14535

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

ΑΒ = 9, ΑΓ =15 και $\hat{A}$ = 48^o , ΖΔ = 12, ΖΕ = 20 και $\hat{Z}$ = 48^o.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β)

i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

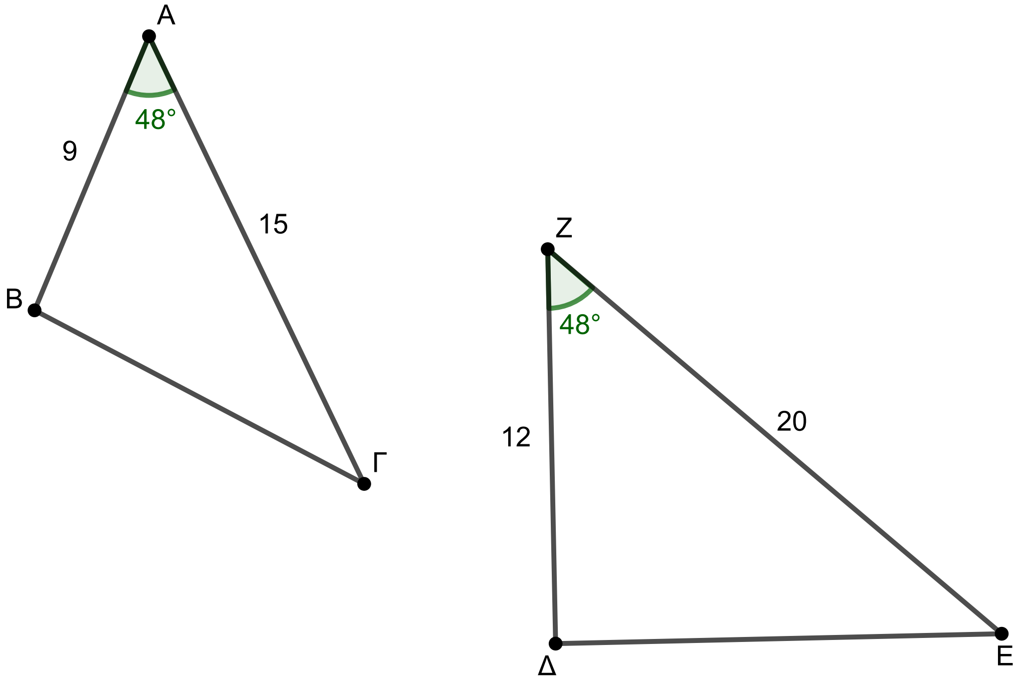
ii. Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

(Μονάδες 12)

14535-Λύση

ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΔΕ ώστε $\widehat{A} = \widehat{Z} = 48^o$, ΑΒ=9, ΑΓ=15, ΖΔ=12 και ΖΕ=20.



α) Στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΔΕ οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{Z}$ που καθεμιά είναι ίση με 48^o , περιέχονται στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ και ΖΔ, ΖΕ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύει $\frac{AB}{Z\Delta} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ και $\frac{A\Gamma}{ZE} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$, οπότε $\frac{AB}{Z\Delta} = \frac{A\Gamma}{ZE}$. Δηλαδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΔΕ έχουν δυο πλευρές τους ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες σε αυτές τις πλευρές ίσες, οπότε τα τρίγωνα είναι όμοια.

β)

i. Δύο λόγοι πλευρών των δυο τριγώνων είναι οι $\frac{AB}{Z\Delta}$ και $\frac{A\Gamma}{ZE}$ που αποδείξαμε πριν ότι είναι μεταξύ τους ίσοι αφού καθένας από τους λόγους αυτούς είναι ίσος με $\frac{3}{4}$. Οι τρίτες πλευρές των δύο τριγώνων είναι οι ΒΓ και ΔΕ που είναι ομόλογες αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{Z}$. Οι τρεις λόγοι των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων είναι $\frac{AB}{Z\Delta}$, $\frac{A\Gamma}{ZE}$ και $\frac{B\Gamma}{\Delta E}$.

ii. Ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους που όπως αποδείχθηκε στο ερώτημα α) ισούται με $\frac{3}{4}$.

14536

ΘΕΜΑ 2

Για δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΕΔΖ (ΕΔ = ΕΖ) γνωρίζουμε ότι:

$\widehat{A} = 48^o$, $\widehat{Z} = 66^o$ και ΑΒ = 3·ΕΔ.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΖ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β)

i. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των δυο τριγώνων

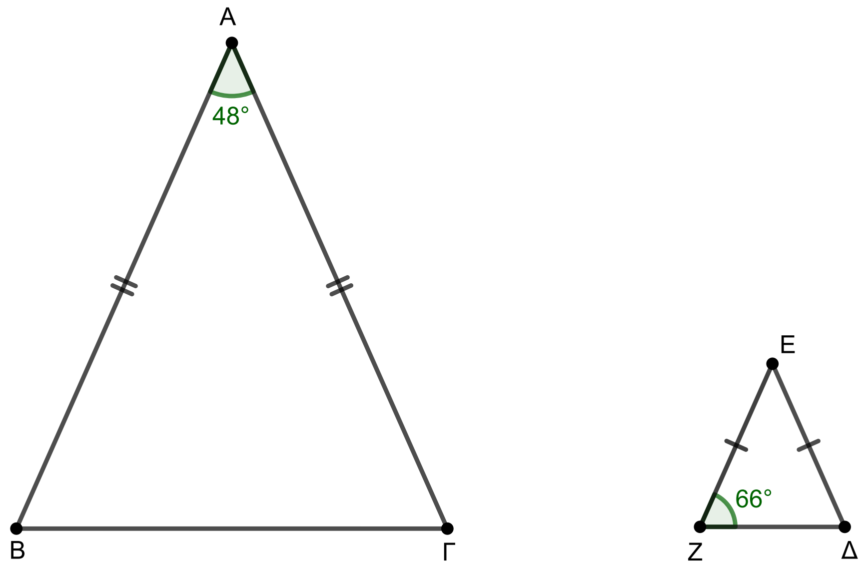
ii. Να βρείτε το λόγο των βάσεων των δυο τριγώνων.

(Μονάδες 12)

14536-Λύση

ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΕΔΖ (ΕΔ = ΕΖ), τέτοια ώστε $\widehat{\mathrm{A}}$ = 48°, $\widehat{\mathrm{Z}}$ = 66° και ΑΒ = 3·ΕΔ.



Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ το άθροισμα των γωνιών του είναι 180°. Οπότε καθεμιά από τις γωνίες της βάσης του θα είναι ίση με $\frac{180°-48°}{2} = \frac{132°}{2}$ = 66° . Στο ισοσκελές τρίγωνο ΕΖΔ έχουμε ότι η γωνία $\widehat{\mathrm{Z}}$ της βάσης του είναι ίση με 66°, οπότε και η άλλη γωνία της βάσης θα είναι 66°. Δηλαδή $\widehat{\Delta}$ = $\widehat{\mathrm{Z}}$ = 66° . Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΖΔ έχουν τις δυο γωνίες στη βάση τους μία προς μία ίσες, οπότε είναι όμοια.

β)

i. Στα όμοια τρίγωνα ομόλογες είναι οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες. Οι λόγοι που σχηματίζονται είναι $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{EZ}}$, $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{E\Delta}}$ και $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{Z\Delta}}$ οι οποίοι είναι ίσοι μεταξύ τους, αφού τα τρίγωνα είναι όμοια. Δηλαδή ισχύει ότι: $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{EZ}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{E\Delta}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{Z\Delta}}$.

ii. Ο λόγος των βάσεων είναι ο λόγος $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{Z\Delta}}$ ο οποίος είναι ίσος με το λόγο $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{EZ}}$.

$\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{Z\Delta}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{EZ}} = \frac{3\cdot\mathrm{E\Delta}}{\mathrm{EZ}} = \frac{3\cdot\mathrm{EZ}}{\mathrm{EZ}} = 3$. Άρα ο ζητούμενος λόγος των βάσεων είναι ίσος με 3.

14537

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

$\widehat{A} = 48^o$, $\widehat{B} = 53^o$, $\widehat{E} = 79^o$ και $\widehat{Z} = 48^o$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β)

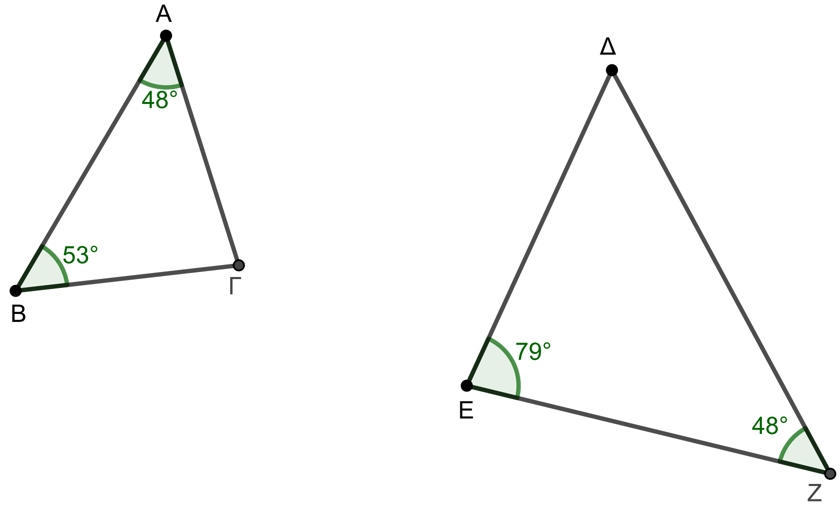
i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων; (Μονάδες 9)

ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων. (Μονάδες 6)

14537-Λύση

ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ τέτοια ώστε $\hat{A}$ = 48^o, $\hat{B}$ = 53^o, $\hat{E}$ = 79^o και $\hat{Z}$ = 48^o.



α) Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι 180^o. Οπότε $\hat{\Gamma}$ = 180^o – (48^o + 53^o) = 180^o – 101^o = 79^o. Αντίστοιχα στο τρίγωνο ΔΕΖ έχουμε $\hat{\Delta}$ = 180^o – (79^o + 48^o) = 180^o – 127^o = 53^o. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια.

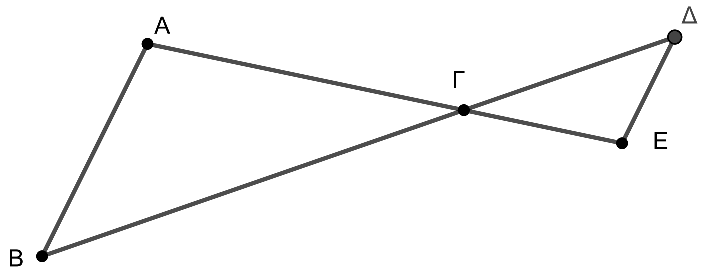
β)

i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες στα δύο τρίγωνα. Δηλαδή οι πλευρές ΒΓ και ΔΕ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}$ = $\hat{Z}$ = 48^o. Αντίστοιχα οι πλευρές ΑΓ και ΕΖ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}$ = $\hat{\Delta}$ = 53^o, και οι πλευρές ΑΒ και ΔΖ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\Gamma}$ = $\hat{E}$ = 79^o.

ii. Οι ίσοι λόγοι των ομόλογων πλευρών είναι $\frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{EZ} = \frac{AB}{\Delta Z}$.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα τα τμήματα ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλα και τα τμήματα ΑΓ και ΓΕ είναι τέτοια, ώστε ΑΓ=2ΓΕ.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β)

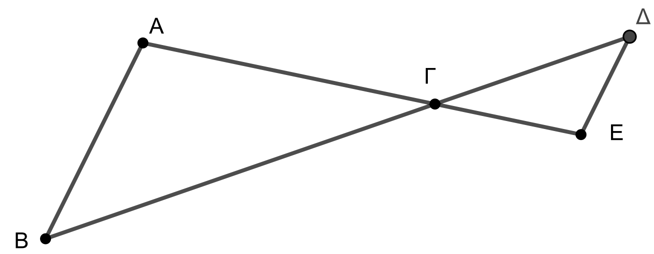
i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.

ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων;

(Μονάδες 12)

14538-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Δίνεται ότι ΑΒ//ΔΕ οπότε οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{E}$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΔΕ με τέμνουσα την ΑΕ. Ομοίως $\hat{B} = \hat{\Delta}$ ως εντός εναλλάξ των ΑΒ και ΔΕ με τέμνουσα τη ΒΔ. Οι γωνίες $A\hat{\Gamma}B$ και $\Delta\hat{\Gamma}E$ είναι ίσες ως κατακορυφήν. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ έχουν τις γωνίες τους ίσες μια προς μία, οπότε είναι όμοια.

β)

i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες στα δύο τρίγωνα. Οπότε οι λόγοι των ομόλογων πλευρών είναι :

$\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{E}$

$\frac{A\Gamma}{\Gamma E}$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$ και

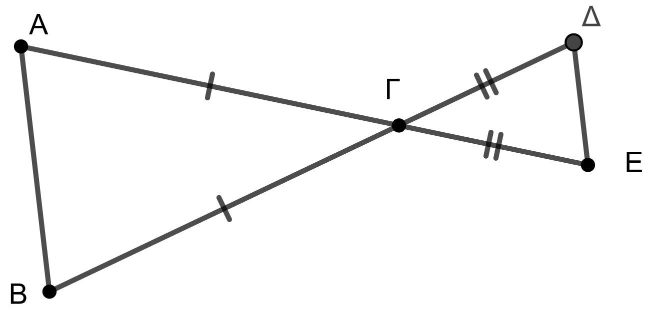
$\frac{AB}{\Delta E}$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{\Gamma}B$ και $\Delta\hat{\Gamma}E$.

ii. Ο λόγος ομοιότητας είναι ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή οποιοσδήποτε από τους ίσους λόγους $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$, $\frac{A\Gamma}{\Gamma E}$, $\frac{AB}{\Delta E}$. Οπότε ο λόγος ομοιότητας ισούται με $\frac{A\Gamma}{\Gamma E} = \frac{2\cdot\Gamma E}{\Gamma E} = 2$.

14546

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ, τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ που σχηματίζονται είναι ισοσκελή και οι βάσεις τους ΑΒ και ΔΕ είναι τέτοιες, ώστε ΑΒ = 2·ΔΕ.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β)

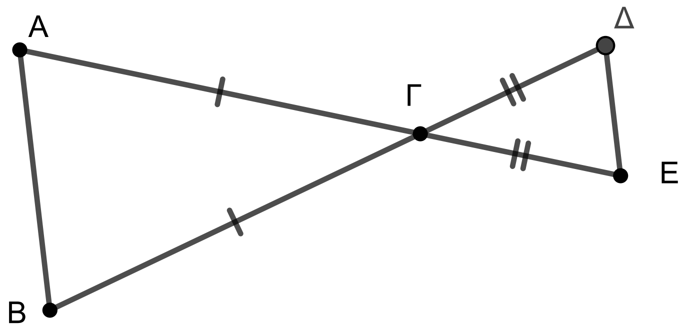
i. Να γράψετε την ισότητα των λόγων που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων του ερωτήματος α).

ii. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές ΑΓ και ΓΕ των δύο τριγώνων;

(Μονάδες 12)

14546-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΕΔ είναι ισοσκελή με βάσεις ΑΒ και ΔΕ αντίστοιχα και έχουν τις γωνίες στην κορυφή τους ίσες αφού, $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B} = \Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{E}$, ως κατακορυφήν.

Έτσι $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}} = \dfrac{180° - \mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}}{2} = \dfrac{180° - \Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{E}}{2} = \widehat{\mathrm{E}} = \widehat{\Delta}$. Οπότε τα τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, άρα είναι όμοια.

β)

i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες στα δύο τρίγωνα. Οπότε οι λόγοι των ομόλογων πλευρών είναι :

$\dfrac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}}$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}$ και $\Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{E}$

$\dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{\Gamma\Delta}$, $\dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\mathrm{E}}$, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\mathrm{A}}$, $\widehat{\mathrm{E}}$ και $\widehat{\mathrm{B}}$, $\widehat{\Delta}$ αντίστοιχα.

Αφού τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΕΔ είναι όμοια οι λόγοι των ομόλογων πλευρών του είναι ίσοι δηλαδή, ισχύει $\dfrac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}} = \dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{\Gamma\Delta} = \dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\mathrm{E}}$.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα ισχύει $\dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\mathrm{E}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}} = \dfrac{2\cdot\Delta\mathrm{E}}{\Delta\mathrm{E}} = 2$. Δηλαδή ισχύει $\dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\mathrm{E}} = 2$ ή ΑΓ = 2·ΓΕ. Οπότε η πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ είναι διπλάσια από την πλευρά ΓΕ του τριγώνου ΓΔΕ.

16086

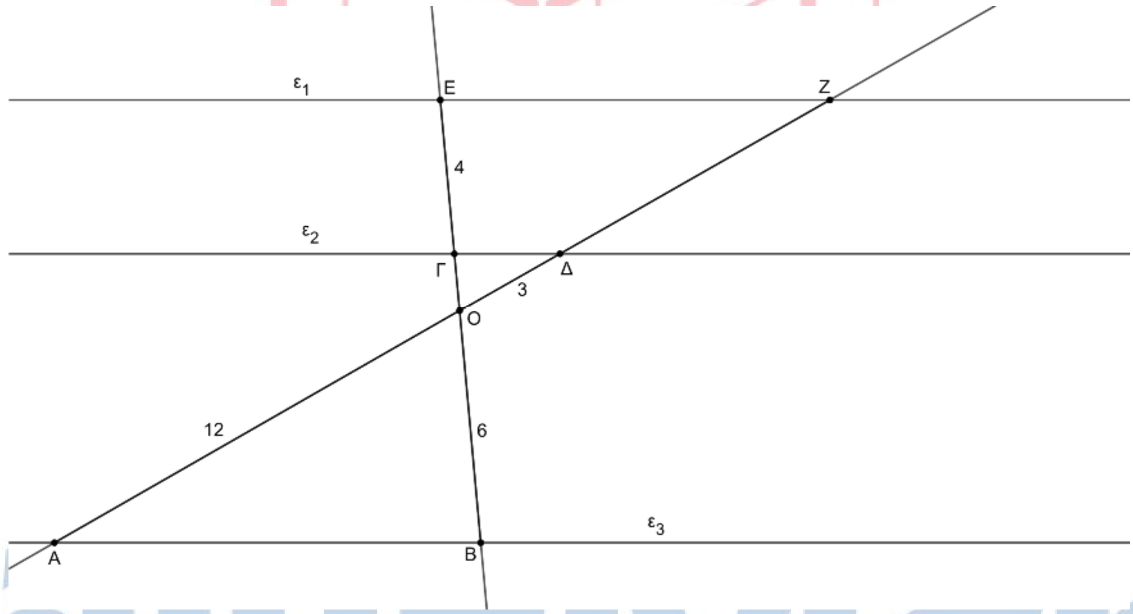
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και $ε_3$ είναι παράλληλες. Δίνονται ότι ΓΕ = 4, ΟΔ = 3, ΟΑ = 12, ΟΒ = 6.

α) Να υπολογίσετε τα τμήματα ΟΓ και ΔΖ. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΖ και ΟΒΑ είναι όμοια. (Μονάδες 09)

γ) Αν ΟΓ = 1.5 και ΔΖ = 8, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{ΕΖ}{ΑΒ}$. (Μονάδες 06)



16086-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Φέρνουμε ε_4 // ε_2 που διέρχεται από το Ο. Τότε από το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες ε_2, ε_4, ε_3 που τέμνονται από τις ΓΒ και ΔΑ, έχουμε: $\frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΟΔ}} = \frac{\text{ΟΒ}}{\text{ΟΓ}}$,

επομένως $\frac{12}{3} = \frac{6}{\text{ΟΓ}}$, άρα $12 \cdot \text{ΟΓ} = 6 \cdot 3$ ή ΟΓ = 1.5.

Από το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες ε_2, ε_4, ε_1 που τέμνονται από τις ΟΕ και ΟΖ, έχουμε: $\frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΓΕ}} = \frac{\text{ΟΔ}}{\text{ΔΖ}}$, επομένως $\frac{1,5}{4} = \frac{3}{\text{ΔΖ}}$, άρα $1,5 \cdot \text{ΔΖ} = 4 \cdot 3$ ή ΔΖ = 8.

