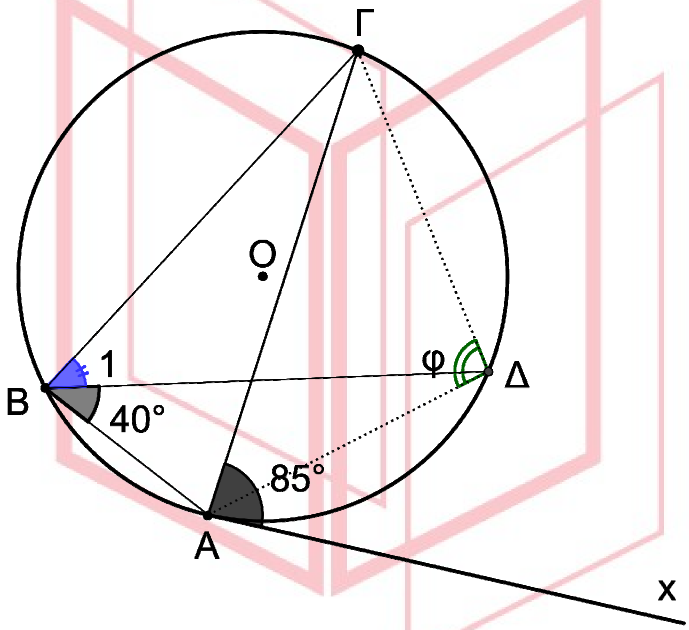
1530

ΘΕΜΑ 2

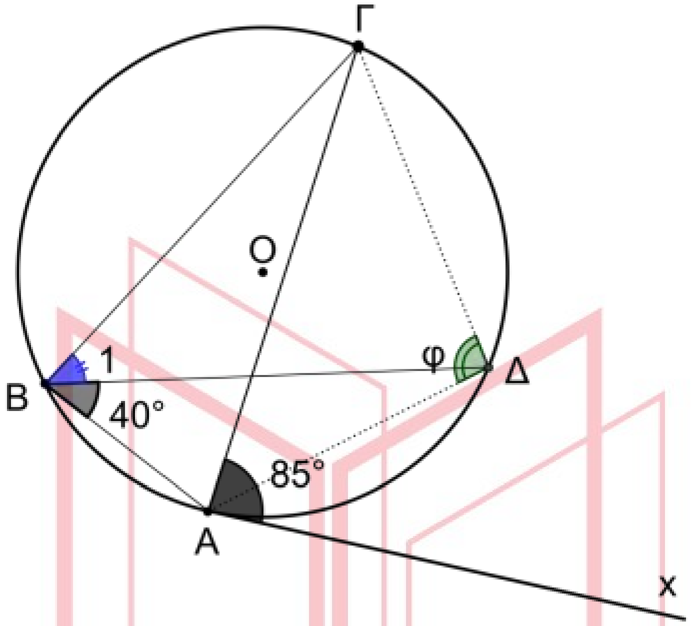
Στο σχήμα που ακολουθεί, η Αx είναι εφαπτομένη του κύκλου (Ο, ρ) σε σημείο του Α και επιπλέον ισχύουν $\Gamma\hat{A}x = 85^\circ$ και $\Delta\hat{B}\mathrm{A} = 40^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 = 45^\circ$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\phi}$. (Μονάδες 15)



1530-Λύση



α) Η $\Delta\widehat{\mathrm{A}}x$ είναι γωνία που σχηματίζεται από τη χορδή ΑΔ και την εφαπτομένη στο άκρο της Α οπότε θα ισούται με την εγγεγραμμένη $\Delta\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$ που βαίνει στο τόξο ΑΔ. Δηλαδή, είναι $\Delta\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \Delta\widehat{\mathrm{A}}x = 40^o$, οπότε, $\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta = 85^o - 40^o = 45^o$.

Οι γωνίες $\widehat{\mathrm{B}}_1$ και $\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta$ είναι ίσες ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΓΔ. Άρα $\widehat{\mathrm{B}}_1 = \Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta = 45^o$.

β) Είναι $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = 40^o + 45^o = 85^o$ και $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma + \mathrm{A}\widehat{\Delta}\Gamma = 180^o$ ως απέναντι γωνίες του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ στον παραπάνω κύκλο. Οπότε $85^o + \widehat{\varphi} = 180^o$, άρα $\widehat{\varphi} = 95^o$.

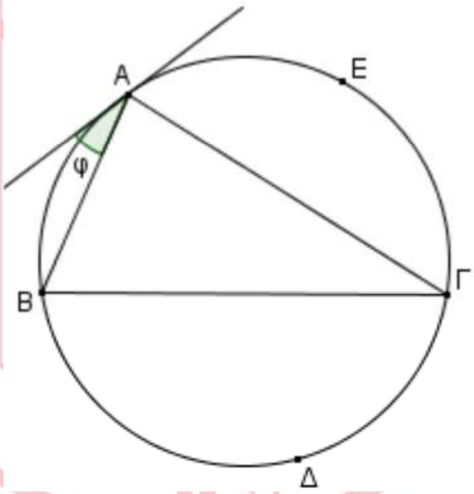
1561

ΘΕΜΑ 2

Στο ακόλουθο σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει γωνία φ=30^{o} με την πλευρά ΑΒ. Αν το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{B}\Delta\Gamma}$ είναι 160^{o},

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 18)

β) να βρείτε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{A}\mathrm{E}\Gamma}$. (Μονάδες 7)



1561-Λύση

α) Η γωνία $\widehat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένη γωνία στο τόξο $\overset{\frown}{ΒΔΓ}=160^0$,

άρα $\widehat{A} = \frac{160^o}{2} = 80^o$.

Η $\widehat{\varphi}$ είναι γωνία που σχηματίζεται από τη χορδή ΑΒ και την εφαπτομένη στο άκρο Α της χορδής ΑΒ οπότε θα είναι ίση με την εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{\Gamma}$ που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{ΑΒ}$ της χορδής, δηλαδή $\widehat{\Gamma} = \widehat{\varphi} = 30^o$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o$, οπότε η γωνία $\widehat{B}$ είναι $\widehat{B} = 180^o - 80^o - 30^o$ ή $\widehat{B} = 70^o$.

β) Η γωνία $\widehat{B}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{ΑΕΓ}$ οπότε το μέτρο της θα ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της, δηλαδή θα είναι

$\widehat{B} = \frac{\overset{\frown}{ΑΕΓ}}{2}$ ή $70^o = \frac{\overset{\frown}{ΑΕΓ}}{2}$, άρα $\overset{\frown}{ΑΕΓ} = 140^o$.

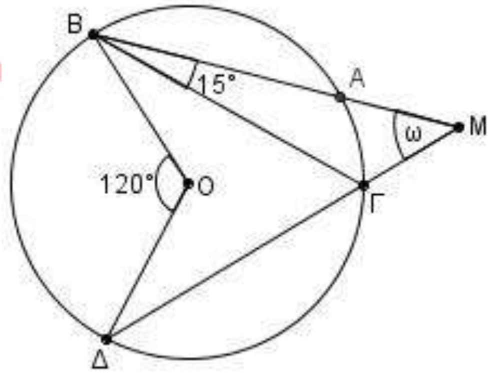
1580

ΘΕΜΑ 2

Στο ακόλουθο σχήμα η επίκεντρη γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Delta$ είναι 120° και η γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$ είναι 15°.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία ΒΓΔ. (Μονάδες 12)

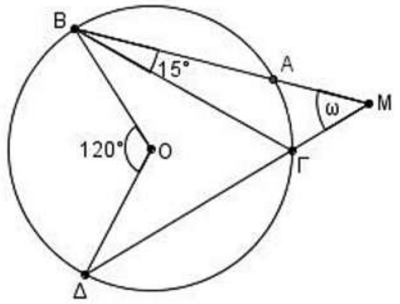
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ω είναι 45°. (Μονάδες 13)



1580-Λύση

α) Η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{\Gamma}\Delta$ και η επίκεντρη $B\hat{O}\Delta$ βαίνουν στο ίδιο τόξο, άρα

$B\hat{\Gamma}\Delta = \frac{B\hat{O}\Delta}{2} = 60^o$.



β) Η γωνία $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΓΜ, οπότε:

$B\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{B}M + \hat{M} = 60^o$, οπότε $60^o = 15^o + \hat{\omega}$. Άρα $\hat{\omega} = 45^o$

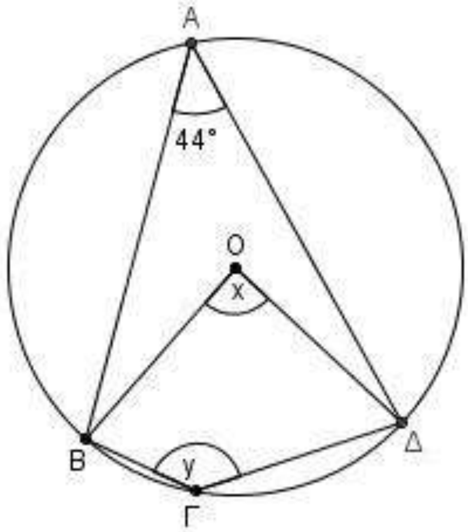
1581

ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου Ο δίνονται οι χορδές ΑΒ και ΑΔ τέτοιες ώστε η γωνία $B\hat{A}\Delta$ να είναι 44°. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου και σχηματίζουμε το τετράπλευρο ΒΓΔΟ.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία x. (12 Μονάδες)

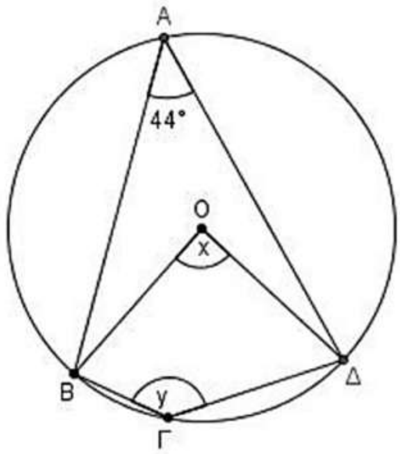
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία y είναι 136°. (13 Μονάδες)



1581-Λύση

α) Η επίκεντρη γωνία $\hat{x}$ και η εγγεγραμμένη $B\hat{A}\Delta$ βαίνουν στο ίδιο τόξο, άρα

$B\hat{A}\Delta = \frac{B\hat{O}\Delta}{2}$, οπότε θα είναι $\hat{x} = 2 \cdot 44 = 88^o$.



β) Επειδή $\hat{x}$ = 88^o και το τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta}$ έχει μέτρο 88^o. Τότε για το τόξο $\overset{\frown}{BA\Delta}$ έχουμε:

$\overset{\frown}{BA\Delta} = 360^\circ - 88^\circ = 272^\circ$. Η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{y}$ βαίνει στο τόξο ΒΑΔ, άρα

$\hat{y} = \frac{272^o}{2} = 136^o$.

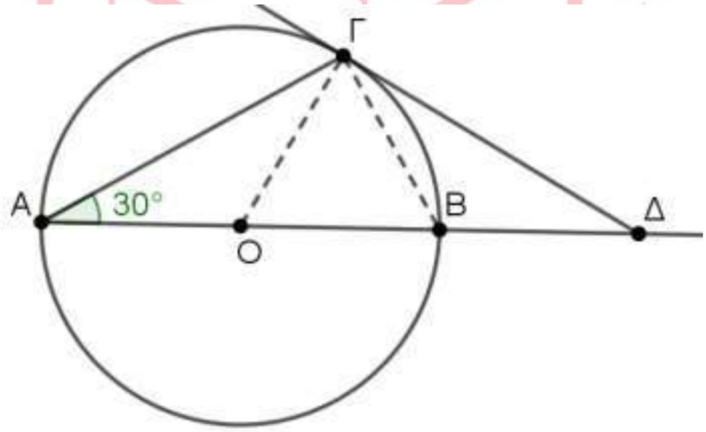
1626

ΘΕΜΑ 2

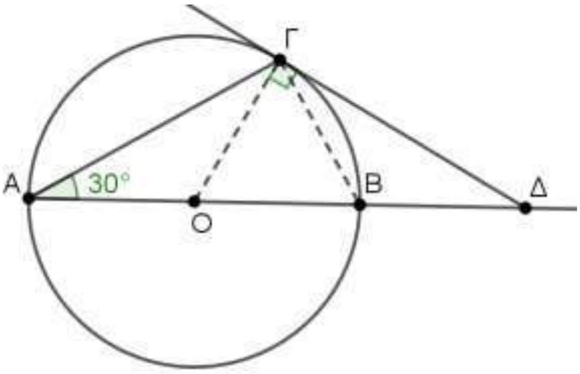
Δίνεται κύκλος (Ο, R) διαμέτρου ΑΒ, και χορδή ΑΓ τέτοια ώστε $B\hat{A}\Gamma = 30^o$. Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου ΑΒ (προς το Β) στο σημείο Δ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΟΓΔ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)



1626-Λύση



α) Η εφαπτομένη ΓΔ είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΓ, άρα $O\hat{\Gamma}\Delta = 90^o$. Η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{A}\Gamma$ και η επίκεντρη $B\hat{O}\Gamma$ βαίνουν στο ίδιο τόξο ΒΓ, άρα:

$$B\hat{A}\Gamma = \frac{B\hat{O}\Gamma}{2} \Leftrightarrow 30^o = \frac{B\hat{O}\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma = 60^o$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΟΓΔ έχουμε:

$$O\hat{\Gamma}\Delta + \Gamma\hat{O}\Delta + O\hat{\Delta}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow 90^o + 60^o + O\hat{\Delta}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow O\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$$

β) Η γωνία $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι γωνία μεταξύ χορδής ΒΓ και εφαπτομένης ΓΔ του κύκλου, άρα είναι ίση με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής ΒΓ του κύκλου, δηλαδή με την $\hat{A} = 30^o$. Άρα $B\hat{\Gamma}\Delta = 30^o$.

Επίσης, από το α) $O\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$, δηλαδή $B\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$. Άρα το τρίγωνο ΒΓΔ έχει δύο ίσες γωνίες, επομένως είναι ισοσκελές.

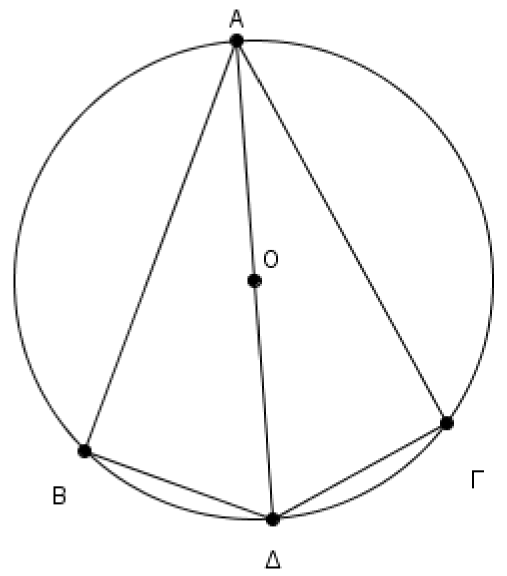
1663

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Αν η διάμετρος ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ, να αποδείξετε ότι:

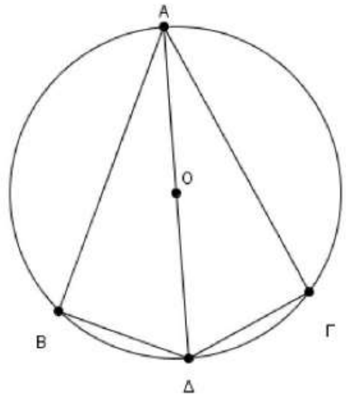
α) Τα τόξα ΒΔ και ΔΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



1663-Λύση

α) Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Α}Γ$ είναι $Β\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Γ$. Οι ίσες γωνίες $Β\hat{Α}Δ$ και $Δ\hat{Α}Γ$ είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στα τόξα $\overset{\frown}{ΒΔ}$ και $\overset{\frown}{ΔΓ}$, οπότε και τα τόξα αυτά είναι ίσα.



β) Οι εγγεγραμμένες γωνίες $Α\hat{Β}Δ$ και $Α\hat{Γ}Δ$ είναι ορθές διότι βαίνουν σε ημικύκλιο.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν:

- ΑΔ κοινή πλευρά
- $Β\hat{Α}Δ = Δ\hat{Α}Γ$, διότι ΑΔ διχοτόμος της $Β\hat{Α}Γ$.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα

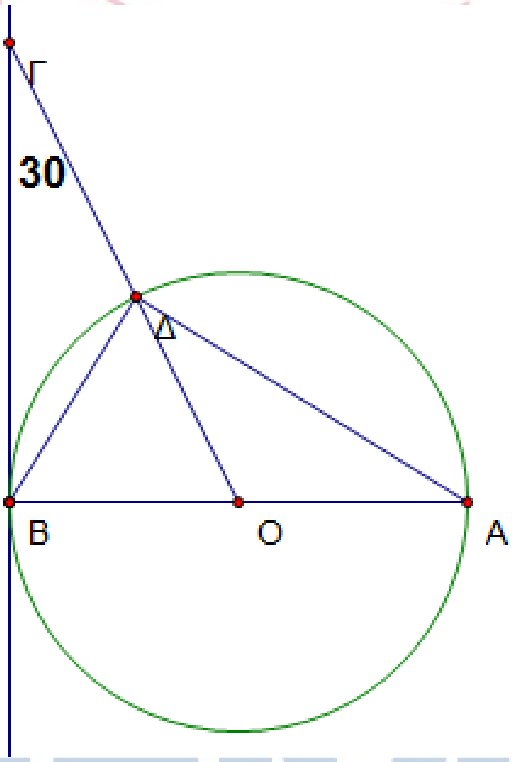
1665

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε κύκλο (Ο, ρ) και διάμετρό του ΑΒ. Στην εφαπτομένη του κύκλου στο Β θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε, η γωνία ΒΓΟ να είναι ίση με 30^o. Αν η ΟΓ τέμνει τον κύκλο στο Δ να αποδείξετε ότι:

α) $O\Gamma = 2OA$. (Μονάδες 12)

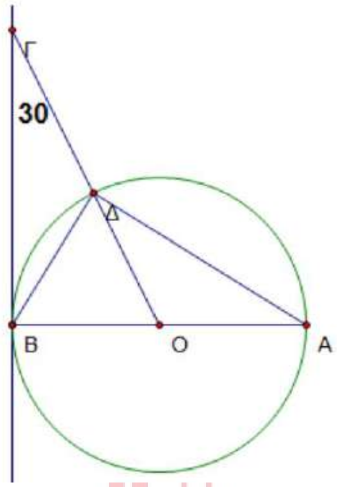
β) $B\Gamma = A\Delta$. (Μονάδες 13)



1665-Λύση

α)Η εφαπτομένη ΒΓ είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΒ στο σημείο επαφής, άρα $\Gamma\hat{B}O = 90^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΓ είναι $\hat{\Gamma} = 30^o$, άρα $OB = \frac{O\Gamma}{2} \Leftrightarrow O\Gamma = 2OB$ επειδή $OB = OA = \rho$ έχουμε $O\Gamma = 2OA$



β) Είναι $B\hat{\Delta}A = 90^o$ διότι είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΒΓ και ΑΒΔ έχουν:

- $O\Gamma = AB$, διότι $O\Gamma = 2OA = 2\rho$ και $AB = 2\rho$
- $B\hat{\Gamma}O = B\hat{A}\Delta = 30^o$

  $\Delta\hat{O}B = 60^\circ$ η οποία είναι εξωτερική στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΟΑ (ΟΑ=ΟΔ) οπότε $B\hat{A}\Delta = \frac{\Delta\hat{O}B}{2} = 30^\circ$

- Άρα τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΑΒΔ είναι ίσα οπότε ισχύει ΒΓ = ΑΔ επειδή έχουν τις προσκείμενες γωνίες τους ίσες μία προς μία.

1672

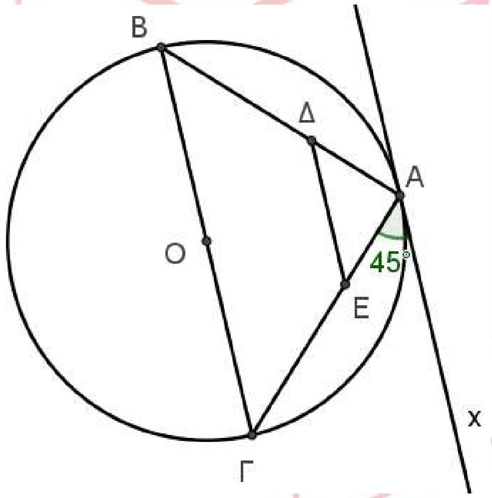
ΘΕΜΑ 2

Σε σημείο Α ενός κύκλου, φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου Αx και τη χορδή ΑΓ που σχηματίζει με την εφαπτομένη γωνία 45^{o}. Φέρουμε τη διάμετρο ΓΒ και μια παράλληλη ευθεία στη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΓ. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

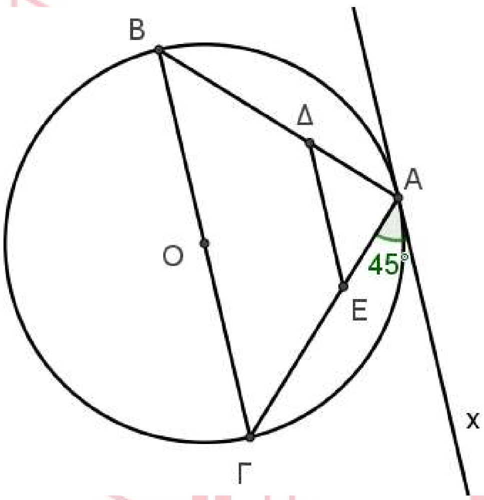
(Μονάδες 15)



1672-Λύση

α) Είναι $B\widehat{A}\Gamma = 90^o$ ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Ακόμη η γωνία $\Gamma\widehat{A}x$ σχηματίζεται από την εφαπτομένη Ax και τη χορδή ΑΓ άρα είναι ίση με τη γωνία που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$. Επομένως ισχύει: $\widehat{B} = \Gamma\widehat{A}x = 45^o$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ βρίσκουμε $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 45^o$



β) Το ΒΓΕΔ είναι τραπέζιο γιατί ΔΕ//ΒΓ και οι πλευρές ΒΔ και ΓΕ τέμνονται στο Α, άρα δεν είναι παράλληλες. Επίσης, έχει τις γωνίες που πρόσκεινται στη βάση ΒΓ ίσες, άρα είναι ισοσκελές τραπέζιο.

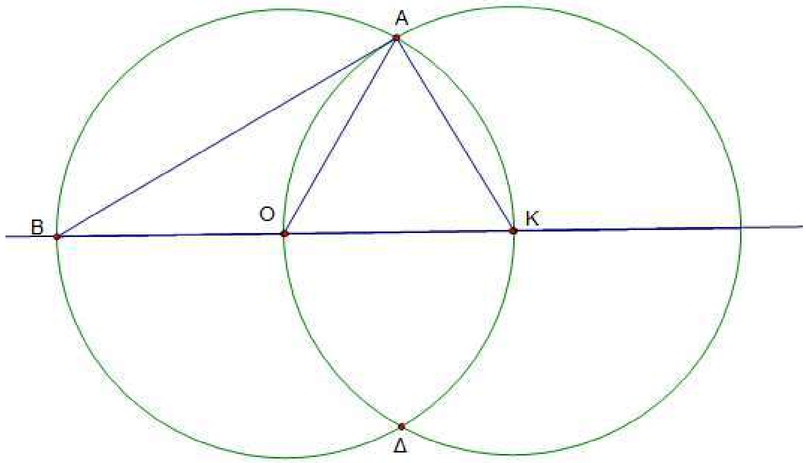
1673

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι (Ο,ρ) και (Κ,ρ) με ΟΚ=ρ, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Δ.

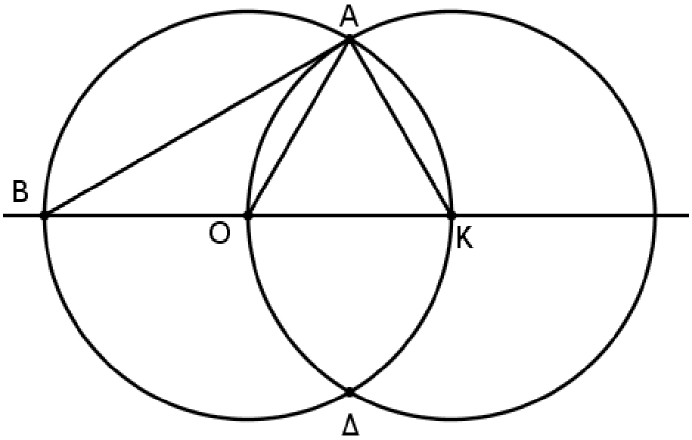
α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΚ. (Μονάδες 15)



1673-Λύση

α) Είναι ΟΑ = ΟΚ = ρ, ως ακτίνες του κύκλου (Ο, ρ). Ισχύει επίσης ότι ΚΑ = ρ ως ακτίνα του κύκλου (Κ, ρ). Άρα ΟΑ = ΟΚ = ΚΑ = ρ. Άρα το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο.



