο οποίο η πλευρά $ΑΔ$ και η διαγώνιος $ΑΓ$ είναι κάθετες. Έστω $Κ$ η προβολή της κορυφής $Α$ στην πλευρά $ΓΔ$, $ΚΔ = 9$ και $ΚΓ = 16.$

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΚ = 12$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$. (Μονάδες 13)



22338-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ το ΑΚ είναι το ύψος του, που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΔΓ και οι προβολές των κάθετων πλευρών ΑΔ και ΑΓ στην υποτείνουσα ΔΓ είναι αντίστοιχα $\mathrm{K\Delta} = 9$ και $\mathrm{K\Gamma} = 16$. Άρα

$\mathrm{AK}^2 = \mathrm{K\Delta} \cdot \mathrm{K\Gamma}$ ή $\mathrm{AK}^2 = 9 \cdot 16$ ή $\mathrm{AK}^2 = 144$ ή $\mathrm{AK}^2 = 12^2$ ή $\mathrm{AK} = 12$.

β) Το τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει ύψος $\mathrm{AK} = 12$ και βάσεις

$\Delta\Gamma = \mathrm{K\Delta} + \mathrm{K\Gamma} = 9 + 16 = 25$ και

$\mathrm{AB} = \mathrm{K\Gamma} = 16$, αφού το ΑΒΓΚ είναι ορθογώνιο $\left(\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma} = \widehat{\mathrm{K}} = 90°\right)$.

Επομένως το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι

$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \frac{(\Delta\Gamma+\mathrm{AB})\cdot \mathrm{AK}}{2} = \frac{(25+16)\cdot 12}{2} = 246$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22339

ΘΕΜΑ 2

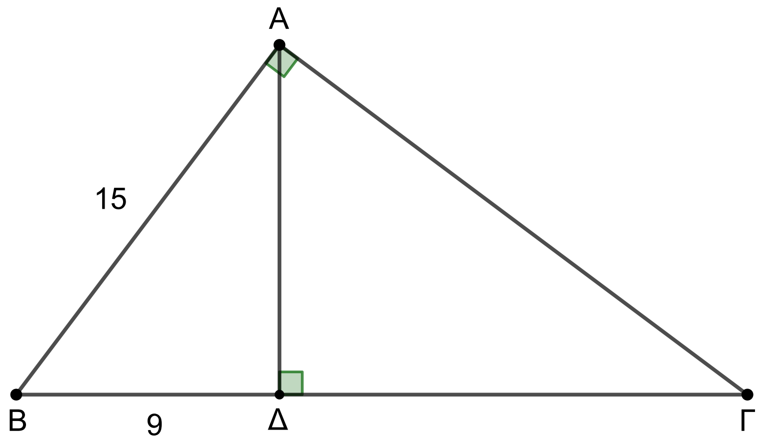
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\widehat{Α} = 90°$ και έστω $Δ$ η προβολή της κορυφής $Α$ στην υποτείνουσα $ΒΓ$. Έστω επίσης $ΑΒ = 15$ και $ΔΒ = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΒΓ = 25$, (Μονάδες 9)

ii. $ΑΓ = 20$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$. (Μονάδες 7)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22339-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ($\widehat{\mathrm{A}} = 90°$), όπου είναι $\mathrm{AB} = 15$ και $\Delta\mathrm{B} = 9$, έχουμε

$\mathrm{AB}^2 = \Delta\mathrm{B} \cdot \mathrm{B\Gamma}$ ή $15^2 = 9 \cdot \mathrm{B\Gamma}$ ή $\mathrm{B\Gamma} = \frac{225}{9}$ ή $\mathrm{B\Gamma} = 25$.

ii) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ($\widehat{\mathrm{A}} = 90°$), όπου είναι $\mathrm{AB} = 15$ και $\mathrm{B\Gamma} = 25$, έχουμε

$\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{B\Gamma}^2 - \mathrm{AB}^2$ ή $\mathrm{A\Gamma}^2 = 25^2 - 15^2$ ή $\mathrm{A\Gamma}^2 = 625 - 225$ ή $\mathrm{A\Gamma}^2 = 400$ ή $\mathrm{A\Gamma} = 20$.

β) Επειδή το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο, το εμβαδόν του είναι

$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}}{2} = \frac{15\cdot 20}{2} = 150$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22369

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = 8$, $ΒΓ = 7$ και $\widehat{Α} = 60°$.