β) Τα τρίγωνα ΟΕΖ και ΟΒΑ έχουν:

$\text{Ε}\hat{\text{Ζ}}\text{Ο} = \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Ο}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ και ΑΒ που τέμνονται από την ΖΑ.

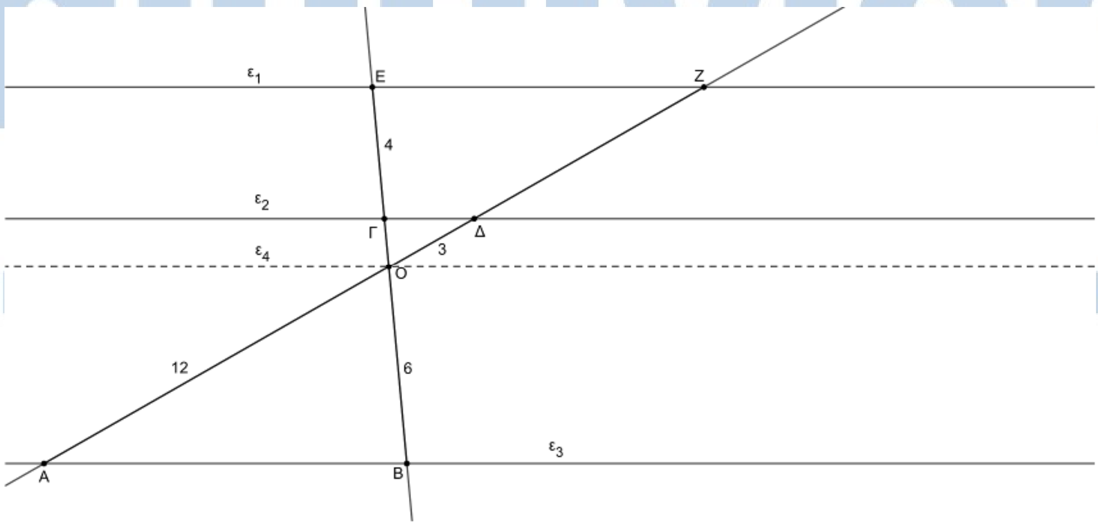
$\text{Ζ}\hat{\text{Ε}}\text{Ο} = \text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Ο}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ και ΑΒ που τέμνονται από την ΕΒ.

Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια επειδή έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

γ) Από την ομοιότητα των τριγώνων ΟΕΖ και ΟΒΑ έχουμε:

	Ίσες γωνίες		
	$\text{Ε}\hat{\text{Ζ}}\text{Ο} = \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Ο}$	$\text{Ζ}\hat{\text{Ε}}\text{Ο} = \text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Ο}$	$\text{Ε}\hat{\text{Ο}}\text{Ζ} = \text{Β}\hat{\text{Ο}}\text{Α}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΟΒ	ΟΒ	ΟΑ	ΑΒ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΖΟΕ	ΟΕ	ΟΖ	ΕΖ

$\frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΟΖ}}{\text{ΟΑ}} = \frac{\text{ΟΔ} + \text{ΔΖ}}{\text{ΟΑ}} = \frac{3+8}{12} = \frac{11}{12}$.



16097

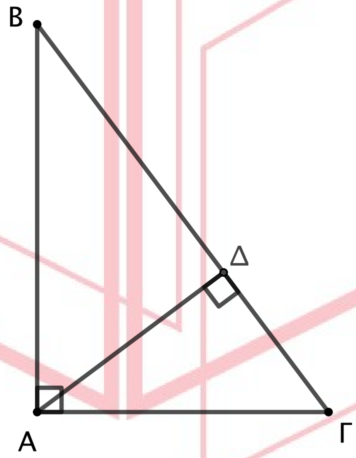
ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.

ii. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Στο σχήμα, η προβολή της πλευράς ΑΒ στην υποτείνουσα ΒΓ είναι το τμήμα ΓΔ.



iv. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

v. Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

(Μονάδες 15)

16097-Λύση

ΛΥΣΗ

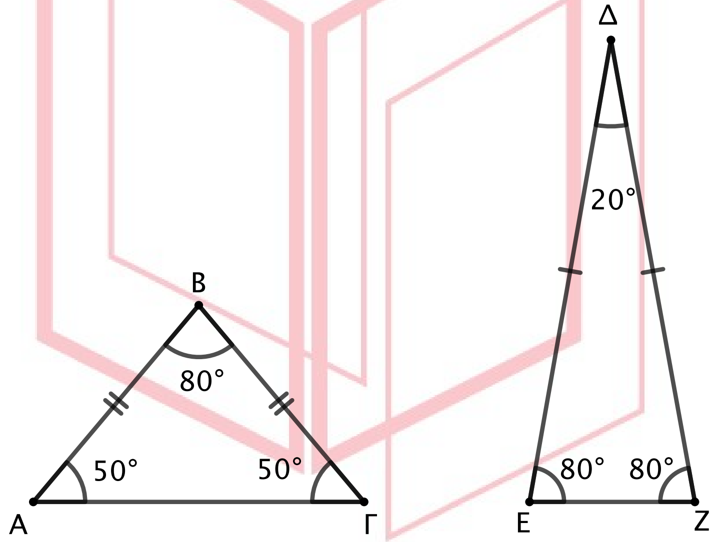
α)

i. Σωστό

Πόρισμα, σελίδα 15 σχολικό βιβλίο.

ii. Λάθος

Για παράδειγμα, τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΒΓ) και ΕΔΖ (ΕΔ = ΔΖ) του σχήματος έχουν $\hat{B} = \hat{E} = 80^o$. Ωστόσο, δεν είναι όμοια, αφού δεν έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.



iii. Λάθος

Η προβολή της πλευράς ΑΒ στην υποτείνουσα ΒΓ είναι το τμήμα ΒΔ.

iv. Λάθος

Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

v. Σωστό

Θεώρημα Ι, σελίδα 91 σχολικό βιβλίο.

β) §10.3, Θεώρημα Ι (απόδειξη), σελίδα 72 σχολικό βιβλίο (Σχήμα 7).

16099

ΘΕΜΑ 2

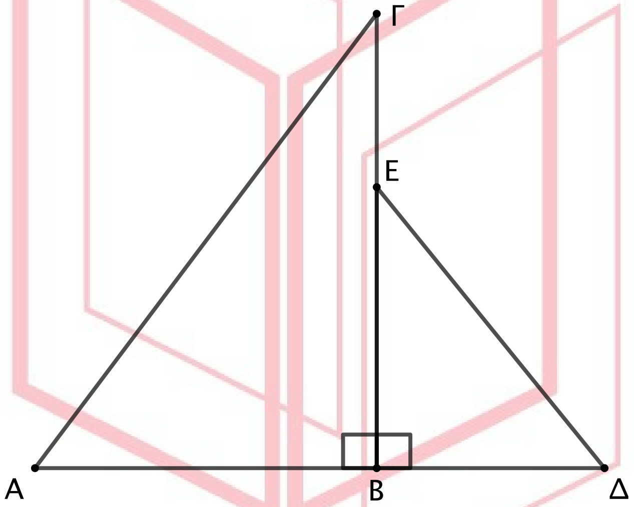
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ότι $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, $A\Gamma = 36$, $B\Delta = 16$ και $E\Delta = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια.

(Μονάδες 15)

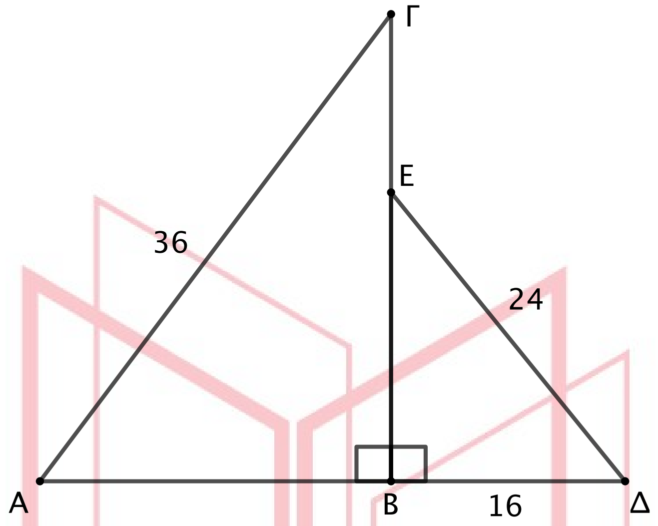
β) Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ.

(Μονάδες 10)



16099-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ έχουν $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ (από υπόθεση) και $A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{B}E = 90^o$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\widehat{A} = \widehat{\Delta}$	$A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{B}E$	$A\hat{\Gamma}B = \Delta\hat{E}B$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΔΒΕ	ΒΕ	ΕΔ	ΒΔ

Έτσι έχουμε:

$$\frac{A\Gamma}{E\Delta} = \frac{AB}{B\Delta} \;\text{ ή }\; \frac{36}{24} = \frac{AB}{16} \;\text{ ή }\; AB = \frac{36.16}{24} = 24$$

16100

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ότι $ΑΕ = 5$, $ΑΓ = 4$, $ΕΓ = 2$, $ΔΕ = 6$, $ΒΕ = 15$ και $ΒΔ = 12$.

α) Να υπολογίσετε τους λόγους

$$\frac{ΒΔ}{ΑΓ}, \frac{ΔΕ}{ΕΓ}, \frac{ΒΕ}{ΑΕ}$$

(Μονάδες 9)

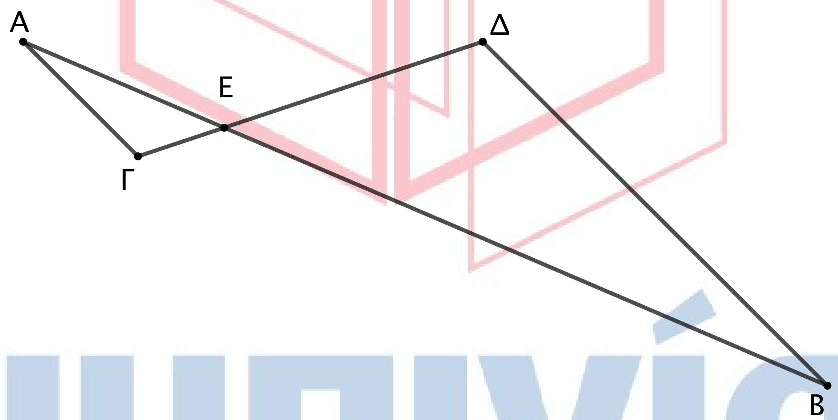
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια.

(Μονάδες 8)

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΓ και ΒΕΔ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

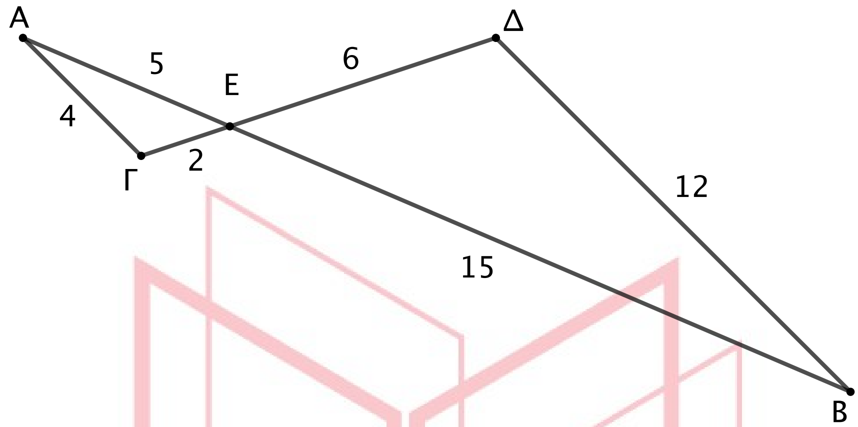
$$\widehat{Α} = \ldots\ldots, \qquad \widehat{Γ} = \ldots\ldots, \qquad Α\widehat{Ε}Γ = \ldots\ldots$$

(Μονάδες 8)



16100-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Είναι:

$$\frac{ΒΔ}{ΑΓ} = \frac{12}{4} = 3\,, \qquad \frac{ΔΕ}{ΕΓ} = \frac{6}{2} = 3\,, \qquad \frac{ΒΕ}{ΑΕ} = \frac{15}{5} = 3$$

β) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια διότι έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.

γ) Αφού τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια, τότε θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε:

$\hat{Α} = \hat{Β}$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΕΓ και ΔΕ αντίστοιχα

$\hat{Γ} = \hat{Δ}$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΕ και ΒΕ αντίστοιχα

$Α\hat{Ε}Γ = Β\hat{Ε}Δ$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα

16113

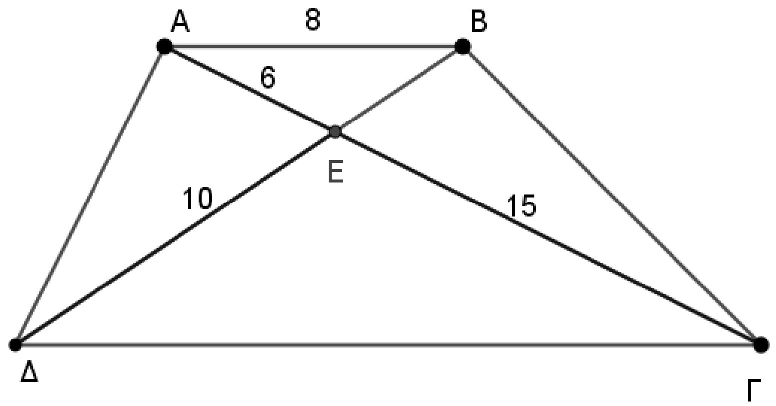
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΔΓ, Ε σημείο τομής των διαγώνιων, ΑΕ = 6, ΑΒ = 8, ΓΕ = 15 και ΔΕ = 10.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΓΕΔ είναι όμοια. (Μονάδες 09)

β) Να γράψετε την αναλογία των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 09)

γ) Να υπολογίστε τα τμήματα ΒΕ και ΓΔ. (Μονάδες 07)



16113-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΓΕΔ έχουν:

$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΑΓ.

$\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$, σαν εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ.

Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια, αφού έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

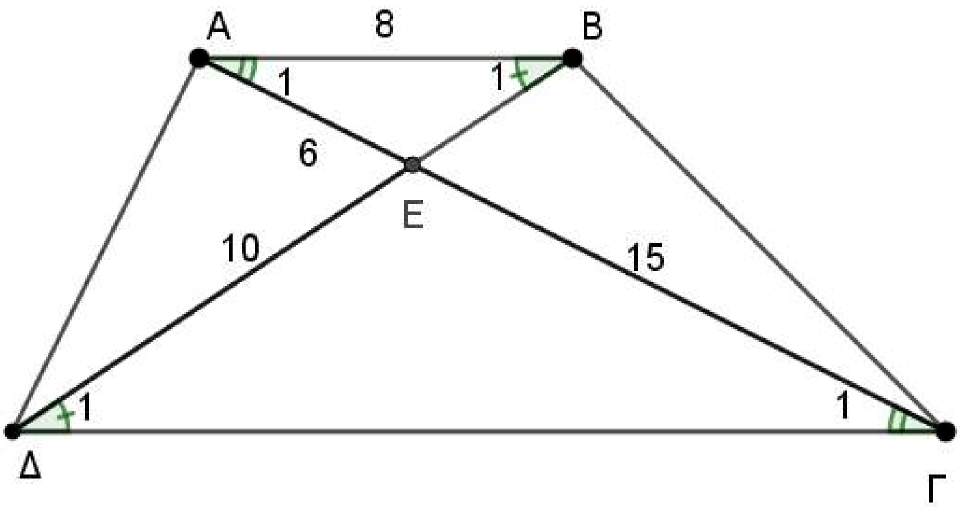
β) Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΕ και ΓΕΔ συμπεραίνουμε ότι οι αντίστοιχες πλευρές θα είναι ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές φαίνονται στον πίνακα.

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$	$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$	$A\hat{E}B = \Gamma\hat{E}\Delta$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΕ	ΒΕ	ΑΕ	ΑΒ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΓΕΔ	ΔΕ	ΓΕ	ΔΓ

Επομένως θα ισχύει: $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{BE}{E\Delta}$ (1).

γ) Από την (1) έχουμε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{BE}{E\Delta}$ ή $\frac{8}{\Gamma\Delta} = \frac{6}{15} = \frac{BE}{10}$.

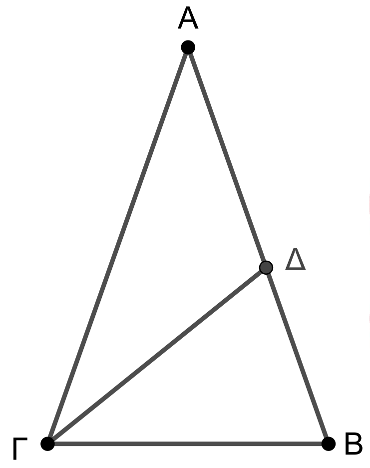
6ΓΔ = 8·15, άρα 6ΓΔ = 120, άρα ΓΔ = 20 και 15ΒΕ = 6·10, άρα 15ΒΕ = 60, άρα ΒΕ =4.



16126

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ = 36$ και $ΒΓ = 24$. Το σημείο $Δ$ της πλευράς $ΑΒ$ είναι τέτοιο ώστε $ΒΔ = 16$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΓΒΔ$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{3}{2}$.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $ΓΔ$.

(Μονάδες 12)

16126-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΓΒΔ$ έχουν:

i. $\hat{B}$ κοινή γωνία

ii. $\frac{AB}{ΓB} = \frac{BΓ}{BΔ}$ ή $\frac{36}{24} = \frac{24}{16}$ ή $\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$, που ισχύει,

επομένως είναι όμοια αφού έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη στις πλευρές αυτές γωνία κοινή. Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΓΒΔ$ είναι $\frac{3}{2}$.

β) Αφού τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΓΒΔ$ είναι όμοια, θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, οπότε

$$\frac{AΓ}{ΓΔ} = \frac{AB}{ΓB} \text{ ή } \frac{36}{ΓΔ} = \frac{36}{24} \text{ ή } ΓΔ = 24 .$$

16133

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔE έχουν μήκη αντίστοιχα $12, 16, 8$ και 10, οι γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $\Delta\hat{\Gamma}E$ είναι ορθές και τα σημεία A, Γ και E ανήκουν στην ίδια ευθεία.

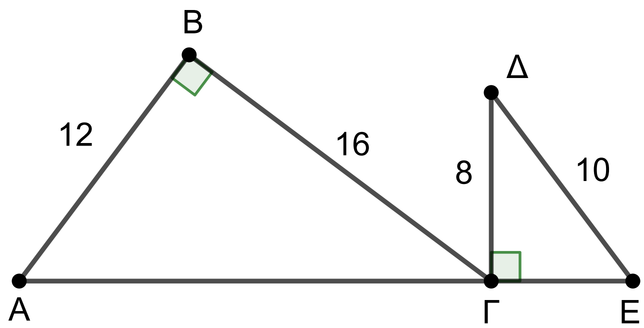
α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AE. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ είναι όμοια. (Μονάδες 7)

γ) Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών AB και $E\Delta$ είναι το Z και ZH είναι το ύψος του τριγώνου ZAE από την κορυφή του Z. Να αποδείξετε ότι:

i. $EH = 13$, (Μονάδες 6)

ii. $ZH = \frac{52}{3}$. (Μονάδες 5)



16133-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{B} = 90°$), έχουμε

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 \quad ή \quad ΑΓ^2 = 12^2 + 16^2 \quad ή \quad ΑΓ^2 = 400 \quad ή \quad ΑΓ = 20.$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΓΔΕ$ ($\hat{Γ} = 90°$), έχουμε

$$ΓΕ^2 = ΔΕ^2 - ΓΔ^2 \quad ή \quad ΓΕ^2 = 10^2 - 8^2 \quad ή \quad ΓΕ^2 = 36 \quad ή \quad ΓΕ = 6.$$

Επομένως το μήκος του τμήματος $ΑΕ$ είναι $ΑΕ = ΑΓ + ΓΕ = 20 + 6 = 26.$

β) Στο α) ερώτημα βρήκαμε ότι $ΑΓ = 20$ και $ΓΕ = 6$, άρα τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΕΓΔ$ έχουν:

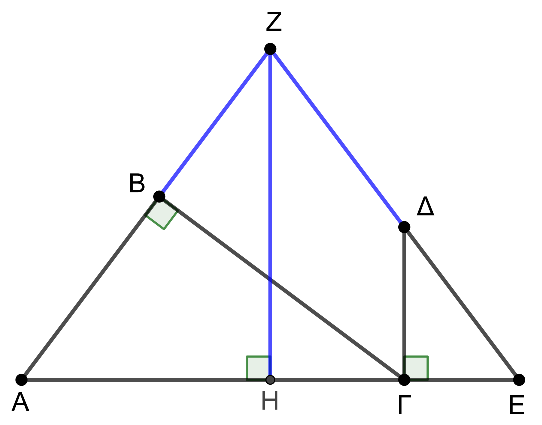
$$\frac{ΑΒ}{ΓΕ} = \frac{12}{6} = 2\,,$$

$$\frac{ΒΓ}{ΓΔ} = \frac{16}{8} = 2\,,$$

$$\frac{ΑΓ}{ΔΕ} = \frac{20}{10} = 2\,,$$

οπότε είναι όμοια, αφού έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.

