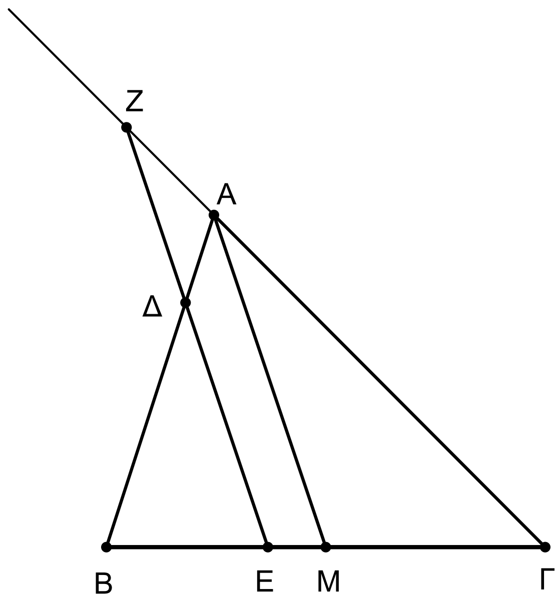
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε ΑΜ τη διάμεσό του και Ε τυχαίο σημείο του τμήματος ΒΜ. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ζ.



α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

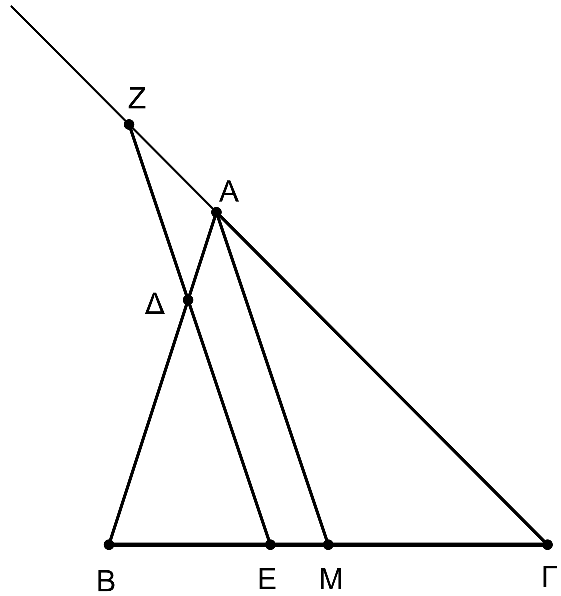
i. $\frac{\Delta E}{\cdots} = \frac{\cdots}{BM} = \frac{B\Delta}{\cdots}$

ii. $\frac{\cdots}{AM} = \frac{\Gamma E}{\cdots} = \frac{\cdots}{\Gamma A}$

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι ΔΕ + ΕΖ = 2ΑΜ για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ



α)

i. Οι πλευρές ΒΕ και ΒΔ του τριγώνου ΒΕΔ ανήκουν στις πλευρές ΒΜ και ΒΑ αντίστοιχα, του τριγώνου ΒΜΑ και επιπλέον η τρίτη του πλευρά ΔΕ είναι παράλληλη στην τρίτη πλευρά ΑΜ του τριγώνου ΒΜΑ. Οπότε οι πλευρές του τριγώνου ΒΕΔ είναι ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΒΜΑ.

   Δηλαδή ισχύει: $\frac{\Delta E}{AM} = \frac{BE}{BM} = \frac{B\Delta}{BA}$ (1).

ii. Ομοίως οι πλευρές ΓΖ και ΓΕ του τριγώνου ΓΖΕ βρίσκονται στους φορείς των πλευρών ΓΑ και ΓΜ του τριγώνου ΓΑΜ και οι τρίτες τους πλευρές ΕΖ και ΑΜ είναι παράλληλες. Οπότε τα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή ισχύει: $\frac{EZ}{AM} = \frac{\Gamma E}{\Gamma M} = \frac{\Gamma Z}{\Gamma A}$ (2).

β) Από τις σχέσεις (1) και (2) του α) ερωτήματος έχουμε ότι $\frac{\Delta E}{AM} = \frac{BE}{BM}$ και $\frac{EZ}{AM} = \frac{\Gamma E}{\Gamma M}$. Επειδή το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τα τμήματα ΒΜ και ΓΜ είναι ίσα, οπότε οι προηγούμενες σχέσεις γράφονται: $\frac{\Delta E}{AM} = \frac{BE}{BM}$ και $\frac{EZ}{AM} = \frac{\Gamma E}{BM}$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

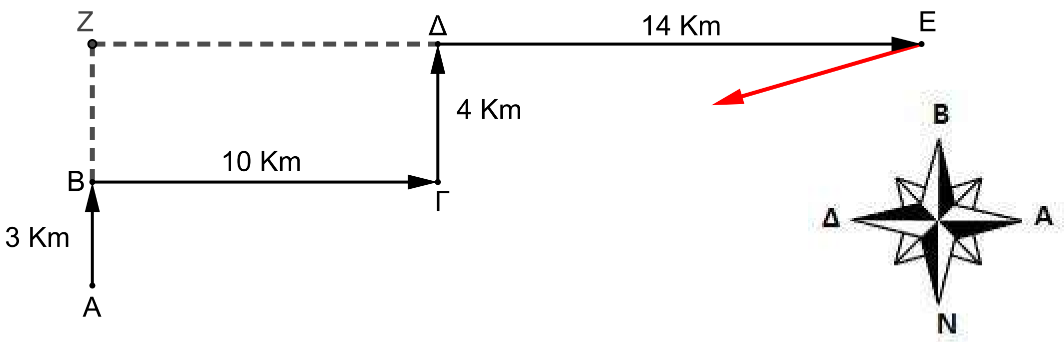
$\frac{\Delta E}{AM} + \frac{EZ}{AM} = \frac{BE}{BM} + \frac{\Gamma E}{BM}$ ή $\frac{\Delta E+EZ}{AM} = \frac{BE+\Gamma E}{BM}$, δηλαδή $\frac{\Delta E+EZ}{AM} = \frac{B\Gamma}{BM} \Leftrightarrow \frac{\Delta E+EZ}{AM} = \frac{2\cdot BM}{BM} = 2$.

Άρα $\frac{\Delta E+EZ}{AM} = 2$ ή ΔΕ+ΕΖ=2ΑΜ για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ.

14533

ΘΕΜΑ 4

Δύο κινητά βρίσκονται στο σημείο Α και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο Ε, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε. Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο Α κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Ζ και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο Ε. Όταν συναντιούνται στο σημείο Ε επιστρέφουν μαζί στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.



α)

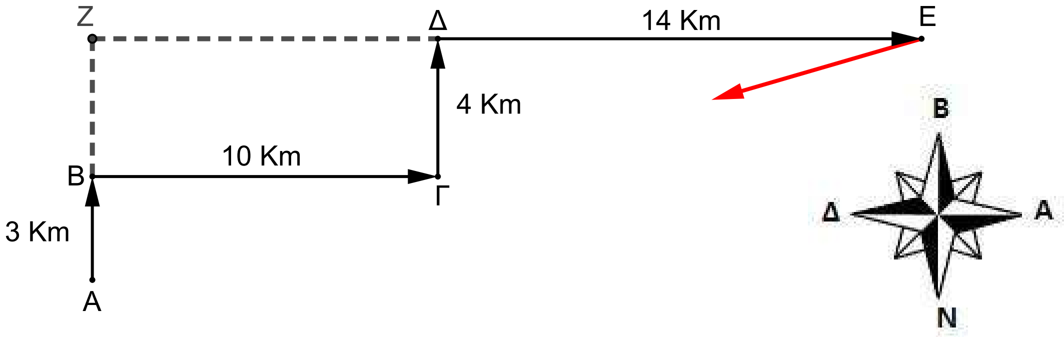
i. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο Α στο σημείο Ε με τον τρόπο που κινήθηκε; (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την απόσταση ΑΕ που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο Ε στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα. (Μονάδες 12)

β) Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο Ε στο σημείο Α, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 08)

14533-Λύση

ΛΥΣΗ



α)

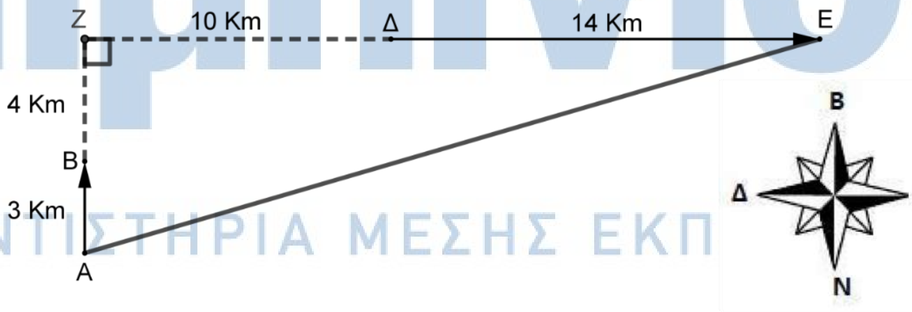
i. Το πρώτο κινητό που έκανε τη διαδρομή ΑΒΓΔΕ διάνυσε συνολικά (3+10+4+14) km = 31 km.

Για το δεύτερο κινητό που έκανε τη διαδρομή ΑΖΕ έχουμε:

ΑΖ//ΓΔ γιατί η κίνηση από το σημείο Α στο σημείο Ζ είναι βόρεια όπως και η κίνηση από το σημείο Γ στο σημείο Δ. Επίσης, η κίνηση από το σημείο Ζ στο σημείο Ε είναι ανατολικά όπως και η κίνηση από το σημείο Β στο σημείο Γ, άρα ΖΕ//ΒΓ. Στο τετράπλευρο ΒΓΔΖ οι απέναντι πλευρές τους είναι παράλληλες, οπότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο και επειδή οι γωνίες του είναι ορθές είναι ορθογώνιο.

Άρα ΒΖ=ΓΔ=4 και ΖΔ=ΒΓ=10. Η συνολική διαδρομή του δεύτερου κινητού είναι (7+10+14) km =31km

ii.

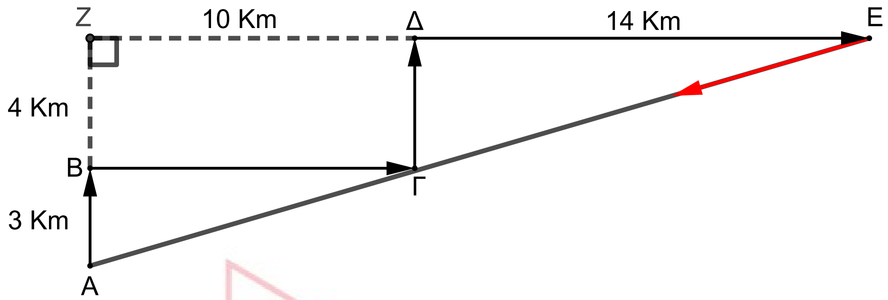


Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΕ με $\widehat{Z}=90^{o}$ εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$EA^2 = AZ^2 + ZE^2$ ή $EA^2 = 7^2 + 24^2$, δηλαδή $EA^2 = 49 + 576$, οπότε $EA^2 = 625$ ή $EA = 25$ km.

β) Αν τα κινητά, κατά την επιστροφή τους από το σημείο Ε στο Α περάσουν από το σημείο Γ, τότε τα σημεία Α, Γ και Ε είναι συνευθειακά.

14533-Λύση



Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή έχουμε ότι το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

Το τρίγωνο ΓΔΕ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΕ και ΖΕ του ΑΖΕ και την παράλληλη ΓΔ προς την πλευρά του ΑΖ. Επομένως τα τρίγωνα ΓΔΕ και ΑΖΕ έχουν πλευρές ανάλογες, άρα $\frac{ΓΔ}{ΑΖ} = \frac{ΔΕ}{ΖΕ}$ ή $\frac{4}{7} = \frac{14}{24}$ ή $\frac{4}{7} = \frac{7}{12}$ ή $48 = 49$, που είναι άτοπο.

Επομένως, τα κινητά κατά την επιστροφή τους από το Ε δεν περνούν από το Γ.