β) Επειδή ΟΑΚ ισόπλευρο τρίγωνο είναι $B\widehat{K}A = 60^o$. Επίσης $B\widehat{A}K = 90^o$, διότι είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο ημικύκλιο $\overset{\frown}{B\Delta K}$. Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΒΑΚ βρίσκουμε:

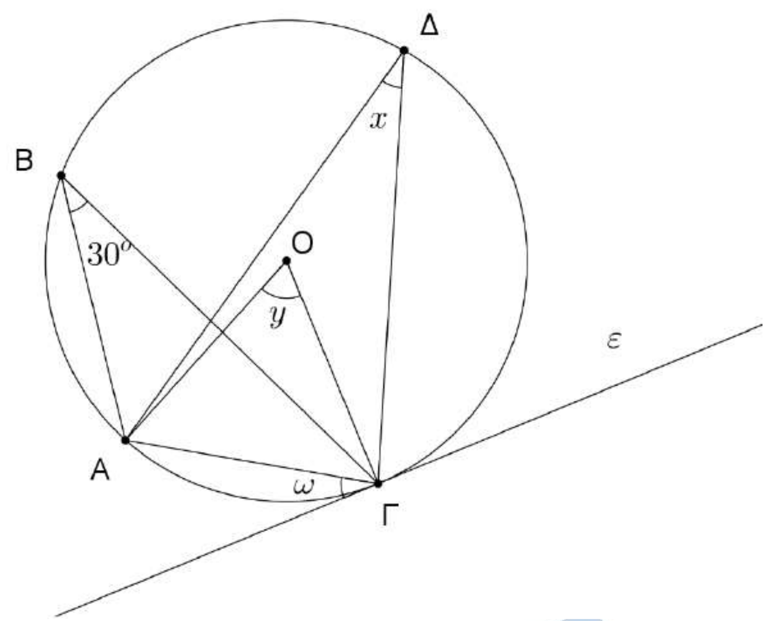
$B\widehat{A}K + B\widehat{K}A + A\widehat{B}K = 180^o \Leftrightarrow 90^o + 60^o + A\widehat{B}K = 180^o \Leftrightarrow A\widehat{B}K = 30^o$

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (Ο,ρ) στο σημείο Γ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες x,y και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΟΑΓ ως προς τις πλευρές. (Μονάδες 10)



1695-Λύση

α) Οι γωνιές $Α\widehat{Δ}Γ$ και $Α\widehat{Β}Γ$ είναι εγγεγραμμένες του κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{ΑΓ}$, οπότε θα είναι ίσες. Δηλαδή $Α\widehat{Δ}Γ = Α\widehat{Β}Γ$, άρα $\widehat{x} = 30^o$.

Η γωνία $Α\widehat{Ο}Γ$ είναι επίκεντρη γωνία του κύκλου και βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{ΑΓ}$. Στο ίδιο τόξο βαίνει και η εγγεγραμμένη $Α\widehat{Β}Γ$. Οπότε, γνωρίζοντας ότι κάθε εγγεγραμμένη ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτήν θα είναι $Α\widehat{Β}Γ = \frac{Α\widehat{Ο}Γ}{2}$.

Δηλαδή, $Α\widehat{Ο}Γ = 2Α\widehat{Β}Γ$, άρα $\widehat{y} = 60^o$ (1)

Η γωνία $\widehat{ω}$ σχηματίζεται από τη χορδή ΑΓ και την εφαπτομένη ευθεία ε στο άκρο Γ της χορδής οπότε θα ισούται με κάθε εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{ΑΓ}$ της χορδής. Δηλαδή, είναι $\widehat{ω} = Α\widehat{Β}Γ$, άρα $\widehat{ω} = 30^o$.

β)β Το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισοσκελές αφού ΟΑ = ΟΓ ως ακτίνες του κύκλου, και έχει τη γωνία της κορυφής του $Α\widehat{Ο}Γ = y = 60^0$. Άρα, θα είναι ισόπλευρο.

1696

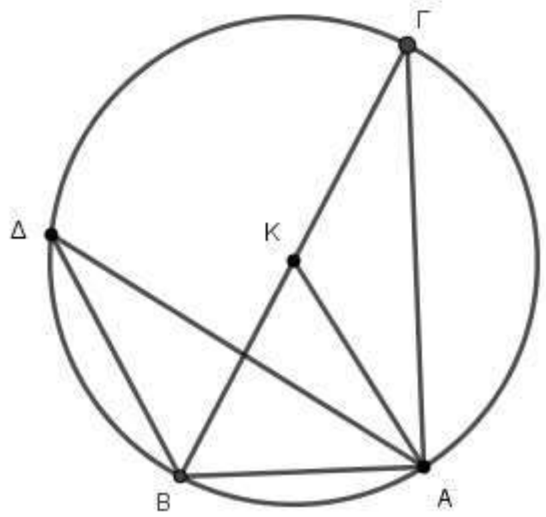
ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος (Κ,ρ), μια διάμετρός του ΒΓ και χορδή του ΒΑ=ρ. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των Β και Γ, όπως στο σχήμα που ακολουθεί,

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

β) να υπολογίσετε την γωνία $B\widehat{\Delta}A$. (Μονάδες 9)

γ) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)



1696-Λύση

α) Είναι ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ ως ακτίνες κύκλου και ΚΓ = ΒΑ από τα δεδομένα.

Άρα ΚΑ = ΚΒ = ΑΒ, οπότε το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισόπλευρο γιατί έχει τις τρεις πλευρές του ίσες.

β) Η εγγεγραμμένη γωνία $B\widehat{\Delta}A$ και η επίκεντρη $B\widehat{K}A$ βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ του κύκλου. Η γωνία $B\widehat{K}A$, ως γωνία ισοπλεύρου τριγώνου, θα είναι ίση με 60^0.

Γνωρίζοντας ότι κάθε εγγεγραμμένη ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτήν, θα είναι $B\widehat{\Delta}A = \frac{B\widehat{K}A}{2}$. Οπότε, $B\widehat{\Delta}A = \frac{60^o}{2}$, άρα $B\widehat{\Delta}A = 30^o$.

γ) Οι γωνίες $B\widehat{\Delta}A$ και $B\widehat{\Gamma}A$ είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ του κύκλου, οπότε θα είναι ίσες και αφού $B\widehat{\Delta}A = 30^o$ άρα και $B\widehat{\Gamma}A= 30^0$.

Η ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου, επομένως το τόξο $\overset{\frown}{B\Delta\Gamma}$ είναι ημικύκλιο. Άρα, η γωνία $B\widehat{A}\Gamma$ που βαίνει στο ημικύκλιο είναι ορθή, δηλαδή $B\widehat{A}\Gamma = 90^o$.

Η $\Gamma\widehat{B}A = 60^0$ γιατί είναι και γωνία του ισοπλεύρου τριγώνου ΒΚΑ.

Επομένως, οι γωνίες του τριγώνου ΒΑΓ είναι $B\widehat{\Gamma}A = 30^o$, $B\widehat{A}\Gamma = 90^o$ και $\Gamma\widehat{B}A = 60^0$.

1703

ΘΕΜΑ 2

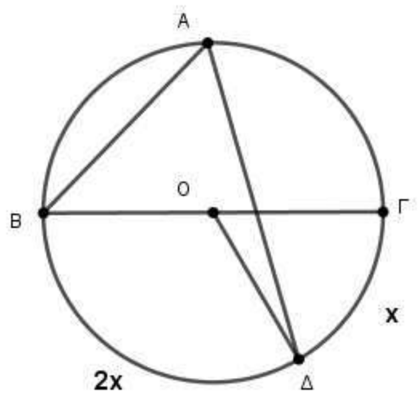
Έστω κύκλος κέντρου Ο και διάμετρός του ΒΓ. Θεωρούμε σημεία Α και Δ του κύκλου εκατέρωθεν της ΒΓ, τέτοια ώστε το τόξο ΒΔ να είναι διπλάσιο του τόξου ΔΓ.

Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο x του τόξου ΓΔ (Μονάδες 8)

β) τη γωνία ΒΟΔ (Μονάδες 9)

γ) τη γωνία ΒΑΔ (Μονάδες 8)

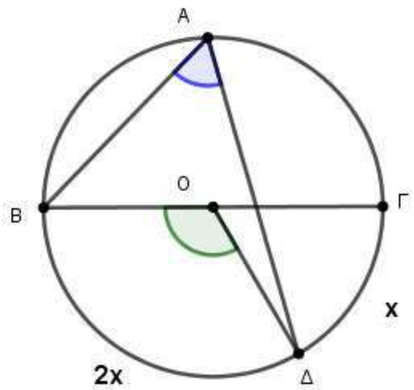


1703-Λύση

α) Το τόξο $\overset{\frown}{ΒΔΓ}$ είναι ημικύκλιο, οπότε: $2x + x = 180^o \Leftrightarrow 3x = 180^o \Leftrightarrow x = 60^o$.

β) Η γωνία $Β\hat{Ο}Δ$ είναι επίκεντρη και βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{ΒΔ}$, άρα $Β\hat{Ο}Δ = 2x = 120^o$.

γ) Η γωνία $Β\hat{Α}Δ$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{ΒΔ}$, άρα $Β\hat{Α}Δ = \frac{120^o}{2} = 60^o$.



1712

ΘΕΜΑ 4

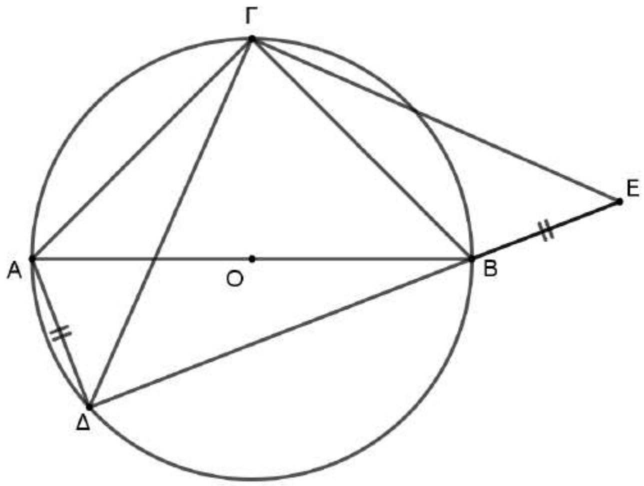
Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο, και έστω ΑΒ μια διάμετρος του, Γ το μέσο του ενός ημικυκλίου του και Δ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της ΔΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε ώστε ΒΕ=ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

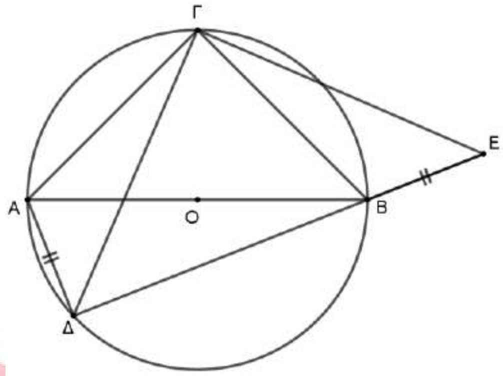
i. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

ii. Η ΓΔ είναι κάθετη στην ΓΕ. (Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι το αντιδιαμετρικό του Γ, η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου. (Μονάδες 9)



1712-Λύση



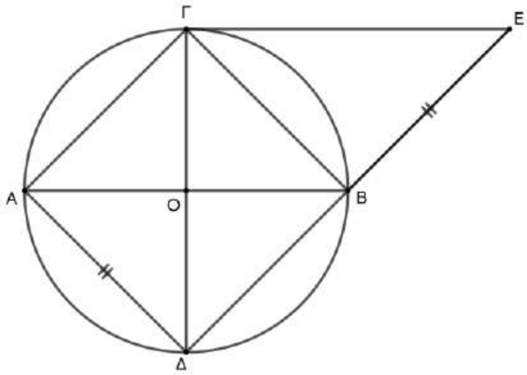
α) i. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

- ΑΔ = ΒΕ, από υπόθεση
- ΑΓ = ΓΒ ως ίσες χορδές των ίσων τόξων ΑΓ και ΓΒ αφού το Γ είναι μέσο του τόξου ΑΒ.
- $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}E$, διότι το τετράπλευρο ΑΔΒΓ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο κέντρου Ο και κάθε εξωτερική γωνία του ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

ii. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα, προκύπτει ότι $A\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{\Gamma}E$ γιατί είναι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΕ αντίστοιχα. Τότε: $\Delta\hat{\Gamma}E = \Delta\hat{\Gamma}B + B\hat{\Gamma}E = \Delta\hat{\Gamma}B + A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}B$. Όμως $A\hat{\Gamma}B = 90^o$, γιατί είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα $\Gamma\Delta \perp \Gamma E$.

β)



Όταν το Δ είναι αντιδιαμετρικό του Γ, τότε από το **α)ii.** ερώτημα είδαμε ότι $\Gamma\Delta \perp \Gamma E$ ή $O\Gamma \perp \Gamma E$ αφού ΓΔ διάμετρος και ΟΓ ακτίνα του κύκλου. Δηλαδή για την ακτίνα ΟΓ ισχύει ότι είναι κάθετη στο τμήμα ΓΕ, οπότε η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

1717

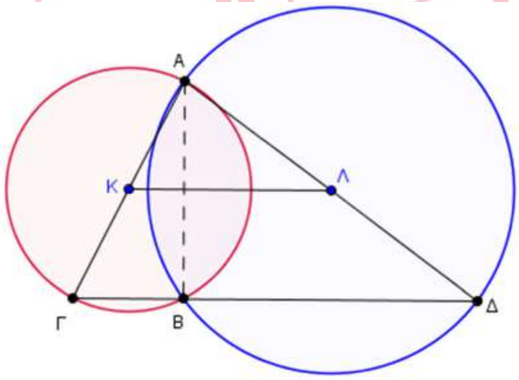
ΘΕΜΑ 4

Δύο κύκλοι (Κ,ρ), (Λ,R) τέμνονται σε δύο σημεία Α, Β. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α στους δύο κύκλους, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{AB\Gamma} = 90^o$ (Μονάδες 5)

β) τα σημεία Γ, Β, Δ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

γ) το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ,Λ,Γ,Δ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 10)



1717-Λύση

α) Η γωνία $A\widehat{B}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο (K, ρ) που βαίνει σε ημικύκλιο άρα $A\widehat{B}\Gamma = 90^o$.

β) Η γωνία $A\widehat{B}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο (Λ, R) που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα $A\widehat{B}\Delta = 90^o$. Τότε $\Gamma\widehat{B}\Delta = \Gamma\widehat{B}A + A\widehat{B}\Delta = 90^o + 90^o = 180^o$.

Άρα τα σημεία Γ, Β, Δ είναι συνευθειακά.

γ) Τα Κ, Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΓΔ, άρα ΚΛ // ΓΔ. Επίσης οι πλευρές ΓΚ και ΔΛ του τετραπλεύρου ΚΛΓΔ τέμνονται στο Α. Άρα το τετράπλευρο ΚΛΓΔ έχει δύο μόνο απέναντι πλευρές παράλληλες, οπότε είναι τραπέζιο.

1720

ΘΕΜΑ 4

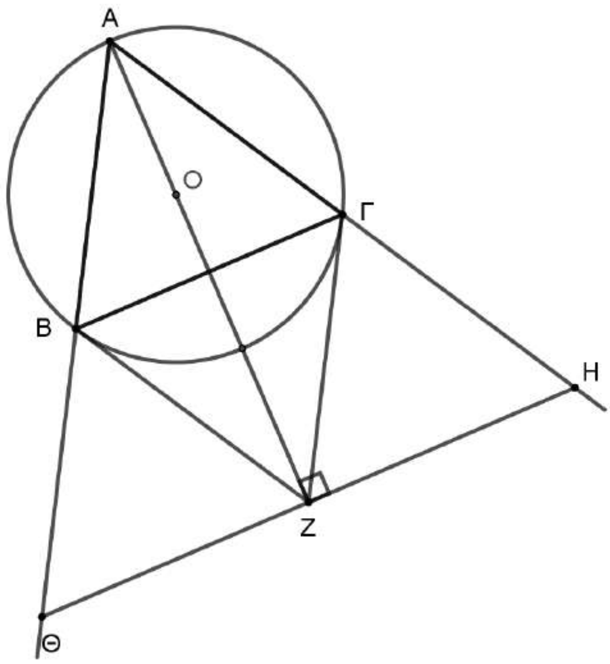
Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Τα τμήματα ΓΖ και ΒΖ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και Β αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΘΗ είναι κάθετο στο τμήμα ΑΖ στο Ζ , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

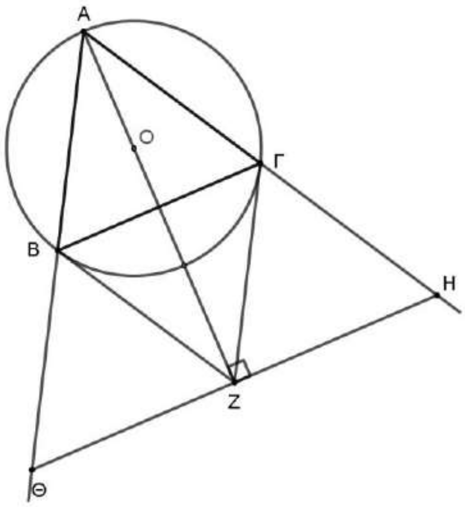
β) Το τετράπλευρο ΑΓΖΒ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΒΓΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)



1720-Λύση



α) Είναι ΖΒ = ΖΓ ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ζ προς τον κύκλο. Άρα το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισοσκελές. Οι γωνίες του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στα τόξα ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ και αφού είναι γωνίες 60^o, τότε τα αντίστοιχα τόξα τους θα είναι τόξα 120^o το καθένα.

Η γωνία $Β\hat{Γ}Ζ = \hat{Α} = 60^o$ (γωνία από τη χορδή ΒΓ και την εφαπτομένη ΓΖ ίση με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής). Οπότε, το ισοσκελές τρίγωνο ΒΓΖ έχει μία γωνία ίση με 60^o, άρα είναι ισόπλευρο.

β) Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΖ έχουμε: ΓΒ = ΓΖ = ΖΒ (1).

Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ βρίσκουμε: ΑΓ = ΑΒ = ΓΒ (2).

Από (1), (2) προκύπτει: ΑΓ = ΑΒ = ΓΖ = ΖΒ, δηλαδή το τετράπλευρο ΑΓΖΒ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

γ) Ισχύει ότι:

- $ΘΗ \perp ΑΖ$, από υπόθεση και
- $ΒΓ \perp ΑΖ$, γιατί είναι διαγώνιοι του ρόμβου ΑΓΖΒ και τέμνονται κάθετα.

Άρα ΒΓ // ΘΗ αφού είναι κάθετες στην ίδια ευθεία ΑΖ. Επομένως το τετράπλευρο ΒΓΗΘ είναι τραπέζιο αφού ΒΓ // ΘΗ και οι ΘΒ, ΗΓ δεν είναι παράλληλες γιατί τέμνονται στο Α. Επίσης:

- $\hat{Θ} = \hat{Β} = 60^o$ και $\hat{Η} = \hat{Γ} = 60^o$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΒΓ//ΘΗ τεμνομένων από ΑΘ και ΑΗ αντίστοιχα.

Άρα το τραπέζιο ΒΓΗΘ είναι ισοσκελές γιατί οι γωνίες της βάσης του ΒΗ είναι ίσες.

ΘΕΜΑ 4

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε τα ίσα τόξα ΑΒ και ΑΓ, το καθένα ίσο με 120°. Έστω Δ και Ε τα μέσα των τόξων ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

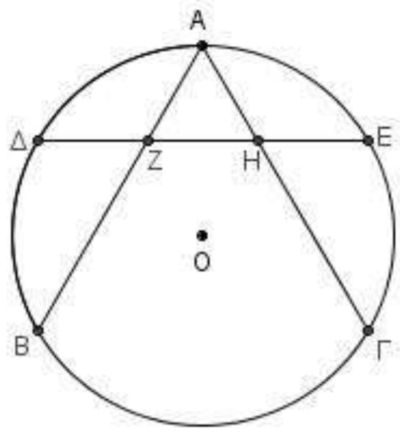
α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΕ είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους.

(Μονάδες 10)

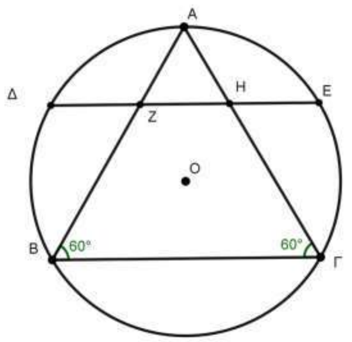
γ) Η χορδή ΔΕ τριχοτομείται από τις χορδές ΑΒ και ΑΓ.

(Μονάδες 7)



1739-Λύση

α) Είναι $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A\Gamma} = 120^\circ$, οπότε οι γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ, που είναι εγγεγραμμένες σε αυτά τα τόξα, θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο γωνίες 60°, θα είναι και η τρίτη 60°. Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.



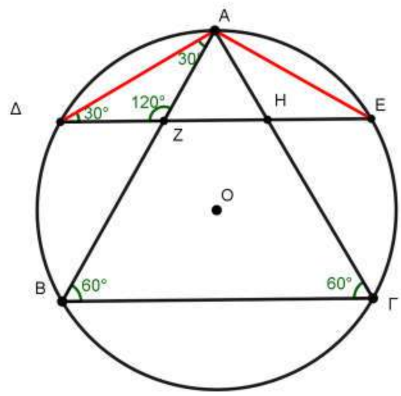
β) Επειδή τα Δ, Ε είναι μέσα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{A\Gamma}$ αντίστοιχα, ισχύει ότι: $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{\Delta B} = \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB} = 60^\circ$. Τότε: $\Delta\hat{A}Z = A\hat{\Delta}Z = H\hat{A}E = H\hat{E}A = 30^o$ διότι είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν σε τόξα των 60^o. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΖΔ, έχουμε:

$A\hat{Z}\Delta + Z\hat{\Delta}A + \Delta\hat{A}Z = 180^o \Leftrightarrow A\hat{Z}\Delta + 30^o + 30^o = 180^o \Leftrightarrow A\hat{Z}\Delta = 120^o$

Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΕ έχουν:

- ΑΔ = ΑΕ, διότι τα αντίστοιχα τόξα τους είναι ίσα
- $\Delta\hat{A}Z = E\hat{A}H = 30^o$
- $A\hat{\Delta}Z = A\hat{E}H = 30^o$

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα είναι ίσα.



γ) Το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισόπλευρο αφού $A\hat{Z}H = A\hat{H}Z = 60^o$ (εφόσον είναι παραπληρωματικές των $A\hat{Z}\Delta = A\hat{H}E = 120^o$) και έχει ΑΖ = ΖΗ = ΑΗ. Επίσης ΑΖ = ΖΔ και ΑΗ = ΗΕ αφού τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΕ είναι ισοσκελή. Τελικά ΔΖ = ΖΗ = ΗΕ, δηλαδή η χορδή ΔΕ τριχοτομείται από τις χορδές ΑΒ και ΑΓ.