γ)



i) Αφού τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΕΓΔ$ είναι όμοια, θα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, άρα $\hat{A} = \hat{E}$, οπότε το τρίγωνο $ΖΑΕ$ είναι ισοσκελές με βάση την $ΑΕ$. Επειδή το $ΖΗ$ είναι ύψος θα είναι και διάμεσος οπότε το σημείο $Η$ είναι το μέσο της $ΑΕ$. Επομένως θα είναι

$$ΗΕ = \frac{ΑΕ}{2} = \frac{26}{2} = 13.$$

ii) Είναι $ΔΓ \parallel ΖΗ$, ως κάθετες στην $ΑΕ$, οπότε από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο $ΓΔΕ$ θα έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου $ΗΖΕ$. Επομένως έχουμε

$$\frac{ΔΓ}{ΖΗ} = \frac{ΓΕ}{ΗΕ} \quad ή \quad \frac{8}{ΖΗ} = \frac{6}{13} \quad ή \quad ΖΗ = \frac{52}{3}\ .$$

16582

ΘΕΜΑ 4

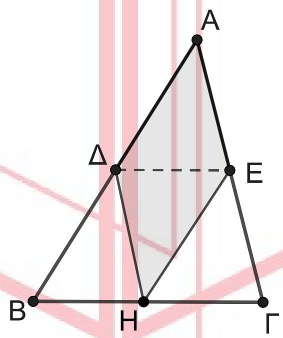
Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Έστω ότι $\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{1}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)

ii. Αν Η είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζετε ότι $\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AE}{A\Gamma}=\lambda$, τότε ποια είναι η σχέση των εμβαδών του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ και του τριγώνου ΑΒΓ; (Μονάδες 06)



16582-Λύση

ΛΥΣΗ

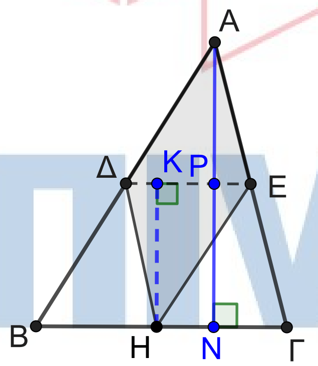
α) i. Εφόσον $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$, τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη στις πλευρές αυτές γωνία ίση (είναι η κοινή γωνία $\hat{A}$). Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή $\frac{1}{2}$.

Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους θα είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, δηλαδή $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. Άρα το εμβαδόν του ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του ΑΒΓ.

ii. <u>α΄ τρόπος</u>: Επειδή καθένας από τους λόγους $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ και $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$ είναι ίσος με $\frac{1}{2}$, τα Δ και Ε είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ. Άρα η ΔΕ είναι παράλληλη με τη ΒΓ.

Σχεδιάζουμε τα ύψη:

- ΑΝ του ΑΒΓ από την κορυφή Α και
- ΗΚ του ΗΕΔ από την κορυφή Η.



Ονομάζουμε Ρ το σημείο που το ΑΝ τέμνει το ΔΕ. Τότε το ΑΡ είναι κάθετο στη ΔΕ, αφού το ΑΝ είναι κάθετο στη ΒΓ η οποία είναι παράλληλη στο ΔΕ. Άρα το ΑΡ είναι ύψος του τριγώνου ΑΔΕ από την κορυφή Α.

Λόγω ομοιότητας των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ τα ύψη που αντιστοιχούν σε ομόλογες πλευρές είναι ανάλογα με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$, δηλαδή τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων.

Άρα $\frac{ΑΡ}{ΑΝ}=\frac{1}{2}$ ή $ΑΡ=\frac{ΑΝ}{2}$. Επομένως $ΡΝ=\frac{ΑΝ}{2}=ΑΡ$.

Όμως $ΗΚ=ΡΝ$, ως ευθύγραμμα τμήματα που είναι κάθετα στις παράλληλες ευθείες ΔΕ και ΒΓ, στις οποίες βρίσκονται τα άκρα τους. Άρα $ΗΚ=ΑΡ$.

16582-Λύση

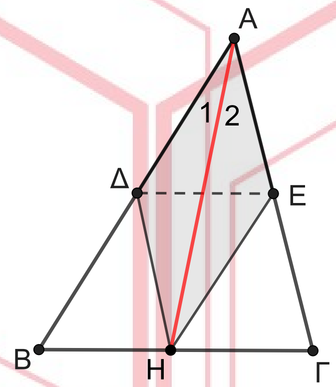
Επομένως τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΗΕΔ έχουν κοινή βάση τη ΔΕ και ίσα ύψη, τα ΑΡ και ΗΚ, άρα έχουν ίσα εμβαδά. Δηλαδή $(ΑΔΕ)=(ΗΕΔ)$.

Το εμβαδόν του ΑΔΗΕ είναι ίσο με $(ΑΔΗΕ)=(ΑΔΕ)+(ΗΕΔ)=2(ΑΔΕ)$.

Όμως από το ερώτημα α)i $(ΑΔΕ)=\frac{(ΑΒΓ)}{4}$. Άρα $(ΑΔΗΕ)=2\cdot\frac{(ΑΒΓ)}{4}=\frac{(ΑΒΓ)}{2}$.

Δηλαδή το εμβαδόν του ΑΔΗΕ είναι το μισό του εμβαδού του ΑΒΓ.

<u>β΄ τρόπος</u>: Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ.



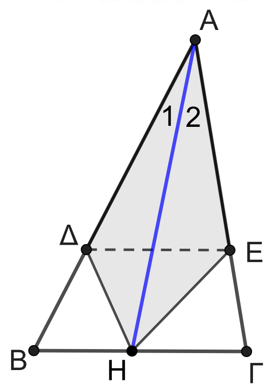
Τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΑΗΒ έχουν κοινή γωνία την $\hat{A}_1$, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\hat{A}_1$.

Δηλαδή $\frac{(ΑΗΔ)}{(ΑΗΒ)}=\frac{ΑΔ\cdot ΑΗ}{ΑΒ\cdot ΑΗ}=\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{1}{2}$ ή $(ΑΗΔ)=\frac{1}{2}\cdot(ΑΗΒ)$.

Με όμοιο συλλογισμό και κοινή γωνία την $\hat{A}_2$, για τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΑΗΓ έχουμε ότι $(ΑΗΕ)=\frac{1}{2}\cdot(ΑΗΓ)$.

Επομένως $(ΑΔΗΕ)=(ΑΗΔ)+(ΑΗΕ)=\frac{1}{2}\cdot(ΑΗΒ)+\frac{1}{2}\cdot(ΑΗΓ)=\frac{1}{2}\cdot\left[(ΑΗΒ)+(ΑΗΓ)\right]=\frac{1}{2}\cdot(ΑΒΓ)$.

β) Αν είναι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\lambda$, τότε $0<\lambda<1$, γιατί το $ΑΔ<ΑΒ$.



16582-Λύση

Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ.

Τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΑΗΒ έχουν κοινή γωνία την $\hat{A}_1$, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\hat{A}_1$.

Δηλαδή $\frac{(ΑΗΔ)}{(ΑΗΒ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΗ}{ΑΒ \cdot ΑΗ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \lambda$ ή $(ΑΗΔ) = \lambda \cdot (ΑΗΒ)$.

Με όμοιο συλλογισμό, για τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΑΗΓ έχουμε ότι:

$$\frac{(ΑΗΕ)}{(ΑΗΓ)} = \frac{ΑΕ \cdot ΑΗ}{ΑΓ \cdot ΑΗ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \lambda \text{ ή } (ΑΗΕ) = \lambda \cdot (ΑΗΓ)$$

Επομένως $(ΑΔΗΕ) = (ΑΗΔ) + (ΑΗΕ) = \lambda \cdot (ΑΗΒ) + \lambda \cdot (ΑΗΓ) = \lambda \cdot \left[(ΑΗΒ) + (ΑΗΓ)\right] = \lambda \cdot (ΑΒΓ)$.

16732

ΘΕΜΑ 4

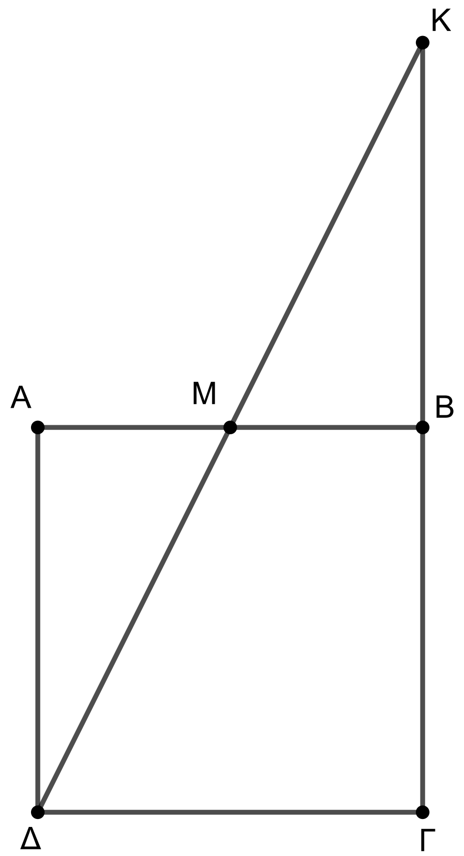
Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της ΑΒ. Οι ευθείες ΔΜ και ΓΒ τέμνονται στο Κ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ είναι όμοια. (5 μονάδες)

β) (ΜΚΒ) = $\frac{1}{4}$ (ΔΚΓ) (5 μονάδες)

γ) (ΜΒΓΔ) = $\frac{3}{4}$ (ΑΒΓΔ). (10 μονάδες)

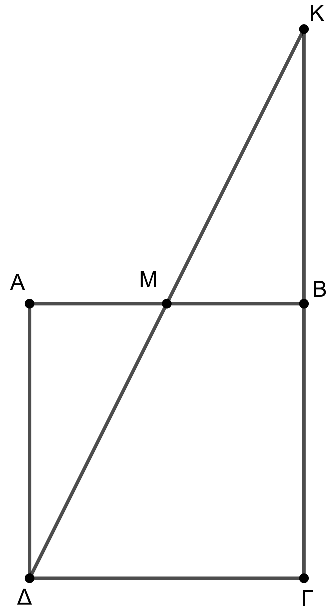
δ) Αν (ΜΒΓΔ) = 75 m^2 να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου. (5 μονάδες)



16732-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



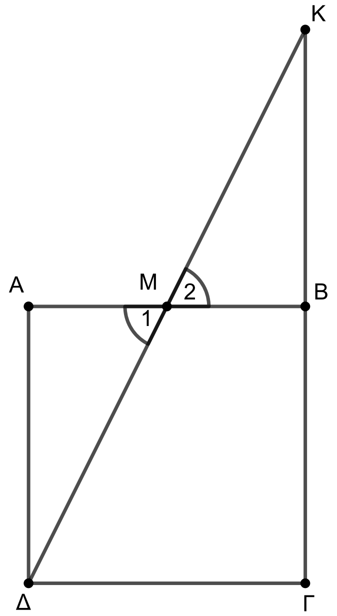
Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ είναι ορθογώνια και έχουν κοινή τη γωνία $\widehat{\mathrm{K}}$. Οπότε έχουν δυο γωνίες τους ίσες μια προς μια, άρα είναι όμοια.

β) Τα όμοια τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΒ έχουν λόγο ομοιότητας λ = $\frac{\mathrm{MB}}{\Delta\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}$. Οπότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, δηλαδή: $\frac{(\mathrm{MKB})}{(\Delta\mathrm{K}\Gamma)} = \lambda^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

$$\text{Συνεπώς } (\mathrm{MKB}) = \frac{1}{4}(\Delta\mathrm{K}\Gamma).$$

16732-Λύση

γ)



Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΜΚΒ είναι ίσα αφού έχουν

- ΑΜ = ΜΒ, το Μ είναι μέσο της ΑΒ
- $\Delta\widehat{A}M = M\widehat{B}K = 90^o$
- $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$, ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα, θα είναι και ισεμβαδικά, δηλαδή (ΑΜΔ) = (ΜΚΒ) (1).

Για το εμβαδόν του τριγώνου ΔΚΓ έχουμε:

(ΔΚΓ) = (ΔΜΒΓ) + (ΜΚΒ) = (ΔΜΒΓ) + (ΑΜΔ) = (ΑΒΓΔ), λόγω της σχέσης (1)

Για το εμβαδόν του ΜΒΓΔ έχουμε: (ΜΒΓΔ) = (ΔΚΓ) – (ΜΚΒ) = (ΔΚΓ) – $\frac{1}{4}$(ΔΚΓ), λόγω του β) ερωτήματος.

Άρα (ΜΒΓΔ) = $\frac{3}{4}$(ΑΒΓΔ)

δ) Έστω ότι το τετράγωνο έχει πλευρά α. Τότε (ΑΒΓΔ) = α^2 και (ΜΒΓΔ) = 75.

Από το ερώτημα γ) έχουμε ότι: 75 = $\frac{3}{4}$ α^2 ή $\alpha^2 = \frac{4}{3}\cdot 75$ ή $\alpha^2 = 100$.

Άρα $\alpha = 10$ m

16755

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = 2ΑΓ$ και σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ τέτοιο ώστε $ΑΓ = 2ΓΔ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τους λόγους

$$\frac{ΒΓ}{ΑΓ} \text{ και } \frac{ΑΓ}{ΓΔ}$$

(Μονάδες 8)

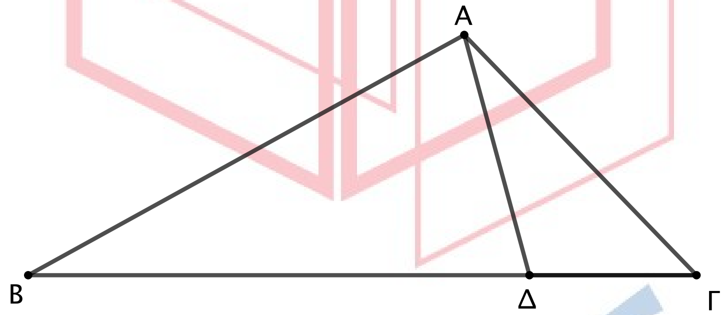
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΑΓ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

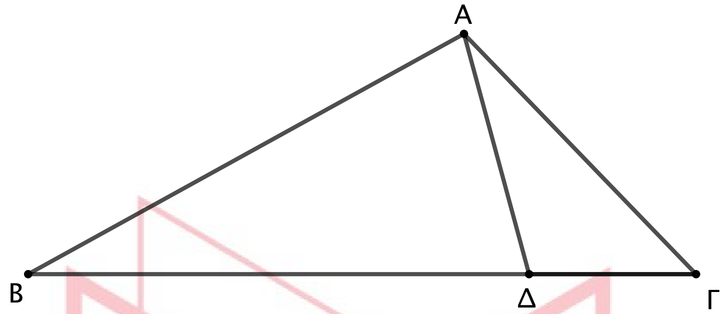
$$Β\widehat{Α}Γ = \ldots.. , \qquad \widehat{Β} = \ldots..$$

(Μονάδες 8)



16755-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Αφού δίνονται ότι $ΒΓ = 2ΑΓ$ και $ΑΓ = 2ΓΔ$, θα είναι:

$$\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = 2 \quad \text{και} \quad \frac{ΑΓ}{ΓΔ} = 2$$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ έχουν:

$\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = 2$

$\frac{ΑΓ}{ΓΔ} = 2$

$\hat{Γ}$ (κοινή)

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια, αφού έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

β) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια, τότε θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε:

$Β\hat{Α}Γ = Γ\hat{Δ}Α$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα.

$\hat{Β} = Δ\hat{Α}Γ$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΓ και ΓΔ αντίστοιχα.

16757

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^o$, $AB = 6$ και $AΓ = 3$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ, τέτοιο ώστε $AΔ = 4$. Φέρουμε την απόσταση ΒΕ της κορυφής Β από την ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ.

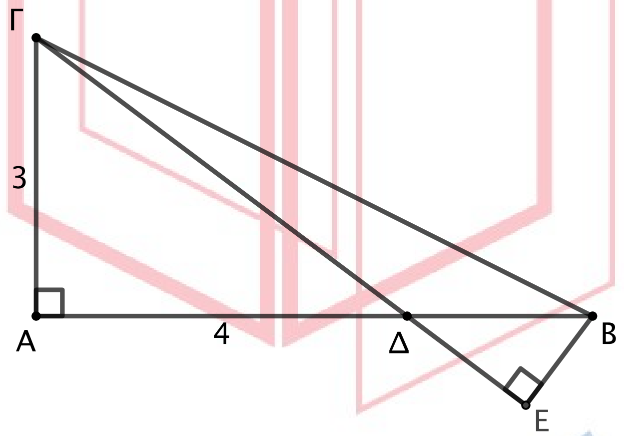
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

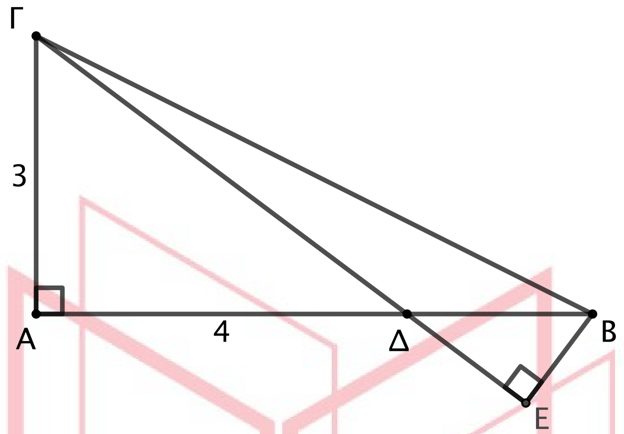
γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ.

(Μονάδες 8)



16757-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$\mathrm{\Delta\Gamma}^2 = \mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{A\Delta}^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

Άρα, $\mathrm{\Gamma\Delta} = 5$.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ έχουν $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma} = \mathrm{E\hat{\Delta}B}$ (ως κατακορυφήν) και $\hat{A} = \hat{E} = 90^o$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

γ) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{E}$	$\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma} = \mathrm{E\hat{\Delta}B}$	$\mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta} = \mathrm{E\hat{B}\Delta}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΓ	ΓΔ	ΑΓ	ΑΔ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΕΔΒ	ΔΒ	ΕΒ	ΕΔ

Έτσι έχουμε:

$$\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{EB}} = \frac{\mathrm{\Gamma\Delta}}{\mathrm{\Delta B}} \;\; ή \;\; \frac{3}{\mathrm{EB}} = \frac{5}{2} \;\; ή \;\; \mathrm{EB} = \frac{3\cdot 2}{5} = \frac{6}{5}$$

16770

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία $x\hat{O}\psi$ και η διχοτόμος της Οδ. Πάνω στην Οδ παίρνουμε τυχαία σημεία Α και Β. Θεωρούμε σημείο Ε στην πλευρά Οx τέτοιο ώστε $O\hat{E}B = 70^o$ και σημείο Δ στην Οψ τέτοιο ώστε $O\hat{\Delta}A=70^o$.