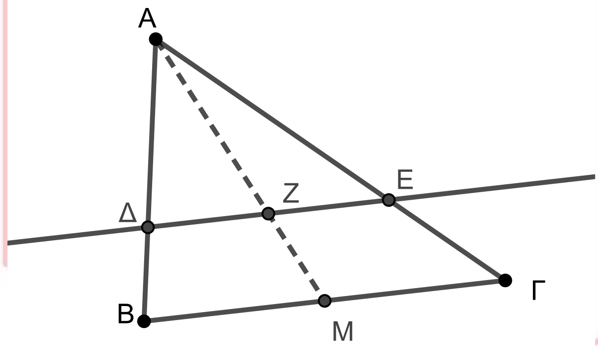
14534

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=6 και ΑΓ=9. ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου και το σημείο Ζ εσωτερικό στην ΑΜ ώστε να σχηματίζει λόγο $\frac{AZ}{AM} = \frac{2}{3}$. Από το σημείο Ζ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

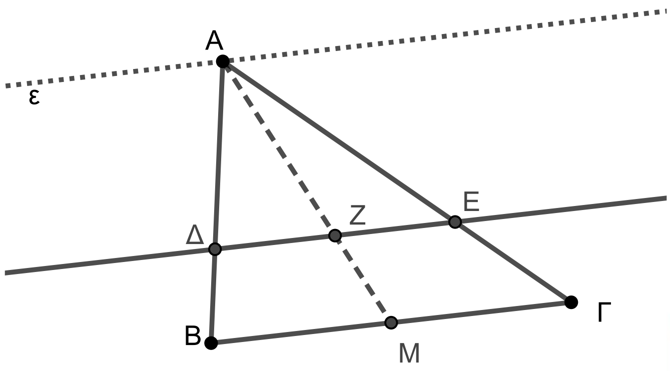
α) Να αποδείξετε ότι : $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{E\Gamma} = 2$. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΑΔ και ΕΓ. (Μονάδες 10)



14534-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Θεωρούμε υποθετική ευθεία ε από το σημείο Α παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Τότε ε//ΔΕ//ΒΓ και οι ΑΒ, ΑΜ είναι τέμνουσες των ευθειών αυτών. Από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε ότι $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΑΜ}}$, οπότε $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{2}{3}$ (1). Από το θεώρημα του Θαλή για τις τέμνουσες ΑΜ και ΑΓ έχουμε ότι $\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΑΜ}} = \frac{2}{3}$ (2). Από ιδιότητες αναλογιών $\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}-\text{ΑΕ}} = \frac{2}{3-2}$, δηλαδή $\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}} = 2$.

β) Από τη σχέση (1) του ερωτήματος α) έχουμε $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{2}{3}$ ή ΑΔ $= \frac{2}{3} \cdot \text{ΑΒ} = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$.

Αντίστοιχα από τη σχέση (2) έχουμε $\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{2}{3}$ ή ΑΕ $= \frac{2}{3} \cdot \text{ΑΓ} = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$. Οπότε, ΕΓ = ΑΓ – ΑΕ = = 9 – 6 = 3.

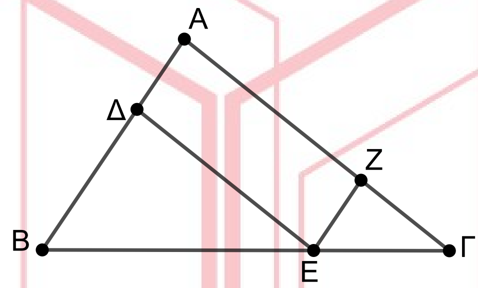
14579

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στην ΑΓ. Επίσης ΑΒ = 3ΑΔ.

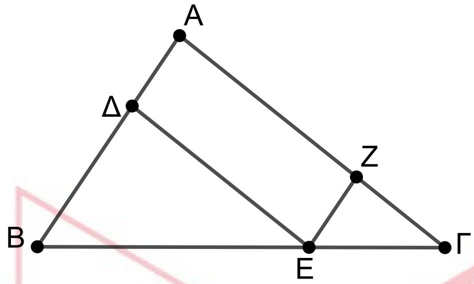
α) Να βρείτε τους λόγους $\frac{\mathrm{B}\Delta}{\mathrm{A}\Delta}$ και $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{E}\Gamma}$. (Μονάδες 15)

β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ΑΓ = 3,9 και ΓΖ = 1,3 να αποδείξετε ότι η ΖΕ είναι παράλληλη της ΑΒ. (Μονάδες 10)



14579-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Εφόσον ΑΒ = 3ΑΔ είναι ΒΔ + ΑΔ = 3ΑΔ ή ΒΔ = 2ΑΔ. Άρα $\frac{B\Delta}{A\Delta} = 2$.

Η ευθεία ΔΕ που είναι φορέας του ΔΕ είναι παράλληλη στην πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, άρα χωρίζει τις άλλες δύο πλευρές του τριγώνου ΑΒ και ΒΓ σε μέρη ανάλογα. Επομένως $\frac{B\Delta}{A\Delta} = \frac{BE}{E\Gamma}$, άρα $\frac{BE}{E\Gamma} = 2$.

β) Από το α) έχουμε ότι το σημείο Ε διαιρεί το τμήμα ΒΓ σε τμήματα με λόγο 2.

Εφόσον ΑΓ = 3,9, τότε ΑΖ + ΓΖ = 3,9. Όμως ΓΖ = 1,3, άρα ΑΖ + 1,3 = 3,9 ή ΑΖ = 2,6.

Επομένως $\frac{AZ}{\Gamma Z} = \frac{2{,}6}{1{,}3} = 2$. Άρα το σημείο Ζ διαιρεί το τμήμα ΑΓ σε τμήματα με λόγο 2.

Εφόσον η ευθεία ΖΕ χωρίζει τις πλευρές του τριγώνου ΑΓ και ΒΓ σε μέρη ανάλογα με λόγο 2, η ΖΕ είναι παράλληλη στην τρίτη πλευρά του τριγώνου, την ΑΒ.

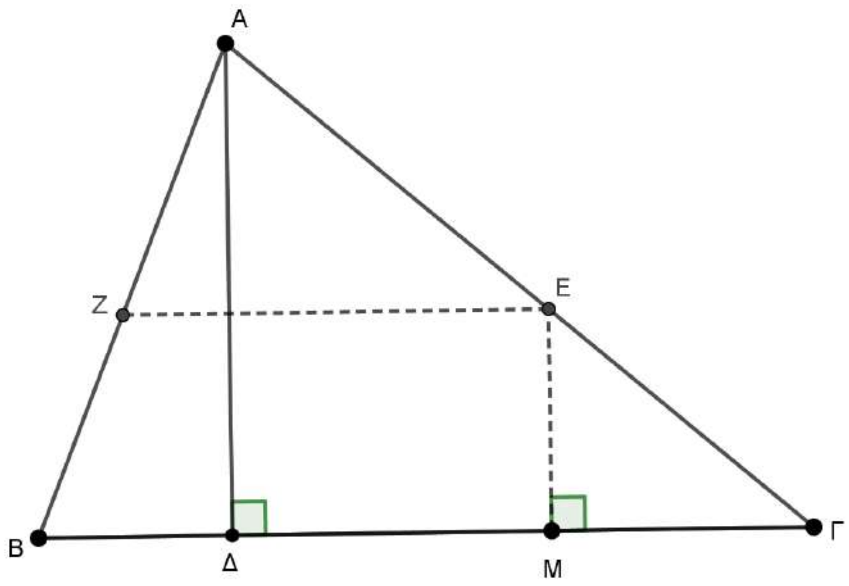
15830

ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου. Η κάθετος στην πλευρά ΒΓ σε ένα άλλο σημείο της Μ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{EA}{E\Gamma}$. (Μονάδες 10)

β) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{M\Delta}{M\Gamma}$. (Μονάδες 15)



15830-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα η ΖΕ // ΒΓ, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{ΖΑ}{ΖΒ} = \frac{ΕΑ}{ΕΓ}$.

β) Είναι ΜΕ // ΑΔ (από τα δεδομένα είναι κάθετα στην ίδια ευθεία ΒΓ),

οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{ΜΔ}{ΜΓ} = \frac{ΕΑ}{ΕΓ}$.

Από την τελευταία ισότητα και την ισότητα που δείξαμε στο ερώτημα (α) συμπεραίνουμε ότι: $\frac{ΖΑ}{ΖΒ} = \frac{ΜΔ}{ΜΓ}$.

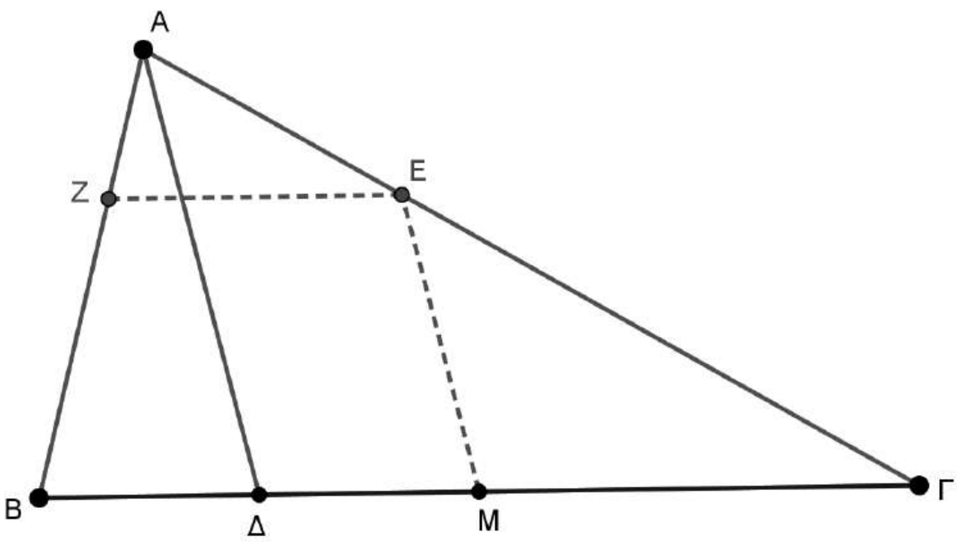
15831

ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, το Μ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ και το Δ είναι το μέσο του ΜΒ. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη στην ΑΔ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{ΕΑ}{ΕΓ} = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 15)

β) $\frac{ΖΑ}{ΖΒ} = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 10)



15831-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα, το Δ να είναι το μέσο του ΒΜ και το Μ μέσο της ΒΓ.

Άρα ΜΔ = $\frac{1}{2}$ ΜΒ = $\frac{1}{2}$ ΜΓ (1).

Επίσης η ΜΕ // ΑΔ, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{ΕΑ}{ΕΓ} = \frac{ΜΔ}{ΜΓ}$.

Η τελευταία ισότητα λόγω της (1) γράφεται: $\frac{ΕΑ}{ΕΓ} = \frac{\frac{1}{2}ΜΓ}{ΜΓ} = \frac{1}{2}$.

β) Από τα δεδομένα η ΖΕ // ΒΓ, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{ΖΑ}{ΖΒ} = \frac{ΕΑ}{ΕΓ}$.

Η τελευταία ισότητα λόγω του ερωτήματος (α) δίνει: $\frac{ΖΑ}{ΖΒ} = \frac{1}{2}$.

16086

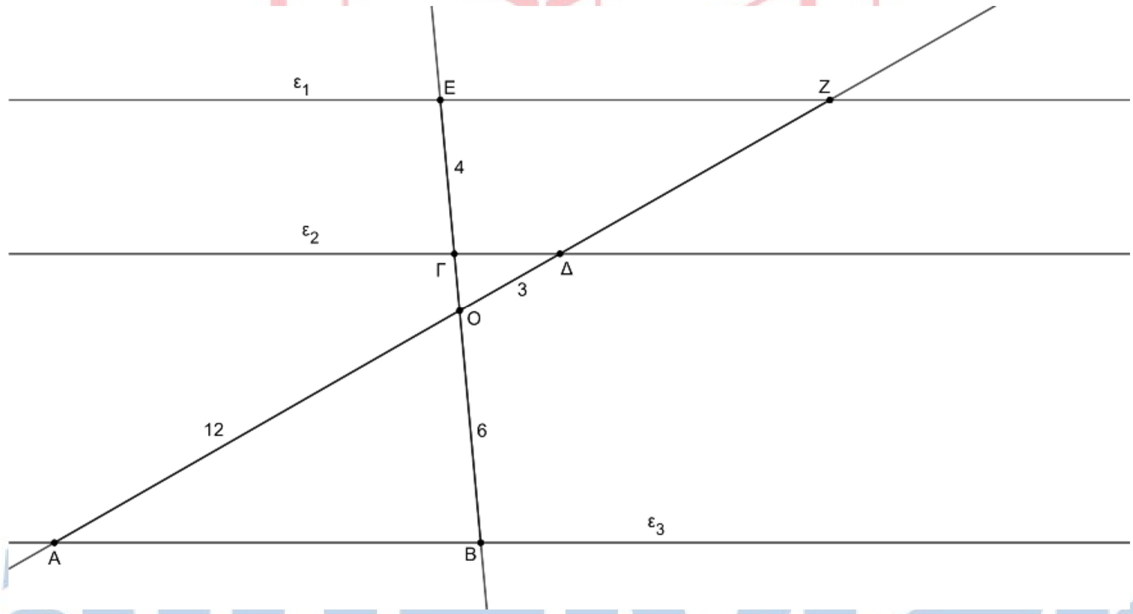
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 είναι παράλληλες. Δίνονται ότι ΓΕ = 4, ΟΔ = 3, ΟΑ = 12, ΟΒ = 6.

α) Να υπολογίσετε τα τμήματα ΟΓ και ΔΖ. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΖ και ΟΒΑ είναι όμοια. (Μονάδες 09)

γ) Αν ΟΓ = 1.5 και ΔΖ = 8, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{AB}}$. (Μονάδες 06)



16086-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Φέρνουμε $\varepsilon_4 \,//\, \varepsilon_2$ που διέρχεται από το Ο. Τότε από το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες ε_2, ε_4, ε_3 που τέμνονται από τις ΓΒ και ΔΑ, έχουμε: $\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{O\Delta}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{O\Gamma}}$,

επομένως $\frac{12}{3} = \frac{6}{\mathrm{O\Gamma}}$, άρα $12 \cdot \mathrm{O\Gamma} = 6 \cdot 3$ ή ΟΓ = 1.5.