1768

ΘΕΜΑ 4

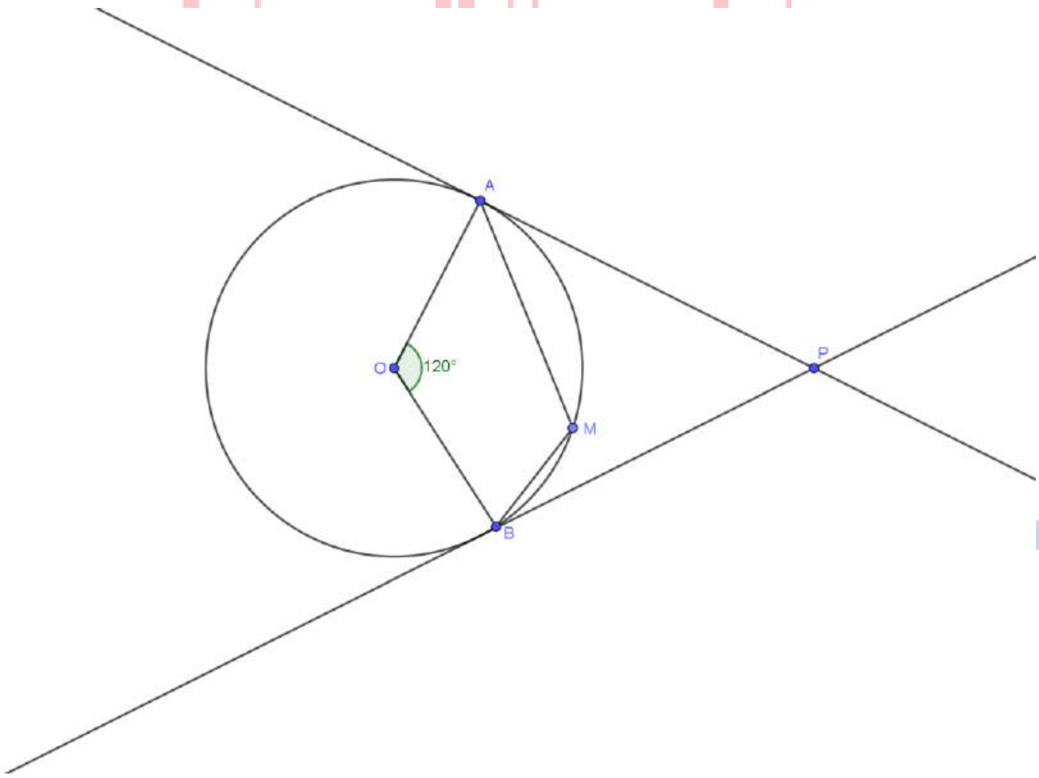
Δίνεται κύκλος (Ο, R) και μια επίκεντρη γωνία του $A\widehat{O}B$ ίση με 120^0 . Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α και Β τέμνονται στο σημείο Ρ. Θεωρούμε σημείο Μ του τόξου ΑΒ και φέρουμε τις χορδές ΑΜ και ΒΜ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)

β) $M\hat{A}B + M\hat{B}A = 60^o$. (Μονάδες 11)

γ) Για ποια θέση του Μ είναι $AM \perp BP$; (Μονάδες 5)



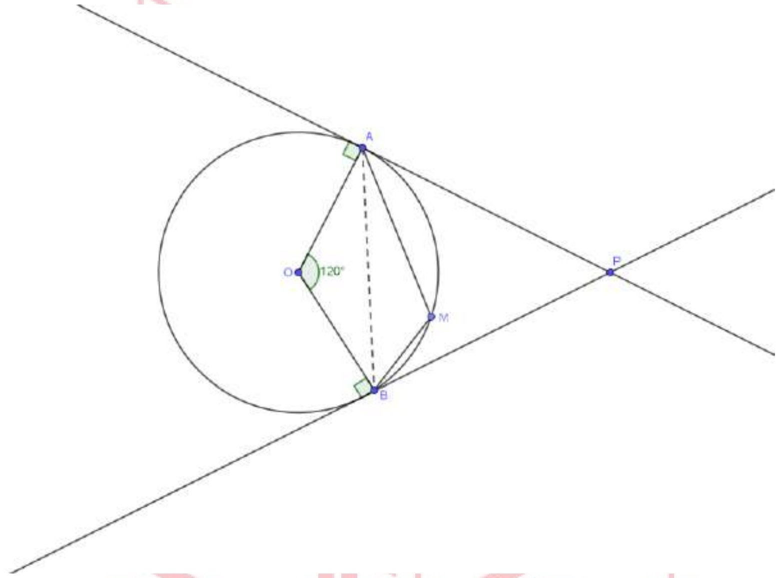
1768-Λύση

α) Είναι PA = PB ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν, άρα το τρίγωνο PAB είναι ισοσκελές.

Από το άθροισμα γωνιών του τετραπλεύρου AOBP έχουμε:

$\hat{P} + 120^o + 90^o + 90^o = 360^o \Leftrightarrow \hat{P} = 60^o$

Επειδή το τρίγωνο PAB είναι ισοσκελές με μία γωνία του ίση με 60^o, είναι ισόπλευρο.



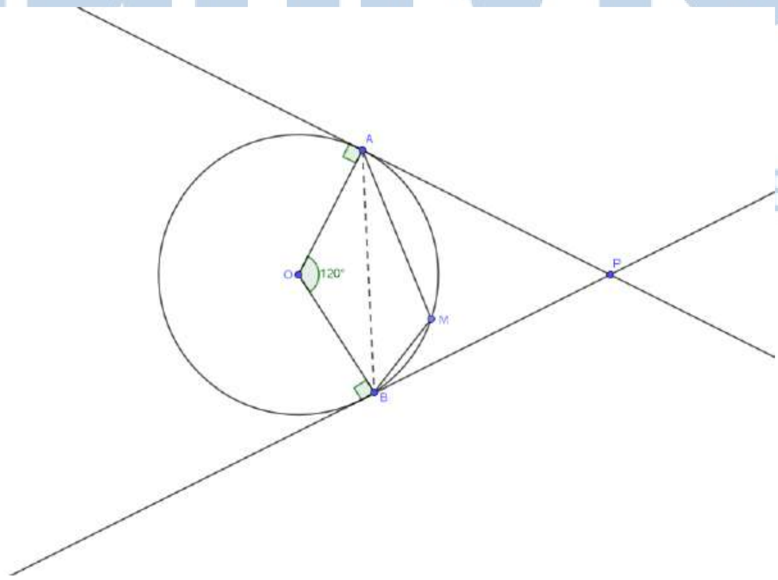
β) Είναι $A\hat{O}B = 120^o$ ή $\overset{\frown}{AMB} = 120^o$. Άρα το μη κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ είναι ίσο με 240^o.

Η γωνία $A\hat{M}B$ είναι εγγεγραμμένη στο μη κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Τότε:

$A\hat{M}B = \frac{240^o}{2} = 120^o$.

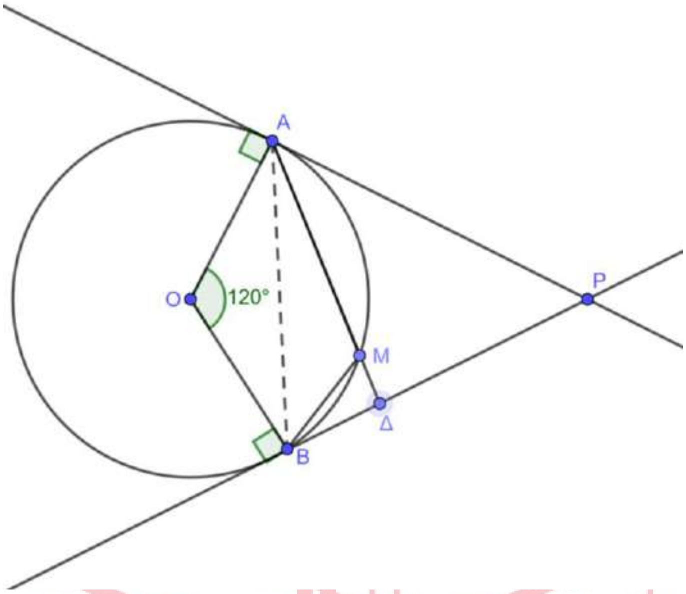
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου MAB βρίσκουμε:

$M\hat{A}B + M\hat{B}A + A\hat{M}B = 180^o \Leftrightarrow M\hat{A}B + M\hat{B}A + 120^o = 180^o \Leftrightarrow M\hat{A}B + M\hat{B}A = 60^o$



1768-Λύση

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ είναι $\widehat{B} = 60^o$ οπότε $M\widehat{A}B = 30^o$. Από το ερώτημα β προκύπτει ότι $M\widehat{B}A = 30^o$. Άρα ΜΑ = ΜΒ. Τελικά $AM \perp BP$ στην περίπτωση που το Μ είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$.



ΘΕΜΑ 4

1769

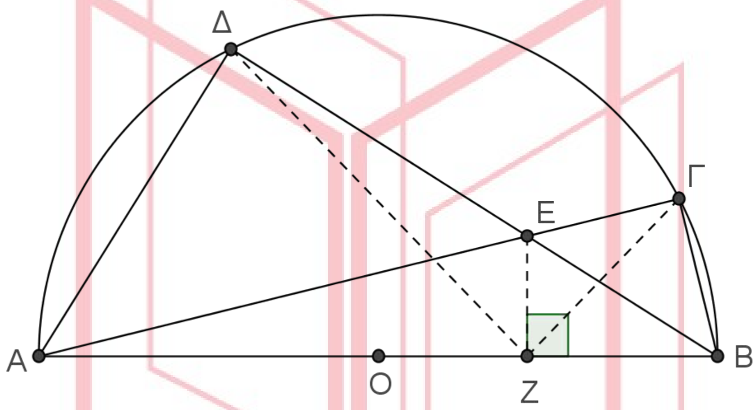
Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και δύο χορδές του ΑΓ και ΒΔ, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ε. Φέρουμε $ΕΖ \perp ΑΒ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ΔΑΓ και ΔΒΓ είναι ίσες (Μονάδες 7)

β) Τα τετράπλευρα ΑΔΕΖ και ΕΖΒΓ είναι εγγράψιμα. (Μονάδες 9)

γ) Η ΕΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $Δ\hat{Z}Γ$. (Μονάδες 9)



1769-Λύση

α) Επειδή οι γωνίες $\Delta\hat{A}\Gamma$ και $\Delta\hat{B}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{\Delta\Gamma}$, συμπεραίνουμε ότι είναι ίσες.

β) Είναι $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Gamma}B = 90^o$ γιατί είναι εγγεγραμμένες σε ημικύκλιο. Στο τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι

$A\hat{\Delta}B + E\hat{Z}A = 90^o + 90^o = 180^o$, άρα είναι εγγράψιμο.

Στο τετράπλευρο ΕΖΒΓ είναι

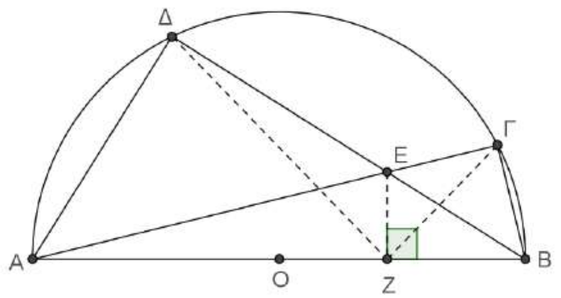
$A\hat{\Gamma}B + E\hat{Z}B = 90^o + 90^o = 180^o$, άρα είναι εγγράψιμο.

γ) Στο εγγράψιμο ΑΔΕΖ η πλευρά ΔΕ φαίνεται από τις κορυφές Α, Ζ υπό ίσες γωνίες, δηλαδή $\Delta\hat{Z}E = \Delta\hat{A}E \Leftrightarrow \Delta\hat{Z}E = \Delta\hat{A}\Gamma$ (1).

Στο εγγράψιμο ΕΖΒΓ η πλευρά ΕΓ φαίνεται από τις κορυφές Ζ και Β υπό ίσες γωνίες, δηλαδή: $E\hat{Z}\Gamma = E\hat{B}\Gamma \Leftrightarrow E\hat{Z}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma$ (2).

Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι $\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma$ οπότε από τις (1), (2) προκύπτει: $\Delta\hat{Z}E = E\hat{Z}\Gamma$.

Άρα η ΕΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{Z}\Gamma$.



1772

ΘΕΜΑ 4

Έστω κύκλος (Ο, ρ) και Ε το μέσον του τόξου του ΒΓ. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στο κύκλο στο Ε. Οι προεκτάσεις των ΟΒ, ΟΓ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα . Να αποδείξετε ότι :

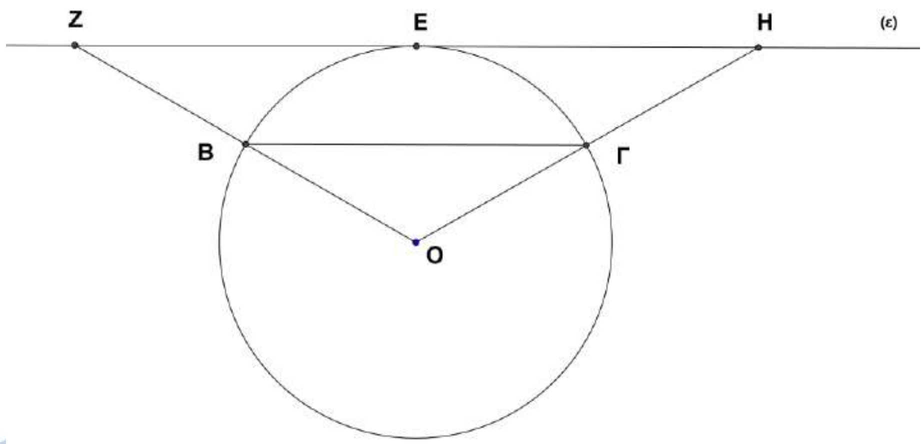
α) ΒΓ//ΖΗ (Μονάδες 5)

β) ΟΖ=ΟΗ (Μονάδες 5)

γ) Αν Β μέσον της ΟΖ

i. να αποδείξετε ότι $\hat{BEZ} = \frac{\hat{ZOH}}{4}$ (Μονάδες 8)

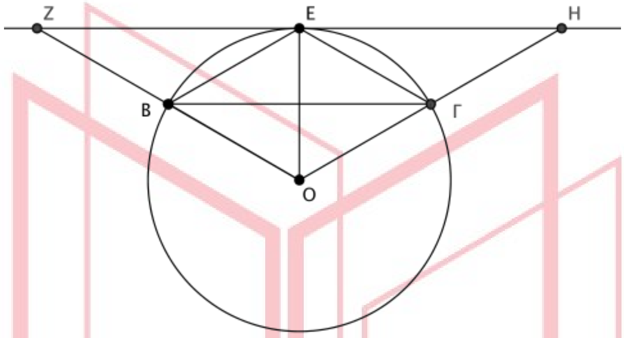
ii. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΟΗ. (Μονάδες 7)



1772-Λύση

α) Είναι ΟΕ $\perp$ ΖΗ διότι η ακτίνα ΟΕ είναι κάθετη στην εφαπτομένη ΖΗ στο σημείο επαφής Ε. Επειδή το Ε είναι μέσον του τόξου ΒΓ, οι χορδές ΕΒ, ΕΓ είναι ίσες (ΕΒ = ΕΓ) και ΟΒ = ΟΓ . Άρα ΟΕ μεσοκάθετη του ΒΓ . Οπότε ΟΕ $\perp$ ΖΗ και ΟΕ$\perp$ ΒΓ.

Άρα ΒΓ // ΖΗ.



β) Επειδή ΟΒ = ΟΓ = ρ, το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές οπότε $\mathrm{O\hat{B}\Gamma}$ = $\mathrm{O\hat{\Gamma}B}$ (1).

Επίσης $\mathrm{O\hat{B}\Gamma}$ = $\hat{\mathrm{Z}}$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΓ και ΖΗ και

$\mathrm{O\hat{\Gamma}B}$ = $\hat{\mathrm{H}}$ (3) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΓ και ΖΗ.

Τότε, από (1), (2), (3) προκύπτει:

$\hat{\mathrm{Z}}$ = $\hat{\mathrm{H}}$, οπότε το τρίγωνο ΟΖΗ είναι ισοσκελές, δηλαδή ΟΖ = ΟΗ.

γ) i. Η γωνία $\mathrm{B\hat{E}Z}$ σχηματίζεται από τη χορδή ΒΕ και την εφαπτομένη ΕΖ, οπότε ισούται με την εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο ΒΕ, δηλαδή $\mathrm{B\hat{E}Z}$ = $\mathrm{B\hat{\Gamma}E}$ (1). Η γωνία $\mathrm{B\hat{\Gamma}E}$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο ΒΕ και η επίκεντρη $\mathrm{B\hat{O}E}$ βαίνει στο τόξο ΒΕ, άρα $\mathrm{B\hat{\Gamma}E} = \frac{\mathrm{B\hat{O}E}}{2}$ (2).

Επειδή Ε μέσο του τόξου ΒΓ είναι , και $\mathrm{B\hat{O}E} = \mathrm{\Gamma\hat{O}E} = \frac{\mathrm{Z\hat{O}H}}{2}$ (3).

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) είναι $\mathrm{B\hat{E}Z} = \frac{\mathrm{B\hat{O}E}}{2} = \frac{\mathrm{Z\hat{O}H}}{4}$.

ii. Επειδή ΟΒ = ΒΖ = ΟΕ προκύπτει ότι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΖ είναι

$\mathrm{OE} = \frac{\mathrm{OZ}}{2}$ άρα $\hat{\mathrm{Z}} = 30^0$. Επειδή το τρίγωνο ΟΖΗ είναι ισοσκελές με ΟΖ = ΟΗ είναι

$\hat{\mathrm{H}} = \hat{\mathrm{Z}} = 30^0$. Έπιπλέον $\hat{\mathrm{H}} + \hat{\mathrm{Z}} + \mathrm{Z\hat{O}H} = 180^0$ ή $30^0 + 30^0 + \mathrm{Z\hat{O}H} = 180^0$ ή $\mathrm{Z\hat{O}H} = 120^0$.

1774

ΘΕΜΑ 4

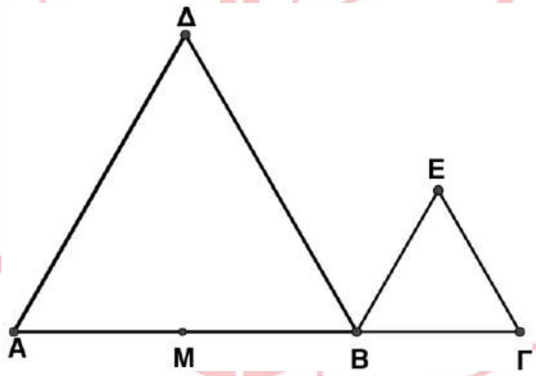
Έστω Α, Β, Γ συνευθειακά σημεία με ΑΒ=2ΒΓ. Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ, ΒΕΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο (ΑΔ//ΒΕ). (Μονάδες 9)

β) Τα τρίγωνα ΔΜΒ, ΔΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΔΜΒΕ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 8)

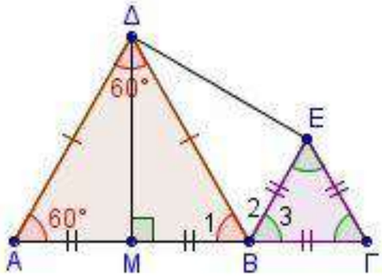


1774-Λύση

α) Είναι $\widehat{A} = \widehat{B}_3 = 60^o$ ως γωνίες ισοπλεύρων τριγώνων. Οι ίσες γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}_3$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη ΑΔ και ΕΒ που τέμνονται από την ΑΓ οπότε

ΑΔ // ΒΕ.

Έστω ότι ΔΕ // ΑΒ. Τότε το τετράπλευρο ΑΔΕΒ θα έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και θα είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΑΔ = ΒΕ. Όμως ΑΒ =ΑΔ και ΒΕ = ΒΓ άρα ΑΒ = ΒΓ που είναι άτοπο αφού ΑΒ = 2ΒΓ. Άρα οι ΔΕ, ΑΒ τέμνονται και συνεπώς το ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο.



β) Είναι $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 + \widehat{B}_3 = 180^o \Leftrightarrow 60^o + \widehat{B}_2 + 60^o = 180^o \Leftrightarrow \widehat{B}_2 = 60^o$ και $\widehat{B}_1 = 60^o$ ως γωνία του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΔ.

Τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΕΒ έχουν:

ΔΒ κοινή πλευρά

ΒΜ = ΕΒ διότι $BM = \frac{AB}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma = EB$

$\widehat{B}_2 = 60^o = \widehat{B}_1$

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Το ΔΜ είναι διάμεσος στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα θα είναι και ύψος του οπότε $\Delta\widehat{M}B = 90^o$.

Επειδή τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΕΒ είναι ίσα, είναι και $\Delta\widehat{E}B = \widehat{M} = 90^o$ αφού οι γωνίες αυτές είναι απέναντι από την πλευρά κοινή τους πλευρά ΔΒ. Οπότε $\Delta\widehat{E}B + \widehat{M} = 180^o$.

Άρα το τετράπλευρο ΔΜΒΕ έχει δύο απέναντι γωνίες παραπληρωματικές, οπότε είναι εγγράψιμο.

1776

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ, ΑΓΔ. Ονομάζουμε Ζ το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΔ, ΓΕ.

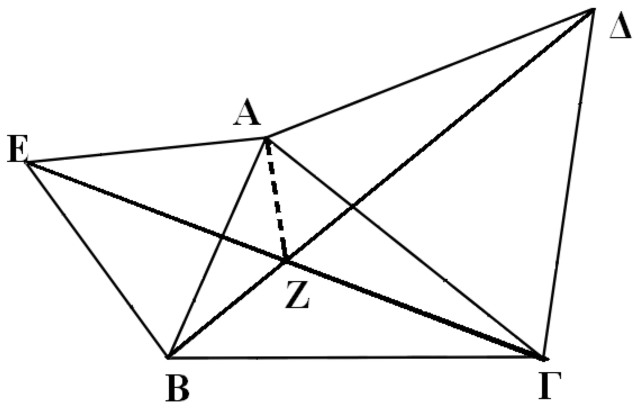
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΔ είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών

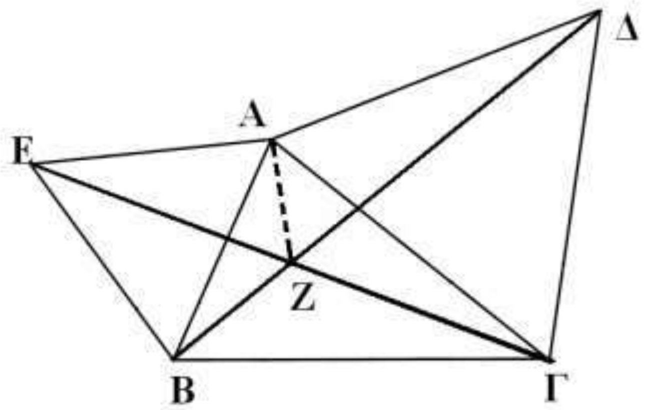
(Μονάδες 10)

β) Τα τετράπλευρα ΑΖΓΔ, ΑΖΒΕ είναι εγγράψιμα. (Μονάδες 10)

γ) Η γωνία $B\hat{Z}\Gamma$ είναι 120^0 . (Μονάδες 5)



1776-Λύση



α) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΔ έχουν:

ΑΕ = ΑΒ, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΕΒ

ΑΓ = ΑΔ, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΓΔ

$E\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Delta$, διότι $E\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Gamma + 60^o$ και $B\hat{A}\Delta = B\hat{A}\Gamma + 60^o$.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π, τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε: $A\hat{E}\Gamma = A\hat{B}\Delta$ (1) επειδή είναι απέναντι των ίσων πλευρών ΑΓ και ΑΔ και $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Gamma}E$ (2) επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΕ.

β) Επειδή $A\hat{\Gamma}Z = A\hat{\Delta}Z$, λόγω της (2), στο τετράπλευρο ΑΖΓΔ η πλευρά του ΑΖ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Γ και Δ υπό ίσες γωνίες, οπότε το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι εγγράψιμο.

Επειδή $A\hat{E}Z = A\hat{B}Z$, λόγω της (1), στο τετράπλευρο ΑΖΒΕ η πλευρά ΑΖ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Ε και Β υπό ίσες γωνίες, οπότε το τετράπλευρο ΑΖΒΕ είναι εγγράψιμο.

γ) Οι γωνίες $A\hat{\Delta}\Gamma$ και $A\hat{Z}\Gamma$ είναι απέναντι γωνίες του εγγράψιμου τετραπλεύρου ΑΖΓΔ, άρα είναι παραπληρωματικές. Οπότε:

$A\hat{Z}\Gamma + A\hat{\Delta}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow A\hat{Z}\Gamma + 60^o = 180^o \Leftrightarrow A\hat{Z}\Gamma = 120^o$.

Όμοια, στο εγγράψιμο ΑΖΒΕ είναι:

$A\hat{Z}B + A\hat{E}B = 180^o \Leftrightarrow A\hat{Z}B + 60^o = 180^o \Leftrightarrow A\hat{Z}B = 120^o$.

Τελικά:

$A\hat{Z}\Gamma + A\hat{Z}B + B\hat{Z}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow 120^o + 120^o + B\hat{Z}\Gamma = 360^o \Leftrightarrow B\hat{Z}\Gamma = 120^o$.

1799

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ, ΒΕ τα ύψη του.