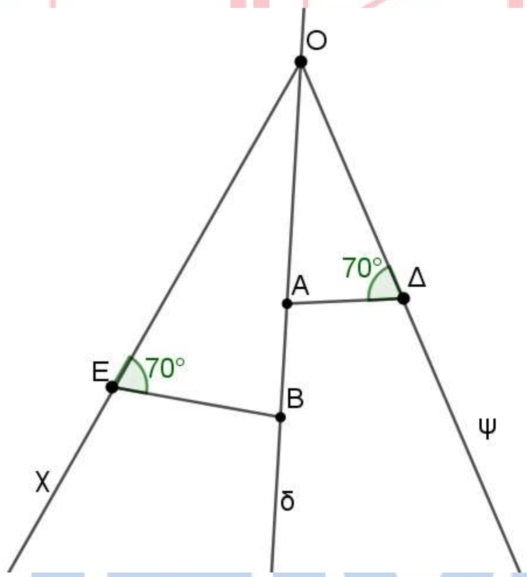
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β) Αν $\frac{OA}{OB}=\frac{2}{3}$ να υπολογίσετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών των τριγώνων.

(Μονάδες 06)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΔ είναι 28 τ.μ. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΟΕΒ.

(Μονάδες 09)



16770-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ έχουν:

$E\widehat{O}B = \Delta\widehat{O}A$, επειδή η ΟΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\widehat{O}\Delta$.

$\widehat{E} = \widehat{\Delta} = 70^o$.

Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μια προς μια αντίστοιχα.

β) Αφού τα δύο τρίγωνα είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

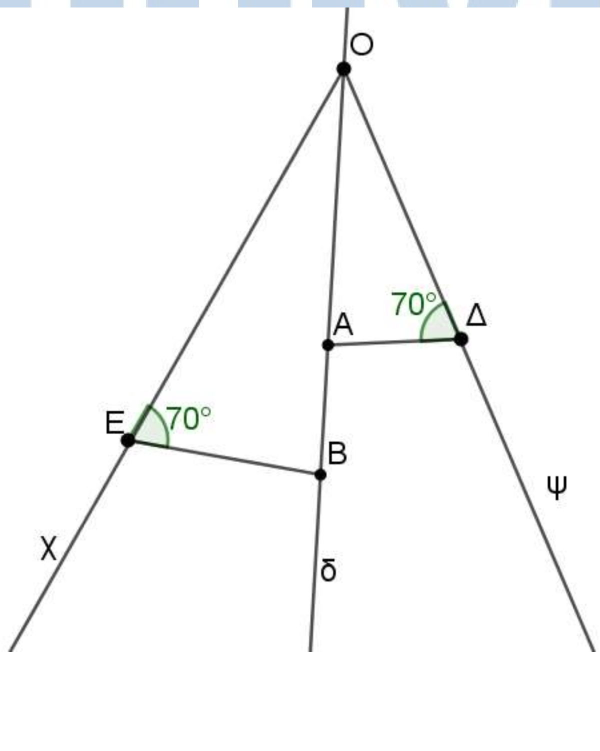
	Ίσες γωνίες		
	$\widehat{E} = \widehat{\Delta}$	$E\widehat{O}B = \Delta\widehat{O}A$	$\widehat{B} = \widehat{A}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΟΕΒ	ΟΒ	ΕΒ	ΟΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΟΔΑ	ΟΑ	ΑΔ	ΟΔ

Επομένως, θα είναι:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{EB}{A\Delta} = \frac{OE}{O\Delta}$$

γ) Τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ είναι όμοια, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, δηλαδή: $\frac{(OEB)}{(O\Delta A)} = \left(\frac{OB}{OA}\right)^2$.

Άρα $\frac{(OEB)}{28} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, δηλαδή $(OEB) = \frac{9}{4}28 = 63$ τ.μ.



17348

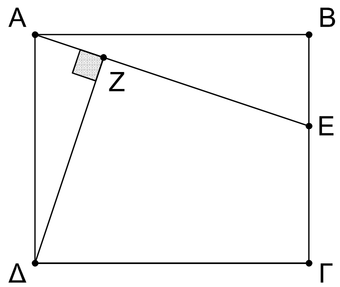
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με ΑΒ $= 6$ και το Ε σημείο της πλευράς ΒΓ, ώστε ΒΕ $= 2$. Έστω ΔΖ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο Δ προς την ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΕ $= 2\sqrt{10}$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 9)

γ) Αν ΔΖ $=$ ΖΕ, να υπολογίσετε το μήκος του ΑΔ. (Μονάδες 8)



17348-Λύση

ΛΥΣΗ

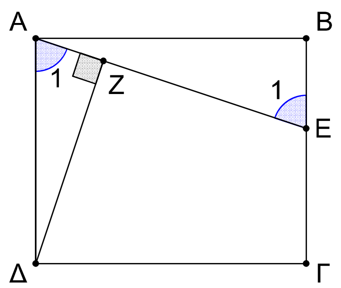
α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε ότι

$$ΑΕ^2 = ΑΒ^2 + ΒΕ^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $ΑΒ = 6$, $ΒΕ = 2$, οπότε

$$ΑΕ^2 = 6^2 + 2^2 \text{ ή } ΑΕ^2 = 40 \text{ ή } ΑΕ = 2\sqrt{10}.$$

β)



Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ έχουν:

- $\hat{Α}_1 = \hat{Ε}_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ που τέμνονται από την ΑΕ.
- $\hat{Β} = \hat{Ζ} = 90^o$, γιατί από την υπόθεση έχουμε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και η ΔΖ κάθετη στην ΑΕ.

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία. Επομένως θα ισχύει

$$\frac{ΑΒ}{ΔΖ} = \frac{ΑΕ}{ΑΔ} = \frac{ΒΕ}{ΑΖ} \ (1).$$

γ) Είναι $ΑΒ = 6$, $ΒΕ = 2$ και $ΑΕ = 2\sqrt{10}$, οπότε η (1) γίνεται

$$\frac{6}{ΔΖ} = \frac{2\sqrt{10}}{ΑΔ} = \frac{2}{ΑΖ} \ (2).$$

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $ΔΖ = ΖΕ$, έτσι η ισότητα $\frac{6}{ΔΖ} = \frac{2}{ΑΖ}$ γίνεται $\frac{6}{ΖΕ} = \frac{2}{ΑΖ}$ και με ιδιότητα των αναλογιών προκύπτει ότι

$$\frac{6}{ΖΕ} = \frac{2}{ΑΖ} = \frac{6+2}{ΖΕ+ΑΖ} = \frac{8}{ΑΕ} = \frac{8}{2\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \ (3).$$

Από τις ισότητες (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\frac{2\sqrt{10}}{ΑΔ} = \frac{4}{\sqrt{10}} \text{ ή } 4ΑΔ = 2(\sqrt{10})^2 \text{ ή } ΑΔ = 5.$$

18101

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ισοσκελή με $ΑΓ = ΒΓ = 3$ και $ΑΒ = ΑΔ = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{B}$ και $Β\hat{Α}Γ$ είναι ίσες.

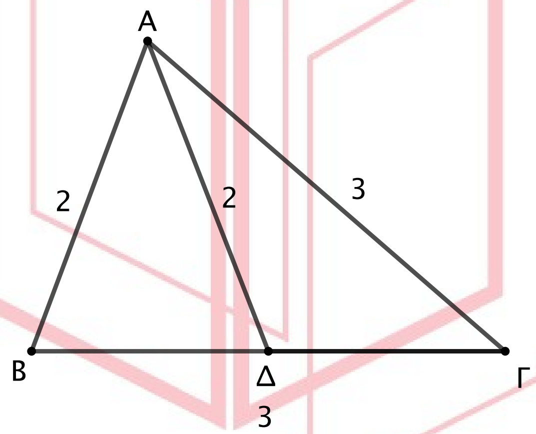
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΑ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

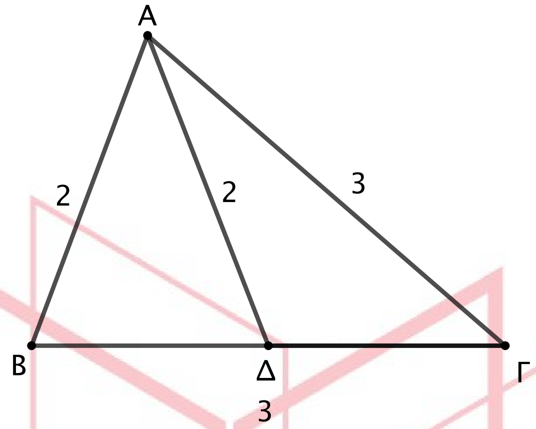
γ) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΒΔΑ)}$ των εμβαδών των δύο τριγώνων.

(Μονάδες 8)



18101-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΓ = ΒΓ$. Άρα, οι γωνίες $\hat{Β}$ και $Β\hat{Α}Γ$ θα είναι ίσες, ως προσκείμενες στη βάση ΑΒ.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΑ είναι ισοσκελή και έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, αφού $Β\hat{Α}Γ = \hat{Β}$ (η γωνία $Β\hat{Α}Γ$ είναι προσκείμενη στη βάση ΑΒ του ισοσκελούς ΑΒΓ και η γωνία $\hat{Β}$ είναι προσκείμενη στη βάση ΒΔ του ισοσκελούς ΑΒΔ).
Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια.

γ) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. Ο λόγος ομοιότητας λ των δύο τριγώνων ισούται με τον λόγο των πλευρών που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $Β\hat{Α}Γ$ και $\hat{Β}$ αντίστοιχα, δηλαδή είναι

$$\frac{ΒΓ}{ΑΔ} = \frac{3}{2}$$

Επομένως, έχουμε:

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΒΔΑ)} = \left(\frac{ΒΓ}{ΑΔ}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

18369

ΘΕΜΑ 4

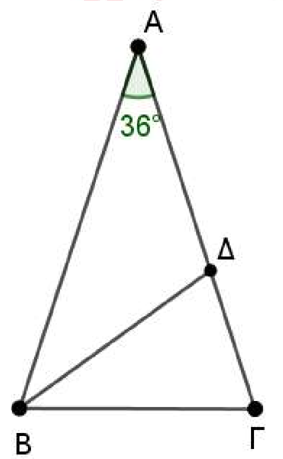
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, $\widehat{A} = 36^o$.

α) Αν η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

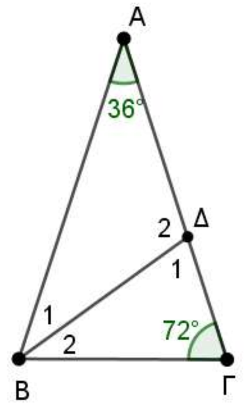
ii. Να γράψετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών. (Μονάδες 06)

β) Μετακινούμε το σημείο Δ στο εσωτερικό της ΑΓ. Για ποια θέση του σημείου Δ θα ισχύει $\frac{(AB\Delta)}{(\Delta B\Gamma)} = 3$. (Μονάδες 09)



18369-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = ΑΓ, οπότε $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$. Όμως $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180^o$,

άρα $36^o+2\widehat{B}=180^o$ και τελικά $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}=\dfrac{180^o-36^o}{2}=72^o$.

Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$, οπότε $\widehat{B}_1=\widehat{B}_2=\dfrac{72^o}{2}=36^o$ (1).

$\widehat{A}=\widehat{B}_1=36^o$, άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με ΑΔ = ΒΔ (2).

$\widehat{\Delta}_1=36^o+36^o=72^o$, σαν εξωτερική γωνία του ΑΒΔ, επομένως το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές με ΒΔ = ΒΓ (3).

i. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ έχουν:

   $\widehat{\Gamma}$ κοινή γωνία,

   $\widehat{A}=\widehat{B}_2=\dfrac{\widehat{B}}{2}=36^o$, από (1).

   Επομένως είναι όμοια, διότι έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

ii. Οι ομόλογες πλευρές των όμοιων τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	Ίσες γωνίες		
	$\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}$	$\widehat{B}_2=\widehat{A}$	$\widehat{\Delta}_1=\widehat{B}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΒΔΓ	ΒΔ	ΔΓ	ΒΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΑΒ	ΒΓ	ΑΓ

Επομένως οι λόγοι θα είναι $\dfrac{B\Gamma}{A\Gamma}=\dfrac{\Delta\Gamma}{B\Gamma}=\dfrac{B\Delta}{AB}$.

18369-Λύση

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΒΓ έχουν τις γωνίες $\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2$ παραπληρωματικές. Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν αυτές τις γωνίες, δηλαδή $\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\mathrm{\Delta B\Gamma})} = \frac{\mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{B\Delta}}{\mathrm{\Delta\Gamma} \cdot \mathrm{B\Delta}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta\Gamma}}$.

Όμως $\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\mathrm{\Delta B\Gamma})} = 3$, οπότε $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta\Gamma}} = 3$ ή ΑΔ = 3ΔΓ. Το Δ θα χωρίζει το ΑΓ σε δύο τμήματα ΑΔ και ΔΓ με λόγο 3:1.

18370

ΘΕΜΑ 4

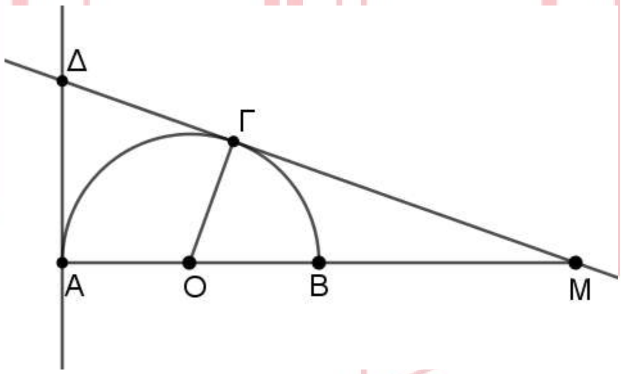
Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ = 2ρ. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Μ. Από το Μ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ στο ημικύκλιο. Αν η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο Α τέμνει την προέκταση της ΜΓ στο Δ τότε:

α) Αν ΒΜ = 2ρ να αποδείξετε ότι ΜΓ = $2\sqrt{2}$ρ. (Μονάδες 09)

β)

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{ΜΟ}{ΜΓ} = \frac{ΜΔ}{ΜΑ}$. (Μονάδες 09)

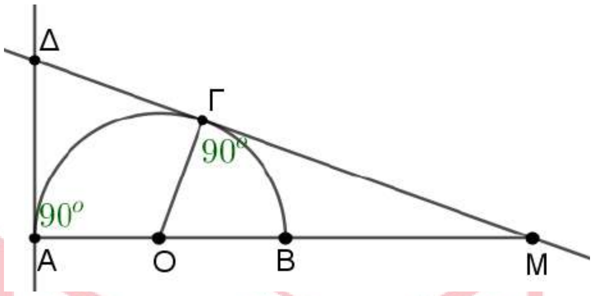
ii. Αν για το Μ ισχύει ότι ΒΜ = λ·ρ, όπου λ θετικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, τέτοια ώστε (ΑΔΜ) = 9(ΜΟΓ). (Μονάδες 07)



18370-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



Το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ είναι κάθετο στην ακτίνα ΟΓ.

ΜΟ = ΜΒ+ΒΟ = 2ρ+ρ = 3ρ.

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΓ:

$\mathrm{OM}^2 = \mathrm{O\Gamma}^2 + \mathrm{M\Gamma}^2$, άρα $\mathrm{M\Gamma}^2 = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{O\Gamma}^2 = (3\rho)^2 - \rho^2 = 8\rho^2$, δηλαδή ΜΓ = $2\sqrt{2}\rho$.

β)

i. Τα τρίγωνα ΟΜΓ και ΑΔΜ είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία αντίστοιχα: $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^o$ και την γωνία $\hat{M}$ κοινή. Επομένως οι ομόλογες πλευρές τους θα είναι ανάλογες:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{\Gamma}$	Μ κοινή	$\hat{O} = \hat{\Delta}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΟΜΓ	ΜΟ	ΟΓ	ΜΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΜ	ΜΔ	ΔΑ	ΜΑ

$\frac{\mathrm{M\Delta}}{\mathrm{MO}} = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{M\Gamma}}$ ή $\frac{\mathrm{M\Delta}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{M\Gamma}}$.

ii. Δείξαμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΟΜΓ είναι όμοια, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

$\frac{(\mathrm{AM\Delta})}{(\mathrm{OM\Gamma})} = \left(\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{\Gamma M}}\right)^2 = \frac{\mathrm{AM}^2}{\mathrm{\Gamma M}^2}$. (1)

ΟΜ = ΜΒ+ΒΟ = λρ+ρ = (λ+1)ρ.

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΓ:

$\mathrm{OM}^2 = \mathrm{O\Gamma}^2 + \mathrm{\Gamma M}^2$, άρα

$\mathrm{\Gamma M}^2 = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{O\Gamma}^2 = ((\lambda+1)\rho)^2 - \rho^2 = (\lambda^2 + 2\lambda + 1 - 1)\rho^2 = (\lambda^2 + 2\lambda)\rho^2$.

ΑΜ = 2ρ+λρ= (λ+2)ρ.

Η (1) γίνεται $\frac{(\mathrm{AM\Delta})}{(\mathrm{MO\Gamma})} = \frac{\mathrm{AM}^2}{\mathrm{\Gamma M}^2} = \frac{(\lambda+2)^2\rho^2}{(\lambda^2+2\lambda)\rho^2} = \frac{(\lambda+2)^2}{\lambda(\lambda+2)} = \frac{\lambda+2}{\lambda}$.

18370-Λύση

Αφού (ΑΔΜ) = 9(ΜΟΓ) θα έχουμε $\frac{(\text{ΑΜΔ})}{(\text{ΜΟΓ})}=\frac{9(\text{ΜΟΓ})}{(\text{ΜΟΓ})}=9$ και επομένως $\frac{\lambda+2}{\lambda}=9$ ή

$\lambda+2=9\lambda$ ή 8λ =2, άρα λ = $\frac{1}{4}$.

18371

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ μέσο της ΑΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ παράλληλη στην ΒΓ και ίση με το μισό της ΑΒ όπως στο σχήμα.

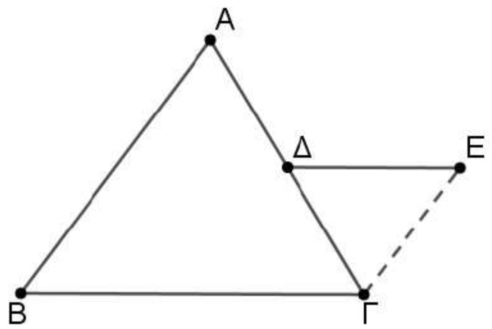
α)

i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{(\Delta E \Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta E}{2B\Gamma}$. (Μονάδες 10)

ii. Αν το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, τότε να αποδείξετε ότι (ΔΕΓ) = (ΑΒΔ). (Μονάδες 10)

β) Σε ένα τεστ που χρειάστηκε από τους μαθητές να βρεθεί ο λόγος $\frac{(\Delta E \Gamma)}{(AB\Gamma)}$ ένας μαθητής έγραψε: «Παρατηρώ ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ έχουν $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ και δύο πλευρές τους ανάλογες, αφού $\frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{AB} = \frac{1}{2}$. Επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις γωνίες τους $\widehat{\Delta}, \widehat{\Gamma}$ ίσες, τα τρίγωνα θα είναι όμοια. Επομένως, ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. $\frac{(\Delta E \Gamma)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{\Delta E}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$». Ο καθηγητής του του είπε ότι έχει κάνει ένα σημαντικό λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιο σημείο ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος;

(Μονάδες 05)

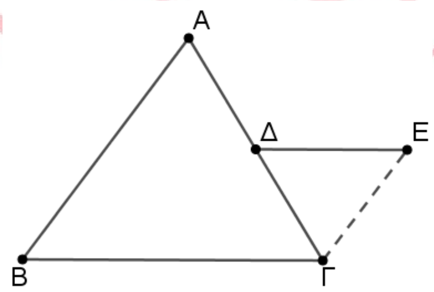


18371-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Τα τρίγωνα ΔΕΓ και ΑΒΓ έχουν τις γωνίες τους $\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}$, γιατί είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ. Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές: $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)}=\frac{\Delta E\cdot\Delta\Gamma}{A\Gamma\cdot B\Gamma}=\frac{\Delta E\cdot\Delta\Gamma}{2\Delta\Gamma\cdot B\Gamma}=\frac{\Delta E}{2B\Gamma}$ (1), γιατί από υπόθεση ΑΓ = 2ΔΓ.