Από το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες ε_2, ε_4, ε_1 που τέμνονται από τις ΟΕ και ΟΖ, έχουμε: $\frac{\mathrm{O\Gamma}}{\Gamma\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{O\Delta}}{\Delta\mathrm{Z}}$, επομένως $\frac{1,5}{4} = \frac{3}{\Delta\mathrm{Z}}$, άρα $1,5 \cdot \Delta\mathrm{Z} = 4 \cdot 3$ ή ΔΖ = 8.

β) Τα τρίγωνα ΟΕΖ και ΟΒΑ έχουν:

$\mathrm{E}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{O} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ και ΑΒ που τέμνονται από την ΖΑ.

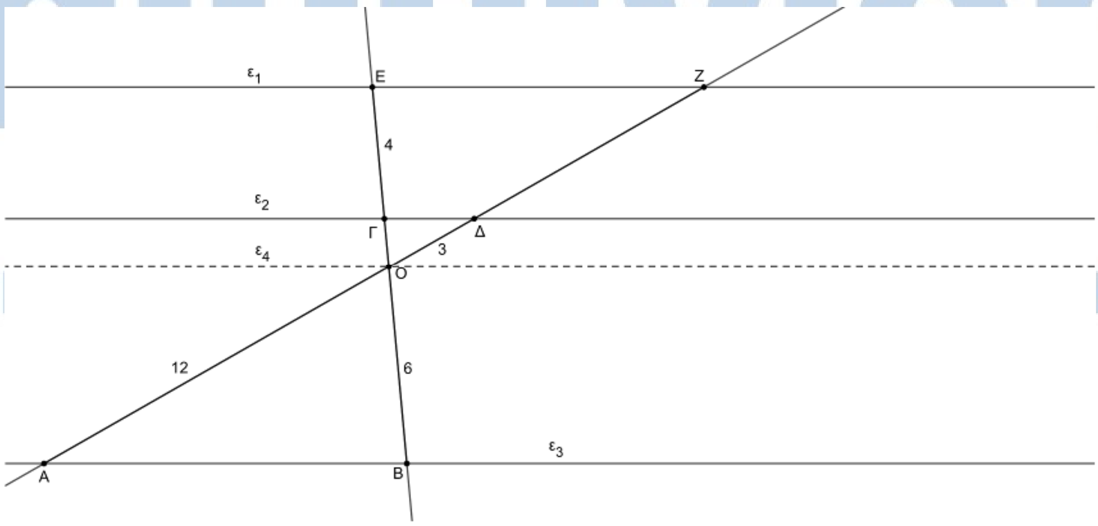
$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{O}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ και ΑΒ που τέμνονται από την ΕΒ.

Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια επειδή έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

γ) Από την ομοιότητα των τριγώνων ΟΕΖ και ΟΒΑ έχουμε:

	Ίσες γωνίες		
	$\mathrm{E}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{O} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O}$	$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{O}$	$\mathrm{E}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Z} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΟΒ	ΟΒ	ΟΑ	ΑΒ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΖΟΕ	ΟΕ	ΟΖ	ΕΖ

$$\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{OZ}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{O\Delta} + \Delta\mathrm{Z}}{\mathrm{OA}} = \frac{3+8}{12} = \frac{11}{12}.$$



16097

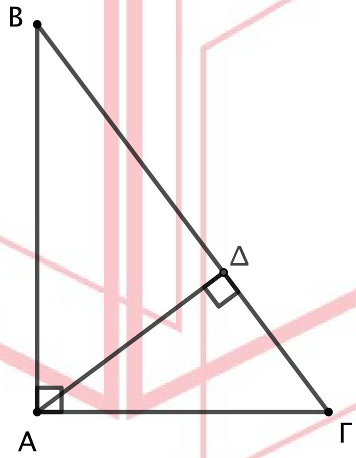
ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.

ii. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Στο σχήμα, η προβολή της πλευράς ΑΒ στην υποτείνουσα ΒΓ είναι το τμήμα ΓΔ.



iv. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

v. Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

(Μονάδες 15)

16097-Λύση

ΛΥΣΗ

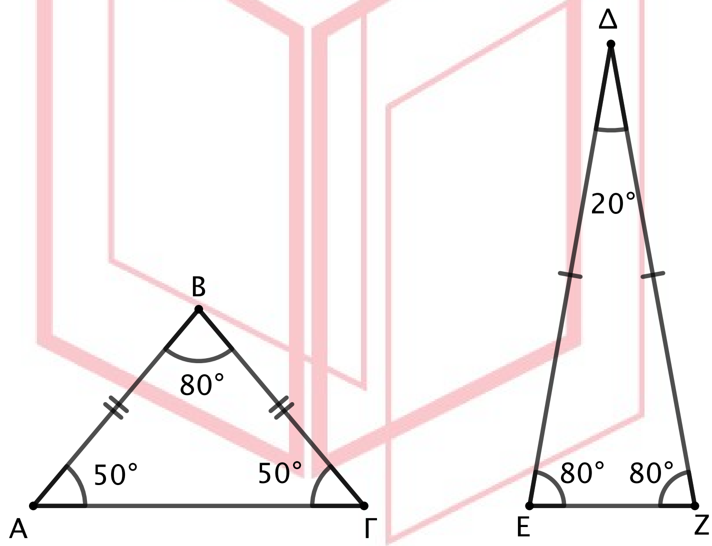
α)

i. Σωστό

Πόρισμα, σελίδα 15 σχολικό βιβλίο.

ii. Λάθος

Για παράδειγμα, τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΒΓ) και ΕΔΖ (ΕΔ = ΔΖ) του σχήματος έχουν $\hat{B} = \hat{E} = 80^o$. Ωστόσο, δεν είναι όμοια, αφού δεν έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.



iii. Λάθος

Η προβολή της πλευράς ΑΒ στην υποτείνουσα ΒΓ είναι το τμήμα ΒΔ.

iv. Λάθος

Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

v. Σωστό

Θεώρημα Ι, σελίδα 91 σχολικό βιβλίο.

β) §10.3, Θεώρημα Ι (απόδειξη), σελίδα 72 σχολικό βιβλίο (Σχήμα 7).

16133

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔE έχουν μήκη αντίστοιχα $12, 16, 8$ και 10, οι γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $\Delta\hat{\Gamma}E$ είναι ορθές και τα σημεία A, Γ και E ανήκουν στην ίδια ευθεία.

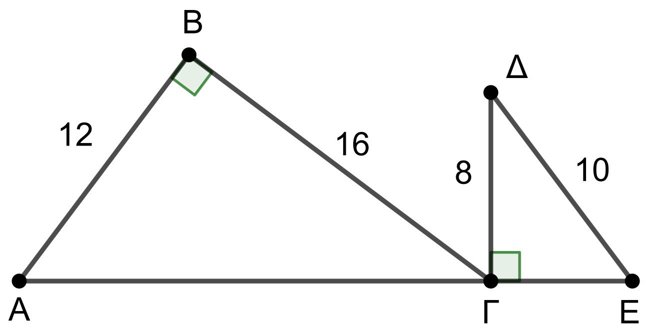
α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AE. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ είναι όμοια. (Μονάδες 7)

γ) Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών AB και $E\Delta$ είναι το Z και ZH είναι το ύψος του τριγώνου ZAE από την κορυφή του Z. Να αποδείξετε ότι:

i. $EH = 13$, (Μονάδες 6)

ii. $ZH = \frac{52}{3}$. (Μονάδες 5)



16133-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{B} = 90°$), έχουμε

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 \quad ή \quad ΑΓ^2 = 12^2 + 16^2 \quad ή \quad ΑΓ^2 = 400 \quad ή \quad ΑΓ = 20.$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΓΔΕ$ ($\hat{Γ} = 90°$), έχουμε

$$ΓΕ^2 = ΔΕ^2 - ΓΔ^2 \quad ή \quad ΓΕ^2 = 10^2 - 8^2 \quad ή \quad ΓΕ^2 = 36 \quad ή \quad ΓΕ = 6.$$

Επομένως το μήκος του τμήματος $ΑΕ$ είναι $ΑΕ = ΑΓ + ΓΕ = 20 + 6 = 26$.

β) Στο α) ερώτημα βρήκαμε ότι $ΑΓ = 20$ και $ΓΕ = 6$, άρα τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΕΓΔ$ έχουν:

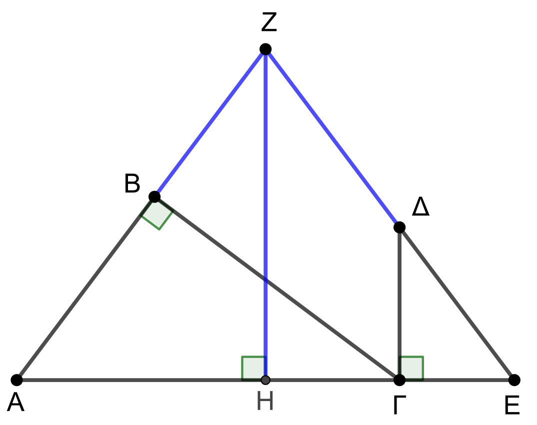
$$\frac{ΑΒ}{ΓΕ} = \frac{12}{6} = 2,$$

$$\frac{ΒΓ}{ΓΔ} = \frac{16}{8} = 2,$$

$$\frac{ΑΓ}{ΔΕ} = \frac{20}{10} = 2,$$

οπότε είναι όμοια, αφού έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.

γ)



i) Αφού τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΕΓΔ$ είναι όμοια, θα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, άρα $\hat{A} = \hat{E}$, οπότε το τρίγωνο $ΖΑΕ$ είναι ισοσκελές με βάση την $ΑΕ$. Επειδή το $ΖΗ$ είναι ύψος θα είναι και διάμεσος οπότε το σημείο $Η$ είναι το μέσο της $ΑΕ$. Επομένως θα είναι

$$ΗΕ = \frac{ΑΕ}{2} = \frac{26}{2} = 13.$$

ii) Είναι $ΔΓ \parallel ΖΗ$, ως κάθετες στην $ΑΕ$, οπότε από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο $ΓΔΕ$ θα έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου $ΗΖΕ$. Επομένως έχουμε

$$\frac{ΔΓ}{ΖΗ} = \frac{ΓΕ}{ΗΕ} \quad ή \quad \frac{8}{ΖΗ} = \frac{6}{13} \quad ή \quad ΖΗ = \frac{52}{3}.$$

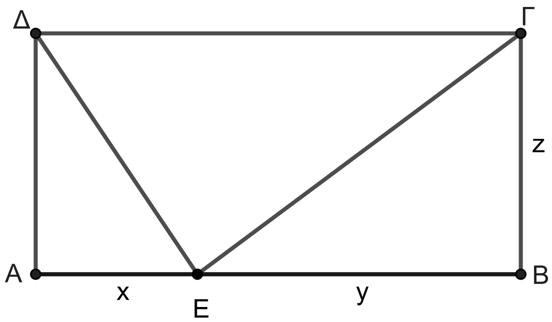
16805

ΘΕΜΑ 2

Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 72 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

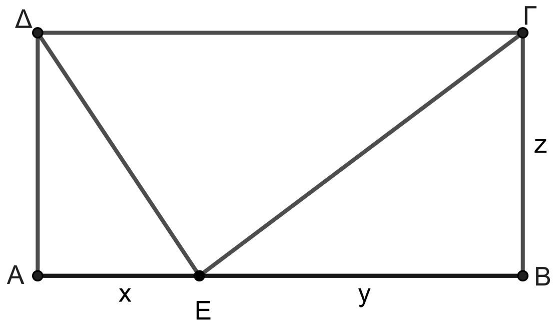
α) Να αποδείξετε ότι $x = 8$, $y = 16$ και $z = 12$. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ. (Μονάδες 12)



16805-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι 72. Οπότε 2 ΑΒ + 2 ΒΓ = 72 ή 2 (x + y) + 2 z = 72 ή x + y + z = 36. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα, άρα ισχύει $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{2+4+3} = \frac{36}{9} = 4$. Άρα x = 2·4 = 8, y = 4·4 = 16 και z = 3·4 = 12.

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΓΒΕ έχουμε $\Gamma E^2 = y^2 + z^2$ ή $\Gamma E^2 = 16^2 + 12^2$, οπότε $\Gamma E^2 = 400$ ή ΓΕ = 20. Αντίστοιχα στο τρίγωνο ΔΑΕ για την υποτείνουσα ΔΕ έχουμε $\Delta E^2 = AE^2 + \Delta A^2$ ή $\Delta E^2 = 8^2 + 12^2 = 208$, οπότε ΔΕ = $\sqrt{208} = \sqrt{16 \cdot 13} = 4\sqrt{13}$. Άρα η περίμετρος του τριγώνου ΔΕΓ ισούται με : ΔΕ + ΕΓ + ΔΓ = $4\sqrt{13} + 20 + (8 + 16) = 44 + 4\sqrt{13}$.