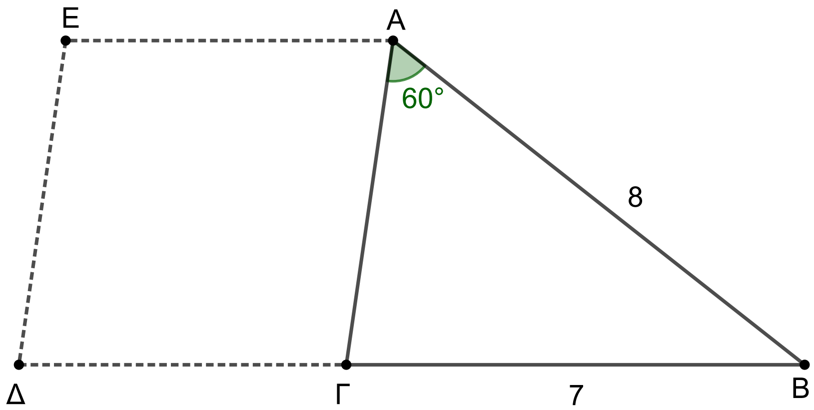
α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 3$ ή $ΑΓ = 5$. (Μονάδες 6)

β) Έστω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο όπως στο παρακάτω σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 5$. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι $(ΑΒΓ) = 10\sqrt{3}$. (Μονάδες 6)

iii. Προεκτείνουμε τη ΒΓ κατά τμήμα $ΓΔ = ΑΓ$ και σχηματίζουμε τον ρόμβο ΑΓΔΕ. Να βρείτε το εμβαδόν του ρόμβου ΑΓΔΕ . (Μονάδες 7)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22369-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ΑΒ = 8$, $ΒΓ = 7$ και $\widehat{Α} = 60°$, οπότε από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot συν\,Α$

$7^2 = 8^2 + ΑΓ^2 - 2 \cdot 8 \cdot ΑΓ \cdot συν\,60°$

$49 = 64 + ΑΓ^2 - 16 \cdot ΑΓ \cdot \frac{1}{2}$

$ΑΓ^2 - 8 \cdot ΑΓ + 15 = 0$

$ΑΓ = 3$ ή $ΑΓ = 5$.

β) i) Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ΑΒ = 8$, $ΒΓ = 7$ και $ΑΓ = 3$ ή $ΑΓ = 5$, άρα η μεγαλύτερη πλευρά του είναι η $ΑΒ = 8$, οπότε $ΑΒ^2 = 8^2 = 64$.

Αν $ΑΓ = 3$ θα είναι $ΑΓ^2 + ΒΓ^2 = 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$, οπότε

$ΑΒ^2 > ΑΓ^2 + ΒΓ^2$, άρα $\widehat{Γ} > 90°$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο, άτοπο.

Αν $ΑΓ = 5$ θα είναι $ΑΓ^2 + ΒΓ^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$, οπότε

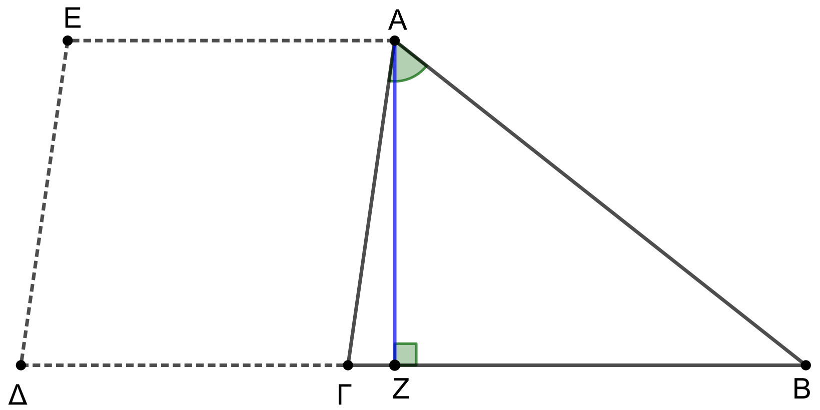
$ΑΒ^2 < ΑΓ^2 + ΒΓ^2$, άρα $\widehat{Γ} < 90°$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

Επομένως $ΑΓ = 5$.

ii) Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ΑΒ = 8$, $ΑΓ = 5$ και $\widehat{Α} = 60°$, οπότε από τον τριγωνομετρικό τύπο του εμβαδού έχουμε

$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot ΑΓ \cdot ΑΒ \cdot ημ\,Α = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot ημ\,60° = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

iii) Έστω ΑΖ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή Α. Τότε αυτό θα είναι ύψος και του ρόμβου ΑΓΔΕ με αντίστοιχη βάση την ΓΔ. Είναι $ΓΔ = ΑΓ = 5$ επειδή το ΑΓΔΕ είναι ρόμβος.



Από το (β ii) είναι $(ΑΒΓ) = 10\sqrt{3}$. Επειδή $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot ΒΓ \cdot ΑΖ$ και $ΒΓ = 7$, θα έχουμε

αλεξανδρεια ΦΡΟΝ ΕΥΣΗΣ

22369-Λύση

$\frac{1}{2} \cdot \text{ΒΓ} \cdot \text{ΑΖ} = 10\sqrt{3}$

$\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \text{ΑΖ} = 10\sqrt{3}$

$\text{ΑΖ} = \frac{20\sqrt{3}}{7}$.

Επομένως το εμβαδόν του ρόμβου ΑΓΔΕ είναι

$(\text{ΑΓΔΕ}) = \text{ΓΔ} \cdot \text{ΑΖ} = 5 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{7} = \frac{100\sqrt{3}}{7}$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22380

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $\widehat{Β} = \widehat{Γ} = 90°$ και $ΒΓ = 16$, $ΓΔ = 22$ και $ΑΔ = 20$. Έστω $Κ$ η προβολή του σημείου $Α$ πάνω στην ευθεία $ΓΔ$ και $Λ$ η προβολή του σημείου $Β$ πάνω στη ευθεία $ΑΔ$.