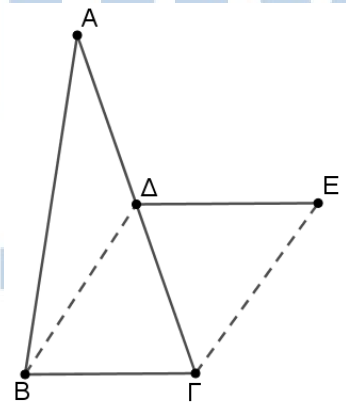


ii. Αν ΔΕΓΒ παραλληλόγραμμο, τότε ΔΕ = ΒΓ. Επομένως η (1) γίνεται $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)}=\frac{\Delta E}{2B\Gamma}=\frac{B\Gamma}{2B\Gamma}=\frac{1}{2}$ (2)

Στο τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΒΔ χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, τα ΑΒΔ και ΒΔΓ. Επομένως το καθένα από αυτά θα έχει το μισό εμβαδόν του ΑΒΓ.

$\frac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)}=\frac{1}{2}$ (3) .

Από (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι (ΔΕΓ) = (ΑΒΔ).



β) Ο μαθητής για να αποδείξει ότι τα τρίγωνα είναι όμοια χρησιμοποιεί το επιχείρημα ότι έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες μία προς μια και τις γωνίες $\hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}$ ίσες. Για να εξασφαλίσουμε όμως την ομοιότητα από το κριτήριο θα έπρεπε οι γωνίες να είναι οι περιεχόμενες των ανάλογων πλευρών, πράγμα το οποίο εδώ δεν συμβαίνει. Οι περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές ΔΕ, ΔΓ και ΑΒ, ΑΓ είναι οι $\widehat{\Delta}$ και $\widehat{A}$.

20678

ΘΕΜΑ 4

Η κορνίζα του παρακάτω σχήματος αποτελείται από δύο όμοια ορθογώνια με παράλληλες πλευρές και κοινό κέντρο Ο. Το ορθογώνιο Α’Β’Γ’Δ’ έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ.

α) Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας του ορθογωνίου ΑΒΓΔ προς το ορθογώνιο Α’Β’Γ’Δ’.

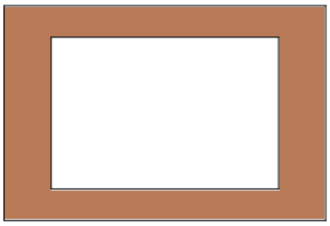
(Μονάδες 5)

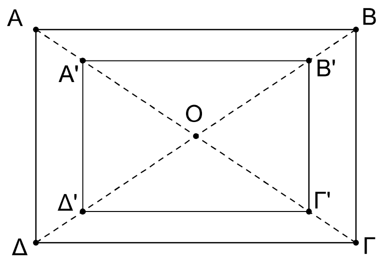
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α’Β’Γ’ είναι όμοια. (Μονάδες 6)

γ) Στην κορνίζα τοποθετούμε μια φωτογραφία που χωράει ακριβώς στο κάδρο, χωρίς να χάνεται κανένα μέρος της. Η διαγώνιος ΑΓ της κορνίζας έχει μήκος 40 cm και $A\widehat{O}B = 120^o$.

i. Πόσο μήκος έχει η διαγώνιος της φωτογραφίας; (Μονάδες 6)

ii. Πόσο είναι το εμβαδόν της φωτογραφίας; (Μονάδες 8)





20678-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αφού το ορθογώνιο Α’Β’Γ’Δ’ έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ, θα είναι $(ΑΒΓΔ) = 2(Α'Β'Γ'Δ')$ ή

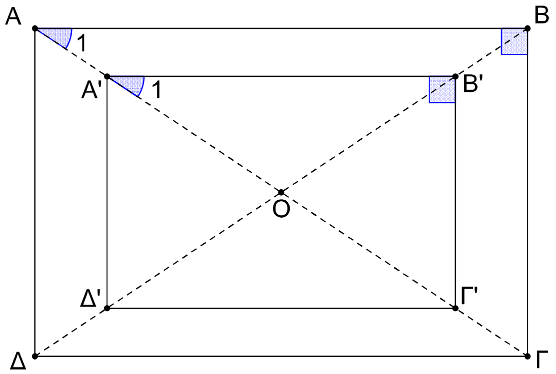
$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(Α'Β'Γ'Δ')} = 2.$$

Αν είναι λ ο λόγος ομοιότητας του ορθογωνίου ΑΒΓΔ προς το ορθογώνιο Α’Β’Γ’Δ’, τότε

$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(Α'Β'Γ'Δ')} = λ^2.$$

Άρα $λ^2 = 2$ ή $λ = \sqrt{2}$.

β)



Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α’Β’Γ’ έχουν $\widehat{Α}_1 = \widehat{Α'}_1$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, Α’Β’ που τέμνονται από την ΑΓ και $\widehat{B} = \widehat{B'} = 90^o$. Επομένως τα δύο τρίγωνα είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

γ) i. Από το ερώτημα α) έχουμε ότι ο λόγος ομοιότητας των δύο ορθογωνίων είναι $λ = \sqrt{2}$, δηλαδή $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \sqrt{2}$.

Επιπλέον, από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και Α’Β’Γ’ έχουμε ότι $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}$.

Επομένως $\frac{ΑΓ}{Α'Γ'} = \sqrt{2}$.

Όμως $ΑΓ = 40$, άρα $\frac{40}{Α'Γ'} = \sqrt{2}$ ή $Α'Γ' = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$, δηλαδή η διαγώνιος της φωτογραφίας έχει μήκος $20\sqrt{2}$ cm.

ii. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου Α’Β’Γ’Δ’ έχουν το ίδιο μήκος και διχοτομούνται. Επομένως

$$ΟΑ' = ΟΒ' = ΟΓ' = ΟΔ' = \frac{Α'Γ'}{2} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}.$$

20678-Λύση

Είναι $Α'\widehat{Ο}Β' = Γ'\widehat{Ο}Δ' = 120^{o}$ ως κατακορυφήν. Για το εμβαδόν των τριγώνων ΟΑ'Β' και ΟΓ'Δ' ισχύει

$$(ΟΑ'Β') = \frac{1}{2}ΟΑ' \cdot ΟΒ' \cdot ημ120^{o} = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$$

και

$$(ΟΓ'Δ') = \frac{1}{2}ΟΓ' \cdot ΟΔ' \cdot ημ120^{o} = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}\,.$$

Είναι $Α'\widehat{Ο}Δ' = Β'\widehat{Ο}Γ' = 60^{o}$ ως παραπληρωματικές της γωνίας $Α'\widehat{Ο}Β' = 120^{o}$. Για το εμβαδόν των τριγώνων ΟΑ'Δ' και ΟΒ'Γ' ισχύει

$$(ΟΑ'Δ') = \frac{1}{2}ΟΑ' \cdot ΟΔ' \cdot ημ60^{o} = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$$

και

$$(ΟΒ'Γ') = \frac{1}{2}ΟΒ' \cdot ΟΓ' \cdot ημ60^{o} = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}\,.$$

Το εμβαδόν της φωτογραφίας είναι

$$\left(Α'Β'Γ'Δ'\right) = (ΟΑ'Β') + (ΟΓ'Δ') + (ΟΑ'Δ') + (ΟΒ'Γ') = 4 \cdot 50\sqrt{3} = 200\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2.$$

<u>2η λύση για το ερώτημα γ)ii.</u>

Το τρίγωνο ΟΑ'Δ' είναι ισοσκελές, αφού ΟΑ' = ΟΔ' ως μισά των ίσων διαγωνίων του ορθογωνίου Α'Β'Γ'Δ' και $Α'\widehat{Ο}Δ' = 60^{o}$. Άρα $Ο\widehat{Α'}Δ' = 60^{o}$. Όμως η γωνία $Β'\widehat{Α'}Δ'$ είναι ορθή, επομένως $Ο\widehat{Α'}Β' = 90^{o} - 60^{o} = 30^{o}$.

Η γωνία $Ο\widehat{Α'}Β'$ του ορθογωνίου τριγώνου Α'Β'Γ' ισούται με 30^{o}, οπότε η απέναντι πλευρά Β'Γ' είναι το μισό της υποτείνουσας Α'Γ', δηλαδή $Β'Γ' = \frac{Α'Γ'}{2} = \frac{Α'Γ'}{2} = 10\sqrt{2}$.

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο Α'Β'Γ' έχουμε ότι

$$Α'Β'^2 = Α'Γ'^2 - Β'Γ'^2.$$

Όμως $Α'Γ' = 20\sqrt{2}$ και $Β'Γ' = 10\sqrt{2}$, οπότε

$$Α'Β'^2 = (20\sqrt{2})^2 - (10\sqrt{2})^2 \text{ ή } Α'Β'^2 = 600 \text{ ή } Α'Β' = 10\sqrt{6}.$$

Το εμβαδόν της φωτογραφίας είναι

$$\left(Α'Β'Γ'Δ'\right) = Α'Β' \cdot Β'Γ' = 10\sqrt{6} \cdot 10\sqrt{2} = 200\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2.$$

21120

ΘΕΜΑ 2

Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = \sqrt{2}$. Από σημείο $Δ$ της πλευράς $ΑΒ$ ώστε $ΑΔ = 1$, φέρνουμε παράλληλη στη $ΒΓ$ η οποία τέμνει την $ΑΓ$ στο σημείο $Ε$.

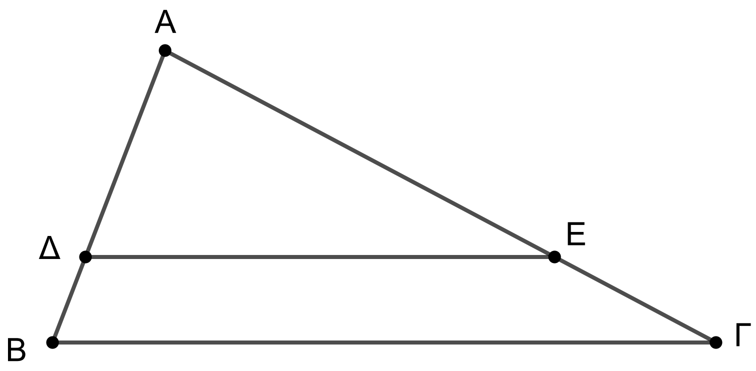
α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΑΒΓ$ είναι όμοια και να γράψετε τον λόγο ομοιότητας ,

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΔΕ$ είναι το μισό του εμβαδού του τριγώνου $ΑΒΓ$.

(Μονάδες 18)

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι 2, να βρείτε τα εμβαδά του τριγώνου $ΑΔΕ$ και του τραπεζίου $ΒΓΕΔ$. (Μονάδες 7)



21120-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Γνωρίζουμε ότι το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου. Επίσης, αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια. Επομένως τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΑΒΓ$ είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι $\lambda = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

ii) Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $ΑΔΕ$ και $ΑΒΓ$ θα είναι

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \lambda^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \text{ ή } (ΑΔΕ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ).$$

β) Δίνεται ότι $(ΑΒΓ) = 2$, οπότε από το ερώτημα α) i) είναι $(ΑΔΕ) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Επίσης το εμβαδόν του τραπεζίου $ΒΓΕΔ$ θα είναι $(ΒΓΕΔ) = (ΑΒΓ) - (ΑΔΕ) = 2 - 1 = 1$.

21304

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 1. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα, ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στη ΒΓ και ΒΔ = 2.

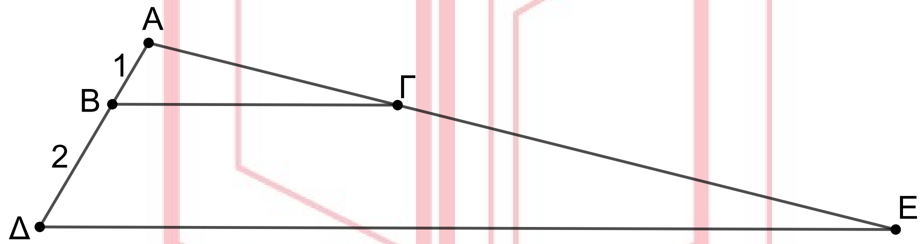
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{3}$.

(Μονάδες 10)

β) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με 8,5, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 08)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι 15, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 07)



21304-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, οι πλευρές του τριγώνου ΑΔΕ είναι ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, εφόσον το ΑΔΕ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του ΑΒΓ και την ΔΕ που είναι παράλληλη στην ΒΓ. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με $\frac{ΑΒ}{ΑΔ}=\frac{ΑΓ}{ΑΕ}=\frac{ΒΓ}{ΔΕ}$.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι $\frac{ΑΒ}{ΑΔ}=\frac{ΑΒ}{ΑΒ+ΒΔ}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$.

β) Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους, άρα οι περίμετροι των όμοιων τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν λόγο $\frac{1}{3}$.

Επομένως η περίμετρος του ΑΔΕ είναι τριπλάσια της περιμέτρου του ΑΒΓ, δηλαδή είναι ίση με $3\cdot 8{,}5=25{,}5$.

γ) Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, άρα ο λόγος των εμβαδών (ΑΒΓ) και (ΑΔΕ) των όμοιων τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ, αντίστοιχα είναι $\frac{1}{9}$. Δηλαδή:

$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΕ)}=\frac{1}{9}$ ή $(ΑΒΓ)=\frac{(ΑΔΕ)}{9}$ ή $(ΑΒΓ)=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$.

21350

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα δίνονται ότι $\hat{B} = \hat{E} = 90^o$, $AE = 8$, $EB = 4$ και $ΔE = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ είναι όμοια.

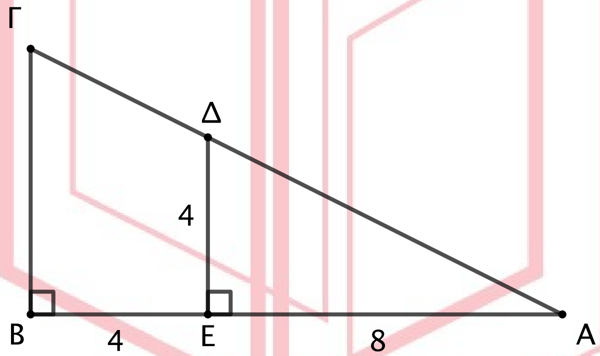
(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)

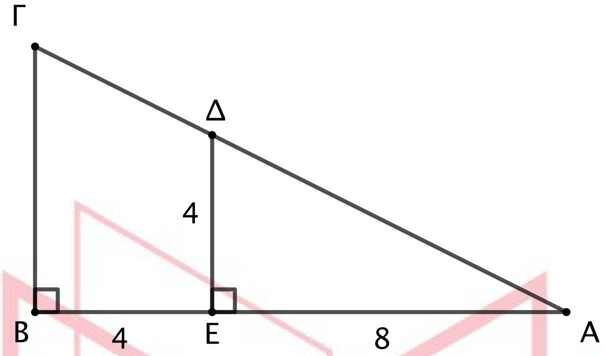
γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

(Μονάδες 05)



21350-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ έχουν $A\hat{E}\Delta = \hat{B}$ (ως ορθές) και κοινή τη γωνία $\hat{A}$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{A}$	$A\hat{E}\Delta = \hat{B}$	$A\hat{\Delta}E = \hat{\Gamma}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΕΔ	ΔΕ	ΑΔ	ΑΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ

Έτσι έχουμε:

$$\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AE}{AB}$$

γ) Από την ισότητα

$$\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{AE}{AB}$$

έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{AE}{AB} \quad \text{ή} \quad \frac{4}{B\Gamma} = \frac{8}{12} \quad \text{ή} \quad 8B\Gamma = 48 \quad \text{ή} \quad B\Gamma = 6$$

21783

ΘΕΜΑ 3

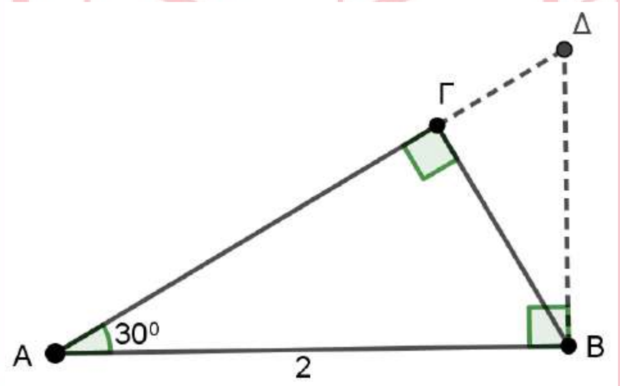
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\widehat{\Gamma} = 90^0$, $\widehat{A} = 30^0$ και ΑΒ = 2.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = $\sqrt{3}$. (Μονάδες 7)

β) Φέρνουμε κάθετη στην ΑΒ, στο σημείο Β, που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο Δ.

Να αποδείξετε ότι ΑΔ = $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 10)

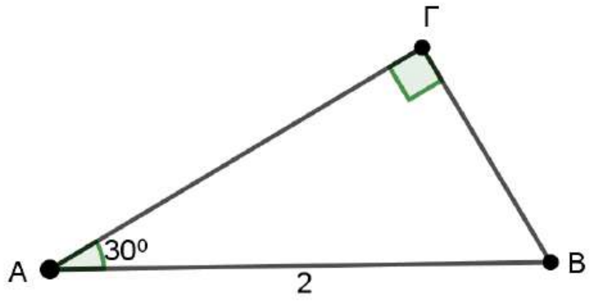
γ) Αν Κ είναι το μέσο της ΑΔ, να αποδείξετε ότι (ΚΑΒ) = $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 8)



21783-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

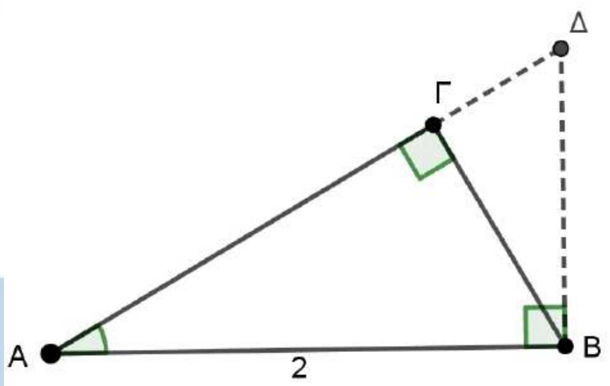


Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΒ = 2, $\hat{\Gamma} = 90^0$ και $\hat{A} = 30^0$ οπότε η ΒΓ = $\frac{AB}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι:

$A\Gamma^2 = AB^2 - B\Gamma^2$ ή $A\Gamma^2 = 2^2 - 1^2$ ή $A\Gamma^2 = 3$, οπότε $A\Gamma = \sqrt{3}$.

β)



Από τα δεδομένα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι ορθογώνια.

Επίσης, έχουν τη γωνία Α κοινή, οπότε θα είναι όμοια. Επομένως θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Άρα $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

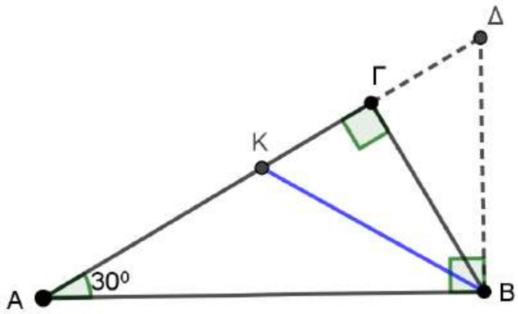
Όμως η ΑΒ = 2 και λόγω του ερωτήματος (α) η $A\Gamma = \sqrt{3}$ οπότε έχουμε:

$\frac{A\Delta}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ή $A\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

γ) Το Κ είναι μέσο του ΑΔ επομένως η $AK = \frac{A\Delta}{2}$.

Η τελευταία ισότητα λόγω του ερωτήματος (β, i) δίνει: $AK = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

21783-Λύση



Έτσι (ΚΑΒ) = $\frac{1}{2}\cdot$ΑΒ$\cdot$ΑΚ$\cdot$ημ$30^0 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

21975

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

ii. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

iv. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.

v. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

(Μονάδες 15)

21975-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Σωστό
ii. Λάθος
iii. Σωστό
iv. Λάθος
v. Σωστό

β) Θεώρημα ΙΙΙ σελίδα 82.