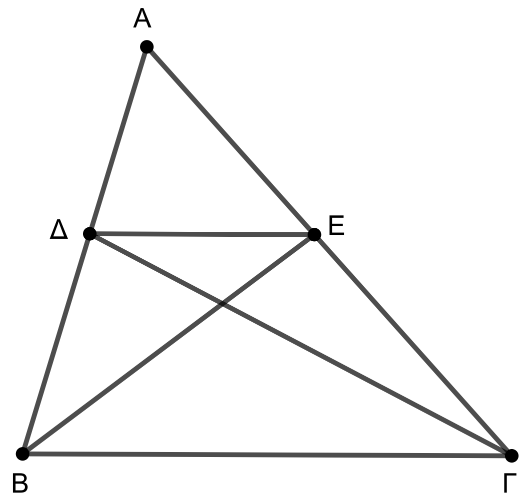
16806

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΔΕΒ)} = \frac{ΑΔ}{ΔΒ}$ και $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΔΕΓ)} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$. (Μονάδες 13)

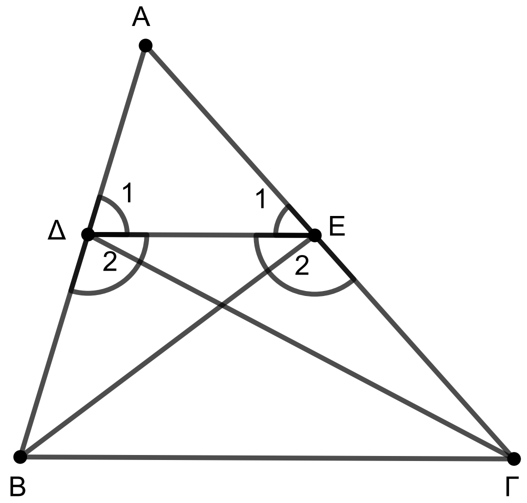
β) Να αποδείξετε ότι (ΔΕΒ) = (ΔΕΓ). (Μονάδες 12)



16806-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

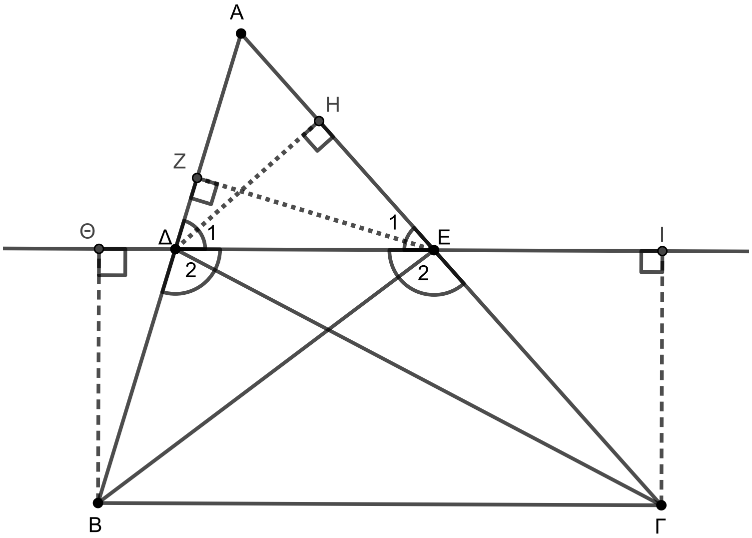


Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΒ έχουν τις γωνίες τους $\widehat{\Delta}_1$ και $\widehat{\Delta}_2$ παραπληρωματικές όπως και τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΓ έχουν παραπληρωματικές τις γωνίες $\hat{\mathrm{E}}_1$ και $\hat{\mathrm{E}}_2$. Άρα οι λόγοι των εμβαδών τους θα είναι ίσοι με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta EB})} = \frac{\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{\Delta E}}{\mathrm{\Delta B}\cdot\mathrm{\Delta E}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta B}}$ και $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta E\Gamma})} = \frac{\mathrm{AE}\cdot\mathrm{\Delta E}}{\mathrm{E\Gamma}\cdot\mathrm{\Delta E}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}$.

β) Το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Θαλή, έχουμε ότι $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta B}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}$. Επομένως από το α) ερώτημα θα ισχύει ότι $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta EB})} = \frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta E\Gamma})}$, άρα (ΔΕΒ) = (ΔΕΓ).

16806-Λύση

Εναλλακτική λύση:



α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΒ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Ε, το τμήμα ΕΖ, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των πλευρών που αντιστοιχεί αυτό το ύψος. Δηλαδή $\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΔΕΒ})}=\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΒ}}$. Ομοίως τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΓ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Δ, το τμήμα ΔΗ, επομένως $\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΔΕΓ})}=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}$.

β) Τα τρίγωνα ΔΕΒ και ΔΕΓ έχουν κοινή πλευρά τη ΔΕ και οι απέναντι κορυφές τους Β και Γ αντίστοιχα βρίσκονται στη ΒΓ, που είναι παράλληλη στη ΔΕ. Δηλαδή, έχουν κοινή βάση και ίσα ύψη, τα ΒΘ και ΓΙ αντίστοιχα, που είναι η απόσταση των παραλλήλων ΒΓ και ΔΕ. Άρα είναι ισοδύναμα, δηλαδή (ΔΕΒ) = (ΔΕΓ).

17348

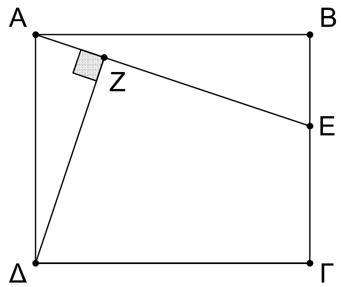
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $ΑΒ = 6$ και το Ε σημείο της πλευράς ΒΓ, ώστε $ΒΕ = 2$. Έστω ΔΖ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο Δ προς την ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = 2\sqrt{10}$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 9)

γ) Αν $ΔΖ = ΖΕ$, να υπολογίσετε το μήκος του ΑΔ. (Μονάδες 8)



17348-Λύση

ΛΥΣΗ

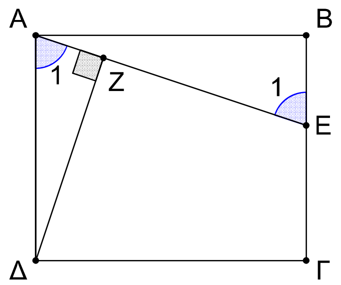
α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε ότι

$$\text{ΑΕ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΕ}^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\text{ΑΒ} = 6$, $\text{ΒΕ} = 2$, οπότε

$$\text{ΑΕ}^2 = 6^2 + 2^2 \text{ ή } \text{ΑΕ}^2 = 40 \text{ ή } \text{ΑΕ} = 2\sqrt{10}.$$

β)



Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ έχουν:

- $\widehat{\text{Α}}_1 = \widehat{\text{Ε}}_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ που τέμνονται από την ΑΕ.
- $\widehat{\text{Β}} = \widehat{\text{Ζ}} = 90^o$, γιατί από την υπόθεση έχουμε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και η ΔΖ κάθετη στην ΑΕ.

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία. Επομένως θα ισχύει

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΖ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΑΖ}} \text{ (1).}$$

γ) Είναι $\text{ΑΒ} = 6$, $\text{ΒΕ} = 2$ και $\text{ΑΕ} = 2\sqrt{10}$, οπότε η (1) γίνεται

$$\frac{6}{\text{ΔΖ}} = \frac{2\sqrt{10}}{\text{ΑΔ}} = \frac{2}{\text{ΑΖ}} \text{ (2).}$$

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $\text{ΔΖ} = \text{ΖΕ}$, έτσι η ισότητα $\frac{6}{\text{ΔΖ}} = \frac{2}{\text{ΑΖ}}$ γίνεται $\frac{6}{\text{ΖΕ}} = \frac{2}{\text{ΑΖ}}$ και με ιδιότητα των αναλογιών προκύπτει ότι

$$\frac{6}{\text{ΖΕ}} = \frac{2}{\text{ΑΖ}} = \frac{6+2}{\text{ΖΕ}+\text{ΑΖ}} = \frac{8}{\text{ΑΕ}} = \frac{8}{2\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \text{ (3).}$$

Από τις ισότητες (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\frac{2\sqrt{10}}{\text{ΑΔ}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \text{ ή } 4\text{ΑΔ} = 2(\sqrt{10})^2 \text{ ή } \text{ΑΔ} = 5.$$

18550

ΘΕΜΑ 2

Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 36 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

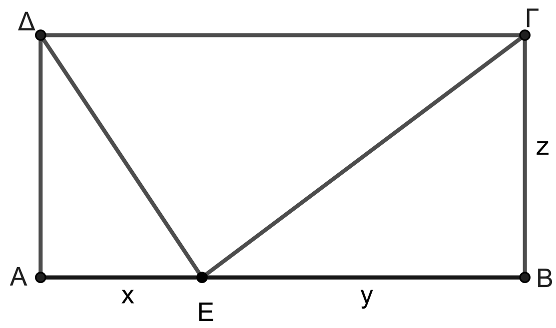
α) Να αποδείξετε ότι $x = 4$, $y = 8$ και $z = 6$. (Μονάδες 13)

β)

i. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ.

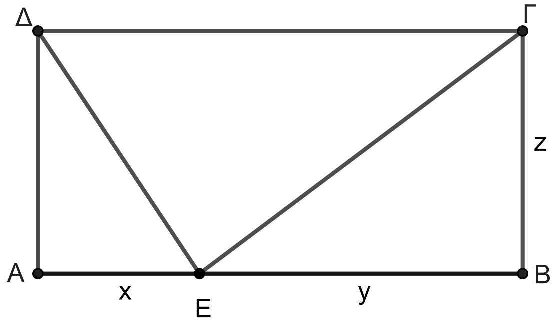
ii. Να βρεθεί ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου ΓΔΕ προς το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 12)



18550-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι 36. Οπότε 2 ΑΒ + 2 ΒΓ = 36 ή 2 (x + y) + 2 z = 36 ή x + y + z = 18. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα, άρα ισχύει $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{2+4+3} = \frac{18}{9} = 2$. Άρα x = 2·2 = 4, y = 4·2 = 8 και z = 3·2 = 6.

β)

i. Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$ όπου η βάση έχει μήκος ΔΓ = ΑΒ = 4 + 8 = 12 και το ύψος είναι το κάθετο τμήμα από την κορυφή Ε προς την πλευρά ΔΓ που έχει μήκος ίσο με 6 , οπότε (ΓΕΔ) = $\frac{12 \cdot 6}{2}$ = 6·6 = 36.

ii. Το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι : (ΑΒΓΔ) = 12 · 6 = 72. Το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ είναι 36. Οπότε $\frac{(\Gamma E \Delta)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$. Δηλαδή το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ είναι το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

21120

ΘΕΜΑ 2

Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = \sqrt{2}$. Από σημείο $Δ$ της πλευράς $ΑΒ$ ώστε $ΑΔ = 1$, φέρνουμε παράλληλη στη $ΒΓ$ η οποία τέμνει την $ΑΓ$ στο σημείο $Ε$.

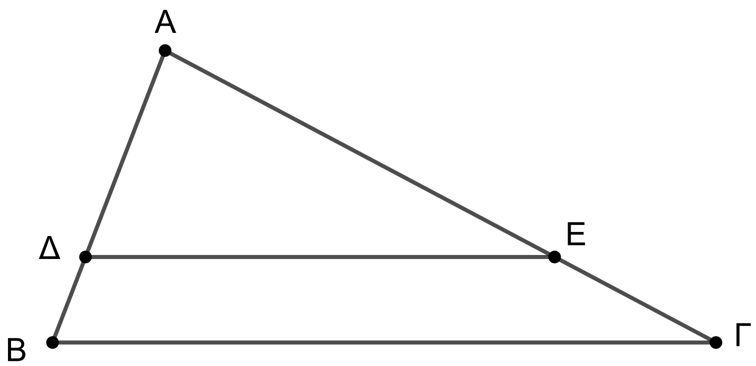
α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΑΒΓ$ είναι όμοια και να γράψετε τον λόγο ομοιότητας ,

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΔΕ$ είναι το μισό του εμβαδού του τριγώνου $ΑΒΓ$.

(Μονάδες 18)

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι 2, να βρείτε τα εμβαδά του τριγώνου $ΑΔΕ$ και του τραπεζίου $ΒΓΕΔ$. (Μονάδες 7)



21120-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Γνωρίζουμε ότι το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου. Επίσης, αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια. Επομένως τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΑΒΓ$ είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι $\lambda = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

ii) Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $ΑΔΕ$ και $ΑΒΓ$ θα είναι

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \lambda^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \text{ ή } (ΑΔΕ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ).$$

β) Δίνεται ότι $(ΑΒΓ) = 2$, οπότε από το ερώτημα α) i) είναι $(ΑΔΕ) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Επίσης το εμβαδόν του τραπεζίου $ΒΓΕΔ$ θα είναι $(ΒΓΕΔ) = (ΑΒΓ) - (ΑΔΕ) = 2 - 1 = 1$.

21304

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 1. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα, ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στη ΒΓ και ΒΔ = 2.

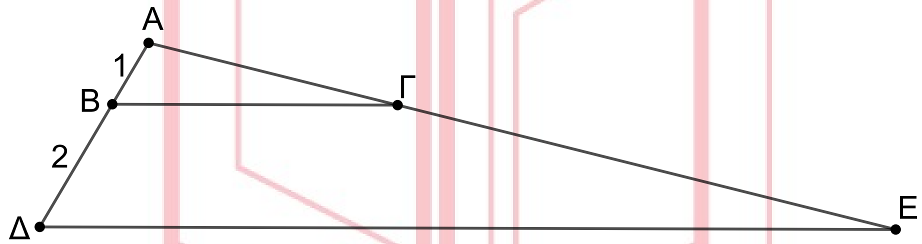
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{3}$.