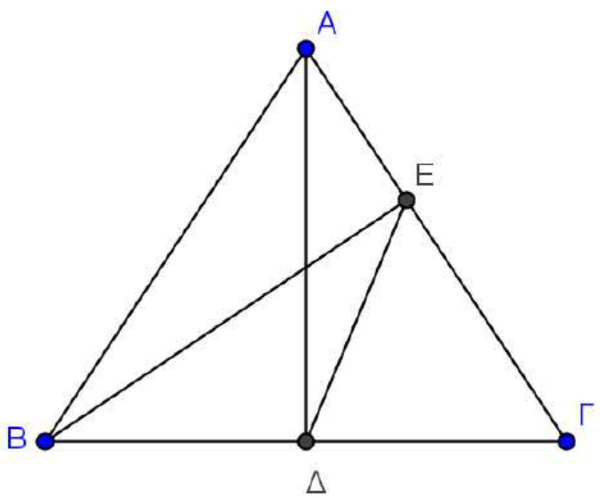
Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΓ =2 ΕΔ. (Μονάδες 6)

β) $B\hat{E}\Delta = \frac{\hat{A}}{2}$. (Μονάδες 7)

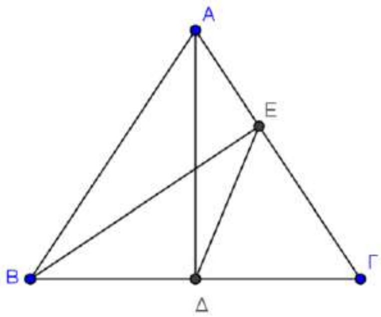
γ) Το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 6)

δ) $A\hat{B}E = A\hat{\Delta}E$. (Μονάδες 6)



1799-Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ η ΕΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $ΕΔ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΒΓ = 2ΕΔ$.



β) Είναι $ΕΔ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΕΔ = ΔΒ$

Άρα το τρίγωνο ΕΔΒ είναι ισοσκελές και έχει $Β\hat{Ε}Δ = Ε\hat{Β}Δ$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΕΒΓ, έχουμε:

$Ε\hat{Β}Γ + \hat{Γ} = 90^o \Leftrightarrow Ε\hat{Β}Δ + \hat{Γ} = 90^o \Leftrightarrow Β\hat{Ε}Δ = 90^o - \hat{Γ}$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ, έχουμε:

$Δ\hat{Α}Γ + \hat{Γ} = 90^o \Leftrightarrow \frac{\hat{Α}}{2} + \hat{Γ} = 90^o \Leftrightarrow \frac{\hat{Α}}{2} = 90^o - \hat{Γ}$

Οπότε έχουμε $Β\hat{Ε}Δ = \frac{\hat{Α}}{2}$.

γ) Επειδή $Α\hat{Ε}Β = Α\hat{Δ}Β = 90^o$, η πλευρά ΑΒ φαίνεται από τις κορυφές Δ, Ε υπό ίσες γωνίες, οπότε το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο.

δ) Επειδή το ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο, η πλευρά του ΑΕ φαίνεται από τις κορυφές Β, Δ υπό ίσες γωνίες, οπότε $Α\hat{Β}Ε = Α\hat{Δ}Ε$.

1807

ΘΕΜΑ

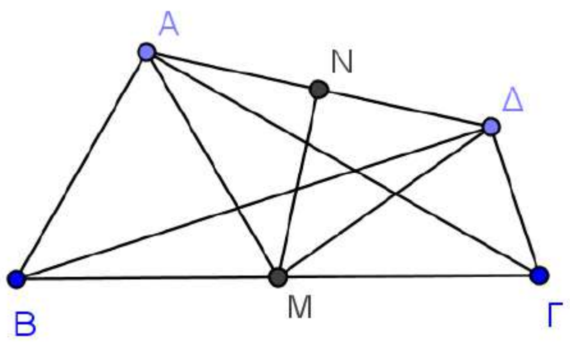
Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ με $\hat{A}=90^o$, $\hat{\Delta}=90^o$ και Μ, Ν τα μέσα των ΒΓ και ΑΔ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΜ = ΜΔ. (Μονάδες 10)

β) Η ΜΝ είναι κάθετη στην ΑΔ. (Μονάδες 10)

γ) $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$. (Μονάδες 5)

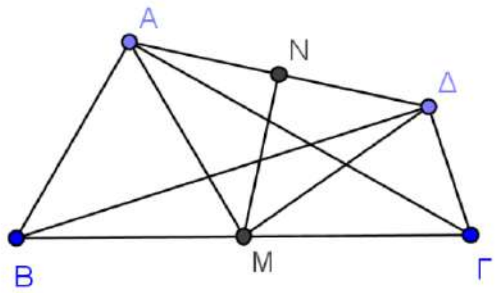


1807-Λύση

α) Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα ΑΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

Η ΔΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΔΒΓ, άρα ΔΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

Οπότε προκύπτει ότι ΑΜ =ΜΔ.



β)Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΔ η ΜΝ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και ύψος του τριγώνου, δηλαδή ΜΝ $\perp$ ΑΔ.

γ) Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει $Β\widehat{Α}Γ = Β\widehat{Δ}Γ = 90^o$. Δηλαδή η πλευρά ΒΓ φαίνεται από τις κορυφές Α και Δ υπό ίσες γωνίες, άρα το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο. Επομένως η πλευρά ΔΓ φαίνεται από τις κορυφές Β και Α υπό ίσες γωνίες, δηλαδή $Γ\widehat{Β}Δ = Γ\widehat{Α}Δ$.

1809

ΘΕΜΑ 4

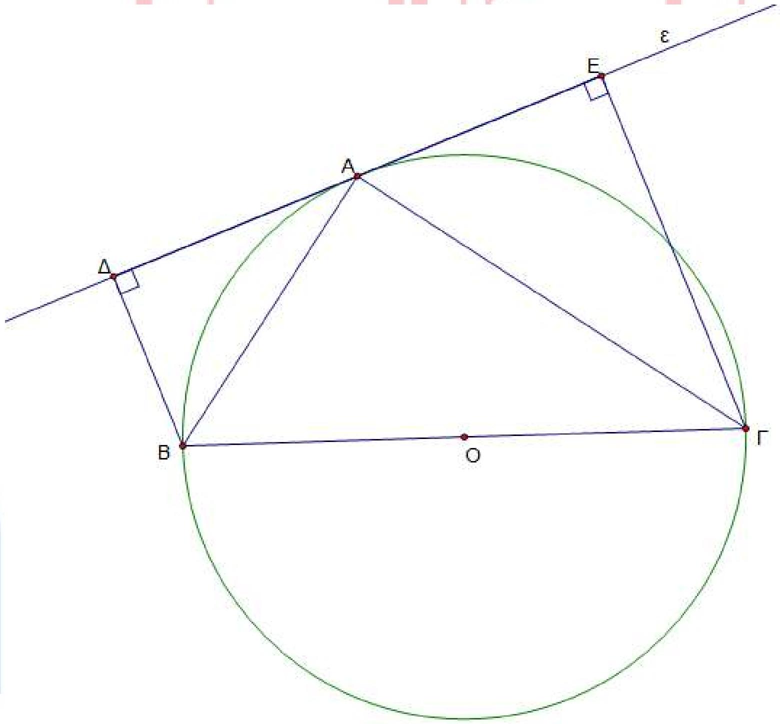
Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο, με διάμετρο ΒΓ. Από σημείο Α του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ε) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$.

Από τα σημεία Β και Γ φέρουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στην ευθεία (ε).

α) Να αποδείξετε ότι ΒΑ και ΓΑ είναι διχοτόμοι των γωνιών $\Delta\hat{B}\Gamma$ και $E\hat{\Gamma}B$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Αν ΑΖ είναι ύψος του τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE = AZ$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $B\Delta + \Gamma E = B\Gamma$. (Μονάδες 9)



1809-Λύση

α) Είναι $B\hat{A}\Gamma = 90^o$ ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.

Η γωνία $\Delta\hat{A}B$ σχηματίζεται από την εφαπτομένη ευθεία (ε) και τη χορδή ΑΒ, άρα ισχύει $\Delta\hat{A}B = A\hat{\Gamma}B$. Όμοια $E\hat{A}\Gamma = A\hat{B}\Gamma$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ βρίσκουμε

$A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B = 90^o \Leftrightarrow A\hat{B}\Gamma = 90^o - A\hat{\Gamma}B$

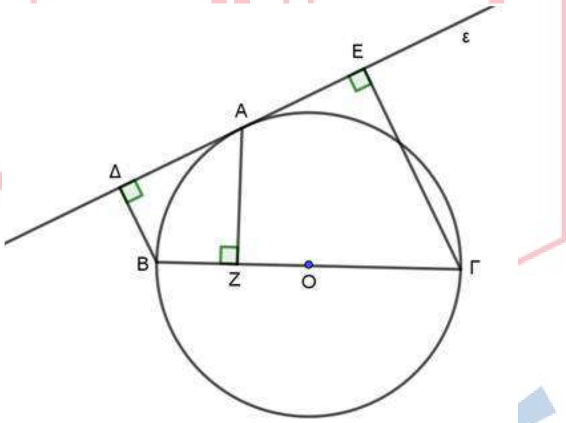
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ βρίσκουμε

$A\hat{B}\Delta + \Delta\hat{A}B = 90^o \Leftrightarrow A\hat{B}\Delta = 90^o - A\hat{\Gamma}B$

Οπότε προκύπτει ότι $A\hat{B}\Gamma = A\hat{B}\Delta$. Άρα η ΒΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{B}\Gamma$.

Όμοια βρίσκουμε $A\hat{\Gamma}B = 90^o - A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}E = 90^o - E\hat{A}\Gamma = 90 - A\hat{B}\Gamma$. Άρα

$A\hat{\Gamma}B = A\hat{\Gamma}E$, δηλαδή η ΓΑ είναι διχοτόμος της $E\hat{\Gamma}B$.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΓ και ΑΕΓ είναι ίσα διότι:

- ΑΓ κοινή πλευρά,
- $Z\hat{\Gamma}A = A\hat{\Gamma}E$, διότι ΑΓ διχοτόμος της $E\hat{\Gamma}B$

Άρα ΑΖ = ΑΕ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $Z\hat{\Gamma}A$, $A\hat{\Gamma}E$ αντίστοιχα.

Επίσης, τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΖ είναι ίσα διότι

- ΑΒ, κοινή πλευρά,
- $A\hat{B}\Delta = A\hat{B}Z$, διότι ΑΒ διχοτόμος της $\Delta\hat{B}\Gamma$

Άρα ΑΔ = ΑΖ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{B}\Delta$, $A\hat{B}Z$ αντίστοιχα.

Οπότε προκύπτει ότι ΑΔ = ΑΕ = ΑΖ.

γ) Από τα ίσα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΖ έχουμε ΒΖ = ΒΔ .

Όμοια, από τα ίσα τρίγωνα ΑΖΓ και ΑΕΓ έχουμε ΓΖ = ΓΕ.

Έχουμε ΒΓ = ΒΖ + ΓΖ = ΒΔ + ΓΕ $\Leftrightarrow$ ΒΓ = ΒΔ + ΓΕ

1847

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Έστω σημείο Α εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ ώστε να ισχύει $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 60^o$. Το ΟΑ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ. Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Δ, τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

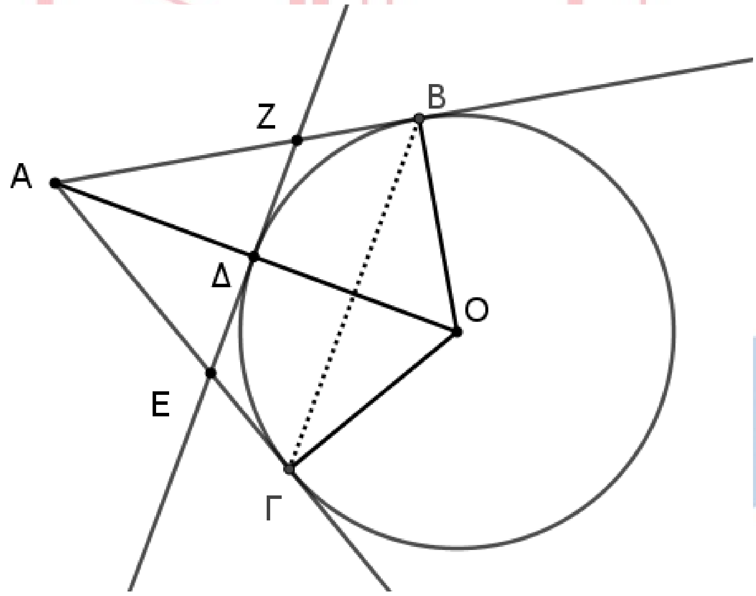
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι εγγράψιμο με ΟΑ=2ΟΒ. (Μονάδες 6)

β) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 6)

γ) $2\mathrm{ZB} = \mathrm{AZ}$ (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 6)



1847-Λύση

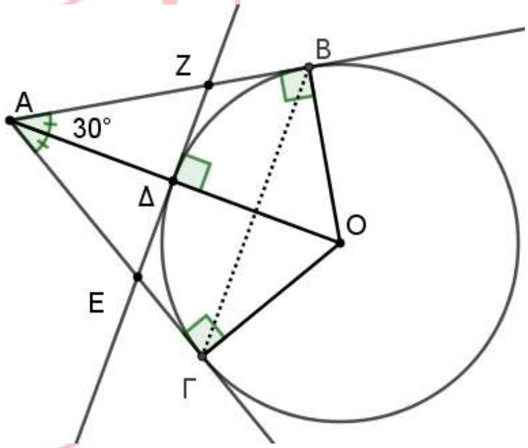
α) Οι εφαπτόμενες ΑΒ και ΑΓ είναι κάθετες στις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ, άρα ΟΒ ⊥ ΑΒ και ΟΓ⊥ ΑΓ οπότε $O\hat{B}A = O\hat{\Gamma}A = 90^o$.

Στο τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι $O\hat{B}A + O\hat{\Gamma}A = 90^o + 90^o = 180^o$ οπότε είναι εγγράψιμο.

Η διακεντρική ευθεία ΑΟ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων, δηλαδή

$O\hat{A}B = \frac{B\hat{A}\Gamma}{2} = \frac{60^o}{2} = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ είναι $O\hat{A}B = 30^o$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή: $OB = \frac{OA}{2} \Leftrightarrow OA = 2OB$.



β) Η ΖΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Δ, άρα ΖΕ⊥ ΟΔ.

Στο τρίγωνο ΑΖΕ το ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Επειδή $B\hat{A}\Gamma = 60^o$ το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

γ) Τα τμήματα ΖΒ και ΖΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ζ, οπότε ΖΒ = ΖΔ (1). Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΕΖ, το ύψος ΑΔ είναι και διάμεσος οπότε:

$ZB = Z\Delta = \frac{EZ}{2} \Leftrightarrow ZB = \frac{AZ}{2} \Leftrightarrow AZ = 2ZB$

δ) Η ΑΟ είναι μεσοκάθετη της χορδής ΒΓ που έχει άκρα τα σημεία επαφής. Τότε: ΒΓ ⊥ ΑΔ και ΕΖ ⊥ ΑΔ. Άρα ΕΖ // ΒΓ, και οι πλευρές ΒΖ και ΕΓ τέμνονται στο Α, άρα δεν είναι παράλληλες, οπότε ΕΖΒΓ τραπέζιο. Επίσης τα τμήματα ΕΓ και ΕΔ είναι εφαπτόμενα του κύκλου που άγονται από το Ε, άρα ΕΓ = ΕΔ (2).

Επειδή ΖΔ = ΕΔ, από τις (1), (2) προκύπτει ΖΒ = ΕΓ, οπότε το τραπέζιο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές.

1848

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και ΑΓ μια διάμετρός του. Θεωρούμε τις χορδές ΑΔ=ΒΓ. Έστω Κ και Λ τα μέσα των χορδών ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

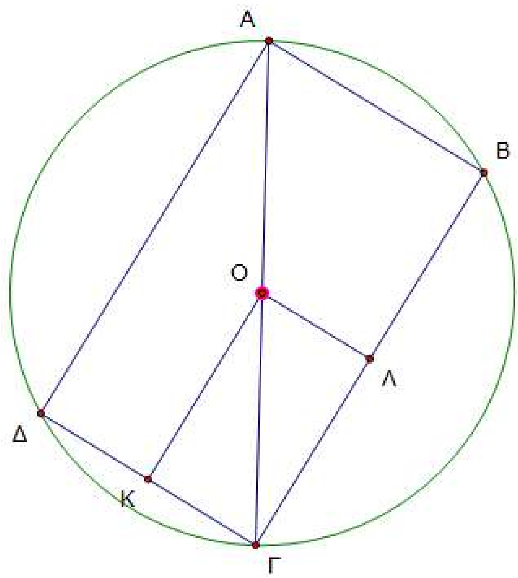
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι χορδές ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες. (Μονάδες 6)

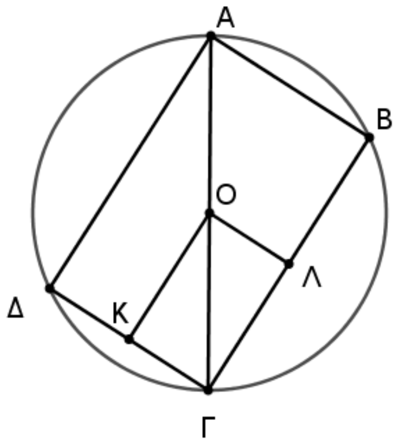
β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

γ) Η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΟΛΓΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



1848-Λύση



α)β Είναι $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο.**β**

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΒΓ είναι ίσα γιατί έχουν την πλευρά ΑΓ κοινή και ΑΔ=ΒΓ.

Άρα $A\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{A}\Gamma$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΓ.

Δηλαδή οι ΑΒ και ΔΓ που τέμνονται από την ΑΓ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $A\hat{\Gamma}\Delta$ και $B\hat{A}\Gamma$ ίσες, άρα ΑΒ // ΔΓ (1).

β)β Είναι $\Gamma\hat{A}\Delta = A\hat{\Gamma}B$ ως περιεχόμενες σε ίσες μία προς μία πλευρές των ίσων τριγώνων ΑΓΔ και ΑΒΓ. Δηλαδή οι ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $A\hat{\Gamma}B$ ίσες, άρα ΑΔ// ΒΓ (2).

Από τις (1) και (2) το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και αφού $A\hat{B}\Gamma = 90^o$, είναι ορθογώνιο.

γ)β Επειδή η γωνία $B\hat{A}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη και ορθή, βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

δ)β Επειδή τα ΟΚ και ΟΛ είναι αποστήματα των χορδών ΓΔ και ΒΓ αντίστοιχα, ισχύει ότι $OK \perp \Gamma\Delta$ και $O\Lambda \perp B\Gamma$ οπότε $O\hat{K}\Gamma = O\hat{\Lambda}\Gamma = 90^o$.**β**

Επίσης από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχουμε ότι $\Delta\hat{\Gamma}B = 90^o \Leftrightarrow K\hat{\Gamma}\Lambda = 90^o$.

Το τετράπλευρο ΟΛΚΓ έχει τρεις γωνίες ορθές, οπότε είναι ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ 4

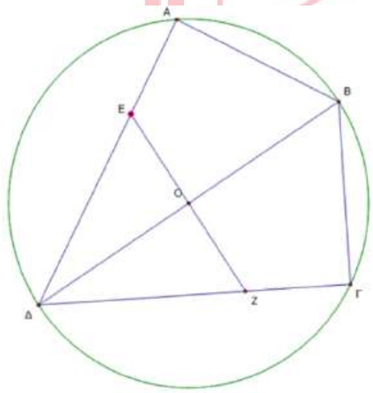
Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος (Ο, ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔΒ να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία Β είναι διπλάσια της γωνίας Δ και οι πλευρές ΑΒ και ΒΓ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη ΒΔ στο Ο, η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΔ και ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 6)

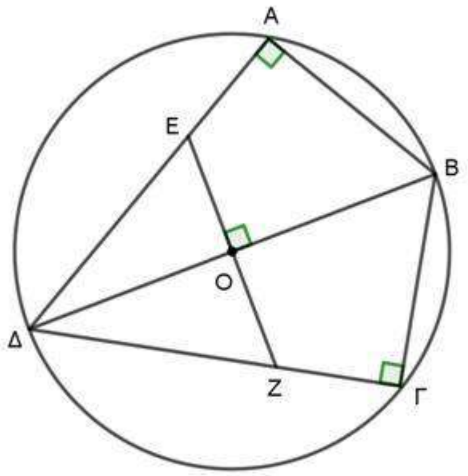
β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΓΒ. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΟ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΟΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. (Μονάδες 6)



1864-Λύση



α) Είναι $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = 90^o$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο άρα $\widehat{B} + \widehat{\Delta} = 180^o$. Όμως $\widehat{B} = 2\widehat{\Delta}$, άρα

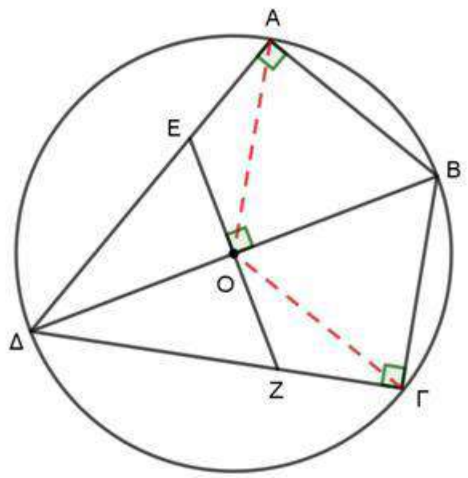
$2\widehat{\Delta} + \widehat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow 3\widehat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow \widehat{\Delta} = 60^o$ και $\widehat{B} = 120^o$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΓΒ έχουν:

• ΒΔ κοινή πλευρά και

• ΑΒ = ΒΓ, από υπόθεση

Άρα τα τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΓΒ είναι ίσα.



γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα, ισχύει $A\widehat{\Delta}B = \Gamma\widehat{\Delta}B$ διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα, οπότε η ΔΒ είναι διχοτόμος της $A\widehat{\Delta}\Gamma$ οπότε:

$A\widehat{\Delta}B = B\widehat{\Delta}\Gamma = \dfrac{A\widehat{\Delta}\Gamma}{2} = \dfrac{60^o}{2} = 30^o$

Επειδή στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ είναι $A\widehat{\Delta}B = 30^o$, η απέναντι κάθετη ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $AB = \dfrac{\Delta B}{2} = \dfrac{2\rho}{2} = \rho$

1864-Λύση

Όμοια, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΒ είναι $\Gamma\hat{\Delta}B = 30^o$, οπότε $B\Gamma = \frac{\Delta B}{2} = \frac{2\rho}{2} = \rho$

Επίσης ΟΑ = ΟΓ = ρ .

Οπότε προκύπτει ότι το ΑΒΓΟ έχει όλες τις πλευρές του ίσες άρα είναι ρόμβος.

δ) Ισχύει ότι: $E\hat{A}B + E\hat{O}B = 90^o + 90^o = 180^o$.

Δηλαδή δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΟΕ είναι παραπληρωματικές, άρα είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

1883

ΘΕΜΑ 4

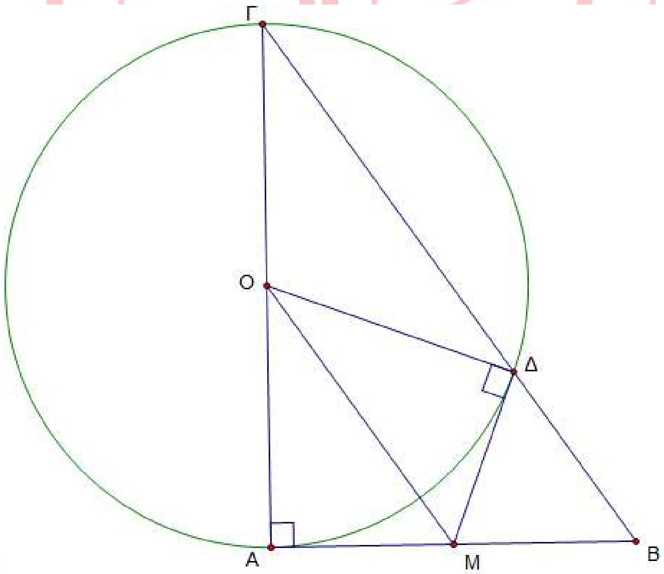
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ ($\hat{A} = 90^\circ$). Με διάμετρο την πλευρά του ΑΓ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα ΒΓ στο Δ. Από το Δ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την ΑΒ στο Μ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{B}$ (Μονάδες 9)

β) $M\hat{\Delta}B = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ και το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Το Μ είναι το μέσο του ΑΒ. (Μονάδες 7)

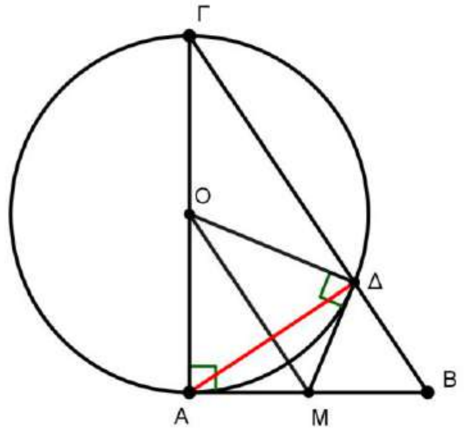


1883-Λύση

α) Η γωνία ΓΔΑ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο και είναι ορθή. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ βρίσκουμε: $\Gamma\widehat{A}\Delta + \widehat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \Gamma\widehat{A}\Delta = 90^o - \widehat{\Gamma}$ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \widehat{B} = 90^o - \widehat{\Gamma}$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει: $\Gamma\widehat{A}\Delta = \widehat{B}$



β) Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές διότι ΟΓ = ΟΔ = ακτίνα και ισχύει ότι: $\widehat{\Gamma} = O\widehat{\Delta}\Gamma$. Τότε $M\widehat{\Delta}B = 180^o - M\widehat{\Delta}O - O\widehat{\Delta}\Gamma = 180^o - 90^o - \widehat{\Gamma}$ δηλαδή τελικά $M\widehat{\Delta}B = 90^o - \widehat{\Gamma}$. Και λόγω της (2) θα είναι $M\widehat{\Delta}B = \widehat{B}$. Άρα το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές με ΜΔ = ΜΒ (3).