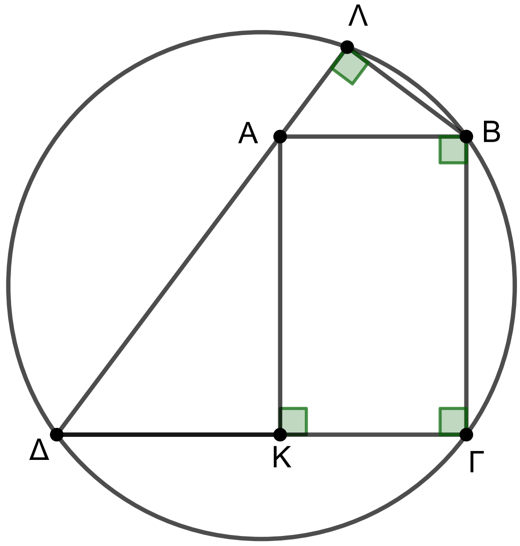
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΚΔ = 12$, (Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΚΔ$ είναι 96 . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΚΔ$ και $ΒΛΑ$ είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $ΒΛΑ$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέτρου του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $ΒΓΔΛ$. (Μονάδες 5)



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22380-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Το τετράπλευρο $\mathrm{AB\Gamma K}$ είναι ορθογώνιο αφού έχει τρεις ορθές γωνίες, άρα

$\mathrm{AK} = \mathrm{B\Gamma} = 16.$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AK\Delta}$ $\left(\mathrm{A}\widehat{\mathrm{K}}\Delta = 90°\right)$, έχουμε

$\mathrm{K\Delta}^2 = \mathrm{A\Delta}^2 - \mathrm{AK}^2$

$\mathrm{K\Delta}^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144 = 12^2$

$\mathrm{K\Delta} = 12.$

ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $\mathrm{AK\Delta}$ είναι

$(\mathrm{AK\Delta}) = \frac{1}{2}\mathrm{K\Delta} \cdot \mathrm{AK} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96.$

β) Τα τρίγωνα $\mathrm{AK\Delta}$ και $\mathrm{B\Lambda A}$ είναι ορθογώνια $\left(\mathrm{A}\widehat{\mathrm{K}}\Delta = \mathrm{B}\widehat{\Lambda}\mathrm{A} = 90°\right)$ και έχουν

$\widehat{\Delta} = \Lambda\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων AB και $\Delta\Gamma$ που τέμνονται από την $\Lambda\Delta$. Άρα τα τρίγωνα $\mathrm{AK\Delta}$ και $\mathrm{B\Lambda A}$ είναι όμοια.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων $\mathrm{AK\Delta}$ και $\mathrm{B\Lambda A}$ είναι

$\lambda = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{BA}}$ ή $\lambda = \frac{20}{10}$ ή $\lambda = 2$,

αφού $\mathrm{BA} = \mathrm{K\Gamma}$ από το ορθογώνιο $\mathrm{AB\Gamma K}$ και $\mathrm{K\Gamma} = \Gamma\Delta - \mathrm{K\Delta} = 22 - 12 = 10.$

Επειδή τα τρίγωνα $\mathrm{AK\Delta}$ και $\mathrm{B\Lambda A}$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = 2$, ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $\mathrm{AK\Delta}$ και $\mathrm{B\Lambda A}$ ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, άρα

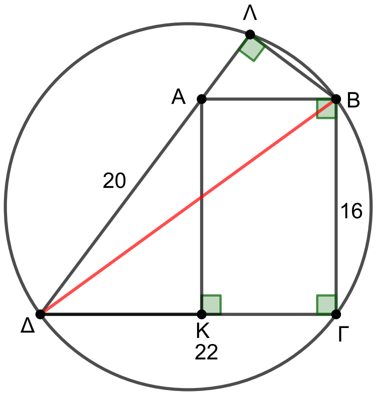
$\frac{(\mathrm{AK\Delta})}{(\mathrm{B\Lambda A})} = \lambda^2$

$\frac{96}{(\mathrm{B\Lambda A})} = 2^2$

$(\mathrm{B\Lambda A}) = \frac{96}{4}$

$(\mathrm{B\Lambda A}) = 24.$

γ) Φέρνουμε τη $\mathrm{B\Delta}$, η οποία είναι διάμετρος του παραπάνω κύκλου, αφού $\mathrm{B}\widehat{\Gamma}\Delta = 90°$.



22380-Λύση

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{B\Gamma\Delta}$ $\left(\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta = 90°\right)$, έχουμε

$\mathrm{B\Delta}^2 = \mathrm{B\Gamma}^2 + \Gamma\Delta^2$

$\mathrm{B\Delta}^2 = 16^2 + 22^2 = 256 + 484 = 740 = 4 \cdot 185$

$\mathrm{B\Delta} = 2\sqrt{185}$.