(Μονάδες 10)

β) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με 8,5, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 08)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι 15, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 07)



21304-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, οι πλευρές του τριγώνου ΑΔΕ είναι ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, εφόσον το ΑΔΕ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του ΑΒΓ και την ΔΕ που είναι παράλληλη στην ΒΓ. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με $\frac{AB}{A\Delta}=\frac{A\Gamma}{AE}=\frac{B\Gamma}{\Delta E}$.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι $\frac{AB}{A\Delta}=\frac{AB}{AB+B\Delta}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$.

β) Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους, άρα οι περίμετροι των όμοιων τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν λόγο $\frac{1}{3}$.

Επομένως η περίμετρος του ΑΔΕ είναι τριπλάσια της περιμέτρου του ΑΒΓ, δηλαδή είναι ίση με $3\cdot 8,5=25,5$.

γ) Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, άρα ο λόγος των εμβαδών (ΑΒΓ) και (ΑΔΕ) των όμοιων τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ, αντίστοιχα είναι $\frac{1}{9}$. Δηλαδή:

$\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)}=\frac{1}{9}$ ή $(AB\Gamma)=\frac{(A\Delta E)}{9}$ ή $(AB\Gamma)=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$.

21975

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

ii. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

iv. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.

v. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

(Μονάδες 15)

21975-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Σωστό
ii. Λάθος
iii. Σωστό
iv. Λάθος
v. Σωστό

β) Θεώρημα ΙΙΙ σελίδα 82.

21986

ΘΕΜΑ 2

Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στην ΒΓ και ΑΔ = 1, όπως στο σχήμα.

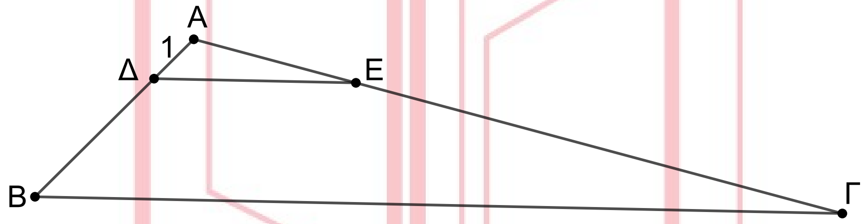
α) Να αποδείξετε ότι $AE \cdot B\Delta = \Gamma E$. (Μονάδες 10)

β) Αν επιπλέον ΒΔ = ΑΕ και ΓΕ = 9:

i. Να αποδείξετε ότι ΒΔ = 3 και ΑΒ = 4. (Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια και να υπολογίσετε το λόγο ομοιότητάς τους.

(Μονάδες 05)



21986-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή, η ευθεία ΔΕ που είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ χωρίζει τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ σε μέρη ανάλογα. Επομένως $\frac{ΑΔ}{ΒΔ}=\frac{ΑΕ}{ΓΕ}$ ή $\frac{1}{ΒΔ}=\frac{ΑΕ}{ΓΕ}$ ή $ΑΕ\cdot ΒΔ=ΓΕ$.

β) i. Από το α) ερώτημα $ΑΕ\cdot ΒΔ=9$ ή $ΒΔ\cdot ΒΔ=9$ ή $ΒΔ^2=9$ ή $ΒΔ=3$.

Επομένως $ΑΒ=ΑΔ+ΒΔ=1+3=4$.

ii. Από την εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την ΔΕ που είναι παράλληλη προς την ΒΓ έχει τις πλευρές του ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, άρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ίσος με τον λόγο $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{1}{4}$.

21987

ΘΕΜΑ 2

Οι ευθείες ΓΘ και ΖΗ τέμνουν τις παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 στα σημεία Θ, Α, Β και Η, Δ, Ε αντίστοιχα και την ευθεία ε_4 στα σημεία Γ και Ζ όπως στο παρακάτω σχήμα.

Επίσης δίνονται τα μήκη $ΘΑ = 2$, $ΑΒ = 1$, $ΒΓ = ΗΔ = 4$ και $ΕΖ = 8$.

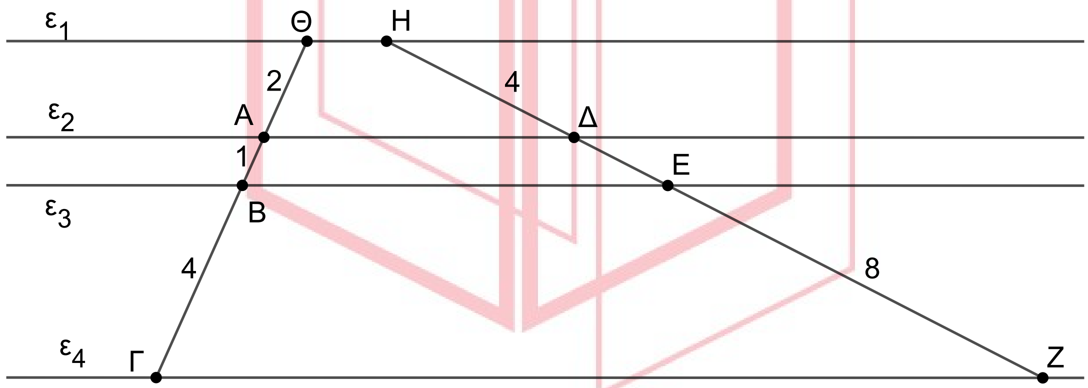
α) Να αποδείξετε ότι $ΔΕ = 2$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε_4 είναι παράλληλη στις ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3.

(Μονάδες 05)

γ) Να σχεδιάσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΘΖ το οποίο τέμνει την ευθεία ε_2 στο Κ και την ευθεία ε_3 στο Λ και να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{ΛΖ}{ΚΛ}$.

(Μονάδες 10)



21987-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον οι παράλληλες ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και $ε_3$ τέμνουν τις ευθείες ΓΘ και ΖΗ, σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα. Επομένως:

$$\frac{ΘΑ}{ΗΔ}=\frac{ΑΒ}{ΔΕ}$$

Αντικαθιστώντας τα γνωστά μήκη έχουμε:

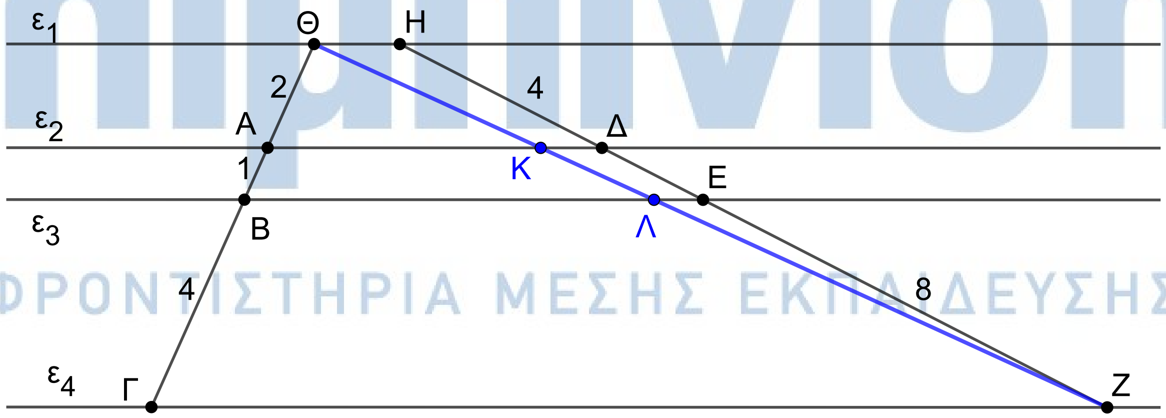
$$\frac{2}{4}=\frac{1}{ΔΕ} \text{ ή } \frac{ΔΕ}{1}=\frac{4}{2} \text{ ή } ΔΕ=2$$

β) Οι ευθείες ΘΓ και ΗΖ τέμνουν τις παράλληλες ευθείες $ε_2$ και $ε_3$ στα σημεία Α, Β και Δ, Ε αντίστοιχα και τα σημεία Γ και Ζ είναι σημεία των ευθειών ΘΓ και ΗΖ αντίστοιχα, ώστε $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{1}{4}$ και $\frac{ΔΕ}{ΕΖ}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$. Άρα $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{ΔΕ}{ΕΖ}$. Σύμφωνα με το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή η ευθεία ΓΖ ή $ε_4$ είναι παράλληλη προς τις ευθείες $ε_2$ και $ε_3$, άρα και προς την $ε_1$.

γ) Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΘΖ το οποίο τέμνει τις $ε_2$ και $ε_3$ στα Κ και Λ αντίστοιχα. Σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή, εφόσον οι ευθείες $ε_2$, $ε_3$ και $ε_4$ τέμνουν τις ευθείες ΘΓ και ΘΖ ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα. Επομένως:

$$\frac{ΑΒ}{ΚΛ}=\frac{ΒΓ}{ΛΖ}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε $\frac{1}{ΚΛ}=\frac{4}{ΛΖ}$ ή $\frac{ΛΖ}{ΚΛ}=4$.



22132

ΘΕΜΑ 2

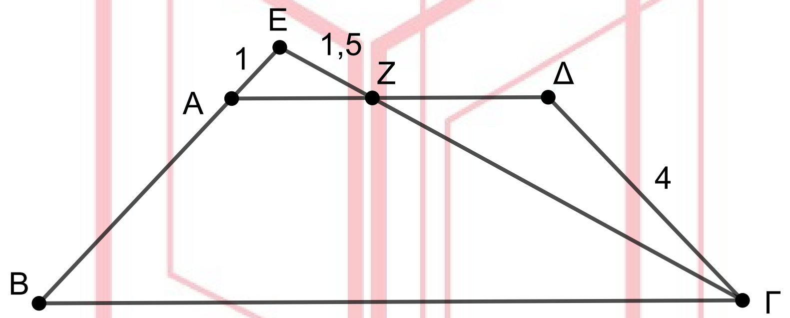
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB = \Gamma\Delta = 4$ και με βάσεις ΑΔ και ΒΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΒΑ προς το Α παίρνουμε σημείο Ε, ώστε $EA = 1$. Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΓ τέμνει την ΑΔ στο σημείο Ζ και $EZ = 1{,}5$.

α) Να αποδείξετε ότι $Z\Gamma = 1{,}5AB$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ΖΓ. (Μονάδες 05)

γ) Αν επιπλέον $B\Gamma = 10$, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΖ του τριγώνου ΕΑΖ.

(Μονάδες 10)



22132-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι βάσεις ΑΔ και ΒΓ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι παράλληλες, άρα σύμφωνα με το πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή η ΑΔ χωρίζει σε μέρη ανάλογα τις πλευρές ΕΒ και ΕΓ του τριγώνου ΕΒΓ τις οποίες τέμνει. Επομένως:

$$\frac{ΕΑ}{ΕΖ}=\frac{ΑΒ}{ΖΓ}$$

Αντικαθιστώντας τα γνωστά μήκη ΕΑ = 1 και ΕΖ = 1,5 έχουμε:

$$\frac{1}{1,5}=\frac{ΑΒ}{ΖΓ} \quad ή \quad ΖΓ=1,5\cdot ΑΒ$$

β) Έχουμε ΑΒ = 4. Επομένως, από το α) $ΖΓ=1,5\cdot 4=6$.

γ) Η ΑΖ είναι παράλληλη στην ΒΓ, γιατί το Ζ είναι σημείο της βάσης ΑΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ. Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΕΒΓ που ορίζεται από τις προεκτάσεις των πλευρών ΕΑ και ΕΖ του τριγώνου ΕΑΖ και την παράλληλη ΒΓ στην ΑΖ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΕΑΖ, άρα:

$$\frac{ΕΑ}{ΕΒ}=\frac{ΕΖ}{ΕΓ}=\frac{ΑΖ}{ΒΓ}$$

Όμως ΕΒ = ΕΑ + ΑΒ = 1 + 4 = 5 και ΒΓ = 10. Αντικαθιστώντας στη σχέση $\frac{ΕΑ}{ΕΒ}=\frac{ΑΖ}{ΒΓ}$ έχουμε:

$$\frac{1}{5}=\frac{ΑΖ}{10} \quad ή \quad 5\cdot ΑΖ=10 \quad ή \quad ΑΖ=2$$

22141

ΘΕΜΑ 4

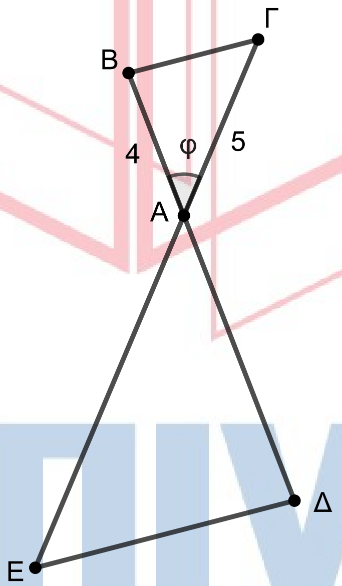
Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ έχει τα άκρα του Β και Γ στις προεκτάσεις των πλευρών ΔΑ και ΕΑ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΔΕ, έτσι ώστε να είναι παράλληλο στην πλευρά ΔΕ. Επίσης δίνονται τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, $AB = 4$ και $A\Gamma = 5$. Έστω ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι $\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με λόγο $\frac{1}{2}$. (Μονάδες 10)

β) Αν $B\hat{A}\Gamma = \varphi$, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν (ΑΔΕ) του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με $40\eta\mu\varphi$.