γ) Επειδή $MA \perp OA$ και $M\Delta \perp O\Delta$, τα ΜΑ, ΜΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα, οπότε ΜΑ = ΜΔ (4).

Από τις (3), (4) βρίσκουμε ότι ΜΑ = ΜΒ, δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

1886

ΘΕΜΑ 4

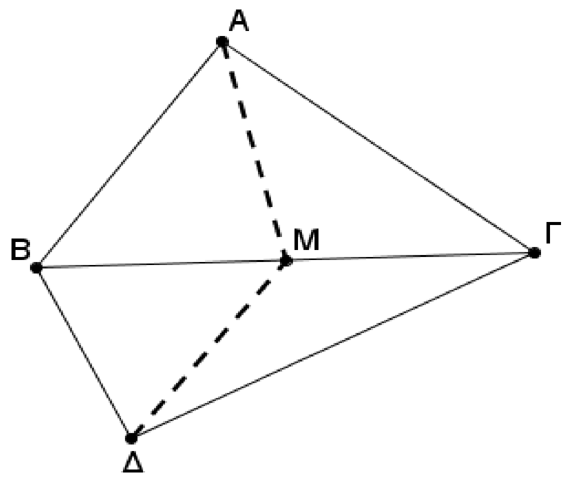
Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) και ΔΒΓ ($\hat{\Delta} = 90^o$) (όπου Α και Δ εκατέρωθεν της ΒΓ) και το μέσο Μ της ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) $A\hat{M}\Delta = 2A\hat{\Gamma}\Delta$ (Μονάδες 9)

γ) $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$ (Μονάδες 7)



1886-Λύση

α) Το τμήμα ΑΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή ΑΜ $= \frac{ΒΓ}{2}$.

Όμοια, το τμήμα ΔΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΒΔΓ, που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή ΔΜ $= \frac{ΒΓ}{2}$.

Άρα ΑΜ = ΔΜ, οπότε το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές.

β) Επειδή ΑΜ $= \frac{ΒΓ}{2}$ = ΜΓ το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές οπότε ισχύει ότι:

$Μ\hat{Α}Γ = Μ\hat{Γ}Α$ (1)

Επειδή ΔΜ $= \frac{ΒΓ}{2}$ = ΜΓ το τρίγωνο ΔΜΓ είναι ισοσκελές οπότε ισχύει ότι:

$Μ\hat{Δ}Γ = Μ\hat{Γ}Δ$ (2)

Η γωνία $Α\hat{Μ}Β$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΜΓ άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών, οπότε σε συνδυασμό με τη σχέση (1) βρίσκουμε:

$Α\hat{Μ}Β = Μ\hat{Α}Γ + Μ\hat{Γ}Α \Leftrightarrow Α\hat{Μ}Β = 2Μ\hat{Γ}Α$ (3)

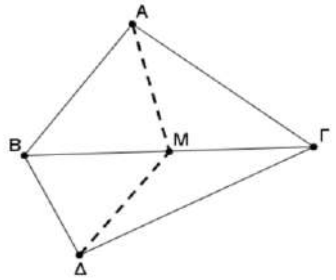
Η γωνία $Β\hat{Μ}Δ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΜΔΓ, άρα χρησιμοποιώντας τη σχέση (2) παίρνουμε

$Β\hat{Μ}Δ = Μ\hat{Δ}Γ + Μ\hat{Γ}Δ \Leftrightarrow Β\hat{Μ}Δ = 2Μ\hat{Γ}Δ$ (4)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (3), (4) και βρίσκουμε:

$Α\hat{Μ}Β + Β\hat{Μ}Δ = 2Μ\hat{Γ}Α + 2Μ\hat{Γ}Δ \Leftrightarrow Α\hat{Μ}Δ = 2Α\hat{Γ}Δ$

γ) Είναι $Β\hat{Α}Γ + Β\hat{Δ}Γ = 90^o + 90^o = 180^o$, δηλαδή δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματικές άρα το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο. Επομένως η πλευρά του ΓΔ φαίνεται από τις κορυφές Α και Β υπό ίσες γωνίες, δηλαδή $Γ\hat{Β}Δ = Γ\hat{Α}Δ$.



1892

ΘΕΜΑ 4

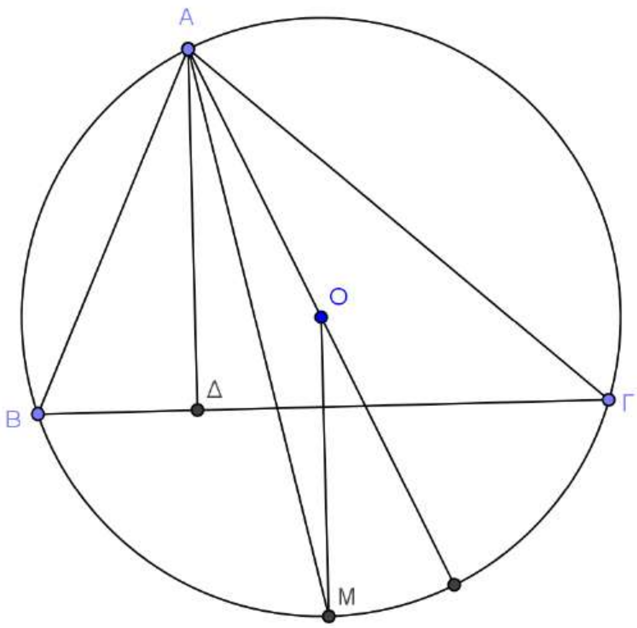
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο. Θεωρούμε το μέσο Μ του τόξου ΒΓ, το οποίο αντιστοιχεί σε κυρτή επίκεντρη γωνία και το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

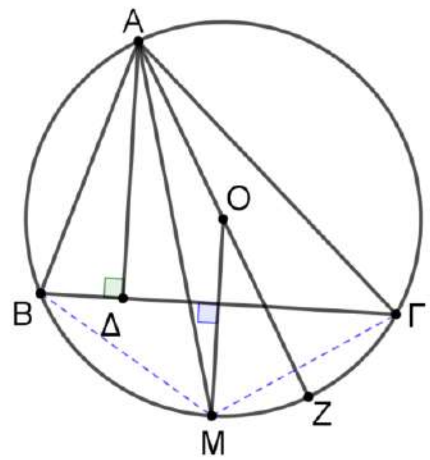
α) ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}O$. (Μονάδες 8)

β) $O\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B$ (Μονάδες 9)

γ) $\Delta\hat{A}O = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ (Μονάδες 8)



1892-Λύση



α) Επειδή το Μ είναι το μέσο του τόξου ΒΓ , τα τόξα ΒΜ και ΜΓ είναι ίσα, άρα το ίδιο ισχύει και για τις χορδές ΒΜ και ΜΓ.

Δηλαδή το Μ ισαπέχει από τα Β και Γ, άρα είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΒΓ. Το ίδιο ισχύει και για το Ο, εφόσον ΟΒ = ΟΓ ως ακτίνες του κύκλου. Οπότε η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ, άρα ΟΜ $\perp$ ΒΓ. Επίσης ΑΔ $\perp$ ΒΓ, άρα οι ΑΔ και ΟΜ είναι παράλληλες ως κάθετες στην ΒΓ.

Είναι $\Delta\widehat{A}M$ = $A\widehat{M}O$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΟΜ, ΑΔ, οι οποίες τέμνονται από την ΑΜ.

Επίσης οι ΟΑ και ΟΜ είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου, άρα ΟΑ = ΟΜ. Άρα το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΜ. Επομένως $M\widehat{A}O$ = $A\widehat{M}O$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $M\widehat{A}O = \Delta\widehat{A}M$, άρα η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\widehat{A}O$.

β) Επειδή τα τόξα ΒΜ και ΜΓ είναι ίσα οι αντίστοιχες εγγεγραμμένες γωνίες ΒΑΜ και ΜΑΓ είναι ίσες. Από το ερώτημα (α) ισχύει $\Delta\widehat{A}M$ = $M\widehat{A}O$.

Οπότε $O\widehat{A}\Gamma = M\widehat{A}\Gamma - M\widehat{A}O = B\widehat{A}M - \Delta\widehat{A}M = \Delta\widehat{A}B$.

γ) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο με $A\widehat{\Delta}B$ ορθή. Άρα, από το άθροισμα γωνιών τριγώνου ΑΒΔ οι $B\widehat{A}\Delta$ και $\widehat{B}$ είναι συμπληρωματικές. Επομένως, $\Delta\widehat{A}B + \widehat{B} = 90^o$ (3).

Επίσης, το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο, άρα οι $\Gamma\widehat{A}\Delta + \widehat{\Gamma} = 90^o$.

Όμως $\Gamma\widehat{A}\Delta = O\widehat{A}\Gamma + \Delta\widehat{A}O$. Άρα $O\widehat{A}\Gamma + \Delta\widehat{A}O + \widehat{\Gamma} = 90^o$ (4).

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι $O\widehat{A}\Gamma + \Delta\widehat{A}O + \widehat{\Gamma} = \Delta\widehat{A}B + \widehat{B}$.

Όμως, όπως έχουμε αποδείξει στο β), $O\widehat{A}\Gamma = \Delta\widehat{A}B$, άρα $\Delta\widehat{A}O + \widehat{\Gamma} = \widehat{B}$ ή $\Delta\widehat{A}O = \widehat{B} - \widehat{\Gamma}$.

1896

ΘΕΜΑ 4

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) έχουμε ότι $\hat{B} = 30^0$. Φέρουμε το ύψος ΑΗ και τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ. Από την κορυφή Β φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο ΑΜ, η οποία την τέμνει στο σημείο Ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

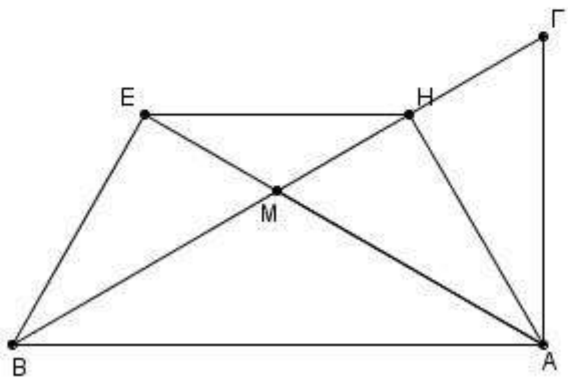
Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \frac{AB}{2}$, (Μονάδες 7)

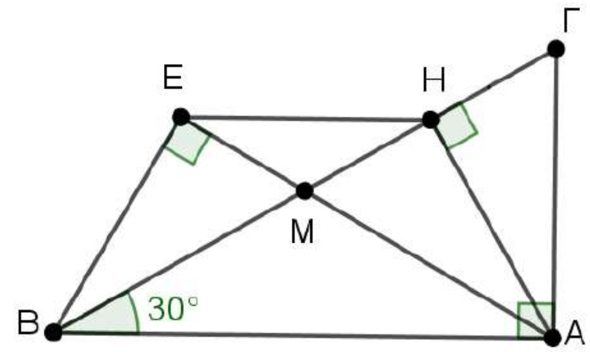
β) ΑΗ=ΒΕ, (Μονάδες 7)

γ) το τετράπλευρο ΑΗΕΒ είναι εγγράψιμο, (Μονάδες 6)

δ) ΕΗ//ΑΒ. (Μονάδες 5)



1896-Λύση



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα ΑΜ = ΜΒ = ΜΓ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

Οπότε το τρίγωνο ΜΒΑ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ και $Μ\hat{Α}Β$ = $Μ\hat{Β}Α$ = 30°.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΑΒ είναι $Ε\hat{Α}Β$ = 30°, άρα ΒΕ = $\frac{ΑΒ}{2}$ (1).

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΗΑ είναι $Η\hat{Β}Α$ = 30°, άρα ΑΗ = $\frac{ΑΒ}{2}$ (2). Τότε από (1), (2) προκύπτει ΑΗ = ΒΕ.

γ) Επειδή $Β\hat{Ε}Α$ = $Β\hat{Η}Α$ = 90°, στο τετράπλευρο ΑΗΕΒ η πλευρά του ΑΒ φαίνεται από τις κορυφές Ε και Η υπό ίσες γωνίες, άρα το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.

δ) Στο τετράπλευρο ΑΗΕΒ, εφόσον είναι εγγράψιμο, η πλευρά του ΑΗ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες, δηλαδή ισχύει $Α\hat{Ε}Η$ = $Η\hat{Β}Α$.

Όμως $Η\hat{Β}Α$ = 30°, άρα $Α\hat{Ε}Η$ = 30° = $Ε\hat{Α}Β$.

Άρα οι ευθείες ΕΗ και ΑΒ που τέμνονται από την ΑΕ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $Α\hat{Ε}Η$ και $Ε\hat{Α}Β$ ίσες. Επομένως ΕΗ // ΑΒ.

1897

ΘΕΜΑ 4

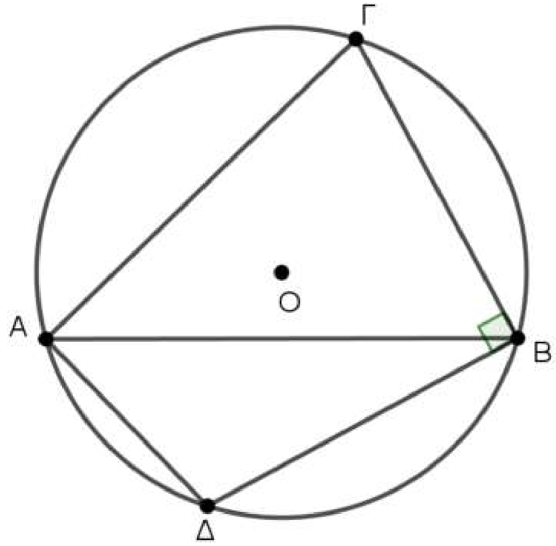
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Έστω σημείο Δ του τόξου ΑΒ τέτοιο ώστε ΔΒ$\perp$ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ$\perp$ΑΓ. (Μονάδες 8)

β) Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ το μέσον της ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΟΜ=$\frac{ΑΗ}{2}$. (Μονάδες 8)

1897-Λύση



α) Στο τετράπλευρο ΑΓΒΔ, λόγω του ότι είναι εγγεγραμμένο ισχύει ότι οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

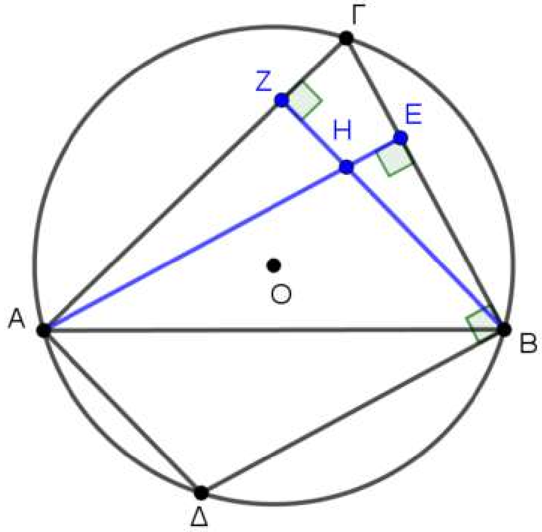
$\Delta\widehat{A}\Gamma + \Delta\widehat{B}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow \Delta\widehat{A}\Gamma + 90^o = 180^o \Leftrightarrow \Delta\widehat{A}\Gamma = 90^o$.

Άρα $A\Delta \perp A\Gamma$.

β) Αν ΑΕ και ΒΖ τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ, τότε το σημείο τομής τους Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου. Έχουμε:

- $A\Delta \perp A\Gamma$, από το α) και $BZ \perp A\Gamma$. Άρα ΑΔ // ΒΖ, γιατί είναι και οι δύο κάθετες στην ΑΓ. Οπότε και ΑΔ // ΒΗ (1).
- $\Delta B \perp B\Gamma$, από υπόθεση και $AE \perp B\Gamma$ άρα ΔΒ // ΑΕ, γιατί είναι και οι δύο κάθετες στην ΒΓ οπότε και ΔΒ // ΑΗ (2).

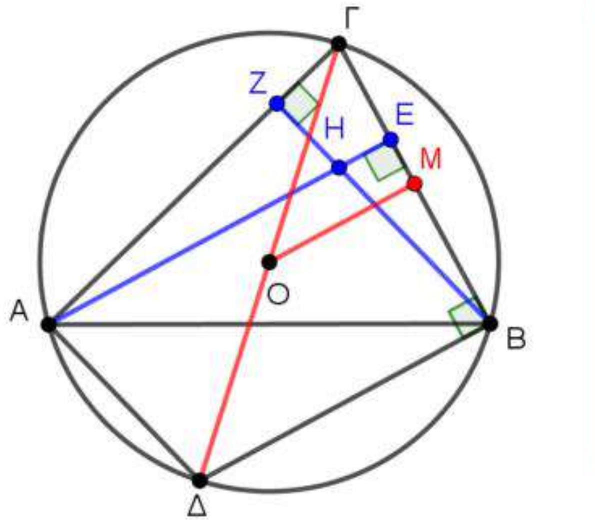
Από (1), (2) το ΑΔΒΗ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.



1897-Λύση

γ) Για την εγγεγραμμένη γωνία ΔΑΓ ισχύει $\Delta\hat{A}\Gamma = 90^o$, άρα βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα η χορδή ΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου. Στο τρίγωνο ΒΓΔ, το ΟΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΓΔ (το Ο είναι κέντρο του κύκλου και η ΓΔ διάμετρός του) και ΓΒ οπότε ισχύει $OM = \frac{B\Delta}{2}$ (3).

Επειδή το ΑΔΒΗ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε ΒΔ = ΑΗ (4). Από (3), (4) βρίσκουμε $OM = \frac{AH}{2}$.



11892

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμία από αυτές το γράμμα Σ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή το γράμμα Λ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και κάποια γωνία ίση, τότε είναι ίσα.

ii. Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

iii. Κάθε τετράγωνο είναι και ρόμβος.

iv. Κάθε επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης που βαίνει στο ίδιο τόξο.

v. Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου η απόσταση από το μέσο κάθε πλευράς είναι τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

(Μονάδες 10)

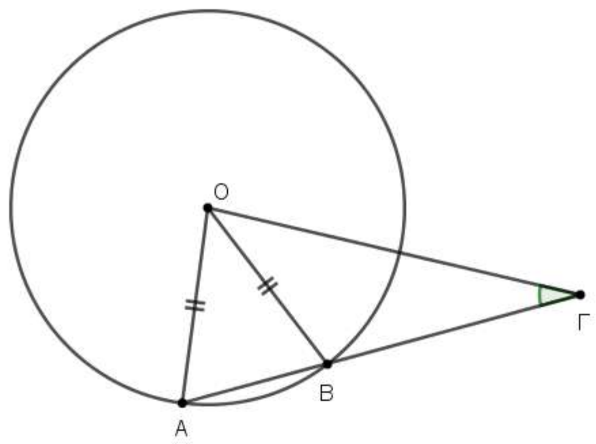
β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

(Μονάδες 15)

11892-Λύση

α)

i. Λάθος.



Τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΟΑΓ έχουν ΟΑ = ΟΒ, γιατί είναι ακτίνες του κύκλου, ΟΓ κοινή, και $\hat{\Gamma}$ κοινή. Όμως δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είναι ίσα, γιατί η $\hat{\Gamma}$ δεν είναι περιεχόμενη γωνία στις ίσες πλευρές. Μάλιστα τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΟΑΓ δεν είναι ίσα αφού ΑΓ>ΒΓ.

ii. Σωστό.

iii. Σωστό.

iv. Σωστό.

v. Λάθος. Η απόσταση του βαρύκεντρου από το μέσο της πλευράς είναι το $\frac{1}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

β) Σελίδα 88 σχολικού βιβλίου, παρ. 4.6.

11895

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.

ii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

iii. Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται.

iv. Η διάμεσος ενός τραπεζίου ισούται με το άθροισμα των δύο βάσεων του τραπεζίου.

v. Αν γνωρίζουμε ότι δύο κύκλοι που έχουν ακτίνες R και ρ με $\mathrm{R} > \rho$, εφάπτονται, τότε συμπεραίνουμε ότι η απόσταση των κέντρων τους είναι $\mathrm{R} + \rho$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα, ότι κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

(Μονάδες 15)

11895-Λύση

α)

i. Σ, Παράγραφος 4.6.

ii. Σ, Παράγραφος 6.2.

iii. Σ, Παράγραφος 5.2.

iv. Λ, Παράγραφος 5.10. Η διάμεσος ενός τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των δύο βάσεων του τραπεζίου.

iv. Λ, Παράγραφος 3.16. Αν εφάπτονται εσωτερικά η απόσταση των κέντρων είναι $\mathrm{R}-\rho$

β) Παράγραφος 3.6. ΘΕΩΡΗΜΑ IV (σελ 51).

11898

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

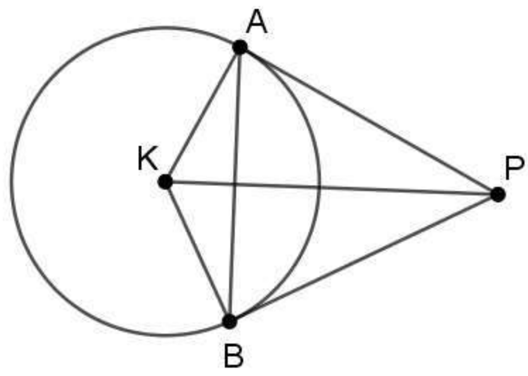
i. Οι μεσοκάθετες των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, που είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

ii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

iii. Σε κάθε τρίγωνο βαρύκεντρο ονομάζεται το σημείο τομής των διχοτόμων του.

iv. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που άγεται από οποιαδήποτε κορυφή είναι διχοτόμος της αντίστοιχης γωνίας και διάμεσος της απέναντι πλευράς.

v. Αν στο παρακάτω σχήμα η ΡΚ είναι η διακεντρική ευθεία του σημείου Ρ, τότε η ίδια ευθεία είναι μεσοκάθετος της χορδής ΑΒ.



(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία ισούται με 30^o, τότε η απέναντι πλευρά της είναι το μισό της υποτείνουσας.

(Μονάδες 15)

11898-Λύση

α)

i. Σ, Παράγραφος 4.5.

ii. Σ, Παράγραφος 6.2.

iii. Λ, Παράγραφος 5.7. Βαρύκεντρο (ή κέντρο βάρους) λέγεται το σημείο τομής των διαμέσων κάθε τριγώνου.

iv. Λ, Παράγραφος 3.6. Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

iv. Σ, Παράγραφος 3.15.

β) Παράγραφος 5.9. Πόρισμα (μόνο το ευθύ).

11964

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι παραπληρωματικές.

ii. Υπάρχουν σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος που δεν ισαπέχουν από τα άκρα του.

iii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

iv. Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

v. Κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία βάση είναι ίσες. (Μονάδες 15)

11964-Λύση

α) i→ Λάθος , παράγραφος 4.6

ii→ Λάθος , παράγραφος 3.2

iii→ Σωστό , παράγραφος 6.2

iv→ Σωστό , παράγραφος 3.10

v→ Σωστό , παράγραφος 5.5

β) Σχολικό σελίδα 118, παράγραφος 5.11

12066

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ii. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου.

iii. Αν δύο διαφορετικές ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες προς μια τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

iv. Αν ένα τετράπλευρο έχει όλες τις γωνίες του ίσες, τότε είναι τετράγωνο.

v. Αν σε ένα τετράπλευρο δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

(Μονάδες 10)

β) Από ένα σημείο Α εκτός ευθείας ε φέρουμε το κάθετο τμήμα ΑΚ προς την ε και τα πλάγια τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Να αποδείξετε ότι, αν τα πλάγια τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους Β και Γ ισαπέχουν από το ίχνος Κ της καθέτου.

(Μονάδες 15)

α)

12066-Λύση

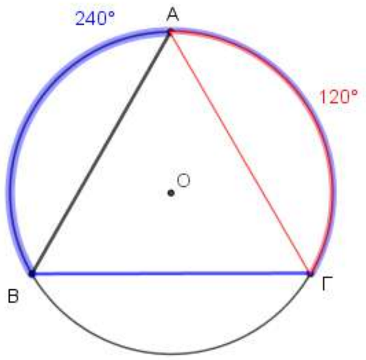
i. Λ

§ 3.4

Γιατί δεν αναφέρεται αν τα τόξα είναι και τα δύο μικρότερα ή μεγαλύτερα του ημικυκλίου.

Μπορούμε να δώσουμε ως αντιπαράδειγμα το εξής.

Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Οι ίσες πλευρές του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ είναι και ίσες χορδές του κύκλου. Στην χορδή ΑΓ το τόξο το μικρότερο του ημικυκλίου έχει μέτρο 120°, ενώ στην χορδή ΒΓ το τόξο το μεγαλύτερο του ημικυκλίου έχει μέτρο 240°. Είναι προφανές ότι, ενώ οι χορδές ΑΓ και ΒΓ είναι ίσες τα τόξα ΑΓ και ΒΑΓ δεν είναι ίσα.



ii. Λ

§ 3.10

Γιατί κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις <u>απέναντι</u> εσωτερικές γωνίες. Για παράδειγμα, η εξωτερική γωνία της ορθής γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου, είναι ίση με την εσωτερική της, δηλαδή την ορθή και όχι μεγαλύτερη.

iii. Σ

§ 4.2

iv. Λ

§ 5.5

Γιατί τότε είναι ορθογώνιο. Χρειάζεται επιπλέον να είναι και ρόμβος ώστε τελικά να είναι τετράγωνο.

v. Σ

§ 6.6

β) § 3.13

Θεώρημα Ι σχ. βιβλίο σελ. 65 (μόνο το ευθύ)

12070

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Από κάθε σημείο P που είναι εξωτερικό ενός κύκλου διέρχεται μόνο μία εφαπτόμενη ευθεία προς τον κύκλο.

ii. Σε όλα τα κυρτά πολύγωνα το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών τους είναι 4 ορθές.

iii. Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος.

iv. Σε κάθε τραπέζιο οι διαγώνιές του είναι ίσες.

v. Δύο εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα του ίδιου κύκλου, είναι ίσες.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου ανά δύο είναι ίσες.

(Μονάδες 15)

12070-Λύση

α)

i. Λ

(Από το σημείο Ρ που είναι εξωτερικό ενός κύκλου υπάρχουν δυο εφαπτόμενες προς τον κύκλο).

ii. Σ (θεωρία § 4.8)

iii. Σ (θεωρία § 5.5)

iv. Λ (η ιδιότητα αυτή ισχύει μόνο στα ισοσκελή τραπέζια και όχι σε κάθε τραπέζιο).

v. Σ (θεωρία § 6.2)

β) Απόδειξη κριτηρίου i) σχολικό βιβλίο σελίδα 103, § 5.2

12106

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες.

ii. Από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται άπειρες κάθετες στην ευθεία.

iii. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.

iv. Κάθε τετράπλευρο με ίσες διαγωνίους είναι ορθογώνιο.

v. Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη του κύκλου στο άκρο της χορδής ισούται με την επίκεντρη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.

(Μονάδες 15)

12106-Λύση

α) i. Σωστό (σελ. 60)

ii. Λάθος γιατί από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος.

iii. Σωστό (σελ. 89)

iv. Λάθος γιατί μπορούμε να σχεδιάσουμε τετράπλευρο με ίσες διαγωνίους οι οποίες δεν διχοτομούνται.

v. Λάθος γιατί η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής και η εγγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης.

β) σελ. 107

12416

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη της διαμέτρου.

ii. Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα.

iii. Αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου είναι ίσες και κάθετες, τότε το τετράπλευρο είναι τετράγωνο.

iv. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία είναι ίσα.

v. Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που μπορούμε να φέρουμε από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

(Μονάδες 15)

12416-Λύση

α)

i. Λάθος

Η πρόταση δεν ισχύει όταν η χορδή είναι διάμετρος του κύκλου.

ii. Σωστό

Πόρισμα ΙΙ, σελίδα 103 σχολικό βιβλίο.

iii. Λάθος

Θα πρέπει το τετράπλευρο να είναι παραλληλόγραμμο.

iv. Σωστό

§3.6, $1^{η}$ συνέπεια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων, σελίδα 49 σχολικό βιβλίο (Σχήμα 24).

v. Σωστό

Πόρισμα i, σελίδα 129 σχολικό βιβλίο.

β) §3.15, Θεώρημα ΙΙ (απόδειξη), σελίδα 68 σχολικό βιβλίο (Σχήμα 60).

12419

ΘΕΜΑ 4

Δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r), με R>r, τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από το σημείο Α φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διάκεντρο των κύκλων, η οποία τέμνει τους κύκλους (Κ, R) και (Λ, r) στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) ΓΔ=2ΚΛ

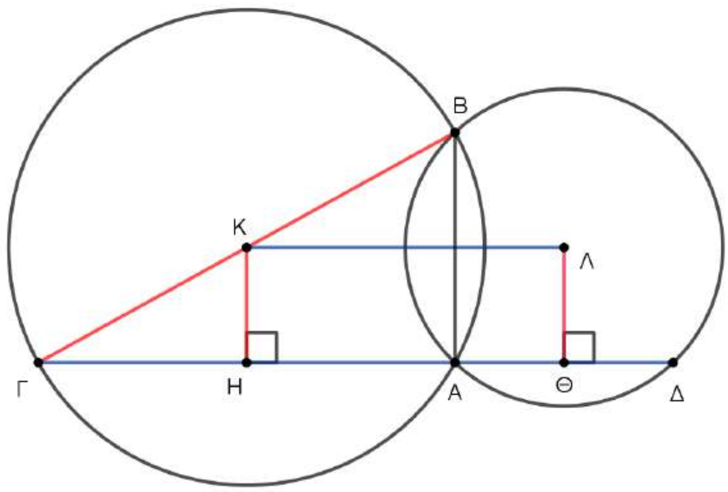
(Μονάδες 15)

β) Τα σημεία Β και Γ είναι αντιδιαμετρικά.

(Μονάδες 10)

12419-Λύση

α) Έστω οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r), με R>r, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α, Β και η τέμνουσα ΓΑΔ παράλληλη στη διάκεντρο ΚΛ.



Φέρουμε τα αποστήματα ΚΗ και ΛΘ των χορδών ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Το τετράπλευρο ΚΛΘΗ είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες (ΚΛ//ΗΘ από υπόθεση και ΚΗ//ΛΘ αφού ΚΗ, ΛΘ είναι κάθετα στη ΓΔ). Οπότε ΚΛ=ΗΘ.

Επίσης, τα σημεία Η, Θ είναι μέσα των χορδών ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Οπότε έχουμε:

ΓΔ=ΓΑ+ΑΔ=2ΗΑ+2ΑΘ=2(ΗΑ+ΑΘ)=2ΗΘ=2ΚΛ

β) Η διάκεντρος ΚΛ των δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους ΑΒ, οπότε ΑΒ⊥ΚΛ. Επίσης, ΚΛ//ΓΔ. Άρα, ΑΒ⊥ΓΔ. Επομένως, η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή και εγγεγραμμένη στον κύκλο (Κ, R), οπότε η ΒΓ είναι διάμετρος. Συνεπώς, τα σημεία Β και Γ είναι αντιδιαμετρικά.

12460

Θέμα 3

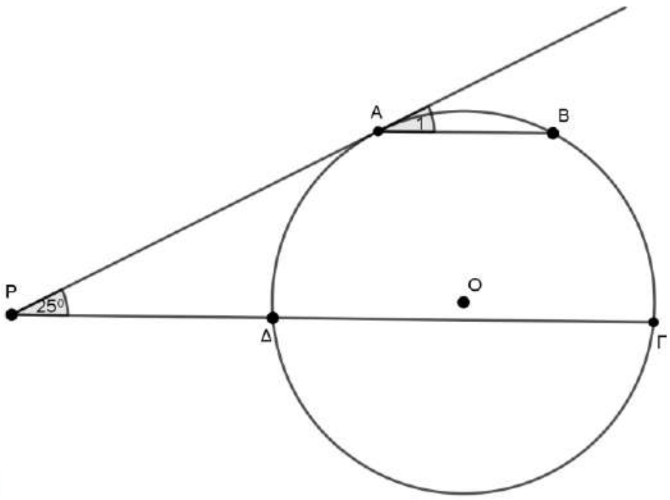
Στον κύκλο (Ο, ρ) δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ έτσι ώστε ΑΒ//ΓΔ. Στο σημείο Α φέρνουμε εφαπτομένη στον κύκλο, η οποία τέμνει την προέκταση της ΓΔ προς το Δ, στο σημείο Ρ. Αν η γωνία $\widehat{\Delta P A}=25^0$ και το τόξο ΓΔ (στο οποίο δεν ανήκουν τα Α,Β) είναι τριπλάσιο του τόξου ΑΒ (στο οποίο δεν ανήκουν τα Γ, Δ) να αποδείξετε ότι:

α) τα τόξα $\overset{\frown}{\Delta A B}$ και $\overset{\frown}{A B \Gamma}$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

β) το τόξο ΑΒ που είναι μικρότερο του ημικυκλίου ισούται με 50^0. (Μονάδες 6)

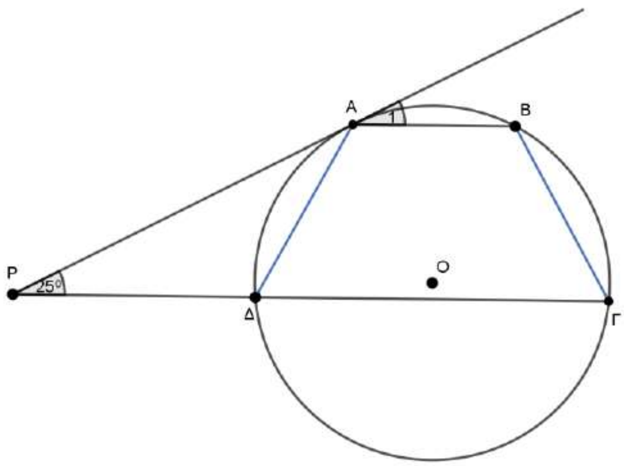
γ) το τόξο ΔΑ στο οποίο δεν ανήκουν τα Β, Γ ισούται με 80^0. (Μονάδες 6)

δ) το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 6)



12460-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Εφόσον ΑΒ//ΓΔ θα είναι $\overset{\frown}{ΔΑ} = \overset{\frown}{ΒΓ}$ (1),

γιατί τα τόξα που περιέχονται μεταξύ παραλλήλων χορδών είναι ίσα, επομένως $\overset{\frown}{ΔΑ} + \overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΒΓ} + \overset{\frown}{ΑΒ}$, άρα $\overset{\frown}{ΔΑΒ} = \overset{\frown}{ΑΒΓ}$.

β) Είναι $\widehat{Α}_1 = Δ\widehat{Ρ}Α = 25^0$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και ΡΓ που τέμνονται από την ΡΑ. Η $\widehat{Α}_1$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης, επομένως είναι ίση με οποιαδήποτε εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής. Όμως η εγγεγραμμένη, ισούται με το μισό του τόξου στο οποίο βαίνει. Άρα το τόξο έχει μέτρο διπλάσιο της εγγεγραμμένης, οπότε το τόξο της χορδής θα έχει μέτρο διπλάσιο της γωνίας χορδής και εφαπτομένης.

Επομένως $\overset{\frown}{ΑΒ} = 2\widehat{Α}_1 = 2 \cdot 25^0 = 50^0$ (2).

γ) Από την υπόθεση, $\overset{\frown}{ΓΔ} = 3 \cdot \overset{\frown}{ΑΒ} = 3 \cdot 50^0 = 150^0$ (3).

Όμως $\overset{\frown}{ΔΑ} + \overset{\frown}{ΑΒ} + \overset{\frown}{ΒΓ} + \overset{\frown}{ΓΔ} = 360^0$ και λόγω της (1), (2), (3) έχουμε:

$\overset{\frown}{ΔΑ} + 50^0 + \overset{\frown}{ΔΑ} + 150^0 = 360^0$, επομένως $2 \cdot \overset{\frown}{ΔΑ} = 160^0$, άρα $\overset{\frown}{ΔΑ} = 80^0$.

δ) Έχουμε ότι ΑΒ//ΓΔ, από την υπόθεση, ενώ $ΑΒ \neq ΓΔ$, ως χορδές που αντιστοιχούν στα άνισα τόξα ΑΒ και ΓΔ. Επομένως, οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ δεν είναι παράλληλες και το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

Λόγω του (α) έχουμε $\overset{\frown}{ΑΔ} = \overset{\frown}{ΒΓ}$, οπότε και οι αντίστοιχες χορδές ΑΔ και ΒΓ είναι ίσες. Άρα το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές.

12637

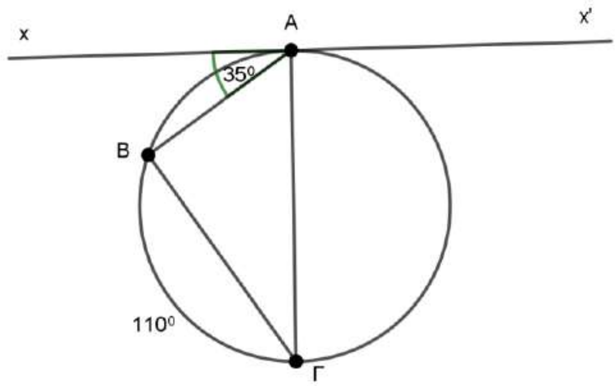
Θέμα 2

Στο παρακάτω σχήμα η xx' είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Α και επιπλέον ισχύουν: $B\hat{A}x = 35^0$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 110^0$.

α) Ποιό είναι το μέτρο της γωνίας Γ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σας. (Μονάδες 13)



12637-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στον δοθέντα κύκλο η $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{x}$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η Γ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής, επομένως $\widehat{\Gamma} = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{x} = 35^0$.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, η γωνία του Α είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, που βαίνει στο τόξο ΒΓ, άρα το μέτρο της θα ισούται με το μισό του. Δηλαδή $\widehat{\mathrm{A}} = \frac{110^0}{2} = 55^0$.

Έτσι στο τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι $\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\Gamma} = 55^0 + 35^0 = 90^0$, οπότε και $\widehat{\mathrm{B}} = 90^0$,

επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

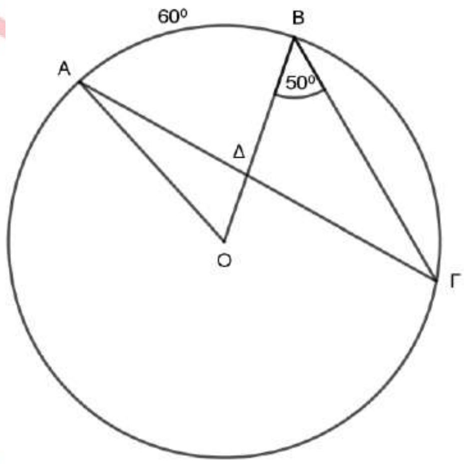
12638

Θέμα 2

Στον κύκλο του σχήματος, το Ο είναι το κέντρο του, το τόξο ΑΒ ισούται με 60^0 και η γωνία Β ισούται με 50^0. Αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:

α) πόσες μοίρες είναι η γωνία Γ. (Μονάδες 10)

β) πόσες μοίρες είναι η γωνία ΑΔΟ (Μονάδες 15)



12638-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η γωνία Γ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, που βαίνει στο τόξο ΑΒ άρα

$\hat{\Gamma} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \dfrac{60^0}{2} = 30^0$.

β) Στο τρίγωνο ΒΓΔ είναι: $\hat{B} + \hat{\Gamma} + B\hat{\Delta}\Gamma = 180^0$ ή $50^0 + 30^0 + B\hat{\Delta}\Gamma = 180^0$

οπότε η $B\hat{\Delta}\Gamma = 100^0$, επομένως η $A\hat{\Delta}O = 100^0$ ως κατά κορυφήν της.

12641

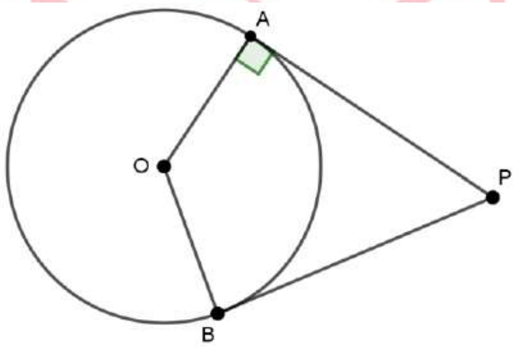
Θέμα 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα 4 cm. Από σημείο Ρ εκτός του κύκλου φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ προς τον κύκλο. Επίσης η γωνία ΑΡΒ ισούται με 60^0.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΡΑΟΒ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΑΡΟ. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΟΡ. (Μονάδες 9)



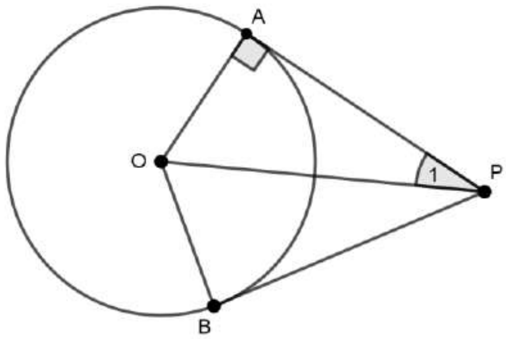
12641-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός κύκλου είναι κάθετα στις ακτίνες που αντιστοιχούν στα σημεία επαφής οπότε

$P\widehat{A}O + P\widehat{B}O = 90^0 + 90^0 = 180^0$ επομένως το τετράπλευρο PAOB είναι εγγράψιμο.

β)



Γνωρίζουμε ότι η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων άρα $A\widehat{P}O = \frac{A\widehat{P}B}{2} = \frac{60^0}{2} = 30^0$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAP η γωνία P_1 ισούται λόγω του (β) ερωτήματος με 30^0, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας,

άρα $OA = \frac{OP}{2}$ ή $OP = 2 \cdot OA = 2 \cdot 4 = 8$ cm.

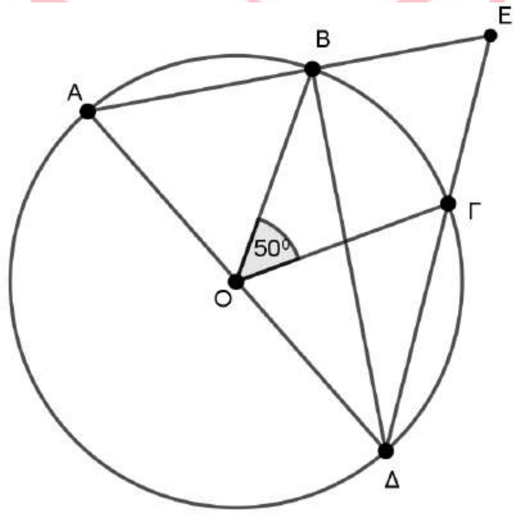
12642

Θέμα 2

Σε κύκλο με κέντρο το Ο, παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, ώστε η ΑΔ να είναι διάμετρος και η γωνία ΒΟΓ να ισούται με 50^0. Αν η προέκταση της ΑΒ προς το Β, τέμνει την προέκταση της ΔΓ προς το Γ στο Ε, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της γωνίας ΒΔΓ. (Μονάδες 10)

β) το μέτρο της γωνία ΑΕΔ. (Μονάδες 15)



12642-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η γωνία ΒΔΓ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και βαίνει στο τόξο ΒΓ, οπότε θα ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης. Άρα $Β\widehat{Δ}Γ = \frac{Β\widehat{Ο}Γ}{2} = \frac{50^0}{2} = 25^0$.

β) Επειδή η ΑΔ είναι διάμετρος, η γωνία ΑΒΔ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, θα είναι ορθή. Άρα $Α\widehat{Β}Δ = 90^0 = Δ\widehat{Β}Ε$, οπότε το τρίγωνο ΔΒΕ είναι ορθογώνιο και η γωνία του ΒΔΕ λόγω του (α) ισούται με 25^0.

Επίσης οι γωνίες ΒΔΕ και ΒΕΔ είναι συμπληρωματικές.

Άρα η $Β\widehat{Ε}Δ = 90^0 - 25^0 = 65^0$. Δηλαδή η $Α\widehat{Ε}Δ = 65^0$.

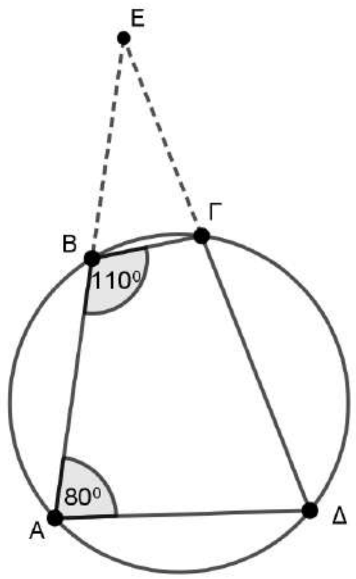
12643

Θέμα 2

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι πλευρές του ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Ε. Αν η γωνία Α του τετραπλεύρου ισούται με 80^0 και η γωνία Β ισούται με 110^0, να υπολογίσετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

α) το μέτρο της γωνία ΕΓΒ. (Μονάδες 12)

β) το μέτρο της γωνία ΒΕΓ. (Μονάδες 13)



12643-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η γωνία ΕΓΒ είναι εξωτερική στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, άρα θα ισούται με την απέναντι εσωτερική. Δηλαδή η $E\hat{\Gamma}B = \hat{A} = 80^0$.

β) Η γωνία ΕΒΓ είναι παραπληρωματική της γωνίας Β του τετραπλεύρου, οπότε θα ισούται με $180^0 – 110^0 = 70^0$. Έτσι στο τρίγωνο ΕΒΓ έχουμε:

$B\hat{E}\Gamma + E\hat{B}\Gamma + E\hat{\Gamma}B = 180^0$ ή $B\hat{E}\Gamma + 70^0 + 80^0 = 180^0$ οπότε η $B\hat{E}\Gamma = 30^0$.

13441

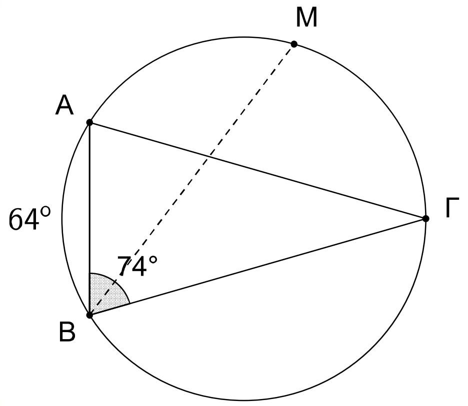
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο με $\hat{B} = 74^o$. Το μέτρο του τόξου ΑΒ που δεν περιέχει το σημείο Γ ισούται με 64^o και Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΓ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

β) Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η ΒΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. (Μονάδες 5)



13441-Λύση

α) Η $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο τόξο ΑΒ, συνεπώς το μέτρο της ισούται με το μισό του μέτρου του τόξου αυτού. Άρα $\hat{\Gamma} = \frac{64^{o}}{2} = 32^{o}$.

Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^{o}$.

Όμως $\hat{B} = 74^{o}$ από τα δεδομένα και $\hat{\Gamma} = 32^{o}$, οπότε έχουμε

$\hat{A} + 74^{o} + 32^{o} = 180^{o}$ ή $\hat{A} = 74^{o}$.

β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί έχει δύο ίσες γωνίες, τις $\hat{A} = \hat{B} = 74^{o}$.

γ) Το σημείο Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΓ, άρα τα τόξα ΑΜ και ΜΓ είναι ίσα. Οι γωνίες $A\hat{B}M$ και $\Gamma\hat{B}M$ είναι ίσες, γιατί είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στα ίσα τόξα ΑΜ και ΜΓ αντίστοιχα. Από την ισότητα $A\hat{B}M = \Gamma\hat{B}M$ συμπεραίνουμε ότι η ΒΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.

13444

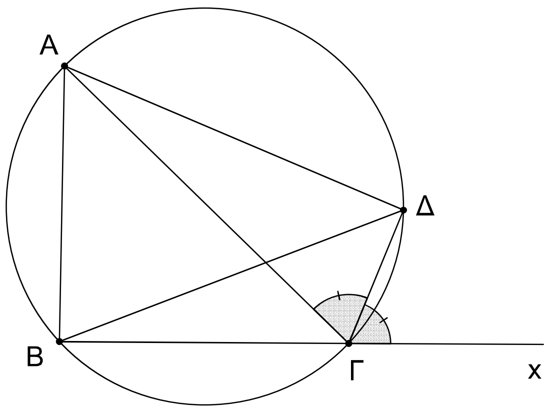
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ. Η γωνία $\Delta\hat{\Gamma}x$ είναι εξωτερική γωνία του τετραπλεύρου και η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}x$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\hat{A}\Delta = \frac{1}{2}A\hat{\Gamma}x$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές και να προσδιορίσετε τις ίσες πλευρές του. (Μονάδες 10)

γ) Αν η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $A\hat{\Gamma}B$ και $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι συμπληρωματικές. (Μονάδες 5)

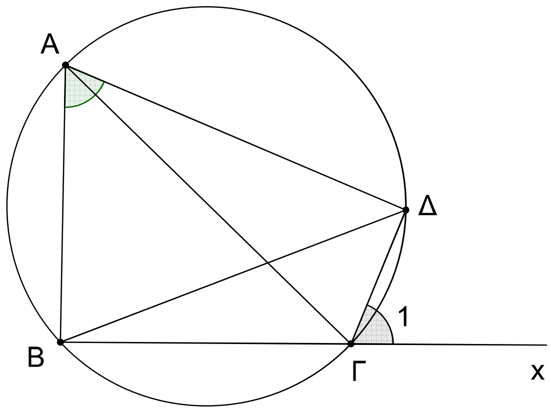


13444-Λύση

α) Η γωνία $\hat{\Gamma}_1$ είναι εξωτερική του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, συνεπώς ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του, δηλαδή $\hat{\Gamma}_1 = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ (1).

Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$, άρα $\hat{\Gamma}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$ (2).

Από τις ισότητες (1), (2) προκύπτει ότι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$ (3).

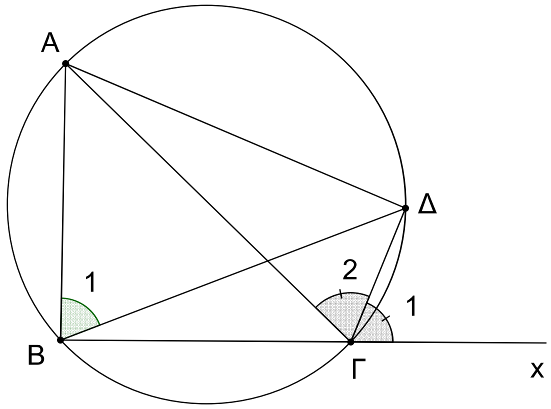


β) Είναι $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\Gamma}_2$ (4),
ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΑΔ.

Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$, άρα $\hat{\Gamma}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$ (5).

Από τις σχέσεις (4), (5) προκύπτει ότι $\hat{\mathrm{B}}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$ (6).

Από τις σχέσεις (3), (6) προκύπτει ότι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \hat{\mathrm{B}}_1$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές αφού έχει δύο ίσες γωνίες. Ίσες πλευρές του τριγώνου είναι οι ΔΒ και ΔΑ, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες του $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\hat{\mathrm{B}}_1$ αντίστοιχα.

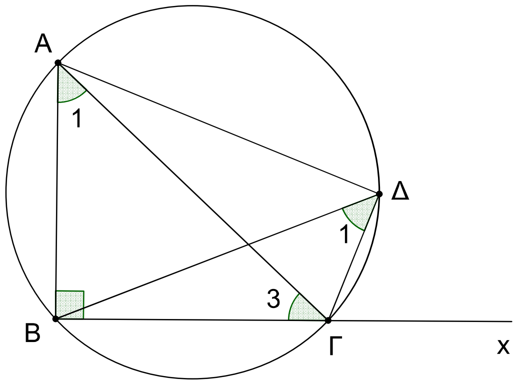


γ) Αν η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου, τότε το τόξο ΑΔΓ είναι ημικύκλιο, οπότε η γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ είναι ορθή ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Οι οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι συμπληρωματικές, δηλαδή
$\hat{\Gamma}_3 + \hat{\mathrm{A}}_1 = 90^{\circ}$ (7).

13444-Λύση

Οι γωνίες $\widehat{A}_1, \widehat{\Delta}_1$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΒΓ, άρα $\widehat{A}_1 = \widehat{\Delta}_1$ (8).

Από τις ισότητες (7), (8) προκύπτει ότι $\widehat{\Gamma}_3 + \widehat{\Delta}_1 = 90^o$, άρα οι γωνίες $A\widehat{\Gamma}B$ και $B\widehat{\Delta}\Gamma$ είναι συμπληρωματικές.



13521

ΘΕΜΑ 4

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Έστω Κ,Λ,Μ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

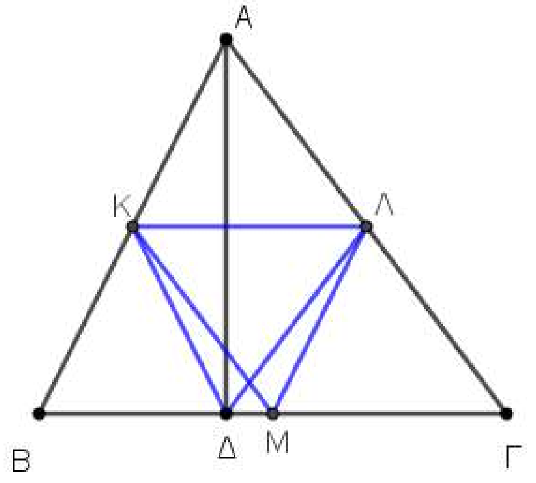
α) ΚΛ // ΒΓ. (Μονάδες 5)

β) i. ΜΛ = ΚΔ (Μονάδες 6)

ii. ΚΜ = ΔΛ. (Μονάδες 6)

γ) Το ΚΛΜΔ είναι ένα εγγράψιμο τετράπλευρο. (Μονάδες 8)

13521-Λύση



Σχεδιάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Θεωρούμε τα μέσα Κ,Λ,Μ των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα και φέρουμε το ύψος ΑΔ.

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το Κ είναι μέσο του ΑΒ και το Λ είναι μέσο του ΑΓ. Άρα, ΚΛ//ΒΓ (1), επειδή το ΚΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Λ είναι μέσο του ΑΓ και το Μ είναι μέσο του ΒΓ.

Άρα, ΛΜ = $\frac{\text{AB}}{2}$ (2), επειδή το ΛΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ, είναι ΔΚ = $\frac{\text{AB}}{2}$ (3), επειδή η ΔΚ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του ΑΒ.

Από (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι ΛΜ = ΔΚ. (4)

ii. Από (1), (4) και επειδή οι ΚΔ και ΜΛ δεν είναι παράλληλες, το ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, επομένως οι διαγώνιοι του είναι ίσες, δηλαδή ΚΜ = ΔΛ. (5)

γ) Τα σημεία Δ και Μ δεν ταυτίζονται γιατί αν το μέσο της ΒΓ Μ ταυτιζόταν με το ίχνος του ύψους ΑΔ, τότε το ύψος ΑΔ θα ήταν και διάμεσος, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ θα ήταν ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, πράγμα άτοπο από την υπόθεση ΑΒ < ΑΓ. Επομένως το ΚΛΜΔ είναι τετράπλευρο.

Από το ερώτημα β)i. Το τραπέζιο ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές. Επομένως ΚΔ = ΜΛ (6) και ΚΜ = ΔΛ.

Τα τρίγωνα ΚΔΛ και ΛΜΔ έχουν:

13521-Λύση

ΚΔ = ΜΛ, από (6)

ΚΜ = ΔΛ από (5)

ΚΛ κοινή πλευρά.

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες.

Άρα και οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές θα είναι αντίστοιχα ίσες, $\text{Κ}\widehat{\Delta}\Lambda = \text{Κ}\widehat{\text{Μ}}\Lambda$. Επομένως το τετράπλευρο ΚΛΜΔ είναι εγγράψιμο γιατί η πλευρά ΚΛ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Δ και Μ υπό ίσες γωνίες.

13538

ΘΕΜΑ 4

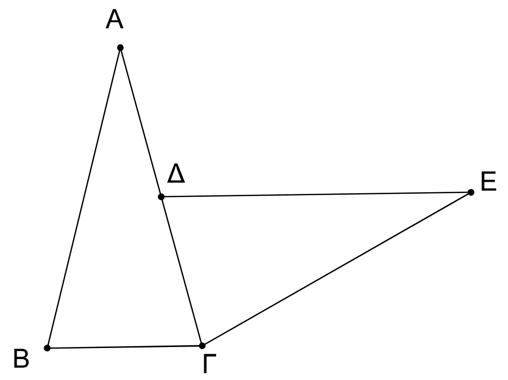
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ με $ΑΒ = ΑΓ = ΕΓ = ΕΔ$, όπου Δ είναι το μέσο της ΑΓ και $ΒΓ = \frac{ΑΒ}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Αν η προέκταση της ΕΔ προς το Δ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο Ζ είναι το μέσο της ΑΒ. (Μονάδες 8)

ii. $Ε\hat{Α}Γ = Ε\hat{Ζ}Γ$. (Μονάδες 7)



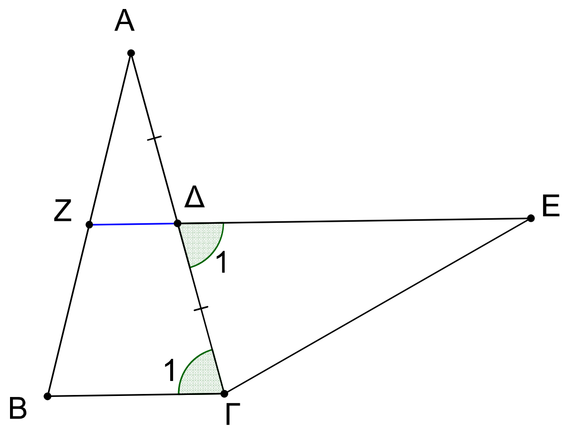
13538-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ έχουν:

- ΑΒ = ΕΓ, από τα δεδομένα.
- ΑΓ = ΕΔ, από τα δεδομένα.
- ΒΓ = ΓΔ, γιατί $ΒΓ = \frac{ΑΒ}{2}$ και $ΓΔ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΑΒ}{2}$, αφού το Δ είναι το μέσο της ΑΓ.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ είναι ίσα, γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (κριτήριο ΠΠΠ).

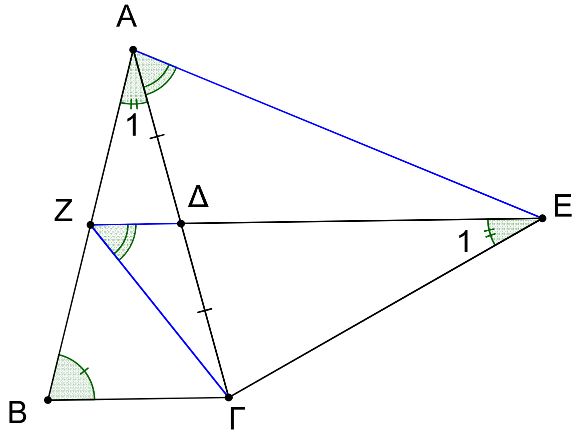
β)



i. Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΕΓΔ προκύπτει ότι $\hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1$, γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ, ΕΓ αντίστοιχα.

Οι ΒΓ και ΔΕ τεμνόμενες από την ΑΓ σχηματίζουν ίσες τις εντός εναλλάξ γωνίες τους $\hat{Γ}_1$ και $\hat{Δ}_1$, άρα η ΒΓ είναι παράλληλη στη ΔΕ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Δ είναι το μέσο της ΑΓ και η ΔΖ είναι παράλληλη στη ΒΓ, άρα το Ζ είναι το μέσο της ΑΒ.



ii. Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΕΓΔ προκύπτει ότι $\hat{Α}_1 = \hat{Ε}_1$, γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα. Άρα το τετράπλευρο ΑΕΓΖ

13538-Λύση

είναι εγγράψιμο, αφού η πλευρά του ΓΖ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Α και Ε υπό ίσες γωνίες. Έτσι στο εγγράψιμο ΑΕΓΖ η πλευρά ΓΕ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Α και Ζ υπό ίσες γωνίες, άρα θα είναι $E\hat{A}\Gamma = E\hat{Z}\Gamma$.

13670

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = 2ΑΒ$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΒΓ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΔ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΖΔ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο ΖΑΔΕ είναι εγγράψιμο.

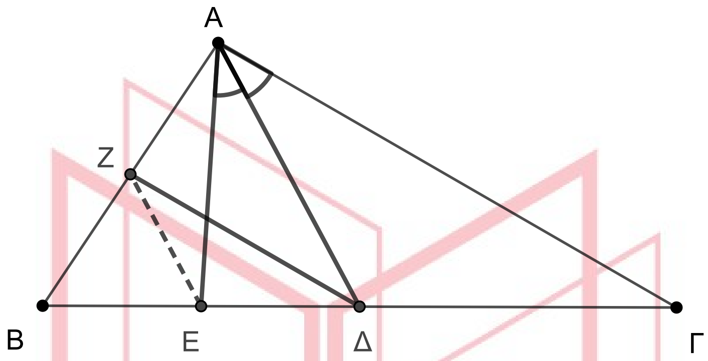
(Μονάδες 5)

γ) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Ε\widehat{Α}Γ$.

(Μονάδες 10)

13670-Λύση

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 2ΑΒ. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΒΓ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΔ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Ζ.



α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο προς την πλευρά ΑΓ και το Δ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ. Επομένως, το Ζ θα είναι μέσο της πλευράς ΑΒ.

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΒΖ έχουν:

ΑΒ = ΒΔ, ως μισά του ΒΓ, αφού ΒΓ = 2ΑΒ (υπόθεση) και ΒΓ = 2ΒΔ (το Δ είναι μέσο του ΒΓ).

ΒΕ = ΒΖ, ως μισά των ίσων τμημάτων ΒΔ και ΑΒ αντίστοιχα.

$\hat{B}$ κοινή γωνία.

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΒΖ είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (Π-Γ-Π).

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΕ και ΒΖΔ προκύπτει ότι $B\hat{A}E = B\hat{\Delta}Z$ (1), ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ και ΒΖ αντίστοιχα.

Το τετράπλευρο ΖΑΔΕ είναι εγγράψιμο διότι η πλευρά ΖΕ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Α και Δ υπό τις ίσες γωνίες $B\hat{A}E$ και $B\hat{\Delta}Z$ αντίστοιχα.

γ) Το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΒΔ, οπότε $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Delta}A$ (2), ως προσκείμενες στη βάση ΑΔ.

Αφαιρώντας τις ισότητες (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$B\hat{A}\Delta - B\hat{A}E = B\hat{\Delta}A - B\hat{\Delta}Z$ ή $E\hat{A}\Delta = Z\hat{\Delta}A$ (3).

Επίσης, $Z\hat{\Delta}A = \Delta\hat{A}\Gamma$ (4), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΖ και ΑΓ τεμνόμενων από την ΑΔ.

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε $E\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$, άρα η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{A}\Gamma$.

13671

ΘΕΜΑ 4

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{B} < \hat{\Gamma}$) θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Έστω Η η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) $HE = E\Gamma$ και $HZ = Z\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) $Z\hat{\Delta}E = Z\hat{H}E$.

(Μονάδες 10)

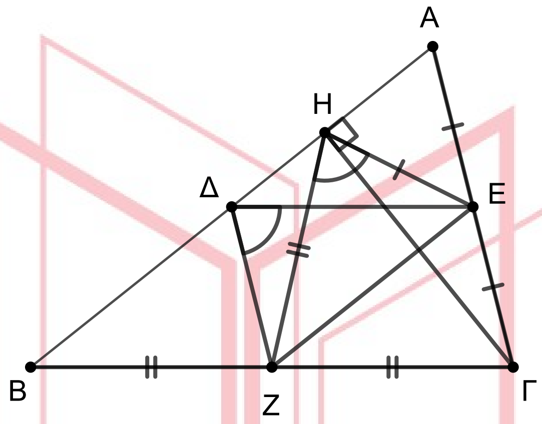
γ) Το τετράπλευρο ΖΔΗΕ είναι εγγράψιμο.

(Μονάδες 5)

13671-Λύση

ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ και σημειώνουμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Φέρουμε την προβολή Η της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά ΑΒ, οπότε $\Gamma H \perp AB$.



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΑΓ ($\Gamma\hat{H}A = 90^o$), η ΗΕ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΑΓ, οπότε $HE = E\Gamma = EA = \frac{A\Gamma}{2}$.

Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΒΓ ($\Gamma\hat{H}B = 90^o$), η ΗΖ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΓ, οπότε $HZ = Z\Gamma = ZB = \frac{B\Gamma}{2}$.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, τα σημεία Δ και Ζ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Επομένως, $\Delta Z // A\Gamma$ και $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2} = E\Gamma$.

Άρα, το τετράπλευρο ΖΔΕΓ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ΔΖ και ΕΓ ίσες και παράλληλες, οπότε $Z\hat{\Delta}E = E\hat{\Gamma}Z$ (1).

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΗΕΓ είναι $\Gamma\hat{H}E = H\hat{\Gamma}E$ (2), αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΕΓ και ΗΕ αντίστοιχα.

Επίσης, στο ισοσκελές τρίγωνο ΗΖΓ είναι $Z\hat{H}\Gamma = H\hat{\Gamma}Z$ (3), αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΖΓ και ΗΖ αντίστοιχα.

Προσθέτοντας τις ισότητες (2) και (3) κατά μέλη, έχουμε:

$Z\hat{H}\Gamma + \Gamma\hat{H}E = H\hat{\Gamma}Z + H\hat{\Gamma}E$ και άρα $Z\hat{H}E = E\hat{\Gamma}Z$ (4).

Από τις ισότητες (1) και (4) προκύπτει τελικά ότι $Z\hat{\Delta}E = Z\hat{H}E$.

γ) Το τετράπλευρο ΖΔΗΕ είναι εγγράψιμο διότι η πλευρά ΖΕ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Δ και Η υπό τις ίσες γωνίες $Z\hat{\Delta}E$ και $Z\hat{H}E$ αντίστοιχα.

13687

ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B = 40^o$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε $ΑΓ = ΟΑ$ και $ΒΔ = ΟΒ$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 70^o$.

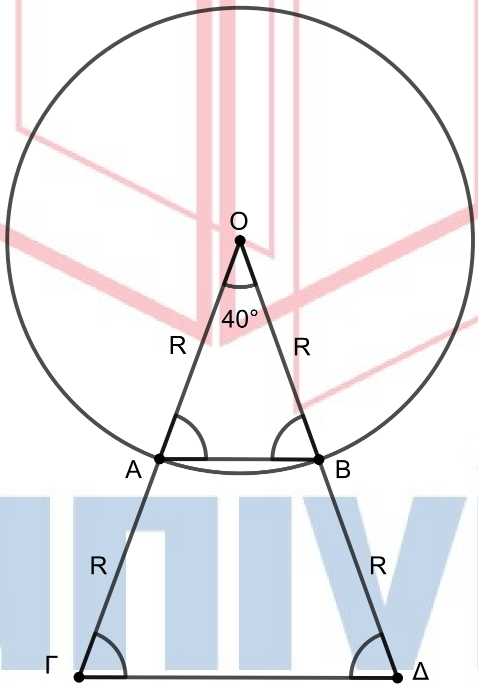
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $O\hat{Γ}Δ$ και $O\hat{Δ}Γ$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι ΑΒ//ΓΔ.

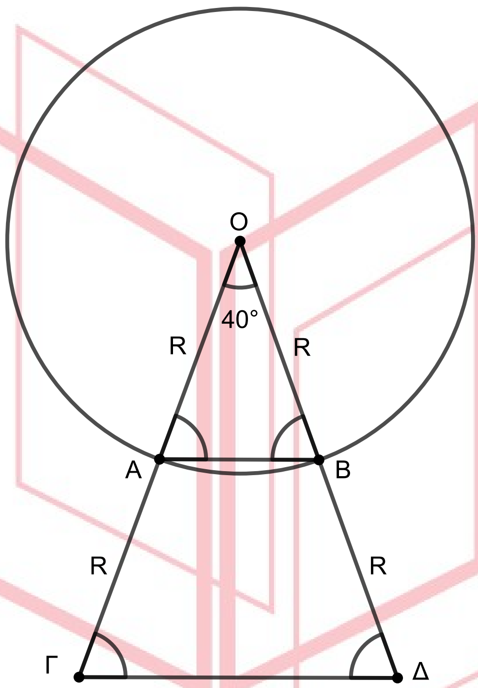
(Μονάδες 5)



13687-Λύση

ΛΥΣΗ

Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία $A\widehat{O}B = 40^o$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε $ΑΓ = ΟΑ$ και $ΒΔ = ΟΒ$.



α) Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, αφού οι πλευρές ΟΑ και ΟΒ είναι ίσες με την ακτίνα R.

Επομένως, οι γωνίες $O\widehat{A}B$ και $O\widehat{B}A$ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση ΑΒ.

Στο τρίγωνο ΟΑΒ ισχύει:

$\widehat{O} + O\widehat{A}B + O\widehat{B}A = 180^o$ ή $40^o + 2O\widehat{A}B = 180^o$ ή $2O\widehat{A}B = 140^o$.

Άρα, $O\widehat{A}B = 70^o$ και $O\widehat{B}A = 70^o$.

β) Τα τμήματα ΟΓ και ΟΔ είναι ίσα ως αθροίσματα ίσων τμημάτων, αφού $ΟΓ = ΟΑ + ΑΓ = 2R$ και $ΟΔ = ΟΒ + ΒΔ = 2R$. Επομένως, το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ.

Στο τρίγωνο ΟΓΔ ισχύει:

$\widehat{O} + O\widehat{Γ}Δ + O\widehat{Δ}Γ = 180^o$ ή $40^o + 2O\widehat{Γ}Δ = 180^o$ ή $2O\widehat{Γ}Δ = 140^o$.

Άρα, $O\widehat{Γ}Δ = 70^o$ και $O\widehat{Δ}Γ = 70^o$.

γ) Οι ΑΒ και ΓΔ τέμνονται από την ΑΓ και σχηματίζουν τις εκτός εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους $O\widehat{A}B$ και $O\widehat{Γ}Δ$ ίσες. Επομένως, $AB // ΓΔ$.

13704

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

ii. Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών του και μικρότερη από τη διαφορά τους.

iii. Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

iv. Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

v. Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι: *αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή*.

(Μονάδες 15)

13704-Λύση

α) i. Σωστό (σελ. 45)

ii. Λάθος. Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα: Κάθε πλευρά τριγώνου είναι **μικρότερη** από το άθροισμα των δύο άλλων και **μεγαλύτερη** από τη διαφορά τους.

iii. Λάθος, γιατί δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη είναι παράλληλες αν σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες **παραπληρωματικές**.

iv. Σωστό (σελ. 113)

v. Σωστό (σελ. 136)

β) Θεώρημα ΙΙ, σελ. 114

13740

ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε μια τυχαία χορδή του ΑΒ, την οποία προεκτείνουμε προς το μέρος του Β κατά ίσο τμήμα ΒΓ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο της Β που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΑ = ΔΓ. (Μονάδες 12)

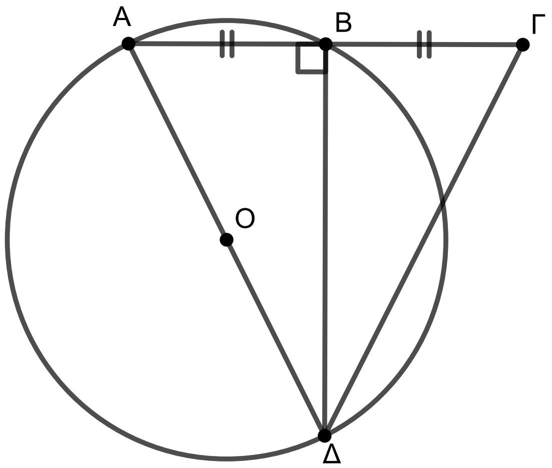
β) Η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 13)

13740-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΔΑΓ, το τμήμα ΔΒ είναι διάμεσος της πλευράς ΑΓ, αφού ΑΒ = ΒΓ από την υπόθεση. Επίσης το τμήμα ΔΒ είναι και ύψος, αφού ΔΒ ⊥ ΑΓ από την υπόθεση. Στο τρίγωνο ΔΑΓ το τμήμα ΔΒ είναι διάμεσος και ύψος, άρα το ΔΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, επομένως ΔΑ = ΔΓ.

β) Τα σημεία Α, Β και Δ είναι σημεία του κύκλου, άρα η γωνία $Α\widehat{Β}Δ$ είναι εγγεγραμμένη και επειδή είναι ορθή, θα βαίνει σε ημικύκλιο. Δηλαδή η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου.



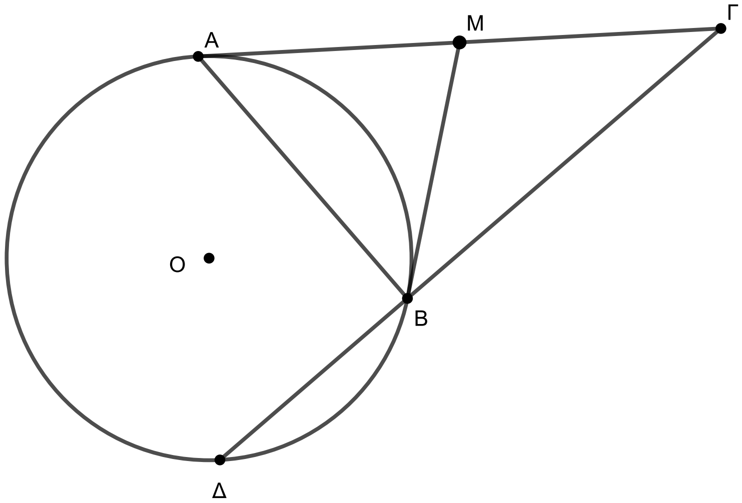
13747

ΘΕΜΑ 2

Από σημείο Μ εξωτερικό ενός κύκλου κέντρου Ο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΑΜ προς το μέρος του Μ και παίρνουμε τμήμα ΜΓ = ΑΜ. Από το σημείο Γ φέρουμε την τέμνουσα ΓΒΔ του κύκλου. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Τα σημεία Α και Δ είναι αντιδιαμετρικά. (Μονάδες 12)

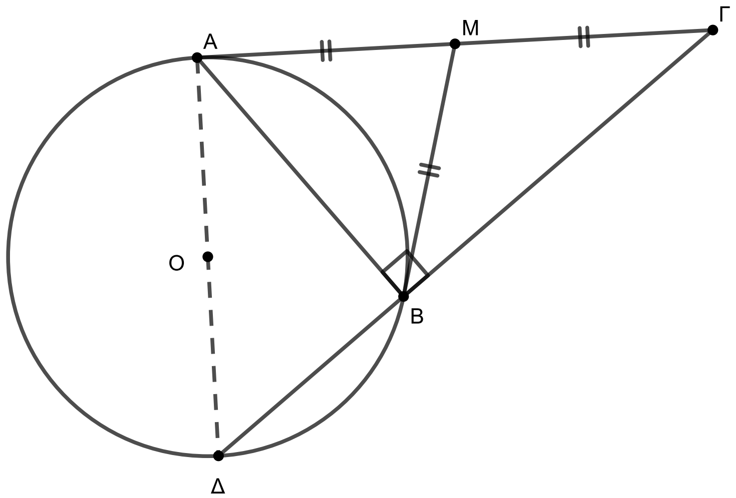


13747-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Τα τμήματα ΜΑ και ΜΒ είναι ίσα γιατί είναι εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός του κύκλου. Από την υπόθεση έχουμε ότι ΜΓ=ΑΜ, άρα ΜΑ = ΜΒ = ΜΓ. Δηλαδή η ΒΜ, που είναι διάμεσος προς την πλευρά ΑΓ στο τρίγωνο ΒΑΓ, ισούται με το μισό της ΑΓ. Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά ΑΓ και $A\widehat{B}\Gamma = 90^o$.

β) $A\widehat{B}\Gamma = 90^o$, οπότε και $A\widehat{B}\Delta = 90^o$. Τα σημεία Α, Β, Δ είναι σημεία του κύκλου, άρα η $A\widehat{B}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη γωνία και επειδή είναι ορθή θα βαίνει σε ημικύκλιο. Δηλαδή η ΑΔ είναι διάμετρος επομένως τα σημεία Α, Δ είναι αντιδιαμετρικά.



13753

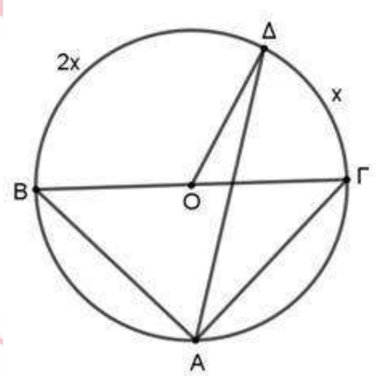
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) με διάμετρο ΒΓ. Έστω Α και Δ σημεία του κύκλου τα οποία βρίσκονται σε διαφορετικά ημικύκλια ως προς τη διάμετρο ΒΓ. Τα μέτρα των τόξων ΒΔ και ΔΓ είναι 2x και x αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το μέτρο:

α) της γωνίας ΒΑΓ. (Μονάδες 7)

β) x του τόξου ΓΔ. (Μονάδες 8)

γ) της γωνίας ΒΟΔ. (Μονάδες 10)



13753-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η γωνία ΒΑΓ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο οπότε είναι ορθή, δηλαδή

$B\widehat{A}\Gamma = 90°$.

β) Η ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου, επομένως $\overset{\frown}{B\Delta} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 180°$ ή $2x + x = 180°$ ή

$3x = 180°$ ή $x = 60°$.

γ) Η γωνία ΒΟΔ είναι επίκεντρη η οποία βαίνει στο τόξο ΒΔ.

Άρα το μέτρο της γωνίας ΒΟΔ είναι ίσο με το μέτρο του τόξου ΒΔ, δηλαδή $2x = 120°$.

13754

ΘΕΜΑ 2

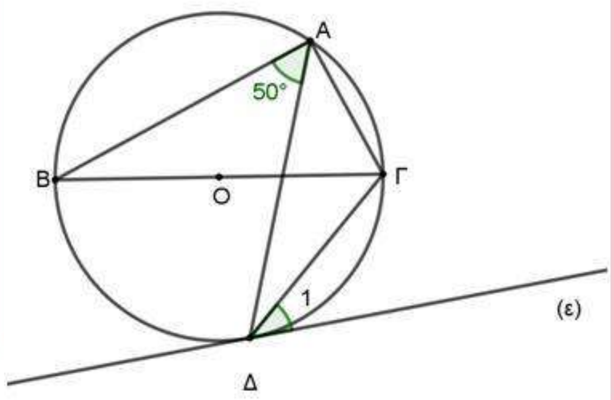
Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) με διάμετρο ΒΓ και τα σημεία Α, Δ του κύκλου εκατέρωθεν της διαμέτρου ΒΓ έτσι ώστε $B\widehat{A}\Delta = 50°$. Φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε) στον κύκλο στο σημείο Δ.

Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας :

α) ΒΑΓ. (Μονάδες 6)

β) ΒΓΔ. (Μονάδες 9)

γ) Δ_1. (Μονάδες 10)



13754-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η γωνία ΒΑΓ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, επομένως $B\hat{A}\Gamma = 90°$.

β) Οι γωνίες ΒΑΔ, ΒΓΔ είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στο ίδιο τόξο ΒΔ οπότε είναι ίσες. Άρα $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Gamma}\Delta = 50°$.

γ) Η γωνία Δ_1 σχηματίζεται από τη χορδή ΔΓ του κύκλου και την εφαπτομένη του στο σημείο Δ. Επομένως η γωνία Δ_1 ισούται με κάθε εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο τόξο ΔΓ. Η γωνία ΔΑΓ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο ΔΓ, οπότε $\hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{A}\Gamma$.

Για τη γωνία ΔΑΓ έχουμε: $\Delta\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Gamma - B\hat{A}\Delta = 90° - 50° = 40°$. Άρα $\hat{\Delta}_1 = 40°$.

13756

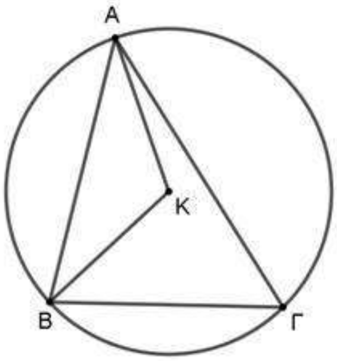
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ, ρ). Να αποδείξετε ότι:

α) $A\hat{K}B = 2\,A\hat{\Gamma}B$. (Μονάδες 7)

β) το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

γ) $K\hat{A}B + A\hat{\Gamma}B = 90°$. (Μονάδες 13)



13756-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η γωνία ΑΚΒ είναι επίκεντρη και βαίνει στο τόξο ΑΒ.

Η γωνία ΑΓΒ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο ΑΒ.

Άρα η επίκεντρη γωνία ΑΚΒ είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης γωνίας ΑΓΒ, δηλαδή $A\hat{K}B = 2\ A\hat{\Gamma}B$.

β) Είναι ΚΑ = ΚΒ διότι είναι ακτίνες του κύκλου (Κ, ρ), άρα το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές.

γ) Στο τρίγωνο ΚΑΒ για το άθροισμα των γωνιών του έχουμε :

$K\hat{A}B + A\hat{B}K + A\hat{K}B = 180°$ (1).

Από το ερώτημα (α) έχουμε $A\hat{K}B = 2\ A\hat{\Gamma}B$ (2).

Από το ερώτημα (β), έχουμε $K\hat{A}B = A\hat{B}K$ (3), γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΚΒ.

Λόγω των σχέσεων (2), (3) η (1) γράφεται $2K\hat{A}B + 2A\hat{\Gamma}B = 180°$ ή $K\hat{A}B + A\hat{\Gamma}B = 90°$.

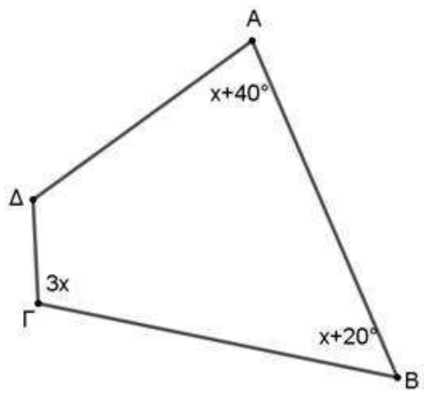
13818

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ το οποίο είναι εγγράψιμο. Οι γωνίες Α, Β, Γ έχουν αντίστοιχα μέτρα $x + 40°$, $x + 20°$, $3x$. Να υπολογίσετε :

α) πόσες μοίρες είναι το x. (Μονάδες 12)

β) τα μέτρα των γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 13)



13818-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Επειδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο, οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές. Άρα έτσι έχουμε $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 180°$ ή $x + 40° + 3x = 180°$ ή $4x = 140°$ ή $x = 35°$.

β) Έχουμε $\widehat{A} = 35° + 40° = 75°$, $\widehat{B} = 35° + 20° = 55°$, $\widehat{\Gamma} = 3 \cdot 35° = 105°$.

Οι γωνίες Β και Δ είναι απέναντι γωνίες του εγγράψιμου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, άρα είναι παραπληρωματικές. Οπότε $\widehat{B} + \widehat{\Delta} = 180°$ ή $55° + \widehat{\Delta} = 180°$ ή

$\widehat{\Delta} = 125°$.

13840

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (O,R) και μία ευθεία x΄x η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο Α. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ της ημιευθείας Αx. Αν για κάποιο σημείο Β του κύκλου ισχύει η σχέση ΜΑ = ΜΒ, να αποδείξετε ότι:

α) το ΜΒ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O,R). (Μονάδες 7)

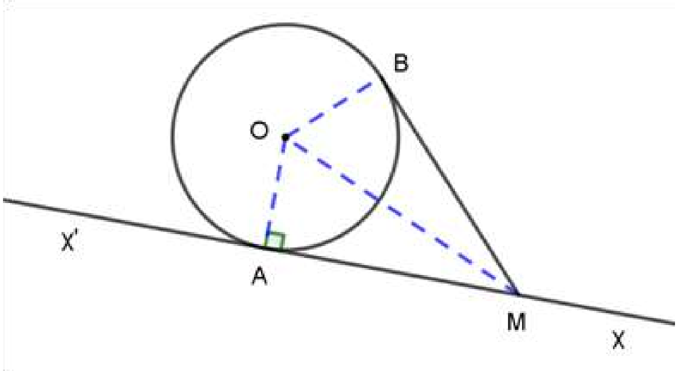
β) η διχοτόμος της γωνίας ΒΜx είναι κάθετη στη ΜΟ. (Μονάδες 6)

γ) το τετράπλευρο ΑΟΒΜ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 6)

δ) το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας ΒΜx. (Μονάδες 6)

13840-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Η ευθεία x΄x έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο Α. Επομένως, η ευθεία x΄x είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Άρα $ΟΑ \perp ΜΑ$.

Τα τρίγωνα ΜΟΒ και ΜΟΑ έχουν:

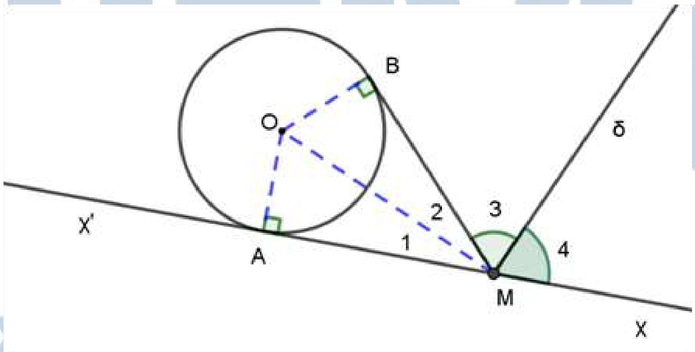
- ΜΟ, κοινή πλευρά
- ΟΒ = ΟΑ, ως ακτίνες του κύκλου (Ο,R)
- ΜΒ = ΜΑ, από την υπόθεση

Επομένως, τα τρίγωνα από το κριτήριο ισότητας Π-Π-Π είναι ίσα. Απέναντι από την πλευρά ΟΜ βρίσκονται αντίστοιχα ίσες γωνίες, οπότε $\widehat{A} = \widehat{B}$.

Επειδή $\widehat{A} = 90°$ συμπεραίνουμε ότι $\widehat{B} = 90°$.

Άρα, το ΜΒ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (Ο,R).

β)



Έστω Μδ η διχοτόμος της γωνίας ΒΜx.

Τα τμήματα ΜΑ και ΜΒ είναι εφαπτόμενα του κύκλου (Ο,R). Η ΜΟ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ, οπότε $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$. Επειδή Μδ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΒΜx έχουμε $\widehat{M}_3 = \widehat{M}_4$.

$A\widehat{M}x = 180°$ οπότε $\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 + \widehat{M}_4 = 180°$, ή $2\widehat{M}_2 + 2\widehat{M}_3 = 180°$,

ή $\widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 90°$, δηλαδή $O\widehat{M}δ = 90°$. Άρα η Μδ είναι κάθετη στη ΜΟ.

13840-Λύση

γ) Στο τετράπλευρο ΑΟΒΜ έχουμε $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$ οπότε $\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$. Επομένως δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές οπότε το ΑΟΒΜ είναι εγγράψιμο.

δ) Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ και η διχοτόμος Μδ τέμνονται από το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από 180°, οπότε το ΟΒ και η Μδ θα τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας ΟΜ που βρίσκονται οι γωνίες.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ σχηματίζει με το ΟΜ τη γωνία ΒΟΜ .

Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ σχηματίζει με τη διχοτόμο Μδ τη γωνία ΟΜδ.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $B\widehat{O}M + O\widehat{M}\delta < 180°$.

Η γωνία ΒΟΜ είναι οξεία γωνία του ορθογωνίου τριγώνου ΟΒΜ, οπότε $B\widehat{O}M < 90°$.

Η γωνία ΟΜδ είναι ίση με το άθροισμα των γωνιών M_2 και M_3, όμως από το ερώτημα (β) έχουμε $\widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 90°$, οπότε $O\widehat{M}\delta = \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 90°$.

Έχουμε $B\widehat{O}M + O\widehat{M}\delta = B\widehat{O}M + 90° < 90° + 90°$, δηλαδή $B\widehat{O}M + O\widehat{M}\delta < 180°$.

13847

ΘΕΜΑ 4

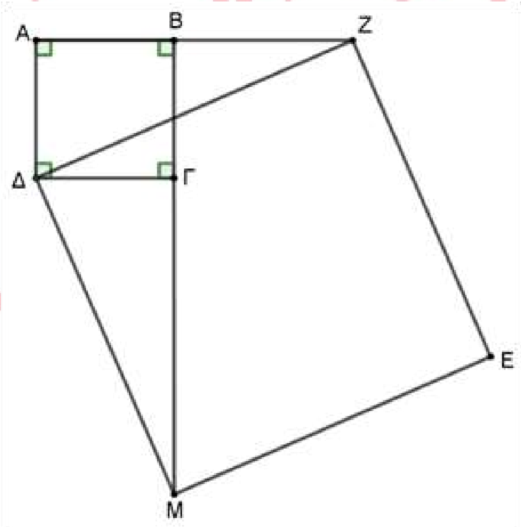
Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ προς το Β κατά τμήμα ΒΖ. Επίσης προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΜ = ΑΖ. Στη συνέχεια, θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΔΜΕΖ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα. (Μονάδες 5)

β) το τετράπλευρο ΔΜΕΖ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 9)

γ) το τετράπλευρο ΒΖΕΜ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 6)

δ) οι γωνίες ΒΜΖ και ΒΕΖ είναι ίσες. (Μονάδες 5)



13847-Λύση

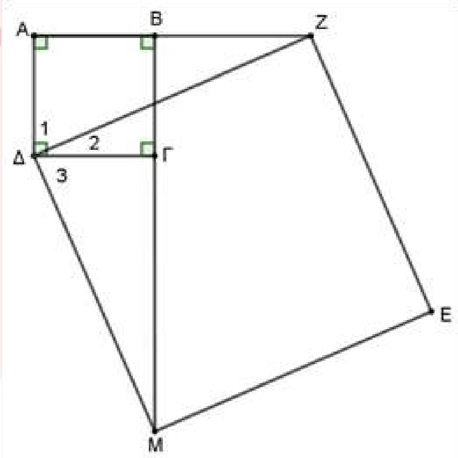
ΛΥΣΗ

α) Για τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ έχουμε:

- ΑΔ = ΔΓ, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ
- ΑΖ = ΓΜ, από τα δεδομένα

Άρα έχουν μία προς μία ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε είναι ίσα.

β)



Για να είναι το τετράπλευρο ΔΜΕΖ τετράγωνο, γνωρίζοντας ότι είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

Έχουμε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_3$ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΖ και ΓΜ των ίσων τριγώνων ΑΔΖ και ΓΔΜ.

Άρα $M\hat{\Delta}Z = \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_3 = \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 90°$, δηλαδή το παραλληλόγραμμο ΔΜΕΖ είναι και Ορθογώνιο διότι έχει μία ορθή γωνία.

Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα θα έχουν και τις υποτείνουσες αντίστοιχα ίσες, οπότε ΔΖ = ΔΜ. Άρα το ορθογώνιο ΔΜΕΖ είναι και ρόμβος, διότι έχει δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες. Άρα είναι τετράγωνο.

γ) Για να είναι το τετράπλευρο ΒΖΕΜ εγγράψιμο αρκεί να αποδείξουμε ότι οι απέναντι γωνίες του ΖΒΜ και ΖΕΜ είναι παραπληρωματικές, δηλαδή

$Z\hat{B}M + Z\hat{E}M = 180°$.

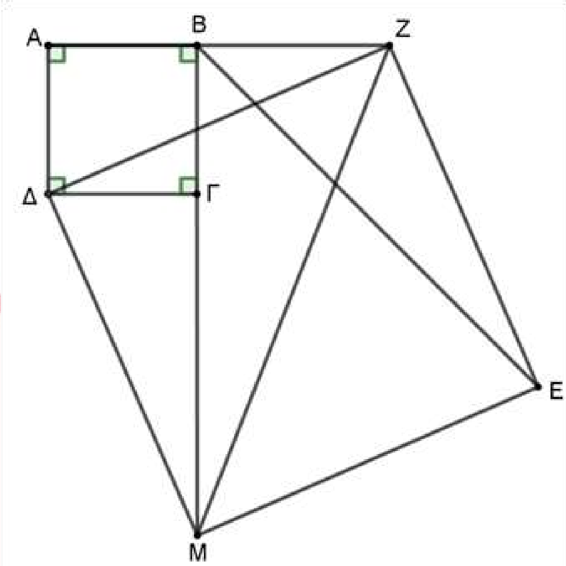
Από το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχουμε $A\hat{B}\Gamma = 90°$ άρα και $Z\hat{B}M = 90°$ ως παραπληρωματική.

Από το τετράγωνο ΔΜΕΖ έχουμε $Z\hat{E}M = 90°$.

Άρα $Z\hat{B}M + Z\hat{E}M = 90° + 90° = 180°$.

13847-Λύση

δ)



Επειδή το τετράπλευρο ΒΖΕΜ είναι εγγράψιμο η πλευρά ΒΖ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Μ και Ε υπό ίσες γωνίες, δηλαδή $B\widehat{M}Z = B\widehat{E}Z$.

14878

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και σημείο Μ εξωτερικό του κύκλου. Από το σημείο Μ φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ του κύκλου και στην προέκταση του ΟΒ παίρνουμε σημείο Γ ώστε ΒΓ = ΟΒ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΜΒΟ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

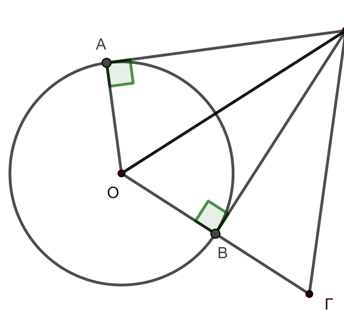
(Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε το κέντρο Λ του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΑΜΒΟ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι ΒΛ //ΜΓ. (Μονάδες 9)

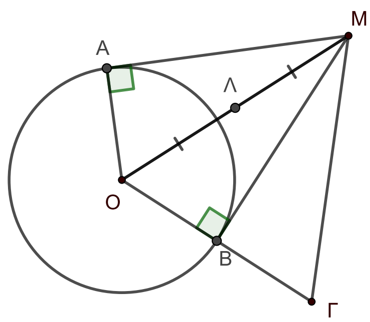
14878-Λύση

α)

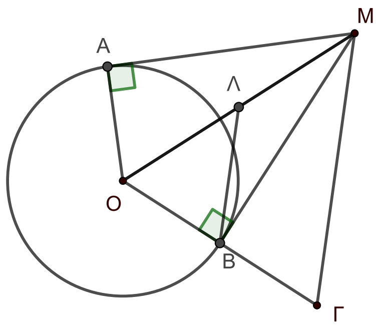


Οι ακτίνες ΟΑ και ΟΒ είναι κάθετες στα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ, δηλαδή: $ΟΑ \perp ΜΑ$ και $ΟΒ \perp ΜΒ$.

Τότε, στο τετράπλευρο ΑΜΒΟ ισχύει: $\widehat{A} + \widehat{B} = 90^o + 90^o = 180^o$, δηλαδή δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, οπότε είναι εγγράψιμο.



β) Έστω Λ το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΑΜΒΟ. Οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ θα είναι εγγεγραμμένες γωνίες του κύκλου που περνάει από τις κορυφές του τετράπλευρου ΑΜΒΟ και είναι $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^o$. Άρα οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ βαίνουν σε ημικύκλιο, δηλαδή η ΟΜ είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου. Έτσι το κέντρο Λ του περιγεγραμμένου κύκλου είναι το μέσο του τμήματος ΟΜ.



γ) Στο τρίγωνο ΟΜΓ τα Β, Λ είναι τα μέσα των ΟΓ, ΟΜ αντίστοιχα, άρα το τμήμα ΒΛ είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή ΒΛ // ΜΓ.