Επομένως η διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $\mathrm{B\Gamma\Delta\Lambda}$ έχει μήκος $2\sqrt{185}$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22389

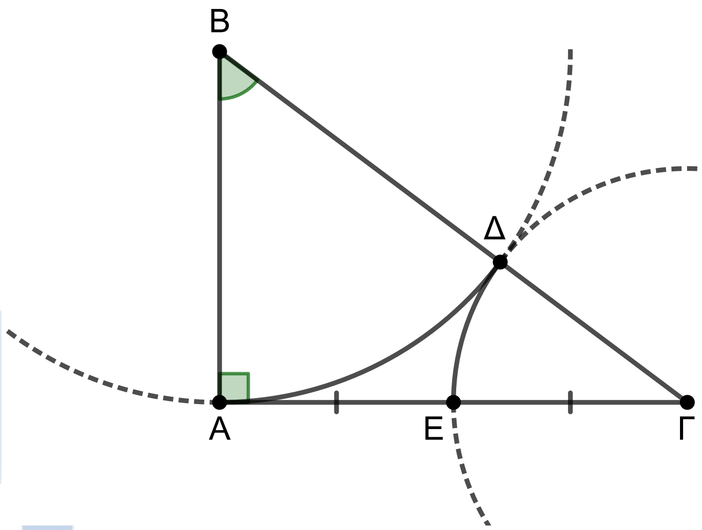
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90°$. Με κέντρο το σημείο Β και ακτίνα $R = BA$ γράφουμε τον κύκλο (B, R) ο οποίος τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ. Με κέντρο το σημείο Γ και ακτίνα $\rho = \Gamma\Delta$ γράφουμε τον κύκλο (Γ, ρ) ο οποίος τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Έστω ότι το Ε είναι το μέσο της ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $\rho = \frac{2}{3}R$. (Μονάδες 8)

β) Έστω E_1 το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ και E_2 το εμβαδόν του κύκλου (B, R). Να αποδείξετε ότι $\frac{E_2}{E_1} = \frac{3\pi}{2}$. (Μονάδες 8)

γ) Έστω $\widehat{B} = \mu°$ και E_3 και E_4 είναι το εμβαδά των κυκλικών τομέων $B\widehat{A\Delta}$ και $\Gamma\widehat{\Delta E}$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\frac{E_4}{E_3} = \frac{4(90-\mu)}{9\mu}$. (Μονάδες 9)



αλ_σης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22389-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\mathrm{BA} = \mathrm{B\Delta} = \mathrm{R}$ και $\Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{E} = \rho$.

Επειδή το E είναι το μέσο της $\mathrm{A\Gamma}$, είναι $\mathrm{A\Gamma} = 2\Gamma\mathrm{E} = 2\rho$.

Επίσης είναι $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{B\Delta} + \Delta\Gamma = \mathrm{R} + \rho$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ($\widehat{\mathrm{A}} = 90°$) έχουμε

$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2$

$(\mathrm{R} + \rho)^2 = \mathrm{R}^2 + (2\rho)^2$

$\mathrm{R}^2 + 2\mathrm{R}\rho + \rho^2 = \mathrm{R}^2 + 4\rho^2$

$2\mathrm{R}\rho = 3\rho^2$

$\rho = \frac{2}{3}\mathrm{R}$.

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι

$\mathrm{E}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{AB} = \frac{1}{2} \cdot 2\rho \cdot \mathrm{R} = \frac{2}{3}\mathrm{R} \cdot \mathrm{R} = \frac{2}{3}\mathrm{R}^2$

και του κύκλου (B, R), $\mathrm{E}_2 = \pi\mathrm{R}^2$, άρα

$\frac{\mathrm{E}_2}{\mathrm{E}_1} = \frac{\pi\mathrm{R}^2}{\frac{2}{3}\mathrm{R}^2} = \frac{3\pi}{2}$.

γ) Ο κυκλικός τομέας $\mathrm{B}\,\widehat{\mathrm{A\Delta}}$ είναι ακτίνας R και γωνίας $\widehat{\mathrm{B}} = \mu°$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$\mathrm{E}_3 = \frac{\pi\mathrm{R}^2\mu}{360}$.

Ο κυκλικός τομέας $\Gamma\,\widehat{\Delta\mathrm{E}}$ είναι ακτίνας $\rho = \frac{2}{3}\mathrm{R}$ και γωνίας $\widehat{\Gamma} = 90° - \mu°$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$\mathrm{E}_4 = \frac{\pi\rho^2(90-\mu)}{360} = \frac{4\pi\mathrm{R}^2(90-\mu)}{9 \cdot 360}$.

Άρα

$\frac{\mathrm{E}_4}{\mathrm{E}_3} = \frac{4\pi\mathrm{R}^2(90-\mu) \cdot 360}{9 \cdot 360 \cdot \pi\mathrm{R}^2\mu} = \frac{4(90-\mu)}{9\mu}$.

αλμπινιόσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22396

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και έστω $Δ$ η προβολή του σημείου $Β$ πάνω στην ευθεία $ΑΓ$. Έστω $ΑΔ = 3$ και $ΔΓ = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΒΔ = 4$. (Μονάδες 6)

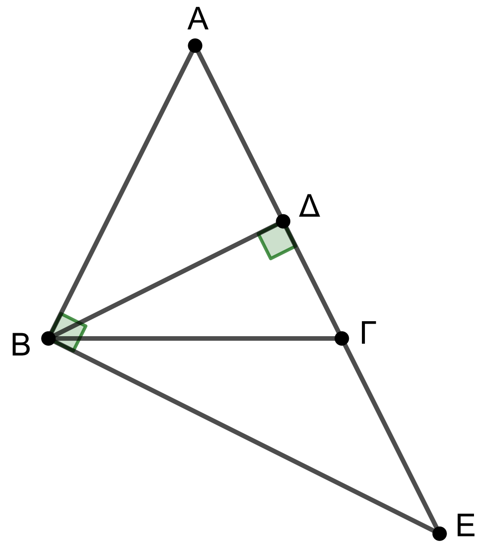
ii. $(ΑΒΓ) = 10$. (Μονάδες 6)

β) Έστω ότι η κάθετη της $ΑΒ$ στο σημείο $Β$, τέμνει την προέκταση της $ΑΓ$ στο σημείο $Ε$.

Να βρείτε:

i. Το μήκος του $ΔΕ$. (Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $ΒΓΕ$. (Μονάδες 7)



αλιμιινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22396-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ορθογώνιο με $\widehat{\Delta} = 90°$,

$\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A\Delta} + \Delta\Gamma = 3 + 2 = 5$

και $\mathrm{A\Delta} = 3$.

Επομένως από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουμε

$\mathrm{B\Delta}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{A\Delta}^2$

$\mathrm{B\Delta}^2 = 5^2 - 3^2$

$\mathrm{B\Delta}^2 = 16$

$\mathrm{B\Delta} = 4$.

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{B\Delta}}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10 \ .$$

β) i) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ορθογώνιο με $\mathrm{A\widehat{B}E} = 90°$, άρα για το ύψος του ΒΔ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΑΕ , θα έχουμε

$\mathrm{B\Delta}^2 = \Delta\mathrm{A} \cdot \Delta\mathrm{E}$

$4^2 = 3 \cdot \Delta\mathrm{E}$

$\Delta\mathrm{E} = \frac{16}{3}$.

ii) Είναι $\Gamma\mathrm{E} = \Delta\mathrm{E} - \Delta\Gamma = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΕ είναι

$$(\mathrm{B\Gamma E}) = \frac{\Gamma\mathrm{E}\cdot\mathrm{B\Delta}}{2} = \frac{\frac{10}{3}\cdot 4}{2} = \frac{20}{3} .$$

αλφανινίσης

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22400

ΘΕΜΑ 4

Τα Δ και E είναι σημεία των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ενός τριγώνου $AB\Gamma$. Δίνεται ότι $AB = 9$, $A\Gamma = 12$, $A\Delta = 4$ και $AE = 3$.

α) Έστω ότι στο παραπάνω τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma = 15$, (Σχήμα 1). Να αποδείξετε ότι:

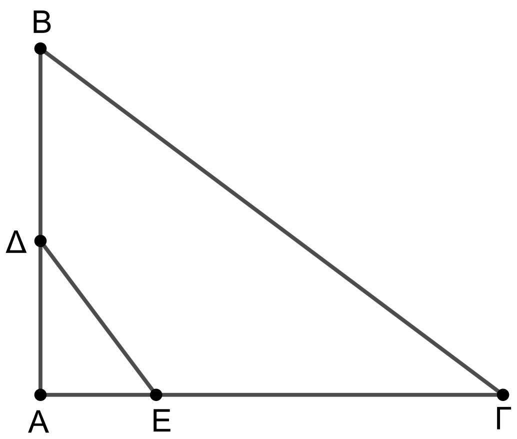
i. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

ii. $\Delta E = 5$. (Μονάδες 6)

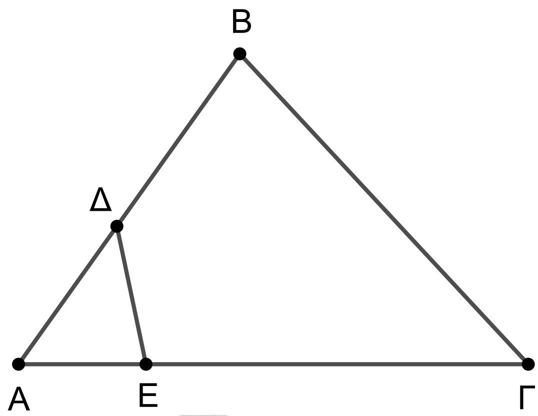
β) Έστω τώρα ότι στο αρχικό τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma = 10$, (Σχήμα 2). Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ δεν είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

ii. $\Delta E = \frac{10}{3}$. (Μονάδες 6)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22400-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ΑΒ = 9$, $ΑΓ = 12$ και $ΒΓ = 15$, άρα έχουμε

$ΒΓ^2 = 15^2 = 225$ και $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$,

άρα $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$.

Επομένως από το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος είναι $\widehat{Α} = 90°$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

ii. Επειδή $\widehat{Α} = 90°$, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ορθογώνιο, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $ΔΕ^2 = ΑΔ^2 + ΑΕ^2$ ή $ΔΕ^2 = 4^2 + 3^2$ ή $ΔΕ^2 = 25$ ή $ΔΕ^2 = 5^2$ ή $ΔΕ = 5$.