(Μονάδες 07)

γ) Να βρείτε σημείο Ζ εσωτερικό της πλευράς ΑΔ, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΖ που σχηματίζεται να είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 08)



22141-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος τους Θαλή το τρίγωνο ΑΒΓ που ορίζεται από τις προεκτάσεις των πλευρών ΔΑ και ΕΑ του τριγώνου ΑΔΕ και την ΒΓ, παράλληλη προς τη ΔΕ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΔΕ. Άρα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια, με:

$$\frac{ΑΒ}{ΑΔ}=\frac{ΑΓ}{ΑΕ}=\frac{ΒΓ}{ΔΕ}$$

Επειδή ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, αν ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσος με λ , τότε:

$$λ^2=\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΕ)} \quad ή \quad λ^2=\frac{1}{4} \quad ή \quad λ=\frac{1}{2}$$

β) Το εμβαδόν (ΑΒΓ) του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}\cdot ΑΒ\cdot ΑΓ\cdot ημφ$ ή

$(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot ημφ$ ή $(ΑΒΓ)=10ημφ$.

Όμως $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΕ)}=\frac{1}{4}$ ή $(ΑΔΕ)=4(ΑΒΓ)$. Δηλαδή το εμβαδόν του ΑΔΕ είναι τετραπλάσιο του εμβαδού του ΑΒΓ. Άρα $(ΑΔΕ)=4\cdot 10ημφ$ ή $(ΑΔΕ)=40ημφ$.

γ) Έχουμε ότι $(ΑΒΓ)=\frac{1}{4}\cdot(ΑΔΕ)$.

Έστω σημείο Ζ εσωτερικό της ΑΔ ώστε $(ΑΓΖ)=\frac{1}{4}\cdot(ΑΔΕ)$ ή $(ΑΓΖ)=(ΑΒΓ)$ ή $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΓΖ)}=1$.

Επίσης οι γωνίες $\hat{φ}$ και $\hat{ω}$, των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΓΖ αντίστοιχα είναι παραπληρωματικές. Επομένως ο λόγος των εμβαδών (ΑΒΓ) και (ΑΓΖ) των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΓΖ αντίστοιχα είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή:

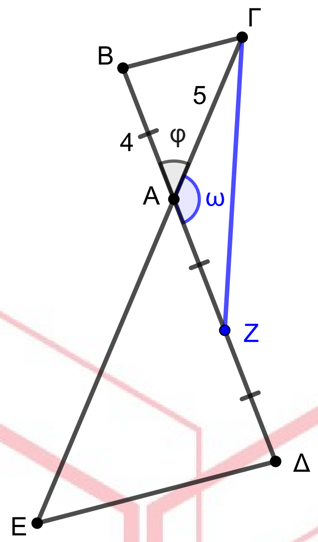
$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΓΖ)}=\frac{ΑΒ\cdot ΑΓ}{ΑΓ\cdot ΑΖ}$$

Άρα $\frac{ΑΒ\cdot ΑΓ}{ΑΓ\cdot ΑΖ}=1$ ή $\frac{ΑΒ}{ΑΖ}=1$ ή $ΑΖ=ΑΒ$ ή $ΑΖ=\frac{ΑΔ}{2}$, εφόσον οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ είναι ομόλογες σε όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ με λόγο ομοιότητας $λ=\frac{1}{2}$ (από το α)).

Επομένως το σημείο Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΑΔ του τριγώνου ΑΔΕ.

(Εναλλακτικά: τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΖ έχουν κοινό ύψος από την κορυφή Γ και εφόσον έχουν ίσα εμβαδά, θα έχουν και ίσες βάσεις ΑΖ = ΑΒ).

22141-Λύση



22148

ΘΕΜΑ 4

Έστω Ε σημείο στην πλευρά ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του ΑΒΓ η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ και παίρνουμε σημείο Ζ στην προέκταση $A\chi$ της πλευράς ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ ώστε να είναι ΑΖ = ΑΕ, όπως στο σχήμα.

α) Έστω $A\Gamma = 3AE$. Να αποδείξετε ότι:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

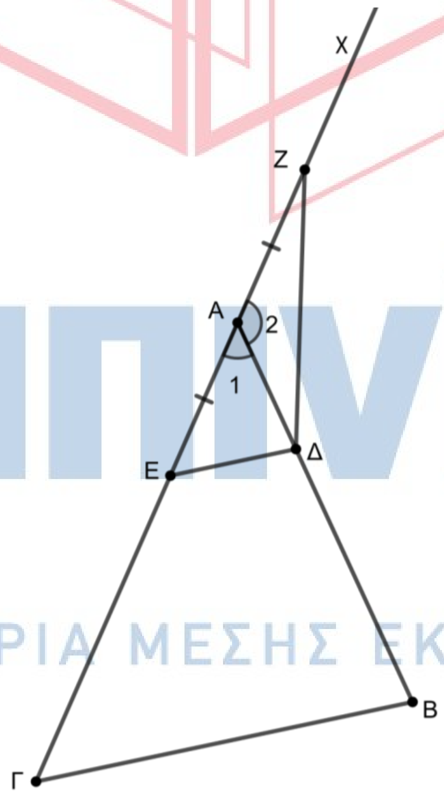
(Μονάδες 07)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του ΔΕΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του ΑΒΓ, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{AE}{A\Gamma}$.

(Μονάδες 08)



22148-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την ΔΕ, παράλληλη προς τη ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΒΓ. Άρα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, με:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ}$$

Ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι:

$$λ=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΑΕ}{3ΑΕ}=\frac{1}{3}$$

Επειδή ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, ο λόγος των εμβαδών (ΑΔΕ) και (ΑΒΓ) των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ αντίστοιχα είναι:

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

ii. Οι γωνίες $\hat{Α}_1$ και $\hat{Α}_2$, των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ αντίστοιχα είναι παραπληρωματικές. Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους (ΑΔΕ) και (ΑΔΖ) αντίστοιχα είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή:

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΖ)}=\frac{ΑΔ\cdot ΑΕ}{ΑΔ\cdot ΑΖ} \quad ή \quad \frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΖ)}=\frac{ΑΕ}{ΑΖ} \quad ή \quad \frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΖ)}=1 \text{, γιατί ΑΕ = ΑΖ}$$

Άρα τα εμβαδά των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ είναι ίσα.

(Εναλλακτικά: η ΑΔ είναι διάμεσος της πλευράς ΕΖ του τριγώνου ΔΕΖ, άρα το χωρίζει σε δύο τρίγωνα με ίσα εμβαδά, τα ΑΔΕ και ΑΔΖ).

Για το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ ισχύει ότι $(ΔΕΖ)=(ΑΔΕ)+(ΑΔΖ)=2(ΑΔΕ)$.

Επομένως:

$$\frac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{2(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=2\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=2\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{9}.$$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Έστω $λ=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$. Τότε με όμοιους συλλογισμούς με το ερώτημα α) έχουμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο λ και για τα εμβαδά τους ισχύει ότι $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=λ^2$.

Επίσης, εφόσον ΑΕ = ΑΖ τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ έχουν ίσα εμβαδά, ανεξάρτητα από την τιμή του λόγου λ και $(ΔΕΖ)=(ΑΔΕ)+(ΑΔΖ)=2(ΑΔΕ)$, όπως στο α)ii).

Άρα:

22148-Λύση

$$\frac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{2(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=2\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=2λ^2$$

Εφόσον το εμβαδόν του ΔΕΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του ΑΒΓ έχουμε ότι:

$$\frac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{1}{2} \text{ ή } 2λ^2=\frac{1}{2} \text{ ή } λ^2=\frac{1}{4} \text{ ή } λ=\frac{1}{2}$$

Άρα $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{1}{2}$.

22151

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε σημείο Δ και στην πλευρά ΑΓ σημείο Ε ώστε ΑΕ = ΑΒ. Με κέντρο το σημείο Α και ακτίνες ρ = ΑΔ , r = ΑΒ = ΑΕ και R = ΑΓ γράφουμε τρεις ομόκεντρους κύκλους (Α,ρ) , (Α,r) και (Α,R) όπως στο σχήμα. Έστω $E_{ΕΓ}$ το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, r) και (Α, R) , $E_{ΔΒ}$ το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, ρ) και (Α, r), $E_{ΑΒ}$ το εμβαδόν του κύκλου (Α, r) και $E_{ΑΔ}$ το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ).

α) Να αποδείξετε ότι:

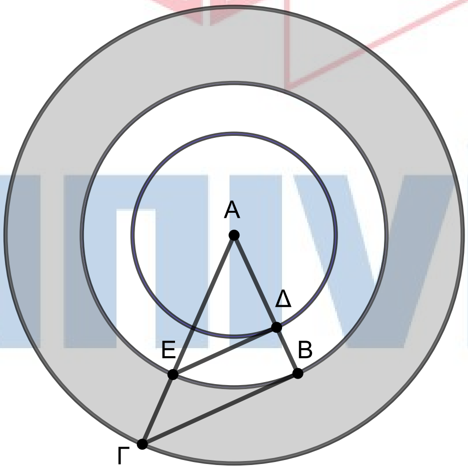
i. $\frac{E_{ΕΓ}}{E_{ΑΕ}} = \frac{R^2-r^2}{r^2}$ (Μονάδες 10)

ii. $\frac{E_{ΔΒ}}{E_{ΑΔ}} = \frac{r^2-\rho^2}{\rho^2}$ (Μονάδες 07)

β) Αν επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{E_{ΕΓ}}{E_{ΑΕ}} = \frac{E_{ΔΒ}}{E_{ΑΔ}}$$

(Μονάδες 08)



22151-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Το εμβαδόν E_{AE} του κύκλου (A, r) είναι ίσο με $E_{AE} = \pi \cdot r^2$ και το εμβαδόν $E_{E\Gamma}$ του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, r) και (A, R) είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των δύο κύκλων, δηλαδή $E_{E\Gamma} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$ ή $E_{E\Gamma} = \pi(R^2 - r^2)$.

Άρα $\dfrac{E_{E\Gamma}}{E_{AE}} = \dfrac{\pi(R^2 - r^2)}{\pi \cdot r^2}$ ή $\dfrac{E_{E\Gamma}}{E_{AE}} = \dfrac{R^2 - r^2}{r^2}$.

ii. Με όμοιους συλλογισμούς προκύπτει ότι $E_{A\Delta} = \pi \cdot \rho^2$ και $E_{\Delta B} = \pi(r^2 - \rho^2)$.

Άρα $\dfrac{E_{\Delta B}}{E_{A\Delta}} = \dfrac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}$.

β) Από τα α)i) και α)ii), για να αποδείξουμε τη ζητούμενη ισότητα $\dfrac{E_{E\Gamma}}{E_{AE}} = \dfrac{E_{\Delta B}}{E_{A\Delta}}$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{R^2 - r^2}{r^2} = \dfrac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}$ ή $\dfrac{R^2}{r^2} - 1 = \dfrac{r^2}{\rho^2} - 1$ ή $\dfrac{R^2}{r^2} = \dfrac{r^2}{\rho^2}$ ή $\dfrac{R}{r} = \dfrac{r}{\rho}$.

Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, γιατί:

Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την παράλληλη ΔΕ στην πλευρά του ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΒΓ. Άρα $\dfrac{A\Delta}{AB} = \dfrac{AE}{A\Gamma}$ ή $\dfrac{\rho}{r} = \dfrac{r}{R}$ ή $\dfrac{R}{r} = \dfrac{r}{\rho}$.

22154

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ, που η κοινή κορυφή τους Α βρίσκεται στο κέντρο τριών ομόκεντρων κύκλων (Α, ρ_1), (Α, ρ_2) και (Α, ρ_3), η κορυφή Γ βρίσκεται στον κύκλο (Α, ρ_3), οι κορυφές Β και Ε στον κύκλο (Α, ρ_2) και η κορυφή Δ στον κύκλο (Α, ρ_1), όπως στο σχήμα, με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Ονομάζουμε $E_{ΕΓ}$ το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, ρ_2) και (Α, ρ_3), E_1 το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ_1), E_2 το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ_2) και E_3 το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ_3).

α) Αν $\frac{E_{ΕΓ}}{E_2} = \frac{7}{9}$, να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{3}{4}$. (Μονάδες 07)

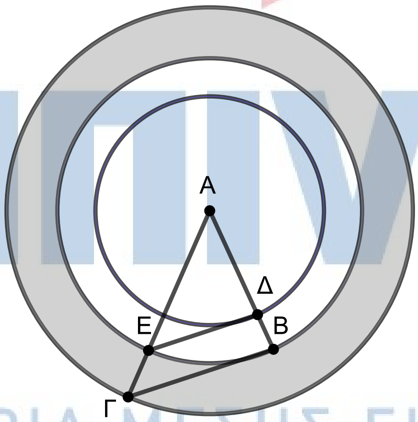
ii. $\frac{E_2}{E_3} = \frac{9}{16}$. (Μονάδες 05)

iii. Αν επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες να αποδείξετε ότι $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 08)

β) Αν $E_{ΕΓ} = E_2$ και επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι $E_{ΔΒ} = E_1$, όπου $E_{ΔΒ}$ είναι το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, ρ_1) και (Α, ρ_2).

(Μονάδες 05)



22154-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Για το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου ισχύει ότι $E_{ΕΓ} = E_3 - E_2$.