21986

ΘΕΜΑ 2

Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στην ΒΓ και ΑΔ = 1, όπως στο σχήμα.

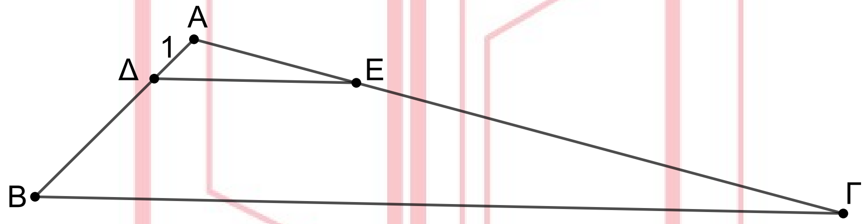
α) Να αποδείξετε ότι $AE \cdot B\Delta = \Gamma E$. (Μονάδες 10)

β) Αν επιπλέον ΒΔ = ΑΕ και ΓΕ = 9:

i. Να αποδείξετε ότι ΒΔ = 3 και ΑΒ = 4. (Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια και να υπολογίσετε το λόγο ομοιότητάς τους.

(Μονάδες 05)



21986-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή, η ευθεία ΔΕ που είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ χωρίζει τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ σε μέρη ανάλογα. Επομένως $\frac{Α\Delta}{Β\Delta}=\frac{ΑΕ}{ΓΕ}$ ή $\frac{1}{Β\Delta}=\frac{ΑΕ}{ΓΕ}$ ή $ΑΕ\cdot Β\Delta=ΓΕ$.

β) i. Από το α) ερώτημα $ΑΕ\cdot Β\Delta=9$ ή $Β\Delta\cdot Β\Delta=9$ ή $Β\Delta^2=9$ ή $Β\Delta=3$.

Επομένως $ΑΒ=Α\Delta+Β\Delta=1+3=4$.

ii. Από την εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την ΔΕ που είναι παράλληλη προς την ΒΓ έχει τις πλευρές του ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, άρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ίσος με τον λόγο $\frac{Α\Delta}{ΑΒ}=\frac{1}{4}$.

22023

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

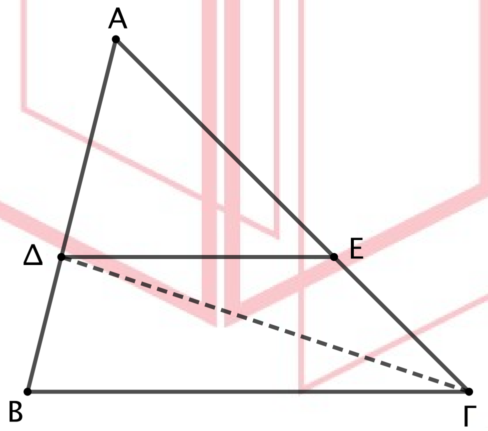
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$ όταν το σημείο Δ είναι μέσο της ΑΒ.

(Μονάδες 10)

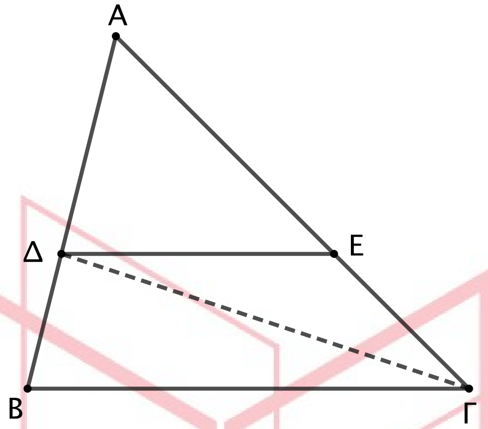
γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Δ ώστε $\frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{2}{9}$.

(Μονάδες 05)



22023-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν $\hat{B} = A\hat{\Delta}E$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ) και κοινή τη γωνία $\hat{A}$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα (α), τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{A}$	$A\hat{E}\Delta = \hat{\Gamma}$	$A\hat{\Delta}E = \hat{B}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΕ	ΔΕ	ΑΔ	ΑΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΒ	ΑΓ

Δίνεται ότι το σημείο Δ είναι μέσο της ΑΒ. Επομένως, ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι:

$$\lambda = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{A\Delta}{2A\Delta} = \frac{1}{2}$$

Αφού τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, δηλαδή:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \lambda^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

γ) Ζητάμε τη θέση του σημείου Δ ώστε να είναι

$$\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9}$$

Είναι:

22023-Λύση

$$(\Delta E\Gamma) = (\Delta A\Gamma) - (A\Delta E) \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{A\Delta}{AB}$$

Οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{(\Delta A\Gamma) - (A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{(\Delta A\Gamma)}{(AB\Gamma)} - \frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9}$$

Από (β) ερώτημα είναι $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \lambda^2$, οπότε:

$$\frac{\lambda AB \cdot A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} - \lambda^2 = \frac{2}{9}$$

$$\lambda - \lambda^2 = \frac{2}{9}$$

$$9\lambda^2 - 9\lambda + 2 = 0$$

Οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι:

$$\lambda = \frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{1}{3}$$

Άρα, το σημείο Δ χωρίζει εσωτερικά την πλευρά ΑΒ σε λόγο λ τέτοιο ώστε:

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{A\Delta}{AB} = \frac{1}{3}$$

22070

ΘΕΜΑ 2

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει μήκη πλευρών α = 17, β = 8, γ = 15.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ:

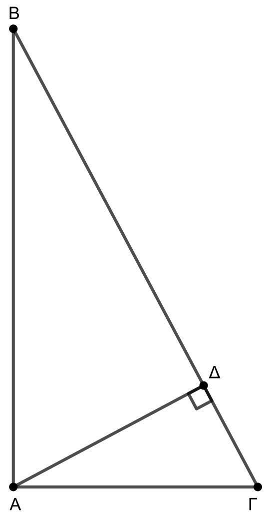
i. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους λ.

ii. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΑΓΔ})}$.

(Μονάδες 12)

22070-Λύση

ΛΥΣΗ



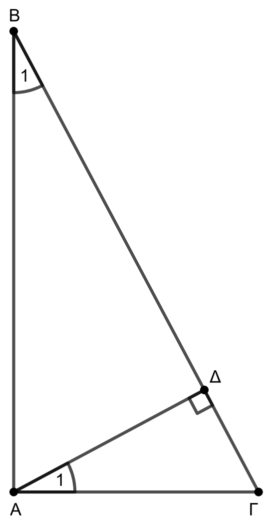
α) Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι η α. Θα εξετάσουμε αν το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της πλευράς α.

$$\beta^2+\gamma^2=8^2+15^2 \text{ ή } \beta^2+\gamma^2=64+225 \text{ ή } \beta^2+\gamma^2=289$$

$$\alpha^2=17^2 \text{ ή } \alpha^2=289$$

Άρα $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά α=17 και $\widehat{\mathrm{A}}=90^{\circ}$.

β)



i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ορθογώνια με $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{A}}_1$ αφού είναι και οι δύο γωνίες συμπληρωματικές της γωνίας $\widehat{\Gamma}$. Άρα είναι όμοια και ο λόγος ομοιότητάς τους θα είναι ίσος με το λόγο των υποτεινουσών τους. Δηλαδή λ = $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{15}{8}$.

22070-Λύση

ii. Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, αφού είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι αυτά είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ = $\frac{15}{8}$.

Άρα $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)} = \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{225}{64}$.

22100

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνίες $\widehat{\mathrm{A}} = 20^0$, $\widehat{\mathrm{B}} = 100^0$, και η διχοτόμος ΑΕ της γωνίας του $\widehat{\mathrm{A}}$. Από το Β φέρνουμε την κάθετη προς την ΑΕ και έστω Ζ , Δ τα σημεία τομής της καθέτου με τις ΑΕ, ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

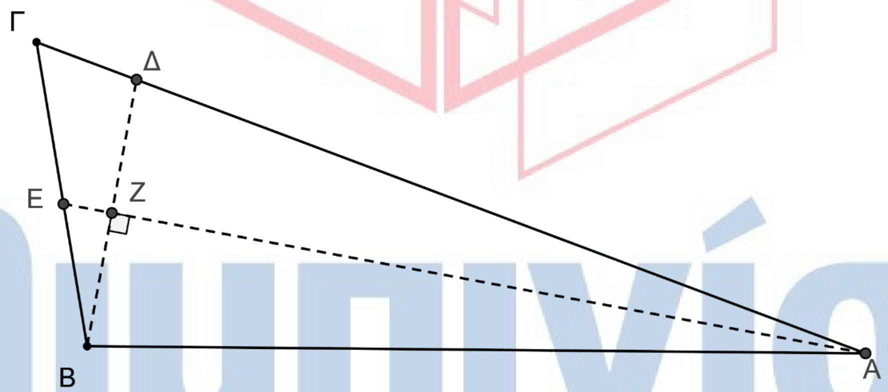
i. $\Gamma\widehat{\mathrm{B}}\Delta = \widehat{\mathrm{A}} = 20^0$ (Μονάδες 10)

ii. Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ, να γράψετε τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών τους και να αιτιολογήσετε γιατί είναι αυτές οι πλευρές ομόλογες .

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ δύο τετράπλευρα: ένα τετράγωνο με πλευρά την ΒΓ και ένα ορθογώνιο που η μία του πλευρά είναι η πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και η άλλη του πλευρά είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ. Να εξετάσετε αν τα δυο τετράπλευρα, που σχεδιάσατε, έχουν ίσα εμβαδά.

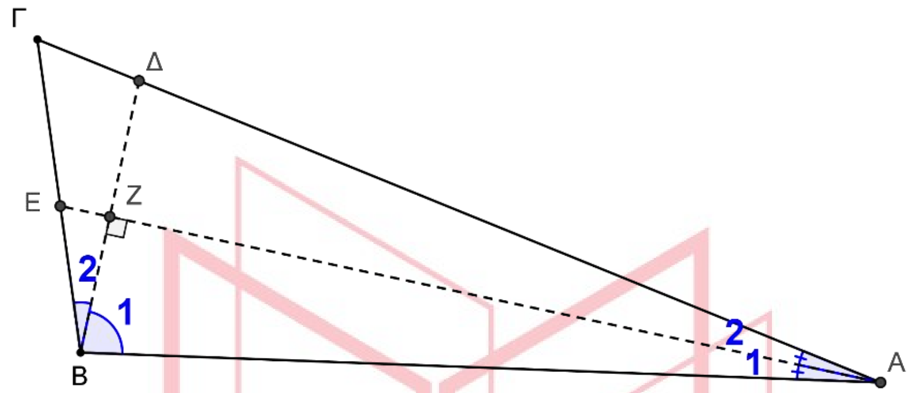
(Μονάδες 5)



22100-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



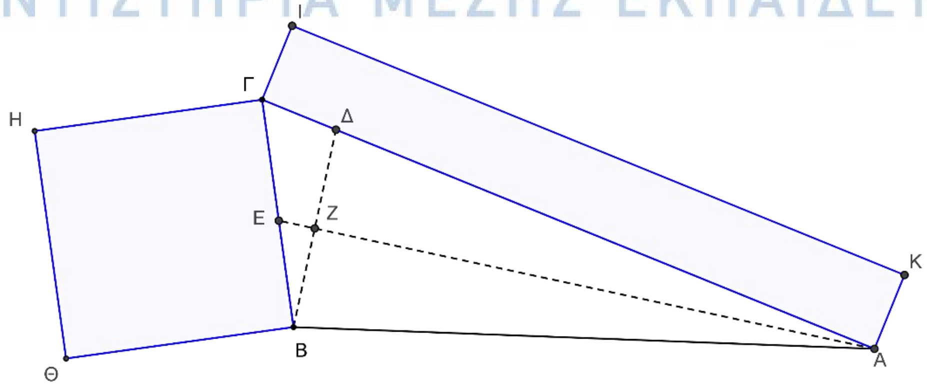
i. Αφού η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$, τότε $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{20^0}{2} = 10^0$.

Επειδή το τρίγωνο ΒΖΑ είναι ορθογώνιο, αφού η ΒΔ είναι κάθετη στην ΑΕ, οι γωνίες του $\widehat{A}_1$ και $\widehat{B}_1$ είναι συμπληρωματικές και θα ισχύει $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 90^0$ με $\widehat{A}_1 = 10^0$. Επομένως $\widehat{B}_1 = 90^0 - 10^0$ ή $\widehat{B}_1 = 80^0$.

Είναι $\Gamma\widehat{B}A = \widehat{B} = 100^0$, οπότε θα είναι $\widehat{B}_2 = \Gamma\widehat{B}A - \widehat{B}_1$ με $\widehat{B}_1 = 80^0$. Επομένως $\widehat{B}_2 = 100^0 - 80^0 = 20^0$ ή $\Gamma\widehat{B}\Delta = 20^0$. Συνεπώς $\Gamma\widehat{B}\Delta = \widehat{A} = 20^0$.

ii. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ έχουν $\Gamma\widehat{B}\Delta = \widehat{A}$, από το i. ερώτημα και τη γωνία $\widehat{\Gamma}$ κοινή, οπότε θα είναι όμοια γιατί έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία. Αφού τα τρίγωνα είναι όμοια θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\Gamma\widehat{\Delta}B = A\widehat{B}\Gamma$. Συνεπώς, τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών είναι οι ΓΔ, ΒΓ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Gamma\widehat{B}\Delta$ και $\widehat{A}$, οι ΒΔ, ΑΒ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τη γωνία $\widehat{\Gamma}$ (κοινή) και οι ΒΓ, ΑΓ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Gamma\widehat{\Delta}B$ και $A\widehat{B}\Gamma$.

β)



22100-Λύση

Έστω ΒΓΗΘ είναι το τετράγωνο με πλευρά την ΒΓ και ΑΓΙΚ είναι το ορθογώνιο με διαστάσεις την ΑΓ και το τμήμα ΓΔ.

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΓΗΘ είναι (ΒΓΗΘ) = $\mathrm{Β}\Gamma^2$ και το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΓΙΚ είναι (ΑΓΙΚ) = ΑΓ· ΓΔ.

Τα εμβαδά των τετραπλεύρων θα είναι ίσα αν ισχύει η σχέση;

$$\mathrm{Β}\Gamma^2 = \mathrm{Α}\Gamma \cdot \Gamma\Delta \text{ ή αν ισχύει } \frac{\mathrm{Β}\Gamma}{\mathrm{Α}\Gamma} = \frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{Β}\Gamma} \ (1)$$

Από το ερώτημα α) ii. τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε οι λόγοι των ομόλογων πλευρών τους θα είναι ίσοι, δηλαδή θα ισχύει $\frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{Β}\Gamma} = \frac{\mathrm{Β}\Delta}{\mathrm{ΑΒ}} = \frac{\mathrm{Β}\Gamma}{\mathrm{Α}\Gamma}$. Επομένως, θα ισχύει ότι $\frac{\mathrm{Β}\Gamma}{\mathrm{Α}\Gamma} = \frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{Β}\Gamma}$, άρα και $\mathrm{Β}\Gamma^2$ = ΑΓ· ΓΔ.

Συνεπώς, ισχύει η σχέση (1), άρα τα τετράπλευρα ΒΓΗΘ και ΑΓΙΚ έχουν ίσα εμβαδά.

22102

ΘΕΜΑ 4

Για να βρει το ύψος ενός δέντρου, ένας μαθητής ύψους 1,60 m σκέφτηκε να μετρήσει το μήκος της σκιάς του δέντρου και το μήκος της δικιάς του σκιάς πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο κάποια χρονική στιγμή μιας ηλιόλουστης ημέρας. Στέκεται σε θέση έτσι ώστε, η άκρη της σκιάς του να συμπίπτει με την άκρη της σκιάς του δέντρου. Ο μαθητής μετράει και βρίσκει ότι η σκιά του έχει μήκος 2m και η σκιά του δέντρου ότι έχει μήκος 5m.

Στο σχέδιο που ακολουθεί, τα τμήματα ΟΑ και ΟΓ, με κοινό άκρο Ο, αναπαριστάνουν τα μήκη των σκιών του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα και έχουν τον ίδιο φορέα ΟΓ, τα δε τμήματα ΑΒ και ΓΔ αναπαριστάνουν τα αντίστοιχα ύψη μαθητή και δέντρου και θεωρούνται κάθετα στην ΟΓ.

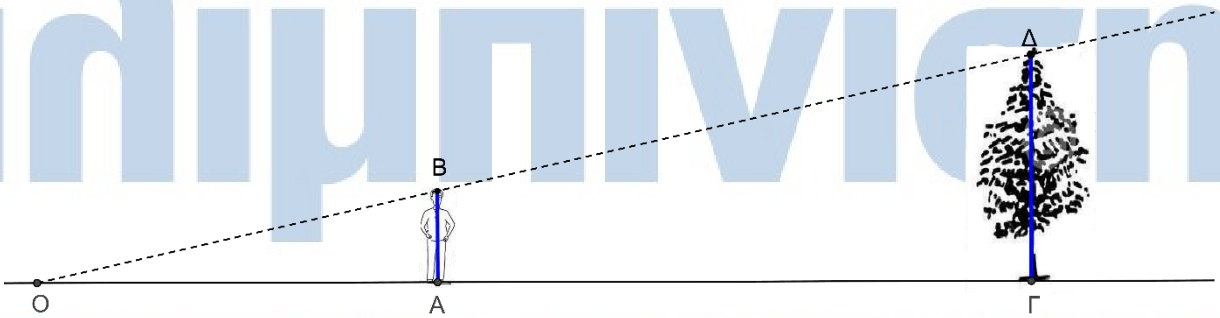
α)

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους. (Μονάδες 12)

ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου. (Μονάδες 8)

β) Μπορεί ο μαθητής να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του ίδιου δέντρου μια άλλη ώρα της ημέρας; Ποια από τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος θα άλλαζαν στην περίπτωση αυτή; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 5)

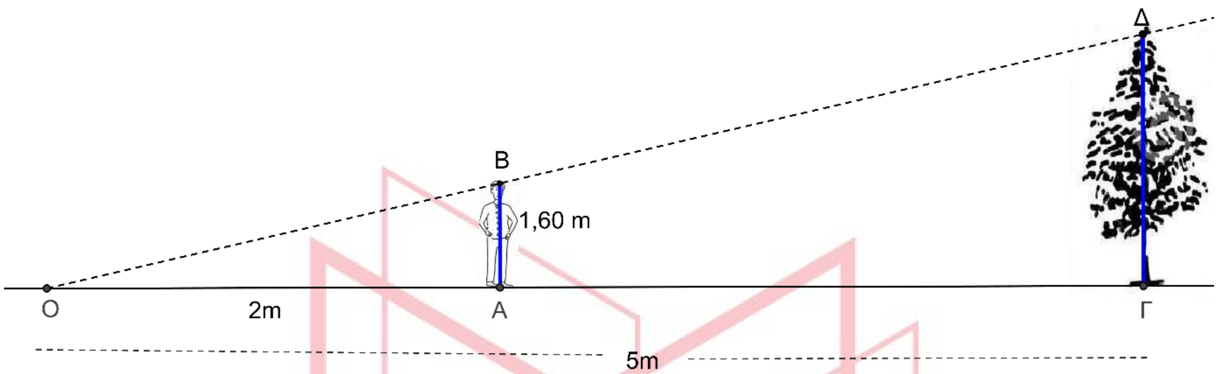


(σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

22102-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



i. Από τα δεδομένα έχουμε ότι οι σκιές ΟΑ και ΟΓ έχουν τον ίδιο φορέα ΟΓ και τα ύψη είναι κάθετα σε αυτόν. Οπότε τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ορθογώνια με $\mathrm{O}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \mathrm{O}\widehat{\Gamma}\Delta = 90^0$ και έχουν την οξεία γωνία $\widehat{\mathrm{O}}$ κοινή, άρα θα είναι όμοια γιατί ως ορθογώνια έχουν μια οξεία γωνίας τους ίση.

Αφού τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή θα ισχύει:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{O}\Delta} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{O}\Gamma} = \frac{2}{5}\,(1)$$

Άρα, ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι $\lambda = \frac{2}{5}$.

ii. Από τη σχέση (1) και με αντικατάσταση των δεδομένων θα έχουμε ότι:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{O}\Gamma} = \frac{2}{5} \text{ ή } \frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{5} \text{ ή } \frac{1{,}60}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{5} \text{ ή } \Gamma\Delta = \frac{1{,}6\cdot 5}{2} = 4\,.$$

Άρα το ύψος του δέντρου είναι 4 m.

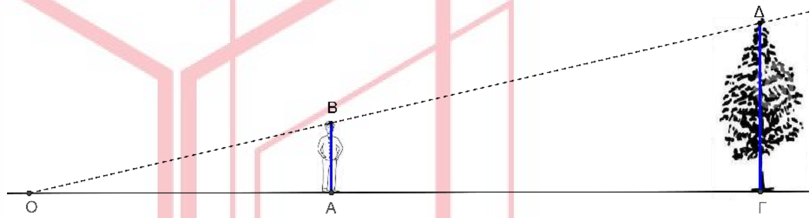
β) Όσο ο ήλιος δημιουργεί σκιές κατά τη διάρκεια της ημέρας, καθώς κινείται από την ανατολή προς τη δύση, για να συνεχίσουν οι σκιές του μαθητή και του δέντρου να έχουν το ίδιο άκρο (προϋπόθεση του προβλήματος), θα πρέπει ο μαθητής να αλλάζει θέση ως προς τη θέση του δέντρου που παραμένει σταθερή, έτσι ώστε το κοινό άκρο των σκιών, η θέση του μαθητή και η θέση του δέντρου, θεωρούμενα ως σημεία Ο, Α και Γ αντίστοιχα, να είναι συνευθειακά.

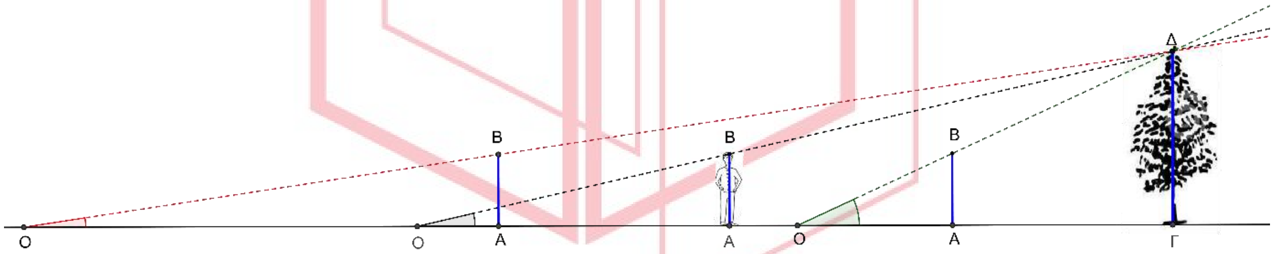
Αυτό σημαίνει ότι τα μήκη των σκιών ΟΑ και ΟΓ του μαθητή και του δέντρου θα αλλάζουν. Οι γωνίες $\widehat{\mathrm{A}}$ και $\widehat{\Gamma}$ που σχηματίζουν τα ύψη ΑΒ, ΓΔ του μαθητή και του δέντρου με την ευθεία ΟΓ θα είναι ορθές.

Το μέτρο της γωνίας $\widehat{\mathrm{O}}$ με κορυφή τα κοινά άκρα των σκιών θα αλλάζει, καθώς θα αλλάζει η θέση του ήλιου, αλλά θα συνεχίσει να είναι κοινή γωνία των ορθογωνίων τριγώνων με κάθετες πλευρές τα ύψη ΑΒ, ΓΔ του μαθητή και του δέντρου και των αντίστοιχων σκιών ΟΑ και ΟΓ που τα ύψη δημιουργούν.

Συνεπώς, τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ σε κάθε περίπτωση θα παραμένουν όμοια και θα ισχύει η αναλογία των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{OB}{O\Delta} = \frac{OA}{O\Gamma}$ και εφόσον είναι γνωστά τα μήκη των σκιών, μπορεί να υπολογιστεί το ύψος του δέντρου.

Άρα, ο μαθητής μπορεί να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του δέντρου μια άλλη ώρα της ημέρας.





22141

ΘΕΜΑ 4

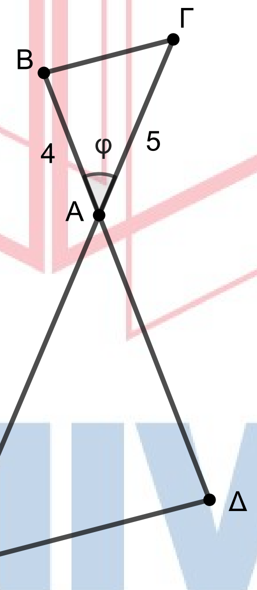
Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ έχει τα άκρα του Β και Γ στις προεκτάσεις των πλευρών ΔΑ και ΕΑ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΔΕ, έτσι ώστε να είναι παράλληλο στην πλευρά ΔΕ. Επίσης δίνονται τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, $AB = 4$ και $A\Gamma = 5$. Έστω ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι $\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με λόγο $\frac{1}{2}$. (Μονάδες 10)

β) Αν $B\hat{A}\Gamma = \varphi$, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν (ΑΔΕ) του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με $40\eta\mu\varphi$.

(Μονάδες 07)

γ) Να βρείτε σημείο Ζ εσωτερικό της πλευράς ΑΔ, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΖ που σχηματίζεται να είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 08)



22141-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος τους Θαλή το τρίγωνο ΑΒΓ που ορίζεται από τις προεκτάσεις των πλευρών ΔΑ και ΕΑ του τριγώνου ΑΔΕ και την ΒΓ, παράλληλη προς τη ΔΕ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΔΕ. Άρα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια, με:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΔ}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΕ}}=\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΔΕ}}$$

Επειδή ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, αν ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσος με λ, τότε:

$$\lambda^2=\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΑΔΕ})} \quad \text{ή} \quad \lambda^2=\frac{1}{4} \quad \text{ή} \quad \lambda=\frac{1}{2}$$

β) Το εμβαδόν (ΑΒΓ) του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με $(\text{ΑΒΓ})=\frac{1}{2}\cdot \text{ΑΒ}\cdot \text{ΑΓ}\cdot \text{ημφ}$ ή

$(\text{ΑΒΓ})=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot \text{ημφ}$ ή $(\text{ΑΒΓ})=10\text{ημφ}$.

Όμως $\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΑΔΕ})}=\frac{1}{4}$ ή $(\text{ΑΔΕ})=4(\text{ΑΒΓ})$. Δηλαδή το εμβαδόν του ΑΔΕ είναι τετραπλάσιο του εμβαδού του ΑΒΓ. Άρα $(\text{ΑΔΕ})=4\cdot 10\text{ημφ}$ ή $(\text{ΑΔΕ})=40\text{ημφ}$.

γ) Έχουμε ότι $(\text{ΑΒΓ})=\frac{1}{4}\cdot(\text{ΑΔΕ})$.

Έστω σημείο Ζ εσωτερικό της ΑΔ ώστε $(\text{ΑΓΖ})=\frac{1}{4}\cdot(\text{ΑΔΕ})$ ή $(\text{ΑΓΖ})=(\text{ΑΒΓ})$ ή $\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΑΓΖ})}=1$.

Επίσης οι γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{\omega}$, των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΓΖ αντίστοιχα είναι παραπληρωματικές. Επομένως ο λόγος των εμβαδών (ΑΒΓ) και (ΑΓΖ) των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΓΖ αντίστοιχα είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή:

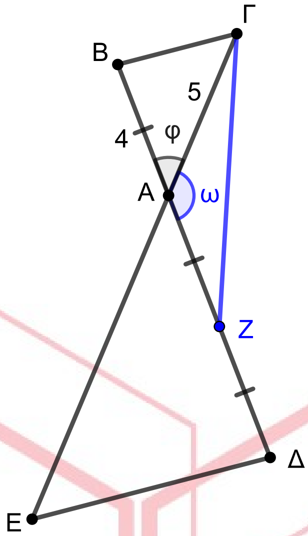
$$\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΑΓΖ})}=\frac{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}{\text{ΑΓ}\cdot\text{ΑΖ}}$$

Άρα $\frac{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}{\text{ΑΓ}\cdot\text{ΑΖ}}=1$ ή $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΖ}}=1$ ή $\text{ΑΖ}=\text{ΑΒ}$ ή $\text{ΑΖ}=\frac{\text{ΑΔ}}{2}$, εφόσον οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ είναι ομόλογες σε όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ με λόγο ομοιότητας $\lambda=\frac{1}{2}$ (από το α)).

Επομένως το σημείο Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΑΔ του τριγώνου ΑΔΕ.

(Εναλλακτικά: τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΖ έχουν κοινό ύψος από την κορυφή Γ και εφόσον έχουν ίσα εμβαδά, θα έχουν και ίσες βάσεις ΑΖ = ΑΒ).

22141-Λύση



22148

ΘΕΜΑ 4

Έστω Ε σημείο στην πλευρά ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του ΑΒΓ η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ και παίρνουμε σημείο Ζ στην προέκταση $A\chi$ της πλευράς ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ ώστε να είναι ΑΖ = ΑΕ, όπως στο σχήμα.

α) Έστω $A\Gamma = 3AE$. Να αποδείξετε ότι:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

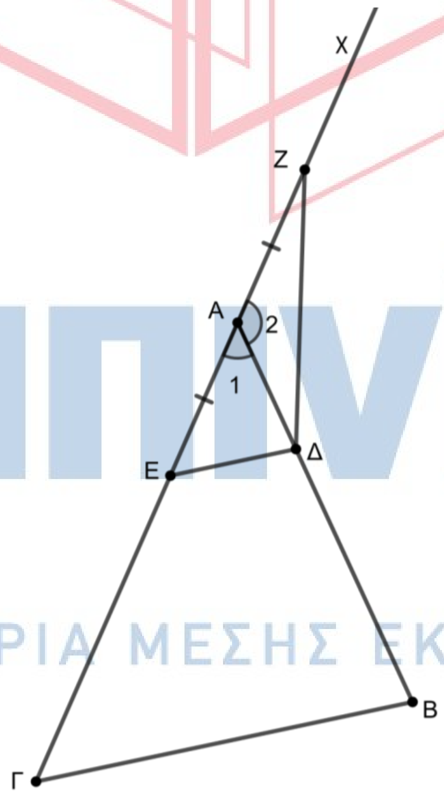
(Μονάδες 07)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του ΔΕΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του ΑΒΓ, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{AE}{A\Gamma}$.

(Μονάδες 08)



22148-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την ΔΕ, παράλληλη προς τη ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΒΓ. Άρα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, με:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ}$$

Ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι:

$$λ=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΑΕ}{3ΑΕ}=\frac{1}{3}$$

Επειδή ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, ο λόγος των εμβαδών (ΑΔΕ) και (ΑΒΓ) των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ αντίστοιχα είναι:

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

ii. Οι γωνίες $\hat{Α}_1$ και $\hat{Α}_2$, των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ αντίστοιχα είναι παραπληρωματικές. Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους (ΑΔΕ) και (ΑΔΖ) αντίστοιχα είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή:

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΖ)}=\frac{ΑΔ\cdot ΑΕ}{ΑΔ\cdot ΑΖ} \text{ ή } \frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΖ)}=\frac{ΑΕ}{ΑΖ} \text{ ή } \frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΖ)}=1 \text{, γιατί ΑΕ = ΑΖ}$$

Άρα τα εμβαδά των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ είναι ίσα.

(Εναλλακτικά: η ΑΔ είναι διάμεσος της πλευράς ΕΖ του τριγώνου ΔΕΖ, άρα το χωρίζει σε δύο τρίγωνα με ίσα εμβαδά, τα ΑΔΕ και ΑΔΖ).

Για το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ ισχύει ότι $(ΔΕΖ)=(ΑΔΕ)+(ΑΔΖ)=2(ΑΔΕ)$.

Επομένως:

$$\frac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{2(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=2\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=2\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{9}.$$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Έστω $λ=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$. Τότε με όμοιους συλλογισμούς με το ερώτημα α) έχουμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο λ και για τα εμβαδά τους ισχύει ότι $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=λ^2$.

Επίσης, εφόσον ΑΕ = ΑΖ τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ έχουν ίσα εμβαδά, ανεξάρτητα από την τιμή του λόγου λ και $(ΔΕΖ)=(ΑΔΕ)+(ΑΔΖ)=2(ΑΔΕ)$, όπως στο α)ii).

Άρα:

22148-Λύση

$$\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)}=\frac{2(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}=2\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}=2\lambda^2$$

Εφόσον το εμβαδόν του ΔΕΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του ΑΒΓ έχουμε ότι:

$$\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)}=\frac{1}{2} \text{ ή } 2\lambda^2=\frac{1}{2} \text{ ή } \lambda^2=\frac{1}{4} \text{ ή } \lambda=\frac{1}{2}$$

Άρα $\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{1}{2}$.

22150

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα.

α) Αν επιπλέον το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ ενώνει την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ και το μέσο Δ της απέναντι πλευράς ΒΓ, όπως στο σχήμα, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$.

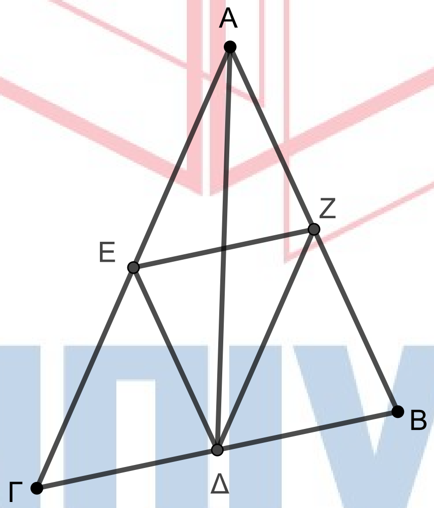
ii. Για το εμβαδόν (ΑΕΔΖ) του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ ισχύει ότι $(AE\Delta Z) = (AB\Gamma) - 2(E\Delta\Gamma)$.

iii. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 18)

β) Αν το σημείο Δ είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, τότε ισχύει ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ;

(Μονάδες 07)



22150-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Το Ε είναι μέσο της ΑΓ, άρα $ΑΓ = 2ΓΕ$ ή $\frac{ΓΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{2}$.

Ομοίως το Δ είναι μέσο της ΒΓ, άρα $\frac{ΓΔ}{ΒΓ} = \frac{1}{2}$.

Άρα τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, εφόσον η $\hat{Γ}$ είναι κοινή γωνία. Επομένως τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας τον λόγο των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή $\frac{1}{2}$.

ii. Άρα τα εμβαδά (ΕΔΓ) και (ΑΒΓ) των τριγώνων ΕΔΓ και ΑΒΓ αντίστοιχα έχουν λόγο ίσο με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. Επομένως:

$$\frac{(ΕΔΓ)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ ή } (ΕΔΓ) = \frac{1}{4}\cdot(ΑΒΓ)$$

Με ανάλογους συλλογισμούς με εκείνους του α)i προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΖΒΔ και ΑΒΓ είναι επίσης όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$, εφόσον:

- Το Ζ είναι μέσο της ΑΒ.
- Το Δ είναι μέσο της ΒΓ.
- Η περιεχόμενη γωνία $\hat{Β}$ των ΒΖ, ΒΔ και ΑΒ, ΒΓ είναι κοινή.

Επομένως για το εμβαδόν (ΖΒΔ) του τριγώνου ΖΒΔ ισχύει ότι $(ΖΒΔ) = \frac{1}{4}\cdot(ΑΒΓ) = (ΕΔΓ)$.

Επίσης για το εμβαδόν (ΑΕΔΖ) του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ ισχύει ότι:

$$(ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - (ΕΔΓ) - (ΖΒΔ) \text{ ή } (ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - 2(ΕΔΓ).$$

iii. Ή αλλιώς:

$$(ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - 2\cdot\frac{1}{4}\cdot(ΑΒΓ) = (ΑΒΓ) - \frac{1}{2}\cdot(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\cdot(ΑΒΓ)$$

β) Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ με το τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ της απέναντι πλευράς ΒΓ. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΓ έχουν κοινή γωνία την $\hat{Α}_1 = Δ\hat{Α}Ε$, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\hat{Α}_1$. Άρα $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΓ)} = \frac{ΑΔ\cdot ΑΕ}{ΑΔ\cdot ΑΓ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{2}$, εφόσον το Ε είναι μέσο της ΑΓ.

22150-Λύση

Άρα $(\text{ΑΔΕ}) = \dfrac{(\text{ΑΔΓ})}{2}$.

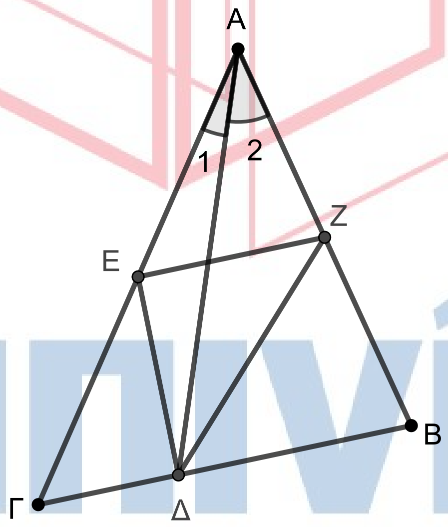
(Εναλλακτικά: Η διάμεσος ΔΕ της πλευράς ΑΓ του τριγώνου ΑΔΓ το χωρίζει σε δύο τρίγωνα με ίσα εμβαδά, τα ΑΔΕ και ΔΕΓ. Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΔΓ).

Με όμοιους συλλογισμούς για τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΔΒ έχουμε $(\text{ΑΔΖ}) = \dfrac{(\text{ΑΔΒ})}{2}$.

Όμως για το εμβαδόν (ΑΕΔΖ) του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ ισχύει ότι:

$$(\text{ΑΕΔΖ}) = (\text{ΑΔΕ}) + (\text{ΑΔΖ}) \quad \text{ή} \quad (\text{ΑΕΔΖ}) = \frac{(\text{ΑΔΓ})}{2} + \frac{(\text{ΑΔΒ})}{2} = \frac{(\text{ΑΔΓ}) + (\text{ΑΔΒ})}{2} = \frac{(\text{ΑΒΓ})}{2}.$$

Άρα το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\dfrac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.



22243

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ζ στην πλευρά ΑΔ, ώστε $\text{ΑΖ} = \frac{3}{4}\text{ΑΒ}$.

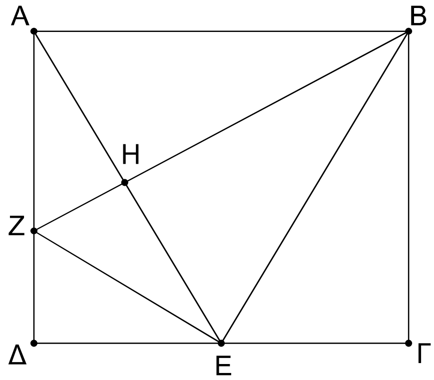
α) Να αποδείξετε ότι $\text{ΒΖ} = \frac{5}{4}\text{ΑΒ}$. (Μονάδες 6)

β) Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, Ε το μέσο της ΓΔ και Η είναι το σημείο τομής των ΑΕ, ΒΖ, να αποδείξετε ότι:

i. $\text{ΒΕ}^2 = \frac{5}{4}\text{ΑΒ}^2$ και $\text{ΖΕ}^2 = \frac{5}{16}\text{ΑΒ}^2$, (Μονάδες 6)

ii. το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια και να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών τους. (Μονάδες 8)



22243-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ έχουμε ότι

$$\mathrm{BZ}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AZ}^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\mathrm{AZ} = \frac{3}{4}\mathrm{AB}$, οπότε

$$\mathrm{BZ}^2 = \mathrm{AB}^2 + \left(\frac{3}{4}\mathrm{AB}\right)^2 \text{ ή } \mathrm{BZ}^2 = \frac{25}{16}\mathrm{AB}^2 \text{ ή } \mathrm{BZ} = \frac{5}{4}\mathrm{AB}.$$

β) Αφού το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, θα είναι $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{AB}$.

Επιπλέον,

$$\Delta\mathrm{Z} = \mathrm{A\Delta} - \mathrm{AZ} = \mathrm{AB} - \frac{3}{4}\mathrm{AB} = \frac{1}{4}\mathrm{AB}.$$

i. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ έχουμε ότι

$$\mathrm{BE}^2 = \mathrm{B\Gamma}^2 + \Gamma\mathrm{E}^2 \text{ ή } \mathrm{BE}^2 = \mathrm{AB}^2 + \left(\frac{1}{2}\mathrm{AB}\right)^2 \text{ ή } \mathrm{BE}^2 = \frac{5}{4}\mathrm{AB}^2.$$

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ έχουμε ότι

$$\mathrm{ZE}^2 = \Delta\mathrm{Z}^2 + \Delta\mathrm{E}^2 \text{ ή } \mathrm{ZE}^2 = \left(\frac{1}{4}\mathrm{AB}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\mathrm{AB}\right)^2 \text{ ή } \mathrm{ZE}^2 = \frac{5}{16}\mathrm{AB}^2.$$

ii. Από το ερωτήματα α και βi έχουμε ότι

$$\mathrm{BE}^2 + \mathrm{ZE}^2 = \frac{5}{4}\mathrm{AB}^2 + \frac{5}{16}\mathrm{AB}^2 = \frac{25}{16}\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BZ}^2.$$

Σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο με $\mathrm{B\hat{E}Z} = 90^\circ$.

γ) Είναι $\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{B\Gamma}} = \dfrac{\sqrt{\frac{5}{4}}\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ και $\dfrac{\mathrm{ZE}}{\mathrm{E\Gamma}} = \dfrac{\sqrt{\frac{5}{16}}\mathrm{AB}}{\frac{1}{2}\mathrm{AB}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ έχουν:

- $\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{B\Gamma}} = \dfrac{\mathrm{ZE}}{\mathrm{E\Gamma}}$ και
- $\mathrm{B\hat{E}Z} = \mathrm{B\hat{\Gamma}E} = 90^\circ$.

Άρα τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

Ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, οπότε

$$\frac{(\mathrm{BEZ})}{(\mathrm{B\Gamma E})} = \left(\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{B\Gamma}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

22380

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 90°$ και $B\Gamma = 16$, $\Gamma\Delta = 22$ και $A\Delta = 20$. Έστω Κ η προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία ΓΔ και Λ η προβολή του σημείου Β πάνω στη ευθεία ΑΔ.

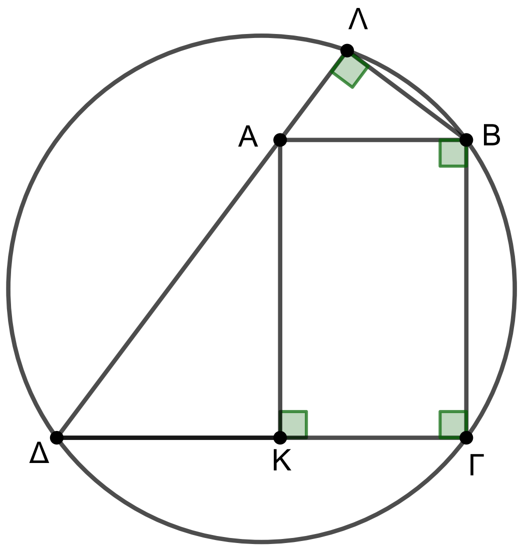
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $K\Delta = 12$, (Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΔ είναι 96 . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΛΑ . (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέτρου του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΒΓΔΛ . (Μονάδες 5)



22380-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Το τετράπλευρο $ΑΒΓΚ$ είναι ορθογώνιο αφού έχει τρεις ορθές γωνίες, άρα

$ΑΚ = ΒΓ = 16$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΚΔ$ $\left(Α\widehat{Κ}Δ = 90°\right)$, έχουμε

$ΚΔ^2 = ΑΔ^2 - ΑΚ^2$

$ΚΔ^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144 = 12^2$

$ΚΔ = 12$.

ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $ΑΚΔ$ είναι

$(ΑΚΔ) = \frac{1}{2} ΚΔ \cdot ΑΚ = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$.

β) Τα τρίγωνα $ΑΚΔ$ και $ΒΛΑ$ είναι ορθογώνια $\left(Α\widehat{Κ}Δ = Β\widehat{Λ}Α = 90°\right)$ και έχουν

$\widehat{Δ} = Λ\widehat{Α}Β$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων $ΑΒ$ και $ΔΓ$ που τέμνονται από την $ΛΔ$. Άρα τα τρίγωνα $ΑΚΔ$ και $ΒΛΑ$ είναι όμοια.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων $ΑΚΔ$ και $ΒΛΑ$ είναι

$λ = \frac{ΑΔ}{ΒΑ}$ ή $λ = \frac{20}{10}$ ή $λ = 2$,

αφού $ΒΑ = ΚΓ$ από το ορθογώνιο $ΑΒΓΚ$ και $ΚΓ = ΓΔ - ΚΔ = 22 - 12 = 10$.

Επειδή τα τρίγωνα $ΑΚΔ$ και $ΒΛΑ$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $λ = 2$, ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $ΑΚΔ$ και $ΒΛΑ$ ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, άρα

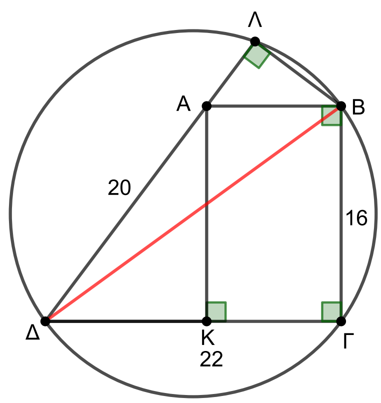
$\frac{(ΑΚΔ)}{(ΒΛΑ)} = λ^2$

$\frac{96}{(ΒΛΑ)} = 2^2$

$(ΒΛΑ) = \frac{96}{4}$

$(ΒΛΑ) = 24$.

γ) Φέρνουμε τη $ΒΔ$, η οποία είναι διάμετρος του παραπάνω κύκλου, αφού $Β\widehat{Γ}Δ = 90°$.



22380-Λύση

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{B\Gamma\Delta}$ $\left(\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta = 90°\right)$, έχουμε

$\mathrm{B\Delta}^2 = \mathrm{B\Gamma}^2 + \Gamma\Delta^2$

$\mathrm{B\Delta}^2 = 16^2 + 22^2 = 256 + 484 = 740 = 4 \cdot 185$

$\mathrm{B\Delta} = 2\sqrt{185}$.

Επομένως η διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $\mathrm{B\Gamma\Delta\Lambda}$ έχει μήκος $2\sqrt{185}$.

22400

ΘΕΜΑ 4

Τα Δ και E είναι σημεία των πλευρών AB και $\mathrm{A\Gamma}$ αντίστοιχα, ενός τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$. Δίνεται ότι $\mathrm{AB} = 9$, $\mathrm{A\Gamma} = 12$, $\mathrm{A\Delta} = 4$ και $\mathrm{AE} = 3$.

α) Έστω ότι στο παραπάνω τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι $\mathrm{B\Gamma} = 15$, (Σχήμα 1). Να αποδείξετε ότι:

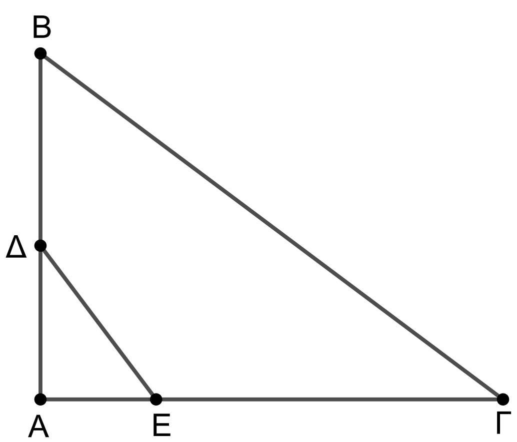
i. Το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

ii. $\Delta\mathrm{E} = 5$. (Μονάδες 6)

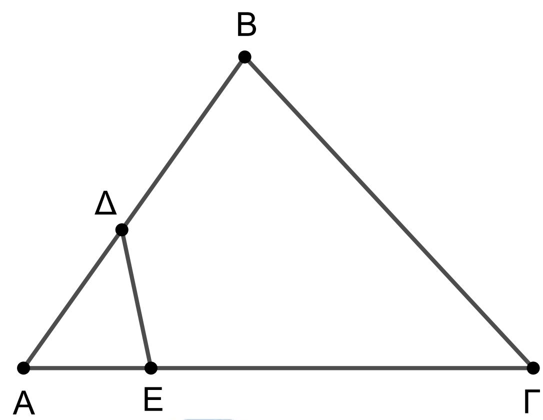
β) Έστω τώρα ότι στο αρχικό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι $\mathrm{B\Gamma} = 10$, (Σχήμα 2). Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ δεν είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

ii. $\Delta\mathrm{E} = \frac{10}{3}$. (Μονάδες 6)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

22400-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\text{ΑΒ} = 9$, $\text{ΑΓ} = 12$ και $\text{ΒΓ} = 15$, άρα έχουμε

$\text{ΒΓ}^2 = 15^2 = 225$ και $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$,

άρα $\text{ΒΓ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2$.

Επομένως από το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος είναι $\widehat{\text{Α}} = 90°$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

ii. Επειδή $\widehat{\text{Α}} = 90°$, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ορθογώνιο, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $\text{ΔΕ}^2 = \text{ΑΔ}^2 + \text{ΑΕ}^2$ ή $\text{ΔΕ}^2 = 4^2 + 3^2$ ή $\text{ΔΕ}^2 = 25$ ή $\text{ΔΕ}^2 = 5^2$ ή $\text{ΔΕ} = 5$.

β)

i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\text{ΑΒ} = 9$, $\text{ΑΓ} = 12$ και $\text{ΒΓ} = 10$, άρα έχουμε

$\text{ΑΓ}^2 = 12^2 = 144$ και $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2 = 9^2 + 10^2 = 81 + 100 = 181$

άρα $\text{ΑΓ}^2 < \text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$, οπότε $\widehat{\text{Β}} < 90°$. Η οξεία γωνία $\widehat{\text{Β}}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ αφού βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά την ΑΓ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο και όχι ορθογώνιο.

ii. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΓΒ έχουν

$\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ και τη γωνία $\widehat{\text{Α}}$ κοινή,

άρα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.

Άρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΓΒ θα έχουν και τις τρίτες πλευρές ανάλογες με λόγο $\frac{1}{3}$.

Επομένως $\frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{1}{3}$ ή $\frac{\text{ΔΕ}}{10} = \frac{1}{3}$ ή $\text{ΔΕ} = \frac{10}{3}$.

22565

ΘΕΜΑ 4

Οι μαθητές θέλοντας να μετρήσουν την απόσταση των σημείων Α και Β στην αυλή του σχολείου τους μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται ένα κτίσμα και η απευθείας μέτρηση του μήκους ΑΒ είναι αδύνατη, εργάστηκαν ως εξής. Στην αυλή τους επέλεξαν σημείο Ο ώστε η μέτρηση των τμημάτων ΟΑ και ΟΒ να είναι εφικτή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μέτρησαν και βρήκαν ΟΑ=20m και ΟΒ=30m. Στις ΟΑ και ΟΒ πήραν σημεία Γ και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΟΓ=2m και ΟΔ=3m.

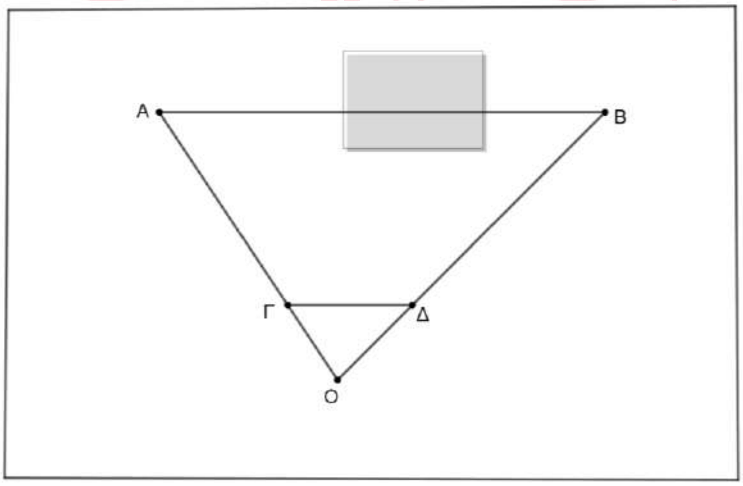
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η ΓΔ είναι παράλληλη με την ΑΒ, (Μονάδες 8)

ii. τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ είναι όμοια. (Μονάδες 7)

β) Ένας από τους μαθητές υποστηρίζει ότι μπορούν να υπολογίσουν την απόσταση των σημείων Α και Β αν γνωρίζουν την απόσταση των δύο σημείων Γ και Δ.

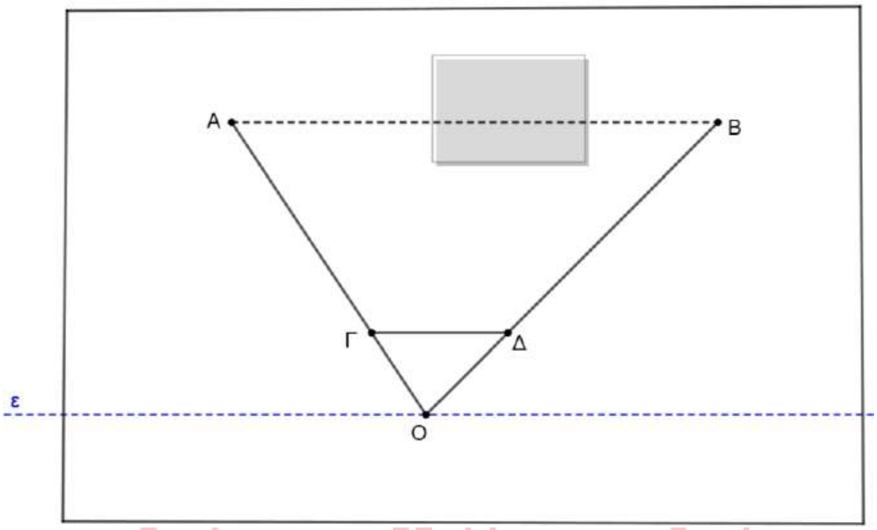
Είναι ο ισχυρισμός του μαθητή αληθής; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)



22565-Λύση

ΛΥΣΗ

Έστω ότι το τμήμα ΑΒ εκφράζει την απόσταση των σημείων Α, Β και ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο Ο και είναι παράλληλη με την ΓΔ.



α) Είναι $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$ και $\frac{ΟΔ}{ΟΒ}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$, άρα $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}=\frac{1}{10}$ (1).

i. Οι παράλληλες ευθείες ε και ΓΔ τέμνονται από τις ΟΓ και ΟΔ στα σημεία Ο,Γ και Ο,Δ αντίστοιχα. Για τα σημεία Α και Β των ευθειών ΟΓ και ΟΔ αντίστοιχα ισχύει $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}$ από σχέση (1). Επομένως σύμφωνα με το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή προκύπτει ότι οι ευθείες ΓΔ και ΑΒ είναι παράλληλες.

ii. Από σχέση (1) έχουμε ότι $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}$, δηλαδή τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες (κοινή η γωνία $\widehat{Ο}$), άρα είναι όμοια.

β) Εφόσον τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, άρα $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}=\frac{ΓΔ}{ΑΒ}$ με $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}=\frac{1}{10}$ από τη σχέση (1), άρα $\frac{ΓΔ}{ΑΒ}=\frac{1}{10}$ ή ΑΒ = 10·ΓΔ. Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής.

22568

ΘΕΜΑ 4

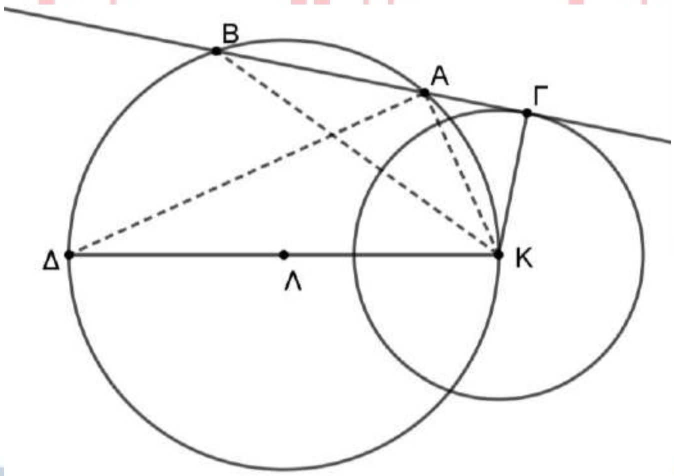
Δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο Λ και ακτίνα R=10, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο ενός άλλου κύκλου με κέντρο το σημείο Κ και ακτίνα ρ=6. Η εφαπτομένη του κύκλου (Κ,ρ) στο σημείο του Γ τέμνει τον κύκλο (Λ,R) στα σημεία Α και Β. Η προέκταση της ΚΛ προς το Λ τέμνει τον κύκλο (Λ,R) στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ είναι όμοια. (Μονάδες 8)

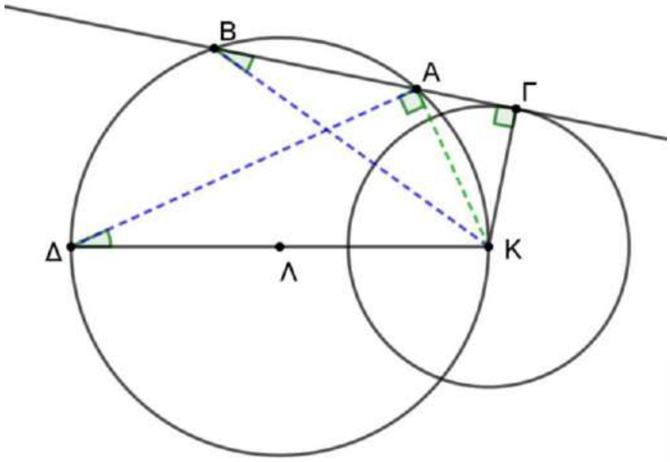
ii. ΚΑ·ΚΒ=120 (Μονάδες 9)

β) Αν είναι ΚΒ=15, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΚ. (Μονάδες 8)



22568-Λύση

ΛΥΣΗ



α)

i. Οι γωνίες $K\hat{B}\Gamma$ και $K\hat{\Delta}A$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες του κύκλου (Λ,R) που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΚΑ, άρα είναι ίσες. Η ευθεία ΓΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου (Κ,ρ) στο σημείο του Γ, επομένως η γωνία $K\hat{\Gamma}B$ είναι ορθή. Η ΚΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Λ,R) και η γωνία $K\hat{A}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα είναι ορθή. Τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ έχουν $K\hat{\Gamma}B= K\hat{A}\Delta$ (ορθές) και $K\hat{B}\Gamma= K\hat{\Delta}A$, επομένως έχοντας δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια.

ii. Η ΚΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Λ,R), άρα ΚΔ=2·R=20 και η ΚΓ είναι ακτίνα του κύκλου (Κ,ρ), άρα ΚΓ=ρ=6. Εφόσον τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ είναι όμοια, έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή $\frac{K\Gamma}{KA}=\frac{KB}{K\Delta}=\frac{\Gamma B}{\Delta A}$. Από την ισότητα $\frac{K\Gamma}{KA}=\frac{KB}{K\Delta}$ έχουμε ότι $\frac{6}{KA}=\frac{KB}{20}$ ή ΚΑ·ΚΒ=120.

β) Αφού είναι ΚΒ=15 και ΚΑ·ΚΒ=120 τότε 15·ΚΑ=120, άρα ΚΑ=8. Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΚΑΓ έχουμε $K\Gamma^2+\Gamma A^2=KA^2$ ή $36+\Gamma A^2=64$ ή $\Gamma A^2=28$ ή $\Gamma A=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$.Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΓΚ είναι $(A\Gamma K)=\frac{K\Gamma\cdot AK}{2}=\frac{6\cdot 2\sqrt{7}}{2}=6\sqrt{7}$.