β)

i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ΑΒ = 9$, $ΑΓ = 12$ και $ΒΓ = 10$, άρα έχουμε

$ΑΓ^2 = 12^2 = 144$ και $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 9^2 + 10^2 = 81 + 100 = 181$

άρα $ΑΓ^2 < ΑΒ^2 + ΒΓ^2$, οπότε $\widehat{Β} < 90°$. Η οξεία γωνία $\widehat{Β}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ αφού βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά την ΑΓ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο και όχι ορθογώνιο.

ii. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΓΒ έχουν

$\frac{ΑΔ}{ΑΓ} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $\frac{ΑΕ}{ΑΒ} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ και τη γωνία $\widehat{Α}$ κοινή,

άρα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.

Άρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΓΒ θα έχουν και τις τρίτες πλευρές ανάλογες με λόγο $\frac{1}{3}$.

Επομένως $\frac{ΔΕ}{ΒΓ} = \frac{1}{3}$ ή $\frac{ΔΕ}{10} = \frac{1}{3}$ ή $ΔΕ = \frac{10}{3}$.

αλμπινιόσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22407

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος του τριγώνου $ΑΒΓ$ και η $ΑΚ$ είναι η προβολή της πλευράς $ΑΓ$ πάνω στην ευθεία $ΑΒ$. Δίνονται $ΑΒ = 10, ΑΓ = 15$ και $ΑΚ = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι:

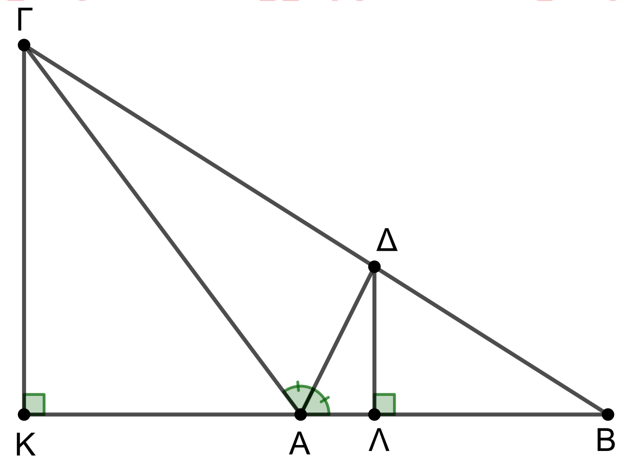
i. $ΓΚ = 12$ και $(ΑΒΓ) = 60$. (Μονάδες 8)

ii. $(ΑΔΒ) = 24$ και $(ΑΔΓ) = 36$. (Μονάδες 10)

β) Έστω $Λ$ η προβολή του σημείου $Δ$ πάνω στην ευθεία $ΑΒ$.

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{ΔΛ}{ΓΚ} = \frac{2}{5}$. (Μονάδες 3)

ii. Να βρείτε τον λόγο $\frac{ΛΒ}{ΛΚ}$ στον οποίο το σημείο $Λ$ διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα $ΒΚ$. (Μονάδες 4)



αλφαβητισμός ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22407-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ ($\widehat{K} = 90°$), είναι $ΑΓ = 15$ και $ΑΚ = 9$,

οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$ΓΚ^2 = ΑΓ^2 - ΑΚ^2$ ή $ΓΚ^2 = 15^2 - 9^2$ ή $ΓΚ^2 = 144$ ή $ΓΚ^2 = 12^2$ ή $ΓΚ = 12$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΓΚ$ ή $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12$ ή $(ΑΒΓ) = 60$.

ii. Στα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ, οι γωνίες $Δ\widehat{Α}Β$ και $Δ\widehat{Α}Γ$ είναι ίσες, αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Α}$ του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα

$\frac{(ΑΔΒ)}{(ΑΔΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΒ}{ΑΔ \cdot ΑΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, άρα $(ΑΔΒ) = \frac{2}{3}(ΑΔΓ)$.

Στο ερώτημα α) i) βρήκαμε ότι $(ΑΒΓ) = 60$ και επειδή $(ΑΔΒ) + (ΑΔΓ) = (ΑΒΓ)$,

έχουμε $\frac{2}{3}(ΑΔΓ) + (ΑΔΓ) = 60$ ή $5(ΑΔΓ) = 180$ ή $(ΑΔΓ) = 36$.

Επίσης θα είναι $(ΑΔΒ) = \frac{2}{3}(ΑΔΓ)$ $(ΑΔΒ) = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24$.

β)

i. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΒΓ έχουν κοινή βάση την ΑΒ και αντίστοιχα ύψη ΔΛ και ΓΚ, άρα ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών.

Στο (α) ερώτημα βρήκαμε $(ΑΒΓ) = 60$ και $(ΑΔΒ) = 24$, επομένως έχουμε

$\frac{(ΑΔΒ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΔΛ}{ΓΚ}$ ή $\frac{24}{60} = \frac{ΔΛ}{ΓΚ}$ ή $\frac{ΔΛ}{ΓΚ} = \frac{2}{5}$.

ii. Οι ευθείες ΔΛ και ΓΚ είναι παράλληλες, ως κάθετες στην ευθεία ΑΒ. Επομένως τα τρίγωνα ΔΛΒ και ΓΚΒ έχουν πλευρές ανάλογες, άρα έχουμε

$\frac{ΛΒ}{ΚΒ} = \frac{ΔΛ}{ΓΚ}$ ή $\frac{ΛΒ}{ΚΒ} = \frac{2}{5}$ ή $\frac{ΛΒ}{ΚΒ - ΛΒ} = \frac{2}{5-2}$ ή $\frac{ΛΒ}{ΛΚ} = \frac{2}{3}$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22509

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2α και ΑΔ = α. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Μ με ΜΒ = x και στην προέκταση της ΑΔ σημείο Ν με ΔΝ = 2x.

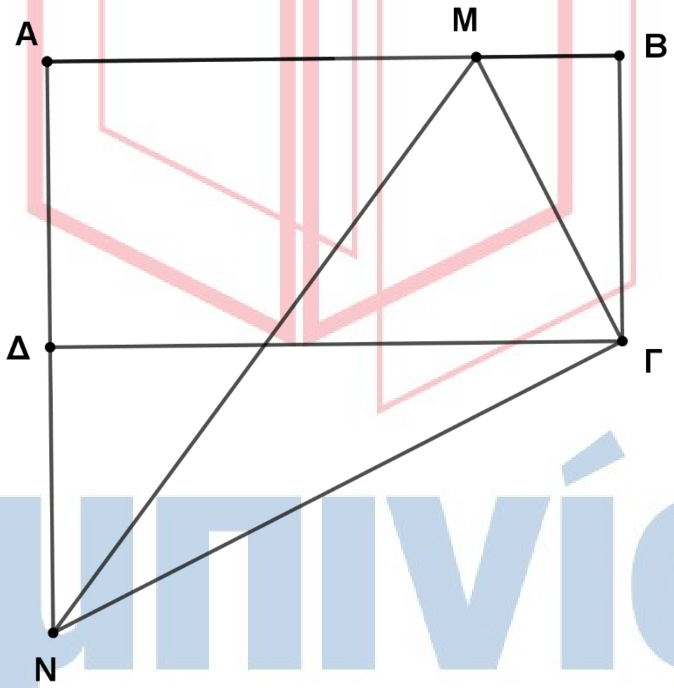
α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση των α, x τα $ΜΓ^2$, $ΝΓ^2$ και $ΜΝ^2$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε συναρτήσει των α, x τα εμβαδά των τριγώνων ΑΜΝ και ΓΜΝ.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ, πάνω στην ΑΒ ώστε τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΓΜΝ να είναι ισεμβαδικά. (Μονάδες 5)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22509-Λύση

ΛΥΣΗ

Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΒ = ΔΓ = 2α, ΑΔ = ΒΓ = α, ΜΒ = x και ΑΜ = $2\alpha - x$

α) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΜΒΓ έχουμε: $\mathrm{M\Gamma}^2 = \mathrm{MB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2 = \alpha^2 + \mathrm{x}^2$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΝΓ έχουμε:

$\mathrm{N\Gamma}^2 = \mathrm{N\Delta}^2 + \Delta\Gamma^2 = (2\mathrm{x})^2 + (2\alpha)^2 = 4\mathrm{x}^2 + 4\alpha^2$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΝ έχουμε:

$\mathrm{MN}^2 = \mathrm{AN}^2 + \mathrm{AM}^2 = (\alpha + 2\mathrm{x})^2 + (2\alpha - \mathrm{x})^2 = \alpha^2 + 4\mathrm{x}^2 + 4\alpha\mathrm{x} + 4\alpha^2 + \mathrm{x}^2 - 4\alpha\mathrm{x} =$
$5\alpha^2 + 5\mathrm{x}^2$.

β) Από το α) έπεται $\mathrm{M\Gamma}^2 + \Gamma\mathrm{N}^2 = \alpha^2 + x^2 + 4x^2 + 4\alpha^2 = 5\alpha^2 + 5x^2 = \mathrm{MN}^2$,

κατά συνέπεια το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΜΝ.

γ) Από τα δεδομένα και το ερώτημα α) τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΓΜΝ είναι ορθογώνια οπότε:

$(\mathrm{AMN}) = \frac{1}{2}\mathrm{AM}\cdot\mathrm{AN} = \frac{1}{2}(2a - x)(a + 2x) = \frac{1}{2}(2a^2 + 4ax - ax - 2x^2) =$

$\frac{1}{2}(2a^2 + 3ax - 2x^2)$.

$(\mathrm{M\Gamma N}) = \frac{1}{2}\mathrm{M\Gamma}\cdot\Gamma\mathrm{N} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + x^2}\cdot\sqrt{4a^2 + 4x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4(a^2 + x^2)^2} = \frac{1}{2}\cdot 2\,(a^2 + x^2) =$

$a^2 + x^2$.

δ) Λόγω του ερωτήματος β) έχουμε:

$(\mathrm{AMN}) = (\mathrm{MN\Gamma}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(2a^2 + 3ax - 2x^2) = a^2 + x^2 \Leftrightarrow 2a^2 + 3ax - 2x^2 = 2a^2 + 2x^2$

$\Leftrightarrow 4x^2 = 3ax \overset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} x = \frac{3}{4}a$, οπότε ΑΜ $= \frac{3}{4}a$, άρα γνωστή η θέση του Μ.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22511

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 2, ΑΓ = 3 και $\widehat{\mathrm{A}} = 60^{\mathrm{o}}$. Να υπολογίσετε:

α) το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 9)

β) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

γ) το ύψος $υ_α$. (Μονάδες 8)

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22511-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 - 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{\sigma\upsilon\nu A} = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 7\ ,$$

επομένως $\mathrm{B\Gamma} = \sqrt{7}$.

β) Έχουμε $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{\eta\mu A} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

γ) Έχουμε $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \upsilon_\alpha$, άρα $\upsilon_\alpha = \frac{2(\mathrm{AB\Gamma})}{\alpha} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22512

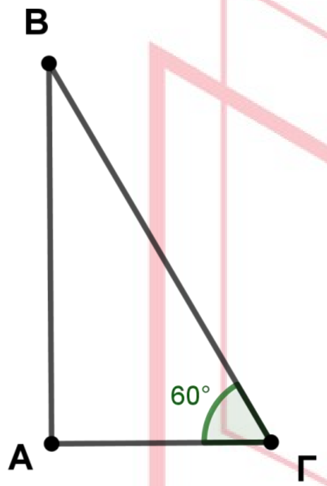
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 4, ΑΓ = 2 και $\hat{\Gamma} = 60^o$.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22512-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$$\text{AB}^2 = \text{AΓ}^2 + \text{BΓ}^2 - 2\cdot\text{AΓ}\cdot\text{BΓ}\cdot\text{συν}\,\Gamma = 2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 12\,,$$

άρα $\text{AB} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

β) Έχουμε $\text{BΓ}^2 = 16$ και $\text{AB}^2 + \text{AΓ}^2 = 12 + 4 = 16$.

Επομένως $\text{BΓ}^2 = \text{AB}^2 + \text{AΓ}^2$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΒΓ.

γ) Επειδή $\widehat{\text{A}} = 90^o$ έχουμε $(\text{ABΓ}) = \frac{1}{2}\cdot\text{AB}\cdot\text{AΓ} = \frac{2\cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22513

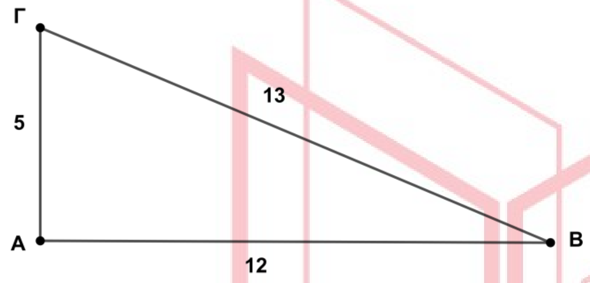
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 12, ΑΓ =5 και ΒΓ =13.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{Α} = 90^o$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος $υ_α$. (Μονάδες 9)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22513-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, αρκεί να αποδείξουμε ότι $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$.

Έχουμε $B\Gamma^2 = 13^2 = 169$ και $A\Gamma^2 + AB^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Άρα $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$, οπότε $\hat{A} = 90^o$.

β) Επειδή $\hat{A} = 90^o$ έχουμε $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$.

γ) Ισχύει $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \upsilon_\alpha$, άρα $\upsilon_\alpha = \frac{(AB\Gamma)}{2\alpha} = \frac{2 \cdot 30}{13} = \frac{60}{13}$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22514

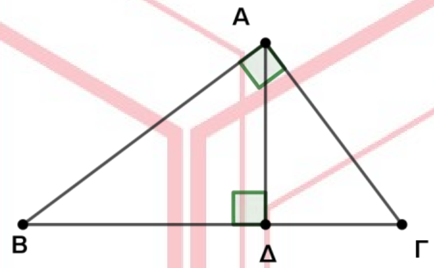
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$) με ΒΓ = 5 και ΑΒ = 4. Να υπολογίσετε:

α) την πλευρά ΑΓ. (Μονάδες 9)

β) την προβολή της πλευράς ΑΒ πάνω στη ΒΓ. (Μονάδες 8)

γ) το ύψος ΑΔ. (Μονάδες 8)



αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

22514-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$, άρα $A\Gamma = 3$.

β) Έχουμε $AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$, οπότε $B\Delta = \dfrac{AB^2}{B\Gamma} = \dfrac{16}{5}$.

γ) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$, οπότε

$$A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2 = 4^2 - \frac{16^2}{5^2} = 16 - \frac{16 \cdot 16}{25} = \frac{16 \cdot 25 - 16 \cdot 16}{25} =$$

$\dfrac{16 \cdot (25-16)}{25} = \dfrac{16 \cdot 9}{25}$, άρα $B\Delta = \dfrac{4 \cdot 3}{5} = \dfrac{12}{5}$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