Επίσης $\frac{E_{ΕΓ}}{E_2} = \frac{E_3 - E_2}{E_2}$ ή $\frac{7}{9} = \frac{πρ_3^2 - πρ_2^2}{πρ_2^2}$ ή $\frac{7}{9} = \frac{π(ρ_3^2 - ρ_2^2)}{πρ_2^2}$ ή $\frac{7}{9} = \frac{ρ_3^2 - ρ_2^2}{ρ_2^2}$ ή

$7ρ_2^2 = 9ρ_3^2 - 9ρ_2^2$ ή $16ρ_2^2 = 9ρ_3^2$ ή $\frac{ρ_2^2}{ρ_3^2} = \frac{9}{16}$ ή $\left(\frac{ρ_2}{ρ_3}\right)^2 = \frac{9}{16}$ ή $\frac{ρ_2}{ρ_3} = \frac{3}{4}$.

ii. Τα εμβαδά των κύκλων (Α, $ρ_2$) και (Α, $ρ_3$) είναι $E_2 = πρ_2^2$ και $E_3 = πρ_3^2$, αντίστοιχα.

Άρα $\frac{E_2}{E_3} = \frac{πρ_2^2}{πρ_3^2} = \frac{ρ_2^2}{ρ_3^2} = \left(\frac{ρ_2}{ρ_3}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

iii. Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την παράλληλη ΔΕ στην πλευρά του ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΒΓ. Άρα:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ} \text{ ή } \frac{ρ_1}{ρ_2} = \frac{ρ_2}{ρ_3} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$$

Άρα, από την απάντηση στο α) i έχουμε $\frac{ρ_1}{ρ_2} = \frac{3}{4}$.

β) Έχουμε $E_{ΕΓ} = E_3 - E_2$ ή $E_2 = E_3 - E_2$ ή $2E_2 = E_3$ ή $2πρ_2^2 = πρ_3^2$ ή $2ρ_2^2 = ρ_3^2$ ή $ρ_3 = ρ_2\sqrt{2}$.

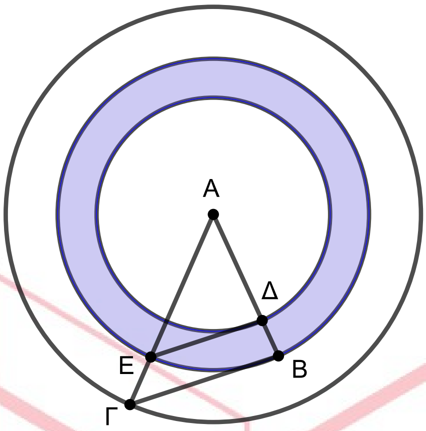
Όπως στο α) iii, από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΑΔΕ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ. Άρα $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$ ή $\frac{ρ_1}{ρ_2} = \frac{ρ_2}{ρ_3} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$.

Επομένως $\frac{ρ_1}{ρ_2} = \frac{ρ_2}{ρ_2\sqrt{2}}$ ή $\frac{ρ_1}{ρ_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ή $ρ_2 = ρ_1\sqrt{2}$ ή $ρ_2^2 = ρ_1^2\left(\sqrt{2}\right)^2$ ή $ρ_2^2 = 2ρ_1^2$ ή $πρ_2^2 = 2πρ_1^2$

ή $E_2 = 2E_1$.

Επίσης, για το εμβαδόν $E_{ΔΒ}$ του δακτυλίου που είναι χρωματισμένος στο παρακάτω σχήμα έχουμε $E_{ΔΒ} = E_2 - E_1$ ή $E_{ΔΒ} = 2E_1 - E_1$ ή $E_{ΔΒ} = E_1$.

22154-Λύση



22248

ΘΕΜΑ 2

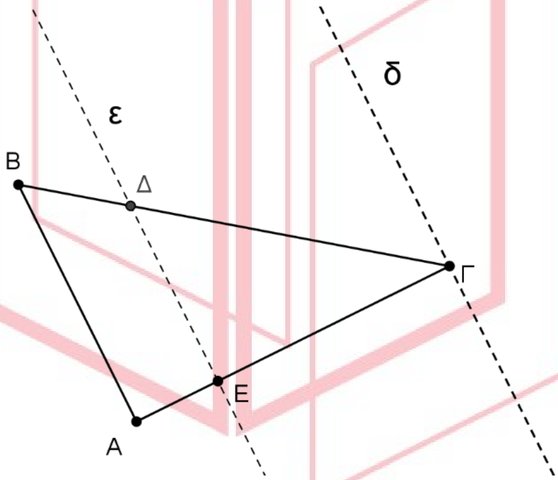
Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 9, ΓΑ = 12 και ΓΒ = 15 και ευθείες ε, δ παράλληλες στην ΑΒ, όπως αυτές του σχήματος.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να βρείτε ποια πλευρά είναι η υποτείνουσά του. (Μονάδες 8)

β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει τις πλευρές ΓΑ, ΓΒ σε σημεία Ε και Δ αντίστοιχα έτσι ώστε ΕΑ = 4 και η ευθεία (δ) διέρχεται από το σημείο Γ, τότε να υπολογίσετε

i. το τμήμα ΔΒ, (Μονάδες 8)

ii. τις πλευρές του τριγώνου ΔΕΓ. (Μονάδες 9)



22248-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ η μεγαλύτερη πλευρά του είναι η ΓΒ =15. Θα εξετάσουμε αν το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του ΑΒ και ΑΓ είναι ίσο με το τετράγωνο της πλευράς ΓΒ.

$$ΓΒ^2 = 15^2 = 225$$

$$ΑΒ^2 + ΓΑ^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

Άρα $ΑΒ^2 + ΓΑ^2 = ΓΒ^2$, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο $\widehat{Α}=90^o$ και υποτείνουσα την πλευρά ΓΒ = 15.

β)

i. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες ε, δ και ΑΒ που τέμνουν τις ΓΑ και ΓΒ θα ισχύει η αναλογία $\frac{ΓΔ}{ΓΕ} = \frac{ΔΒ}{ΕΑ} = \frac{ΓΒ}{ΓΑ}$ ή $\frac{ΓΔ}{ΓΕ} = \frac{ΔΒ}{4} = \frac{15}{12}$, αφού ΓΑ = 12 και ΓΒ = 15 και ΕΑ = 4 από τα δεδομένα. Οπότε από την ισότητα $\frac{ΔΒ}{4} = \frac{15}{12}$ έχουμε ότι $12 \cdot ΔΒ = 4 \cdot 15$ ή ΔΒ = 5.

ii. Είναι ΓΔ = ΓΒ – ΔΒ = 15 – 5 = 10 και ΓΕ = ΓΑ – ΕΑ = 12 – 4 = 8.

Το τρίγωνο ΔΕΓ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΓΑ και ΓΒ του τριγώνου ΑΒΓ και την ευθεία ε που είναι παράλληλη στην πλευρά του ΑΒ, οπότε θα έχει πλευρές ανάλογες στις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή θα ισχύει $\frac{ΓΔ}{ΓΒ} = \frac{ΓΕ}{ΓΑ} = \frac{ΕΔ}{ΑΒ}$ (1) όπου ΑΒ = 9, ΓΑ = 12, ΓΔ = 10 και ΓΕ = 8.

Οπότε η σχέση (1) γίνεται $\frac{10}{15} = \frac{8}{12} = \frac{ΕΔ}{9}$ και από την ισότητα $\frac{10}{15} = \frac{ΕΔ}{9}$ προκύπτει ότι ΕΔ = 6.

22375

ΘΕΜΑ 4

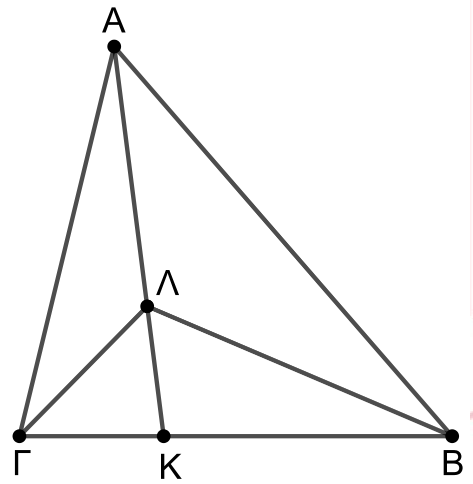
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Κ ώστε $\text{KB} = 2\text{KΓ}$ και στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΚ παίρνουμε σημείο Λ ώστε $\text{ΛΑ} = 2\text{ΛΚ}$. Έστω E_1 , E_2 , E_3 και E_4 τα εμβαδά των τριγώνων ΑΛΓ , ΓΛΚ , ΒΛΚ και ΑΛΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{\text{E}_1}{\text{E}_2} = 2$ και $\frac{\text{E}_4}{\text{E}_3} = 2$. (Μονάδες 10)

ii. $\text{E}_1 = \text{E}_3$. (Μονάδες 8)

β) Αν $\text{E}_1 = 10$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)



22375-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Δίνεται $ΛΑ = 2ΛΚ$.

Στα τρίγωνα $ΑΛΓ$ και $ΓΛΚ$, οι γωνίες $Α\widehat{Λ}Γ$ και $Γ\widehat{Λ}Κ$ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{ΛΓ \cdot ΛΑ}{ΛΓ \cdot ΛΚ} = \frac{ΛΑ}{ΛΚ} = \frac{2ΛΚ}{ΛΚ} = 2 \quad ή \quad \frac{E_1}{E_2} = 2 \quad (1).$$

Στα τρίγωνα $ΑΛΒ$ και $ΒΛΚ$, οι γωνίες $Α\widehat{Λ}Β$ και $Β\widehat{Λ}Κ$ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως

$$\frac{E_4}{E_3} = \frac{ΛΒ \cdot ΛΑ}{ΛΒ \cdot ΛΚ} = \frac{ΛΑ}{ΛΚ} = \frac{2ΛΚ}{ΛΚ} = 2 \quad ή \quad \frac{E_4}{E_3} = 2 \quad (2).$$

ii) Δίνεται $ΚΒ = 2ΚΓ$.

Στα τρίγωνα $ΒΛΚ$ και $ΓΛΚ$ οι γωνίες $Λ\widehat{Κ}Β$ και $Λ\widehat{Κ}Γ$ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως

$$\frac{E_3}{E_2} = \frac{ΚΛ \cdot ΚΒ}{ΚΛ \cdot ΚΓ} = \frac{ΚΒ}{ΚΓ} = \frac{2ΚΓ}{ΚΓ} = 2 \quad ή \quad \frac{E_3}{E_2} = 2 \quad (3).$$

Από τις (1) και (3) έχουμε

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_3}{E_2}, \text{ οπότε } \ E_1 = E_3 \quad (4).$$

β) Δίνεται $E_1 = 10$.

Από την (1) έχουμε

$$\frac{E_1}{E_2} = 2 \ \ ή \ \ \frac{10}{E_2} = 2 \ \ ή \ \ E_2 = 5 .$$

Από την (4) έχουμε

$$E_3 = E_1 \ \ ή \ \ E_3 = 10 .$$

Από την (2) έχουμε

$$\frac{E_4}{E_3} = 2 \quad ή \quad \frac{E_4}{10} = 2 \quad ή \quad E_4 = 20 .$$

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$(ΑΒΓ) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \ \ ή \ \ (ΑΒΓ) = 10 + 5 + 10 + 20 = 45.$$

22404

ΘΕΜΑ 4

Το σημείο Μ διαιρεί εσωτερικά την πλευρά ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ σε λόγο $\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΓ}}$ και το σημείο Ν διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ σε λόγο $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΝΜ}}$.

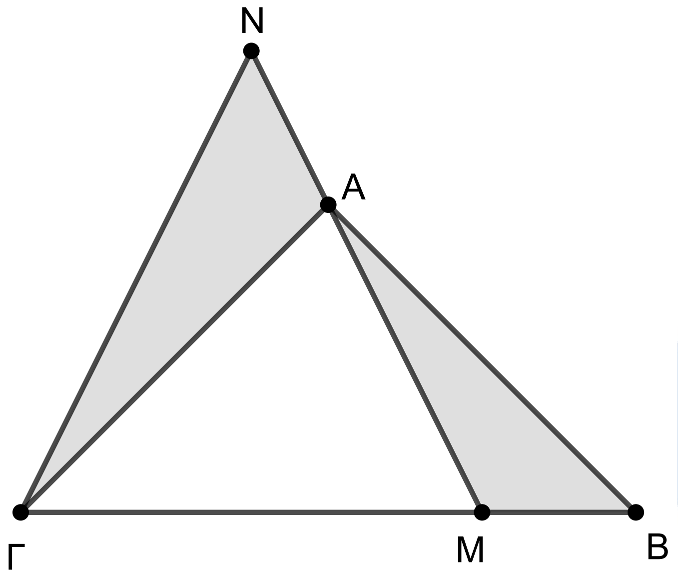
α) Έστω $\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΓ}} = \frac{1}{3}$ και $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΝΜ}} = \frac{1}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{(\text{ΑΜΒ})}{(\text{ΑΜΓ})} = \frac{1}{3}$. (Μονάδες 7)

ii. $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΑΜ}} = \frac{1}{3}$. (Μονάδες 6)

iii. $(\text{ΑΜΒ}) = (\text{ΑΝΓ})$. (Μονάδες 6)

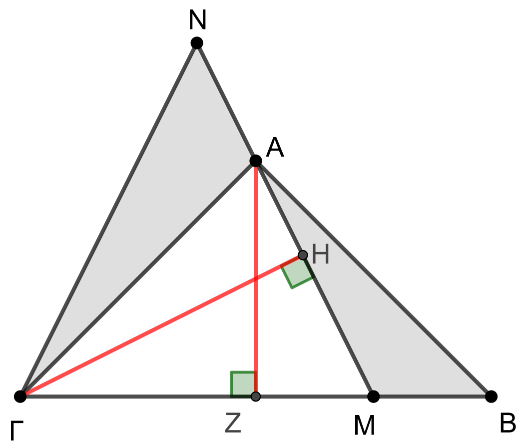
β) Έστω $\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΓ}} = 1$ και $(\text{ΑΜΒ}) = (\text{ΑΝΓ})$. Να βρείτε τον λόγο $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΝΜ}}$ στον οποίο το σημείο Ν διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ. (Μονάδες 6)



22404-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



i. Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Α, το ΑΖ, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

Άρα $\frac{(\mathrm{AMB})}{(\mathrm{AM\Gamma})} = \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{M\Gamma}} = \frac{1}{3}$.

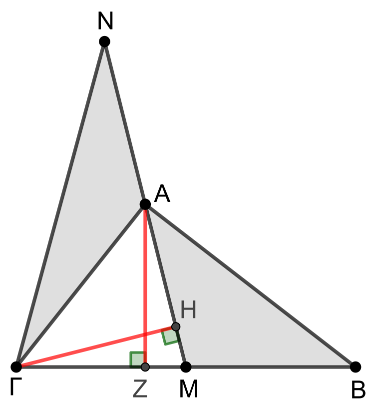
ii. Είναι $\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NM}} = \frac{1}{4}$, άρα $\mathrm{NM} = 4\mathrm{NA}$ ή $\mathrm{NA} + \mathrm{AM} = 4\mathrm{NA}$ ή $\mathrm{AM} = 3\mathrm{NA}$ ή $\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{AM}} = \frac{1}{3}$.

Εναλλακτικά: $\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NM}} = \frac{1}{4}$ ή $\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NM}-\mathrm{NA}} = \frac{1}{4-1}$ ή $\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{AM}} = \frac{1}{3}$.

iii. Τα τρίγωνα ΑΝΓ και ΑΜΓ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Γ, το ΓΗ, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων. Άρα $\frac{(\mathrm{AN\Gamma})}{(\mathrm{AM\Gamma})} = \frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{AM}} = \frac{1}{3}$.

Επίσης από το α) i) είναι $\frac{(\mathrm{AMB})}{(\mathrm{AM\Gamma})} = \frac{1}{3}$, οπότε $\frac{(\mathrm{AMB})}{(\mathrm{AM\Gamma})} = \frac{(\mathrm{AN\Gamma})}{(\mathrm{AM\Gamma})}$ ή $(\mathrm{AMB}) = (\mathrm{AN\Gamma})$.

β) Είναι $\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{M\Gamma}} = 1$, άρα το Μ είναι το μέσο της ΒΓ, οπότε $(\mathrm{AMB}) = (\mathrm{AM\Gamma})$, αφού έχουν ίσες βάσεις $\mathrm{MB} = \mathrm{M\Gamma}$ και το ίδιο ύψος ΑΖ. Όμως δίνεται $(\mathrm{AMB}) = (\mathrm{AN\Gamma})$, άρα $(\mathrm{AM\Gamma}) = (\mathrm{AN\Gamma})$ και αφού έχουν το ίδιο ύψος ΓΗ, θα έχουν ίσες τις αντίστοιχες βάσεις $\mathrm{NA} = \mathrm{AM}$. Επομένως το Α είναι το μέσο του ΝΜ άρα $\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NM}} = \frac{1}{2}$.



22407

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος του τριγώνου $ΑΒΓ$ και η $ΑΚ$ είναι η προβολή της πλευράς $ΑΓ$ πάνω στην ευθεία $ΑΒ$. Δίνονται $ΑΒ = 10, ΑΓ = 15$ και $ΑΚ = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι:

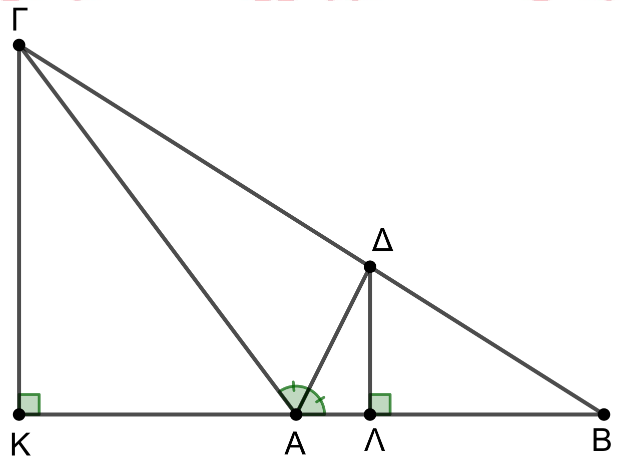
i. $ΓΚ = 12$ και $(ΑΒΓ) = 60$. (Μονάδες 8)

ii. $(ΑΔΒ) = 24$ και $(ΑΔΓ) = 36$. (Μονάδες 10)

β) Έστω $Λ$ η προβολή του σημείου $Δ$ πάνω στην ευθεία $ΑΒ$.

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{ΔΛ}{ΓΚ} = \frac{2}{5}$. (Μονάδες 3)

ii. Να βρείτε τον λόγο $\frac{ΛΒ}{ΛΚ}$ στον οποίο το σημείο $Λ$ διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα $ΒΚ$. (Μονάδες 4)



22407-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ ($\widehat{K} = 90°$), είναι $ΑΓ = 15$ και $ΑΚ = 9$,

οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$ΓΚ^2 = ΑΓ^2 - ΑΚ^2$ ή $ΓΚ^2 = 15^2 - 9^2$ ή $ΓΚ^2 = 144$ ή $ΓΚ^2 = 12^2$ ή $ΓΚ = 12$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΓΚ \text{ ή } (ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \text{ ή } (ΑΒΓ) = 60.$$

ii. Στα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ, οι γωνίες $Δ\widehat{Α}Β$ και $Δ\widehat{Α}Γ$ είναι ίσες, αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Α}$ του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα

$$\frac{(ΑΔΒ)}{(ΑΔΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΒ}{ΑΔ \cdot ΑΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \text{ άρα } (ΑΔΒ) = \frac{2}{3}(ΑΔΓ).$$

Στο ερώτημα α) i) βρήκαμε ότι $(ΑΒΓ) = 60$ και επειδή $(ΑΔΒ) + (ΑΔΓ) = (ΑΒΓ)$,

έχουμε $\frac{2}{3}(ΑΔΓ) + (ΑΔΓ) = 60$ ή $5(ΑΔΓ) = 180$ ή $(ΑΔΓ) = 36$.

Επίσης θα είναι $(ΑΔΒ) = \frac{2}{3}(ΑΔΓ)$ $\quad (ΑΔΒ) = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24$.

β)

i. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΒΓ έχουν κοινή βάση την ΑΒ και αντίστοιχα ύψη ΔΛ και ΓΚ, άρα ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών.

Στο (α) ερώτημα βρήκαμε $(ΑΒΓ) = 60$ και $(ΑΔΒ) = 24$, επομένως έχουμε

$$\frac{(ΑΔΒ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΔΛ}{ΓΚ} \text{ ή } \frac{24}{60} = \frac{ΔΛ}{ΓΚ} \text{ ή } \frac{ΔΛ}{ΓΚ} = \frac{2}{5}.$$

ii. Οι ευθείες ΔΛ και ΓΚ είναι παράλληλες, ως κάθετες στην ευθεία ΑΒ. Επομένως τα τρίγωνα ΔΛΒ και ΓΚΒ έχουν πλευρές ανάλογες, άρα έχουμε

$$\frac{ΛΒ}{ΚΒ} = \frac{ΔΛ}{ΓΚ} \text{ ή } \frac{ΛΒ}{ΚΒ} = \frac{2}{5} \text{ ή } \frac{ΛΒ}{ΚΒ - ΛΒ} = \frac{2}{5-2} \text{ ή } \frac{ΛΒ}{ΛΚ} = \frac{2}{3}.$$

22565

ΘΕΜΑ 4

Οι μαθητές θέλοντας να μετρήσουν την απόσταση των σημείων Α και Β στην αυλή του σχολείου τους μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται ένα κτίσμα και η απευθείας μέτρηση του μήκους ΑΒ είναι αδύνατη, εργάστηκαν ως εξής. Στην αυλή τους επέλεξαν σημείο Ο ώστε η μέτρηση των τμημάτων ΟΑ και ΟΒ να είναι εφικτή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μέτρησαν και βρήκαν ΟΑ=20m και ΟΒ=30m. Στις ΟΑ και ΟΒ πήραν σημεία Γ και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΟΓ=2m και ΟΔ=3m.

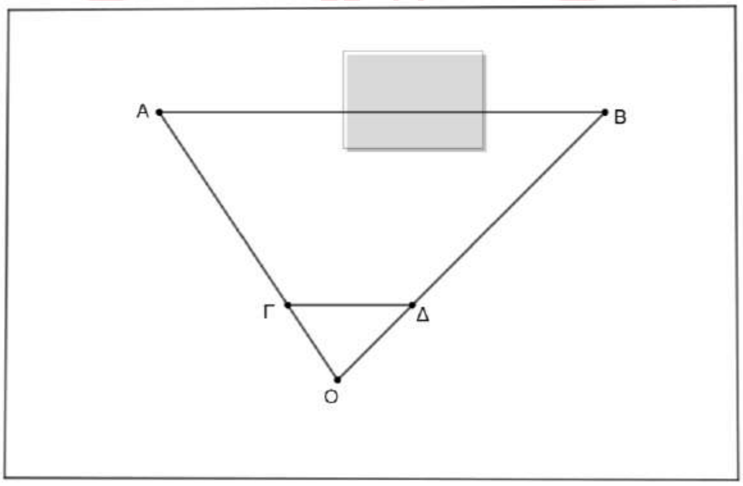
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η ΓΔ είναι παράλληλη με την ΑΒ, (Μονάδες 8)

ii. τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ είναι όμοια. (Μονάδες 7)

β) Ένας από τους μαθητές υποστηρίζει ότι μπορούν να υπολογίσουν την απόσταση των σημείων Α και Β αν γνωρίζουν την απόσταση των δύο σημείων Γ και Δ.

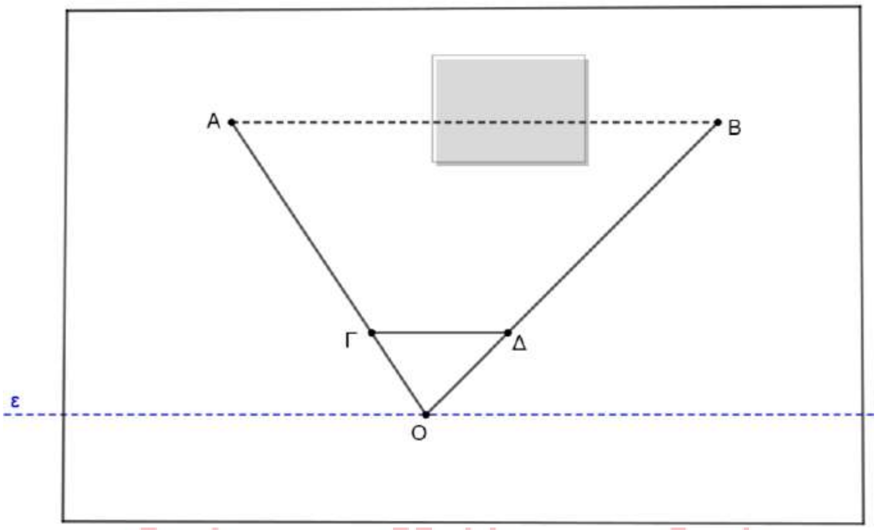
Είναι ο ισχυρισμός του μαθητή αληθής; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)



22565-Λύση

ΛΥΣΗ

Έστω ότι το τμήμα ΑΒ εκφράζει την απόσταση των σημείων Α, Β και ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο Ο και είναι παράλληλη με την ΓΔ.



α) Είναι $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$ και $\frac{ΟΔ}{ΟΒ}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$, άρα $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}=\frac{1}{10}$ (1).

i. Οι παράλληλες ευθείες ε και ΓΔ τέμνονται από τις ΟΓ και ΟΔ στα σημεία Ο,Γ και Ο,Δ αντίστοιχα. Για τα σημεία Α και Β των ευθειών ΟΓ και ΟΔ αντίστοιχα ισχύει $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}$ από σχέση (1). Επομένως σύμφωνα με το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή προκύπτει ότι οι ευθείες ΓΔ και ΑΒ είναι παράλληλες.

ii. Από σχέση (1) έχουμε ότι $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}$, δηλαδή τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες (κοινή η γωνία $\widehat{O}$), άρα είναι όμοια.

β) Εφόσον τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, άρα $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}=\frac{ΓΔ}{ΑΒ}$ με $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}=\frac{1}{10}$ από τη σχέση (1), άρα $\frac{ΓΔ}{ΑΒ}=\frac{1}{10}$ ή ΑΒ = 10·ΓΔ. Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής.