ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του ΒΜ και ΓΝ. Προεκτείνουμε την ΒΜ (προς το Μ) κατά τμήμα ΜΔ=ΒΜ και την ΓΝ (προς το Ν) κατά τμήμα ΝΕ=ΓΝ.

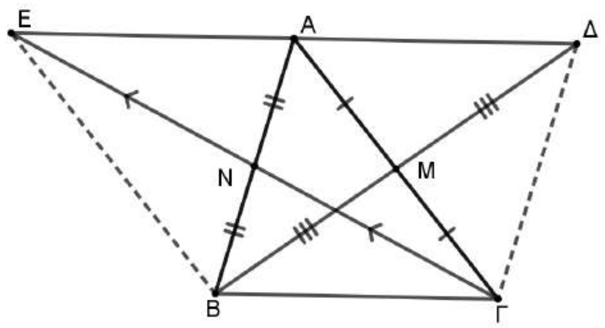
α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ//ΒΓ και ΑΕ//ΒΓ. (Μονάδες 13)

β) Είναι τα σημεία Ε, Α και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

1533-Λύση

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους ΒΜ και ΓΝ και τις προεκτείνουμε κατά τμήματα ΜΔ=ΒΜ και ΝΕ=ΓΝ αντίστοιχα.



α) Επειδή ΜΔ = ΒΜ από κατασκευή και ΑΜ = ΜΓ αφού ΒΜ διάμεσος, οι διαγώνιοι του τετράπλευρου ΑΒΓΔ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Άρα ΑΔ//ΒΓ.

Επειδή ΓΝ = ΝΕ από κατασκευή και ΑΝ = ΝΒ αφού ΓΝ διάμεσος, οι διαγώνιοι του τετράπλευρου ΑΓΒΕ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Άρα ΑΕ//ΒΓ.

β) Από το α) ερώτημα αποδείχθηκε ότι από το σημείο Α διέρχονται τα τμήματα ΑΕ και ΑΔ που είναι παράλληλα στη ΒΓ. Όμως επειδή από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη σ' αυτήν, συμπεραίνουμε ότι τα τμήματα ΑΔ και ΑΕ έχουν τον ίδιο φορέα, δηλαδή τα σημεία Ε, Α και Δ είναι συνευθειακά.

1534

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και η διαγώνιός του ΒΔ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις κάθετες ΑΕ και ΓΖ στη ΒΔ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

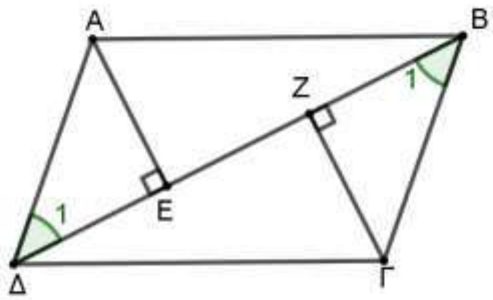
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

1534-Λύση

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, ΔΒ διαγώνιος και ΑΕ, ΓΖ οι κάθετες στη ΒΔ.

α)

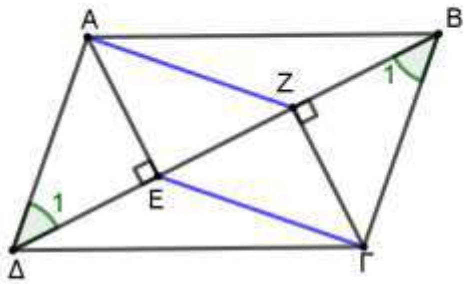


Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ έχουν:

- $\hat{\mathrm{E}} = \hat{\mathrm{Z}} = 90°$ (ΑΕ⊥ΒΔ και ΓΖ⊥ΒΔ)
- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και
- $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\mathrm{B}}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ.

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση.

β)



Επειδή ΑΕ ⊥ ΒΔ και ΓΖ ⊥ ΒΔ, προκύπτει ότι ΑΕ // ΓΖ ως κάθετες στην ίδια ευθεία ΒΔ. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ είναι ίσα από το α), προκύπτει ότι οι πλευρές ΑΕ και ΓΖ είναι ίσες αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Delta}_1$ και $\widehat{\mathrm{B}}_1$ αντίστοιχα. Άρα το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες.

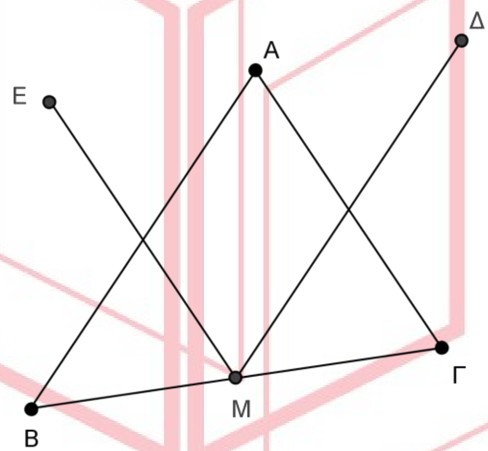
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ, στο ημιεπίπεδο (ΒΓ, Α), φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΓΑ. Να αποδείξετε ότι:

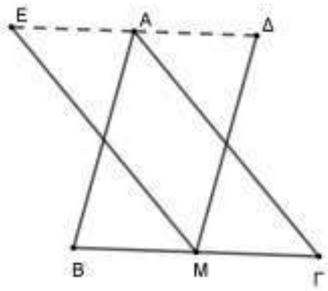
α) ΔΑ=ΑΕ (Μονάδες 8)

β) Τα σημεία Δ, Α και Ε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. (Μονάδες 9)

γ) ΔΕ=ΒΓ (Μονάδες 8)



1535-Λύση



α) Επειδή είναι ΜΔ = // ΒΑ το τετράπλευρο ΑΒΜΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Άρα ΑΔ = ΒΜ και ΑΔ // ΒΜ.

Επίσης είναι ΜΕ =// ΓΑ, οπότε και το τετράπλευρο ΑΕΜΓ είναι παραλληλόγραμμο.

Άρα ΑΕ = ΜΓ και ΑΕ // ΜΓ.

Επειδή ΑΔ = ΒΜ, ΑΕ = ΜΓ και ΒΜ = ΜΓ αφού Μ μέσο του ΒΓ, είναι και ΔΑ= ΑΕ.

β) Έχουμε ΑΔ//ΒΜ άρα ΑΔ//ΒΓ και επίσης ΑΕ//ΜΓ άρα ΑΕ//ΒΓ. Επειδή από το σημείο Α διέρχεται μοναδική παράλληλη της ΒΓ, τα τμήματα ΑΔ και ΑΕ βρίσκονται στον ίδιο φορέα. Επομένως τα σημεία Δ, Α και Ε είναι συνευθειακά.

γ) Είναι ΔΕ = ΔΑ + ΑΕ = ΒΜ + ΜΓ = ΒΓ.

1537

ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, προεκτείνουμε την πλευρά ΔΑ (προς το Α) κατά τμήμα ΑΗ=ΔΑ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$, η οποία τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ.

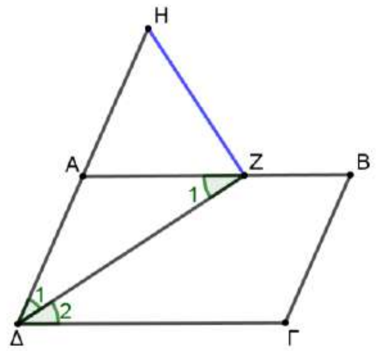
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Το τρίγωνο ΔΖΗ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Z}$. (Μονάδες 13)

1537-Λύση

Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο, τμήμα ΑΗ στην προέκταση της ΔΑ τέτοιο ώστε ΑΗ=ΔΑ και ΔΖ διχοτόμος της $\widehat{\Delta}$.



α) Είναι $\widehat{\Delta}_2$ = $\hat{Z}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΖ. Επίσης $\widehat{\Delta}_1$ = $\widehat{\Delta}_2$ αφού ΔΖ διχοτόμος της γωνίας Δ. Άρα $\widehat{\Delta}_1$ = $\widehat{\mathrm{Z}}_1$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές με ΑΔ=ΑΖ.

β) Από το α) ερώτημα είναι ΔΑ = ΑΖ. Όμως ΑΗ = ΔΑ, από υπόθεση, άρα ΖΑ = ΑΔ = ΑΗ = $\frac{\Delta\mathrm{H}}{2}$. Δηλαδή, στο τρίγωνο ΔΖΗ η διάμεσος του ΖΑ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΔΗ, επομένως $\widehat{\mathrm{Z}}$ = 90^{o}.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΒ=2ΑΔ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε.

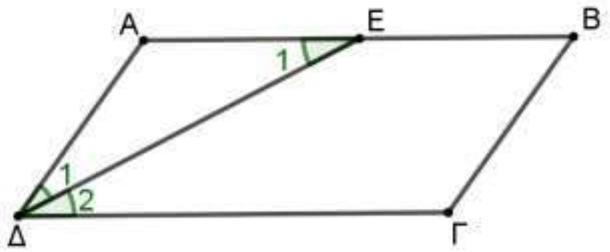
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Είναι το σημείο Ε μέσο της πλευράς ΑΒ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

1538-Λύση

Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΒ = 2ΑΔ και ΔΕ η διχοτόμος της $\widehat{Δ}$.



α) Είναι $\widehat{Δ}_2 = \widehat{E}_1$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΕ. $\widehat{Δ}_2 = \widehat{Δ}_1$ (2), επειδή ΔΕ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Δ}$. Από (1), (2) έχουμε $\widehat{Δ}_1 = \widehat{E}_1$. Άρα, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΔ, ΑΕ.

β) Επειδή ΑΕ = ΑΔ και από την υπόθεση ισχύει ότι ΑΔ= $\frac{AB}{2}$, άρα ΑΕ= $\frac{AB}{2}$. Επομένως το Ε είναι μέσο της ΑΒ.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

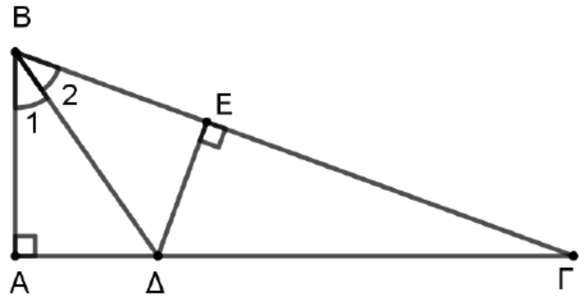
α) ΒΕ=ΑΒ. (Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον $\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{A} = 55°$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ. (Μονάδες 13)

1541-Λύση

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}$ ορθή, ΒΔ η διχοτόμος της $\widehat{B}$ και τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΒΓ.

α)

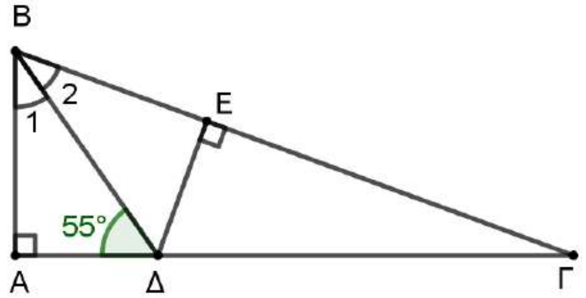


Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΕ έχουν:

- $\widehat{A} = \widehat{E} = 90°$ (Υπόθεση και ΔΕ⊥ΒΓ)
- ΒΔ κοινή πλευρά,
- $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, επειδή ΒΔ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε οι πλευρές ΒΕ και ΑΒ είναι ίσες γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}_2$ και $\widehat{B}_1$ αντίστοιχα.

β) Έστω ότι είναι $B\widehat{\Delta}A = 55^0$.



Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ ισχύει ότι $55^o + \widehat{B}_1 = 90^o$.

Άρα $\widehat{B}_1 = 35^o = \widehat{B}_2$ αφού ΒΔ διχοτόμος της $\widehat{B}$, οπότε $\widehat{B} = 70^o$.

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^o$.

Άρα $\widehat{\Gamma} = 20^o$.

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΓΔΕ ($\widehat{E} = 90^o$) ισχύει ότι

$\Gamma\widehat{\Delta}E + \widehat{\Gamma} = 90^0$.

Άρα $\Gamma\widehat{\Delta}E = 70^o$.

ΘΕΜΑ 2

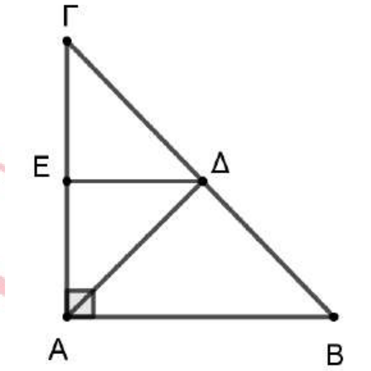
Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A}=90^\circ$) και ΑΔ η διάμεσός του. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) ΔΕ= $\frac{ΑΓ}{2}$ (Μονάδες 12)

1542-Λύση

Έστω ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}$ ορθή, ΑΔ η διάμεσός του και τμήμα ΔΕ παράλληλο στην ΑΒ.



α) Είναι ΑΒ//ΔΕ και ΑΓ⊥ΑΒ. Άρα η ΑΓ θα είναι κάθετη και στην παράλληλη της ΑΒ που είναι η ΔΕ, δηλαδή ΑΓ⊥ΔΕ. Οπότε το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο με $\widehat{\Gamma E \Delta} = 90°$.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το Δ είναι μέσο της ΒΓ και ΔΕ // ΑΒ, άρα και το Ε είναι μέσο της ΑΓ. Επειδή το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ του ΑΒΓ ισχύει ότι: ΔΕ = $\frac{AB}{2}$ ή ΔΕ = $\frac{A\Gamma}{2}$ αφού ΑΒ=ΑΓ στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ.

1544

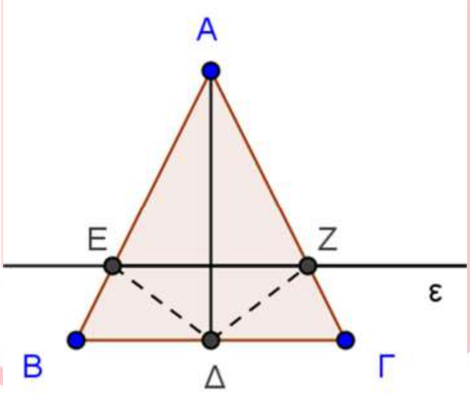
ΘΕΜΑ 2

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς την ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



1544-Λύση

α) $A\hat{E}Z = \hat{B}$ **(1)** ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΕΖ//ΒΓ που τις τέμνει η ΑΒ.

Επίσης $A\hat{Z}E = \hat{\Gamma}$ **(2)** ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΕΖ//ΒΓ που τις τέμνει η ΑΓ.

$\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ως γωνίες της βάσης ΒΓ στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ.

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $A\hat{E}Z = A\hat{Z}E$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές με βάση την ΕΖ.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ έχουν:

- ΑΔ κοινή πλευρά
- $E\hat{A}\Delta = Z\hat{A}\Delta$, διότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.
- ΑΕ = ΑΖ, διότι ΑΕΖ ισοσκελές τρίγωνο από το α) ερώτημα.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα.

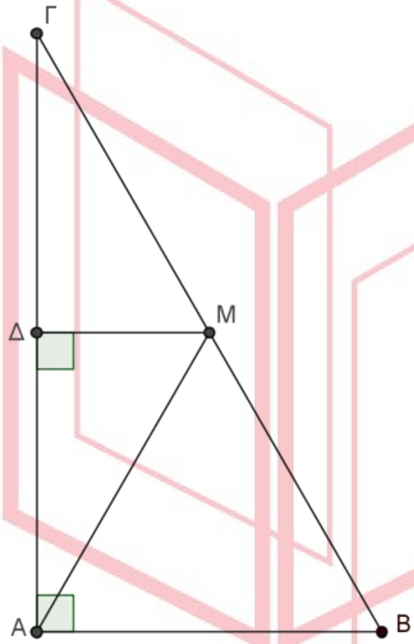
1548

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) με ΒΓ = 8. Έστω ΑΜ διάμεσος του τριγώνου και $Μ\Delta \perp ΑΓ$. Αν η γωνία $Α\hat{Μ}Γ$ είναι ίση με 120^o, τότε:

α) Να δείξετε ότι ΑΒ = 4. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μήκος της ΜΔ. (Μονάδες 13)



1548-Λύση

α) Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ οπότε ισχύει ότι ΑΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$ = ΜΓ. Οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, άρα είναι $\hat{Γ}$ = Γ$\hat{Α}$Μ (1).

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΜΓ ισχύει:

$Α\hat{Μ}Γ + Μ\hat{Α}Γ + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow 120^o + \hat{Γ} + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow \hat{Γ} = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{Γ}$ = 30^o. Τότε η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από αυτή τη γωνία θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Δηλαδή, ΑΒ = $\frac{ΒΓ}{2} = \frac{8}{2}$ = 4.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΓ, το τμήμα ΜΔ, ως κάθετο στην ΑΓ θα είναι ύψος που αντιστοιχεί στη βάση ΑΓ του τριγώνου. Άρα είναι και διάμεσός του. Συνεπώς το Δ είναι μέσο της ΑΓ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το τμήμα ΜΔ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του, των ΒΓ και ΑΓ, άρα ΜΔ = $\frac{ΑΒ}{2} = \frac{4}{2}$ =2.

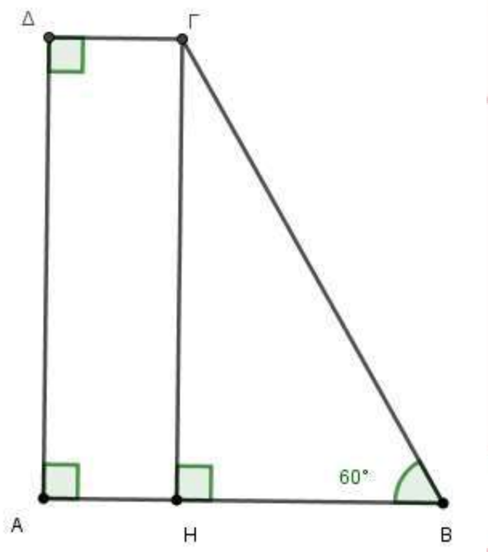
1549

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$, ΑΒ > ΓΔ, ΒΓ = 4 ΔΓ και $\hat{B} = 60^o$. Φέρουμε την $\Gamma H \perp AB$. Να δείξετε ότι:

α) ΗΒ = 2ΔΓ. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΑΗΓΔ είναι ορθογώνιο με ΑΗ = $\frac{1}{2}$ΗΒ (Μονάδες 13)



1549-Λύση

α) Αφού είναι ΓΗ ⊥ ΑΒ από υπόθεση τότε το τρίγωνο ΒΗΓ είναι ορθογώνιο, οπότε για τις οξείες γωνίες του θα ισχύει $\widehat{B}$ + Β$\widehat{Γ}$Η = 90^0 και αφού είναι $\widehat{B}$ = 60^0 τότε θα

60^0 + Β$\widehat{Γ}$Η = 90^0 οπότε Β$\widehat{Γ}$Η = 30^0.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΗΓ η κάθετη πλευρά ΒΗ που βρίσκεται απέναντι από γωνία 30^o θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΓ και με δεδομένο ότι ΒΓ=4ΔΓ, θα έχουμε ΗΒ = $\frac{ΒΓ}{2} = \frac{4ΔΓ}{2}$ = 2ΔΓ (1)

β) Το τετράπλευρο ΑΔΓΗ έχει τρείς ορθές γωνίες, τις $\widehat{Α} = \widehat{Δ}$ =90^o από υπόθεση και $Α\widehat{Η}Γ$=90^o, αφού $ΓΗ \perp ΑΒ$. Άρα το ΑΗΓΔ είναι ορθογώνιο, οπότε ΑΗ = ΔΓ (2).

Από τη σχέση (1) έχουμε ότι ΔΓ= $\frac{ΗΒ}{2}$ οπότε από τη σχέση (2) προκύπτει ΑΗ = $\frac{1}{2}$ ΗΒ .

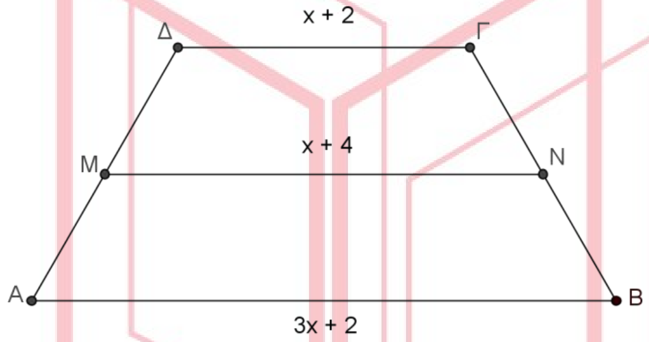
1550

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB > \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$.

α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι $AB = 3x + 2$, $\Gamma\Delta = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραπεζίου είναι $MN = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$.
(Μονάδες 12)

β) Αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.
(Μονάδες 13)



1550-Λύση

α) Η ΜΝ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, οπότε η ΜΝ θα ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων ΑΒ και ΓΔ του τραπεζίου, δηλαδή ΜΝ = $\frac{ΑΒ+ΓΔ}{2}$ (1)

Η σχέση (1) με βάση τα δεδομένα γίνεται:

$x + 4 = \frac{3x+2+x+2}{2} \Leftrightarrow x + 4 = \frac{4x+4}{2} \Leftrightarrow x + 4 = 2x + 2 \Leftrightarrow x = 2$

β) Για τις γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ ισχύει $\widehat{Α} + \widehat{Β} + \widehat{Γ} + \widehat{Δ} = 360^o$.

Αφού το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές, τότε οι γωνίες που πρόσκεινται στις βάσεις του ΑΒ και ΓΔ θα είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{Α} = \widehat{Β}$ και $\widehat{Γ} = \widehat{Δ}$.

Οπότε η σχέση του αθροίσματος των γωνιών του τραπεζίου ΑΒΓΔ γίνεται

$2\widehat{Β} + 2\widehat{Γ} = 360^o$ ή $\widehat{Β} + \widehat{Γ} = 180^o$ και αφού από την υπόθεση είναι $\widehat{Β} = 2\widehat{Γ}$ τότε

$2\widehat{Γ} + \widehat{Γ} = 180^o$ ή $3\widehat{Γ} = 180^o$, άρα $\widehat{Γ} = 60^o$.

Όμως είναι $\widehat{Γ} = \widehat{Δ}$, άρα θα είναι και $\widehat{Δ} = 60^o$.

Αφού από την υπόθεση ισχύει ότι $\widehat{Β} = 2\widehat{Γ}$, τότε θα είναι $\widehat{Β} = 2 \cdot 60^o = 120^o$.

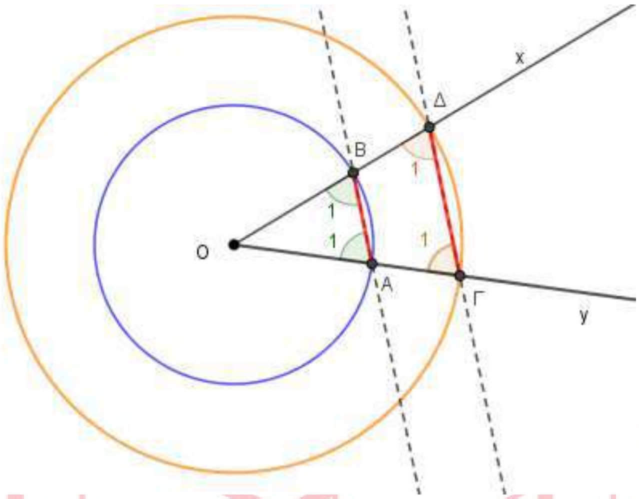
Όμως $\widehat{Α} = \widehat{Β}$, τότε θα είναι $\widehat{Α} = 120^o$.

1552

ΘΕΜΑ 2

Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία $x\hat{O}y$. Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή Ο της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές Ox και Oy της γωνίας στα σημεία Α, Β αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε; (Μονάδες 25)

1552-Λύση



Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές διότι ΟΑ = ΟΒ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

Άρα $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ (1).

Για τις γωνίες του τριγώνου ΟΑΒ ισχύει ότι:

$$\widehat{O} + \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 180^o$$

$$\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 180^o - \widehat{O}$$

$$2\widehat{B}_1 = 180^o - \widehat{O} \text{ [λόγω της (1)]}$$

Άρα, $\widehat{B}_1 = \frac{180^o - \widehat{O}}{2}$ (2)

Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές διότι ΟΓ = ΟΔ, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

Άρα $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Delta}_1$ (3)

Για τις γωνίες του τριγώνου ΟΓΔ ισχύει ότι:

$$\widehat{O} + \widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Delta}_1 = 180^o$$

$$\widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Delta}_1 = 180^o - \widehat{O}$$

$$2\widehat{\Delta}_1 = 180^o - \widehat{O} \text{ [σχέση (3)]}$$

Άρα, $\widehat{\Delta}_1 = \frac{180^o - \widehat{O}}{2}$ (4)

Από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$.

Όμως, οι γωνίες $\widehat{B}_1$ και $\widehat{\Delta}_1$ βρίσκονται εκτός, εντός των ευθειών ΑΒ και ΓΔ και προς το ίδιο μέρος με την τέμνουσα Οx των ευθειών.

Οπότε οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ θα είναι παράλληλες γιατί τεμνόμενες από την Οx σχηματίζουν δυο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες. Άρα και οι χορδές ΑΒ και ΓΔ θα είναι παράλληλες ως τμήματα παράλληλων ευθειών.

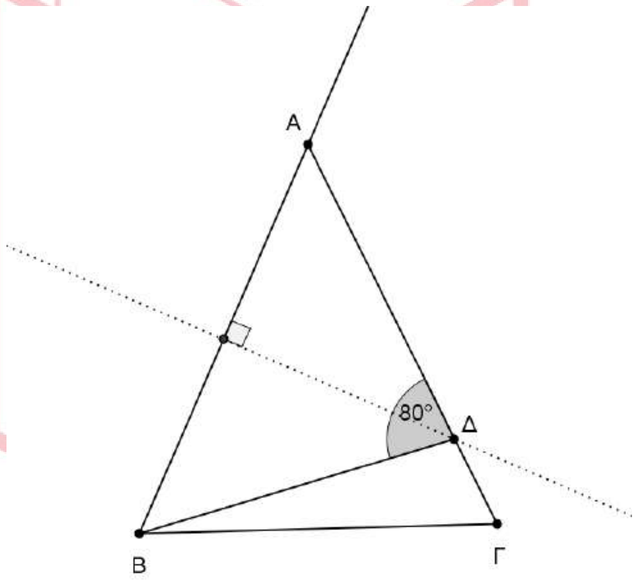
1554

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο $\hat{A}_{εξ} = 2A\hat{B}Γ$. Φέρουμε τη μεσοκάθετο της πλευράς ΑΒ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ και σχηματίζεται γωνία ΑΔΒ ίση με 80˚.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 15)

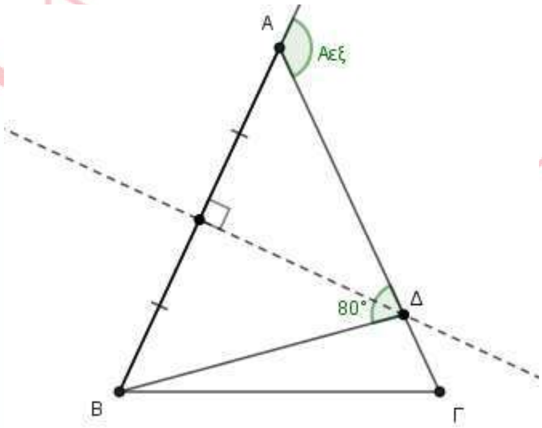


1554-Λύση

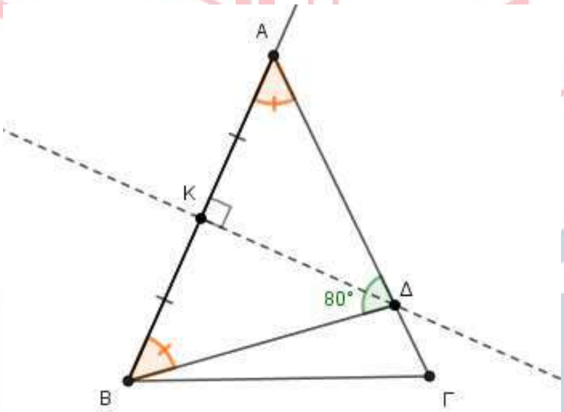
α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ η $\widehat{A}_{\varepsilon\xi}$ θα είναι ίση με το άθροισμα των δυο απέναντι εσωτερικών γωνιών του, δηλαδή $\widehat{A}_{\varepsilon\xi} = A\widehat{B}\Gamma + \widehat{\Gamma}$.

Επειδή από υπόθεση είναι $\widehat{A}_{\varepsilon\xi} = 2A\widehat{B}\Gamma$, άρα $2A\widehat{B}\Gamma = A\widehat{B}\Gamma + \widehat{\Gamma}$, οπότε $A\widehat{B}\Gamma = \widehat{\Gamma}$.

Επομένως, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει τις γωνίες που πρόσκεινται στην πλευρά του ΒΓ ίσες, άρα θα είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, οπότε ΑΒ = ΑΓ.



β) Έστω Κ το σημείο τομής της μεσοκαθέτου της πλευράς ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ.



Επειδή στο τρίγωνο ΑΔΒ η ΔΚ είναι μεσοκάθετος στην πλευρά του ΑΒ, τότε θα είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο θα είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ. Άρα θα έχει ίσες και τις γωνίες του που πρόσκεινται στη βάση του, δηλαδή $\widehat{A} = A\widehat{B}\Delta$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΒ ισχύει ότι $A\widehat{\Delta}B + \widehat{A} + A\widehat{B}\Delta = 180^o$

Αφού είναι $A\widehat{\Delta}B = 80^0$ και $\widehat{A} = A\widehat{B}\Delta$, τότε έχουμε: $80^o + 2\widehat{A} = 180^o$ ή $2\widehat{A} = 100^o$, άρα $\widehat{A} = 50^o$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o$

Αφού είναι $\widehat{A} = 50^o$ και $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, τότε έχουμε: $50^o + 2\widehat{B} = 180^o$ ή $2\widehat{B} = 130^o$, άρα $\widehat{B} = 65^o$.

1556

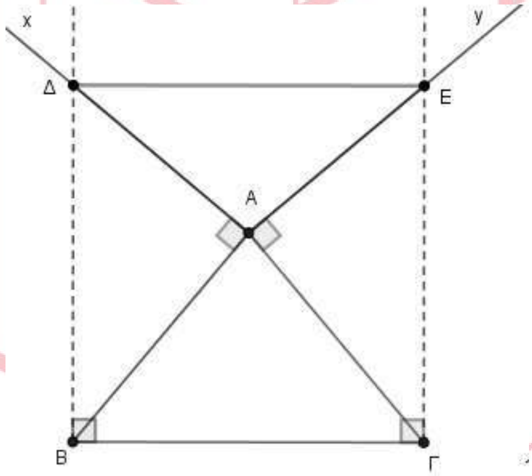
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε Αx⊥ΑΒ και Αy⊥ΑΓ, όπως στο σχήμα που ακολουθεί. Οι κάθετες στην πλευρά ΒΓ στα σημεία Β και Γ τέμνουν τις Αx και Αy στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ. (Μονάδες 12)

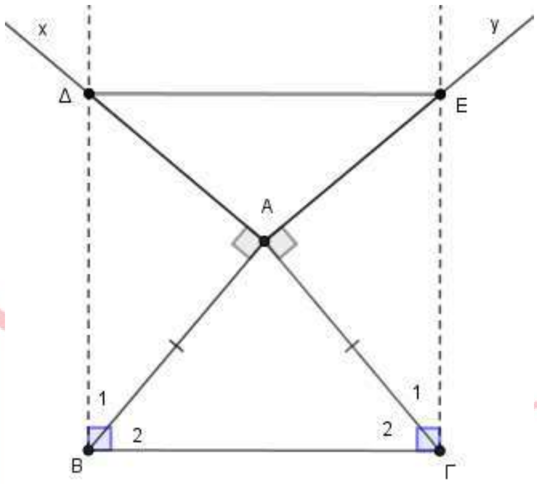
β) Αν η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με 80°, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔΑΕ.

(Μονάδες 13)



1556-Λύση

α)



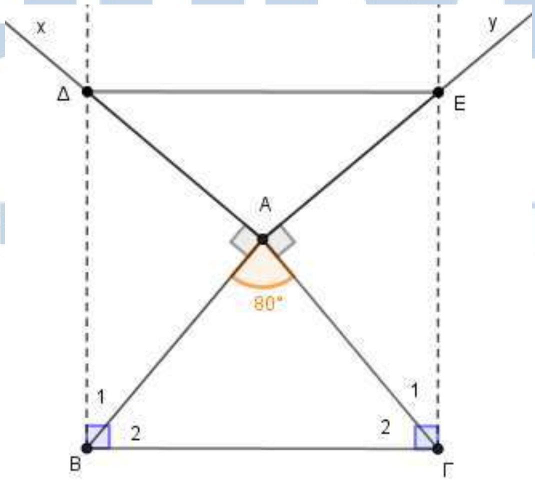
Αφού από υπόθεση είναι ΒΔ, ΓΕ κάθετες στη ΒΓ, τότε $\Delta\widehat{B}\Gamma = E\widehat{\Gamma}B = 90^\circ$.

Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν:

- $B\widehat{A}\Delta = \Gamma\widehat{A}E = 90^\circ$ γιατί $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$ από υπόθεση
- ΑΒ = ΑΓ, από υπόθεση
- $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1$, ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{B}_2$, $\widehat{\Gamma}_2$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ της υπόθεσης

Άρα τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτήν την πλευρά οξεία γωνία ίσες μία προς μία. Οπότε έχουν και ΒΔ = ΓΕ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\widehat{A}\Delta$ και $\Gamma\widehat{A}E$ αντίστοιχα.

β)



Είναι $B\widehat{A}\Gamma + \Gamma\widehat{A}E + E\widehat{A}\Delta + \Delta\widehat{A}B = 360^\circ$, οπότε $80^\circ + 90^\circ + \Delta\widehat{A}E + 90^\circ = 360^\circ$.

Άρα $\Delta\widehat{A}E = 100^\circ$.

1556-Λύση

Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα θα ισχύει ότι ΑΔ = ΑΕ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες $\widehat{B}_1$ και $\widehat{\Gamma}_1$ αντίστοιχα.

Οπότε το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές με βάση ΔΕ άρα θα είναι $A\widehat{\Delta}E = A\widehat{E}\Delta$ ως γωνίες που πρόσκεινται στη βάση του ισοσκελούς.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΔΑΕ θα ισχύει $\Delta\widehat{A}E + A\widehat{\Delta}E + A\widehat{E}\Delta = 180^o$ και αφού

$A\widehat{\Delta}E = A\widehat{E}\Delta$ και $\Delta\widehat{A}E = 100^o$ τότε θα έχουμε $100^o + 2A\widehat{\Delta}E = 180^o$.

Άρα $A\widehat{\Delta}E = 40^o = A\widehat{E}\Delta$.

1557

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΒΓ και Ε το μέσο της πλευράς του ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

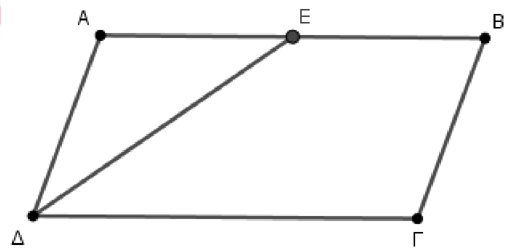
β) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$. (Μονάδες 15)

1557-Λύση

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ= 2 ΒΓ και Ε μέσο της πλευράς του ΑΒ.

α) Επειδή το Ε είναι μέσο της πλευράς ΑΒ, είναι ΑΕ = $\frac{AB}{2}$ και αφού ΑΒ = 2ΒΓ από υπόθεση τότε ΑΕ = $\frac{2B\Gamma}{2}$ άρα ΑΕ =ΒΓ. Οπότε θα είναι ΑΕ = ΒΓ = ΑΔ αφού ΒΓ =ΑΔ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Οπότε, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΔ και ΑΕ.

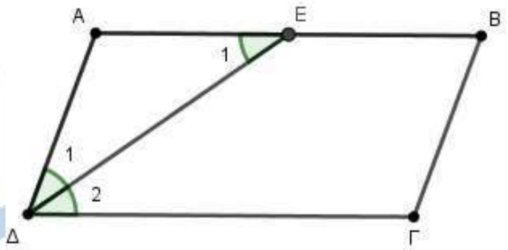


β) Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο τότε ΑΒ//ΔΓ.

Επειδή το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΕ, θα είναι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{E}_1$ (1) ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς.

Όμως $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{E}_1$ (2) ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΔΕ.

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$, άρα η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$.



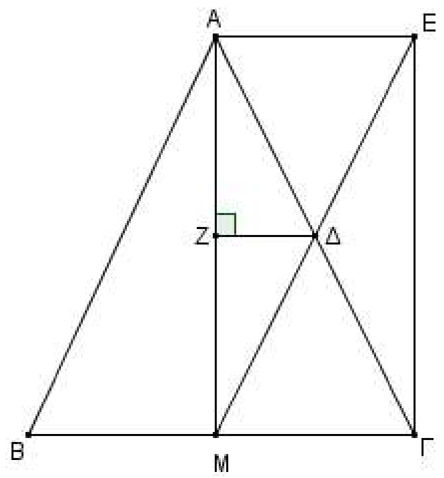
1560

ΘΕΜΑ 2

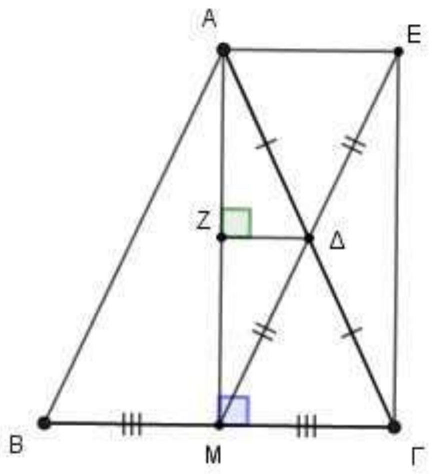
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και η διάμεσός του ΑΜ. Στο τρίγωνο ΑΜΓ θεωρούμε τη διάμεσο ΜΔ την οποία προεκτείνουμε προς το Δ κατά τμήμα ΔΕ=ΔΜ. Φέρουμε από το σημείο Δ τμήμα ΔΖ ⊥ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

β) $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$ (Μονάδες 13)



1560-Λύση



α) Στο τετράπλευρο ΑΜΓΕ τα ΑΓ, ΜΕ είναι διαγώνιοί του.

Επειδή είναι ΜΔ = ΔΕ (υπόθεση) και ΑΔ = ΔΓ αφού ΜΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΜΓ, έχουμε ότι οι διαγώνιοι ΜΕ και ΑΓ του τετραπλεύρου ΑΜΓΕ διχοτομούνται στο Δ. Οπότε, το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο με κέντρο το Δ.

Επειδή ΑΜ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, θα είναι και ύψος του τριγώνου οπότε ΑΜ $\perp$ΒΓ (1) και Α$\widehat{\text{Μ}}$Γ = 90^o.

Οπότε το παραλληλόγραμμο ΑΜΓΕ έχει μια γωνία του ορθή, άρα είναι ορθογώνιο.

β) Αφού ΔΖ $\perp$ ΑΜ και ΑΜ $\perp$ΒΓ (από σχέση (1)) άρα ΔΖ // ΜΓ ως κάθετες στην ίδια ευθεία ΑΜ.

Στο τρίγωνο ΑΜΓ το Δ είναι μέσο της ΑΓ και ΔΖ // ΜΓ, άρα το Ζ είναι μέσο της ΑΜ. Οπότε, το τμήμα ΔΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΜ του τριγώνου ΑΜΓ άρα θα είναι ίσο με το μισό της πλευράς του ΜΓ, δηλαδή ΔΖ = $\frac{\text{ΜΓ}}{2}$.

Επειδή ΜΓ=$\frac{\text{ΒΓ}}{2}$, αφού Μ μέσο ΒΓ, τότε θα είναι ΔΖ = $\frac{\frac{\text{ΒΓ}}{2}}{2}$, οπότε ΔΖ = $\frac{\text{ΒΓ}}{4}$.

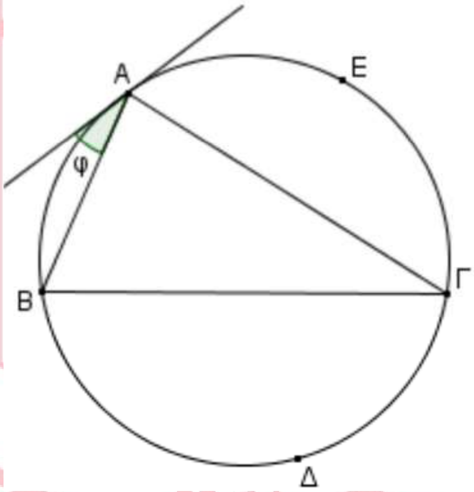
1561

ΘΕΜΑ 2

Στο ακόλουθο σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει γωνία φ=30^o με την πλευρά ΑΒ. Αν το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{B}\Delta\Gamma}$ είναι 160^o,

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 18)

β) να βρείτε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{A}\mathrm{E}\Gamma}$. (Μονάδες 7)



1561-Λύση

α) Η γωνία $\widehat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένη γωνία στο τόξο $\overset{\frown}{Β\Delta\Gamma}=160^0$,

άρα $\widehat{A} = \frac{160^o}{2} = 80^o$.

Η $\widehat{\varphi}$ είναι γωνία που σχηματίζεται από τη χορδή ΑΒ και την εφαπτομένη στο άκρο Α της χορδής ΑΒ οπότε θα είναι ίση με την εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{\Gamma}$ που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ της χορδής, δηλαδή $\widehat{\Gamma} = \widehat{\varphi} = 30^o$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o$, οπότε η γωνία $\widehat{B}$ είναι $\widehat{B} = 180^o - 80^o - 30^o$ ή $\widehat{B} = 70^o$.

β) Η γωνία $\widehat{B}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{AE\Gamma}$ οπότε το μέτρο της θα ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της, δηλαδή θα είναι

$\widehat{B} = \frac{\overset{\frown}{AE\Gamma}}{2}$ ή $70^o = \frac{\overset{\frown}{AE\Gamma}}{2}$, άρα $\overset{\frown}{AE\Gamma} = 140^o$.

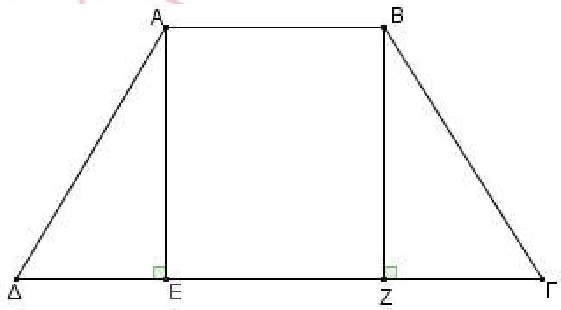
1562

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} = 60^0$. Φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ. Να αποδείξετε ότι:

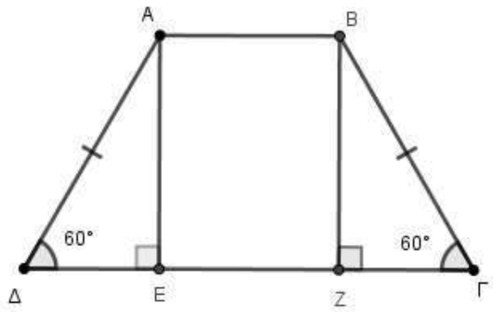
α) ΔΕ=ΓΖ. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)



1562-Λύση

α) Αφού ΑΕ και ΒΖ είναι ύψη τότε οι γωνίες $A\hat{E}\Delta$ και $B\hat{Z}\Gamma$ είναι ορθές και τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ορθογώνια.



Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΕΔ, ισχύει $\Delta\hat{A}E + \hat{\Delta} = 90^o$ και αφού $\hat{\Delta} = 60^o$ τότε $\Delta\hat{A}E = 30^o$. Οπότε, η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας των 30^0 θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΑΔ, δηλαδή είναι $\Delta E = \frac{A\Delta}{2}$

Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΓ θα είναι $Z\hat{B}\Gamma = 30^o$ και θα ισχύει $\Gamma Z = \frac{B\Gamma}{2}$.

Επειδή ΑΔ =ΒΓ γιατί το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές, άρα ΔΕ = ΓΖ.

β) Επειδή ΑΒ // ΓΔ και το τμήμα ΑΕ είναι κάθετο στην ΑΒ ($AE \perp AB$), τότε θα είναι κάθετο και στην παράλληλη της ΑΒ, την ΓΔ.

Οπότε, το τετράπλευρο ΑΕΖΒ έχει τρείς γωνίες ορθές, τις $A\hat{E}Z$, $B\hat{Z}E$ και $E\hat{A}B$ άρα είναι ορθογώνιο.

1567

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και γωνία $\hat{\Gamma} = 30^0$. Θεωρούμε το ύψος ΑΔ και το μέσο Ζ της πλευράς ΑΓ.

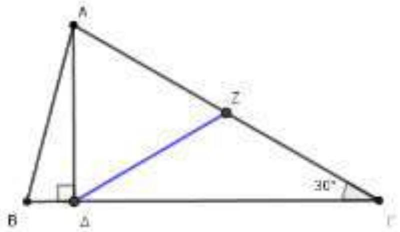
α) Να αποδείξετε ότι $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔΕ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

1567-Λύση

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ με $\hat{\Gamma}= 30^o$, ΑΔ ύψος και Ζ μέσο της ΑΓ.

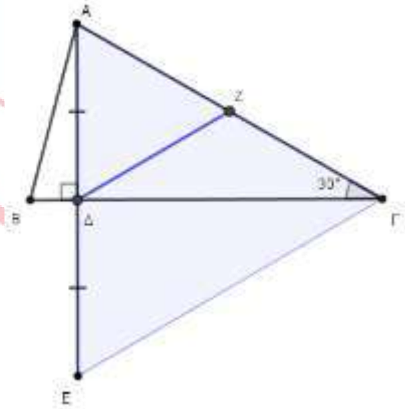
α)



Αφού το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ τότε το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο.

Το τμήμα ΔΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ, άρα ΔΖ = $\frac{ΑΓ}{2}$

β)



Έστω ΔΕ η προέκταση του ύψους ΑΔ προς το Δ κατά ίσο τμήμα ΔΕ.

Στο τρίγωνο ΑΓΕ το ΓΔ είναι ύψος και διάμεσος στην πλευρά του ΑΕ, άρα το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές. Οπότε το ΓΔ θα είναι και διχοτόμος της $Α\hat{Γ}Ε$ και θα ισχύει

$Α\hat{Γ}Δ = Δ\hat{Γ}Ε = \frac{Α\hat{Γ}Ε}{2}$ και επειδή είναι $Α\hat{Γ}Δ = 30^o$ θα είναι $Α\hat{Γ}Ε=60^0$. Επομένως το ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΕ έχει γωνία κορυφής 60^0, άρα είναι ισόπλευρο.

1572

ΘΕΜΑ 2ο

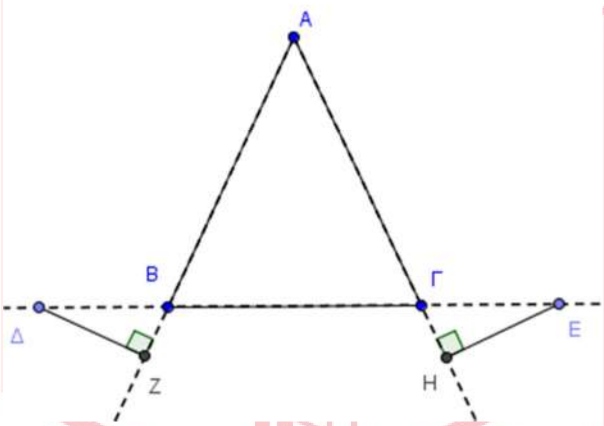
Θωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και σημεία Δ και Ε στην ευθεία ΒΓ τέτοια, ώστε ΒΔ=ΓΕ. Έστω ότι $ΔΖ \perp ΑΒ$ και $ΕΗ \perp ΑΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΒΖ=ΓΗ. (Μονάδες 10)

ii. Το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Αν $\hat{A} = 50^0$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΖΗ. (Μονάδες 8)

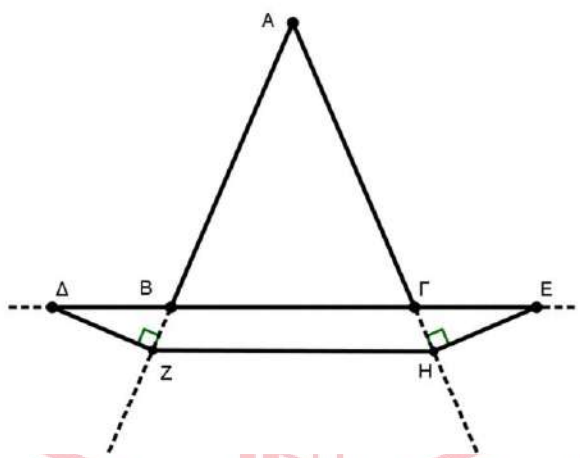


1572-Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ΔΒΖ και ΕΗΓ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΒΔ = ΓΕ, από υπόθεση
- $\Delta\widehat{B}Z = E\widehat{\Gamma}H$, ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ ($\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ).

Τα τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Οπότε έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές τους ΒΖ και ΓΗ ίσες, δηλ. ΒΖ = ΓΗ .



ii. Επειδή ΑΒ = ΑΓ και ΒΖ = ΓΗ, τότε ΑΒ + ΒΖ = ΑΓ + ΓΗ, οπότε ΑΖ = ΑΗ.

Άρα το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές με βάση τη ΖΗ, είναι $\widehat{Z} = \widehat{H}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΖΗ έχουμε:

$\widehat{A} + \widehat{Z} + \widehat{H} = 180^o$, ή $50^o + 2\widehat{Z} = 180^o$, ή $2\widehat{Z} = 130^o$, οπότε $\widehat{Z} = 65^o = \widehat{H}$

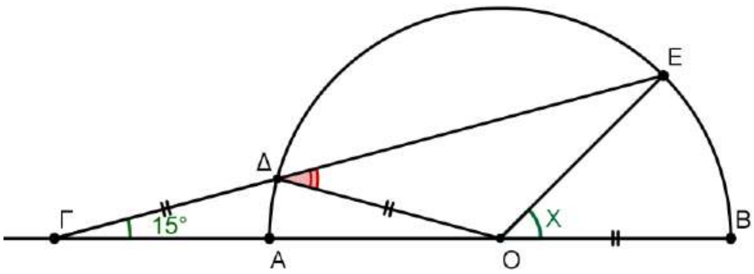
1576

ΘΕΜΑ 2

Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ προεκτείνουμε την ΑΒ προς το μέρος του Α και παίρνουμε ένα σημείο Γ. Θεωρούμε Ε ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓΕ με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα ΓΔ είναι ίσο με το ΟΒ και η γωνία $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{E}$ είναι $15°$, τότε

α) να αποδείξετε ότι $\mathrm{O}\hat{\Delta}\mathrm{E} = 30°$ (Μονάδες 13)

β) να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{E}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B} = x$. (Μονάδες 12)



1576-Λύση

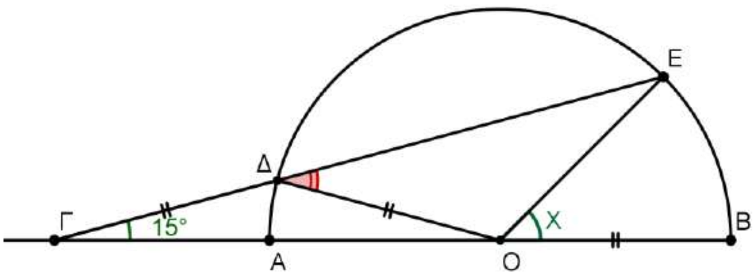
α) Έστω ρ η ακτίνα του ημικυκλίου.

Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές διότι ΟΔ = ΓΔ = ρ.

Άρα $Δ\widehat{Ο}Α = \widehat{Γ} = 15^ο$.

Η γωνία $\widehat{Δ}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΟΓΔ,

άρα $Ο\widehat{Δ}Ε = Δ\widehat{Ο}Α + \widehat{Γ} = 2 \cdot 15^ο = 30^ο$



Το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ισοσκελές διότι ΟΔ = ΟΕ = ρ. Άρα $\widehat{Ε} = Ο\widehat{Δ}Ε = 30^ο$

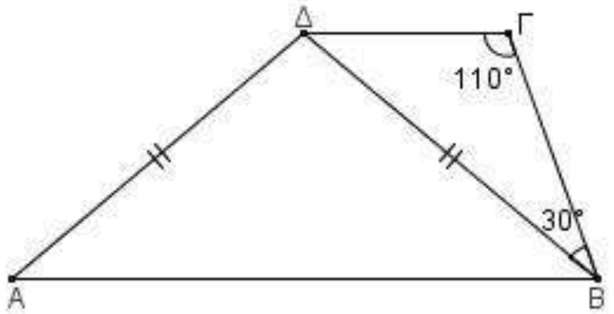
Η γωνία $Β\widehat{Ο}Ε$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΓΟΕ, άρα

$Β\widehat{Ο}Ε = \widehat{Ε} + \widehat{Γ}$, δηλαδή $x = 30^ο + 15^ο = 45^ο$

1577

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ στο οποίο η διαγώνιος ΒΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΔ. Αν η γωνία $\hat{\Gamma} = 110°$ και η γωνία $\widehat{\Delta B\Gamma} = 30°$, να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{A\Delta B}$. (Μονάδες 25)



1577-Λύση

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΓΒ βρίσκουμε:

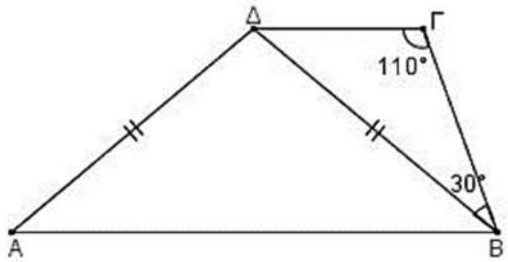
$\Gamma\widehat{\Delta}B + \widehat{\Gamma} + \Delta\widehat{B}\Gamma = 180^o$, δηλαδή $\Gamma\widehat{\Delta}B + 110^o + 30^o = 180^o$, οπότε $\Gamma\widehat{\Delta}B = 40^o$

Είναι $\Delta\widehat{B}A = \Gamma\widehat{\Delta}B = 40^o$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ.

Επειδή ΔΑ = ΔΒ, το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές, άρα $\widehat{A} = \Delta\widehat{B}A = 40^o$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΒ έχουμε:

$A\widehat{\Delta}B + \widehat{A} + \Delta\widehat{B}A = 180$ ή $A\widehat{\Delta}B + 2 \cdot 40^o = 180^o$, οπότε $A\widehat{\Delta}B = 80^o$



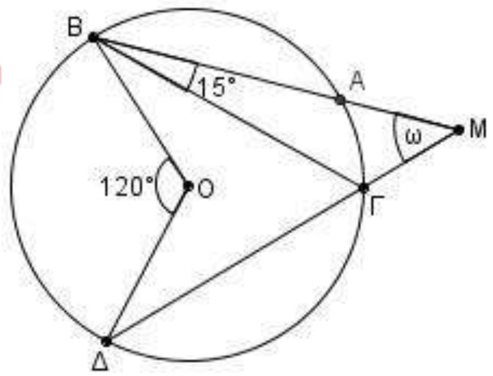
1580

ΘΕΜΑ 2

Στο ακόλουθο σχήμα η επίκεντρη γωνία $\mathrm{B\hat{O}\Delta}$ είναι 120° και η γωνία $\mathrm{\Gamma\hat{B}A}$ είναι 15°.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία ΒΓΔ. (Μονάδες 12)

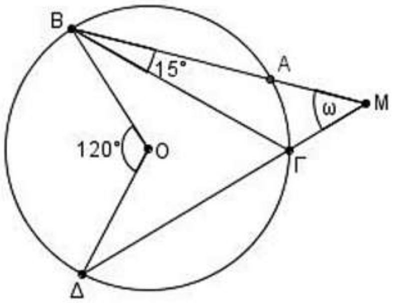
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ω είναι 45°. (Μονάδες 13)



1580-Λύση

α) Η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{\Gamma}\Delta$ και η επίκεντρη $B\hat{O}\Delta$ βαίνουν στο ίδιο τόξο, άρα

$B\hat{\Gamma}\Delta = \frac{B\hat{O}\Delta}{2} = 60^o$.



β) Η γωνία $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΓΜ, οπότε:

$B\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{B}M + \hat{M} = 60^o$, οπότε $60^o = 15^o + \hat{\omega}$. Άρα $\hat{\omega} = 45^o$

1586

ΘΕΜΑ 2

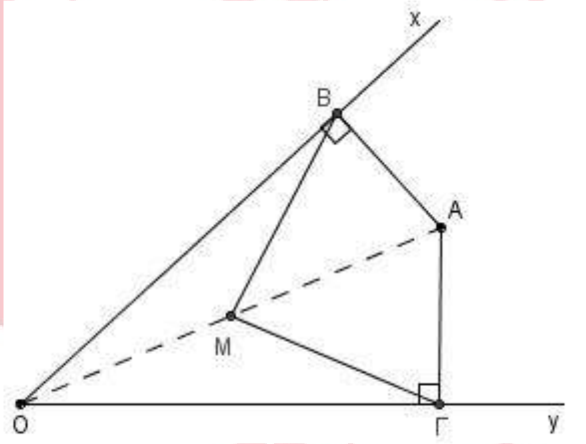
Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Α στο εσωτερικό της. Από το Α φέρνουμε τις κάθετες ΑΒ, ΑΓ προς τις πλευρές Οx , Οy της γωνίας αντίστοιχα, και ονομάζουμε Μ το μέσο του ΟΑ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΜΑ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) $B\widehat{M}A = 2\cdot x\widehat{O}A$ (Μονάδες 9)

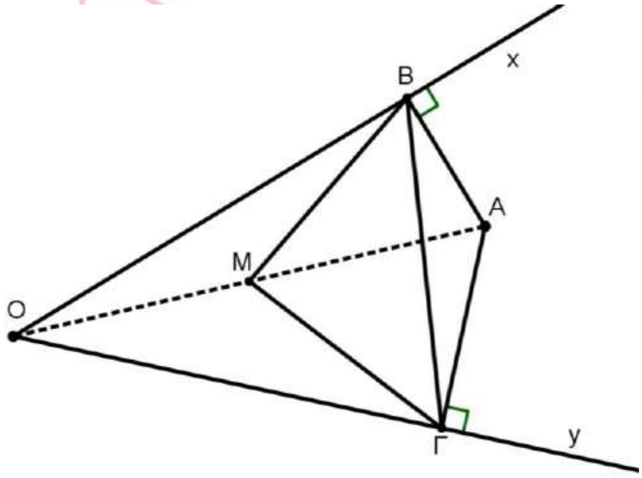


1586-Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΟΑ, η ΒΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα ισχύει ότι ΒΜ = $\frac{ΟΑ}{2}$ = ΜΑ (1). Άρα το τρίγωνο ΒΜΑ είναι ισοσκελές.

β) Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΟ, η ΓΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα ΓΜ = $\frac{ΟΑ}{2}$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΒΜ = ΓΜ, άρα το τρίγωνο ΒΓΜ είναι ισοσκελές.



β) Από την (1) ισχύει ότι: ΒΜ = $\frac{ΟΑ}{2}$ = ΟΜ

Άρα το τρίγωνο ΟΒΜ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι $Μ\widehat{Ο}Β = Μ\widehat{Β}Ο$.

Η γωνία $Β\widehat{Μ}Α$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $Β\widehat{Μ}Ο$, άρα:

$Β\widehat{Μ}Α = Μ\widehat{Ο}Β + Μ\widehat{Β}Ο = 2Μ\widehat{Ο}Β$, δηλαδή $Β\widehat{Μ}Α = 2 \cdot x\widehat{Ο}Α$

1589

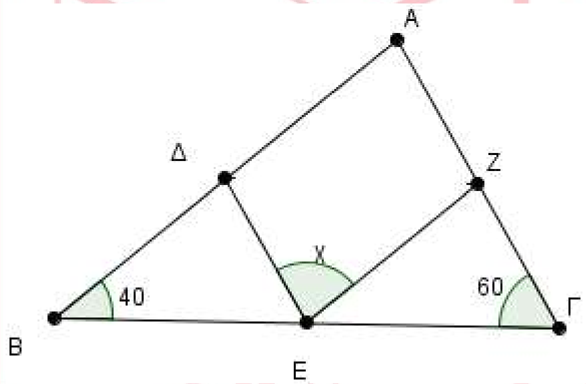
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 40^0$ και $\hat{\Gamma} = 60^0$. Επιπλέον, τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΑΓ και ΖΕ//ΑΒ. (Μονάδες 8)

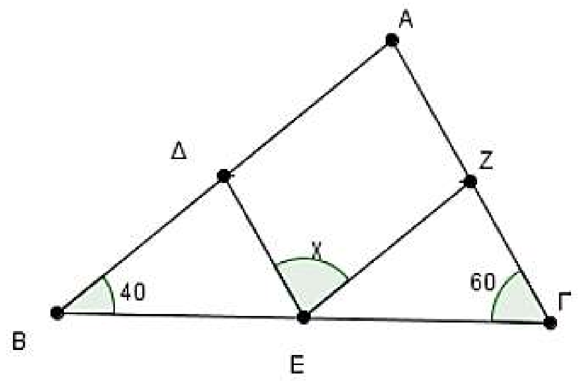
γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ. (Μονάδες 8)



1589-Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o$ ή $\widehat{A} + 40^o + 60^o = 180^o$, άρα $\widehat{A} = 80^o$



β) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε ισχύει ότι ΔΕ // ΑΓ. Επίσης το ΕΖ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε: ΕΖ // ΑΒ.

γ) Είναι $B\widehat{\Delta}E = \widehat{A} = 80^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Ομοίως, είναι $B\widehat{E}\Delta = \widehat{\Gamma} = 60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΓ που τέμνονται από την ΒΓ.

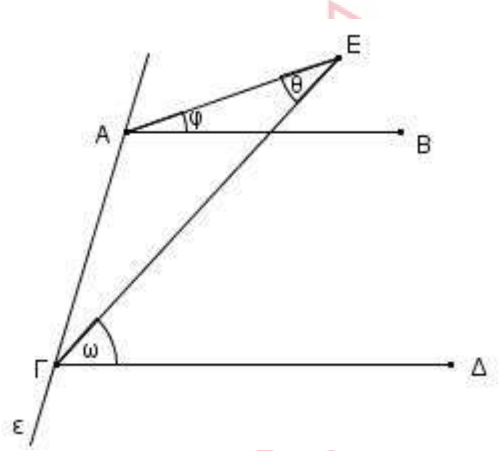
1590

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα ΑΒ και ΓΔ καθώς και ένα τυχαίο σημείο Ε βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε.

Να αποδείξετε ότι:

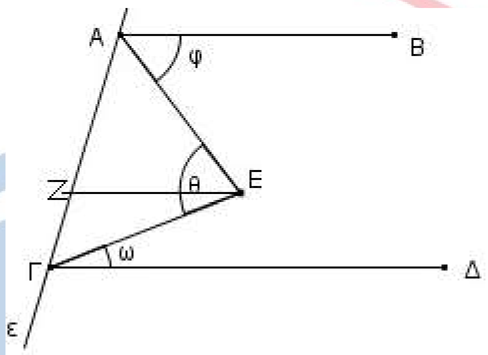
α) Αν το Ε είναι εκτός των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ τότε: $\widehat{\omega} = \widehat{\varphi}+\widehat{\theta}$



(Μονάδες 10)

β) Αν το Ε είναι ανάμεσα στα τμήματα ΑΒ και ΓΔ και ΕΖ//ΑΒ, τότε να αποδείξετε ότι

$\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$



(Μονάδες 15)

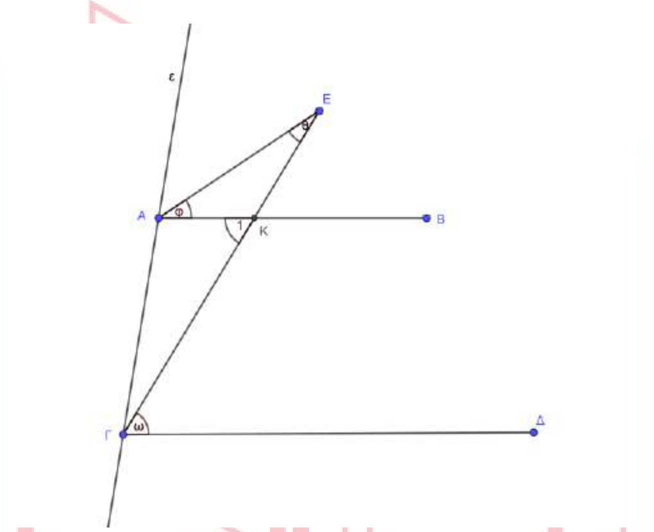
1590-Λύση

α) Έστω Κ το σημείο τομής των ΕΓ, ΑΒ. Είναι $\widehat{K}_1 = \widehat{\omega}$ (1)

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΕΓ.

Η γωνία $\widehat{K}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΚΕ, οπότε $\widehat{K}_1 = \widehat{\theta} + \widehat{\varphi}$

Άρα λόγω της (1) βρίσκουμε $\widehat{\omega} = \widehat{\varphi} + \widehat{\theta}$



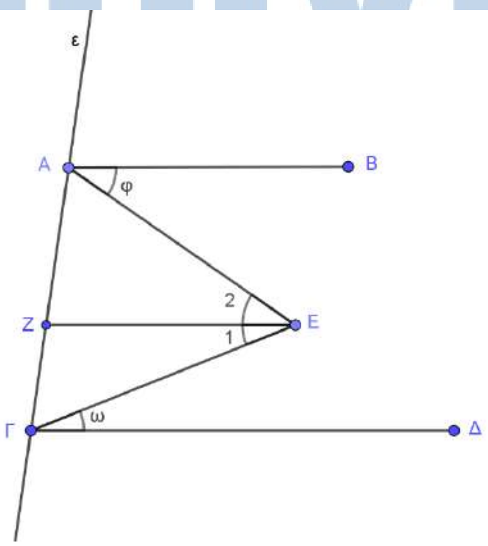
β) Είναι $\widehat{\omega} = \widehat{E}_1$

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ, ΓΔ που τέμνονται από την ΕΓ.

Επίσης $\widehat{\varphi} = \widehat{E}_2$

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΕΖ που τέμνονται από την ΑΕ. Τότε

$\widehat{\varphi} + \widehat{\omega} = \widehat{E}_2 + \widehat{E}_1 = \widehat{\theta}$



1594

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$). Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοιο ώστε, η διχοτόμος ΔΕ της γωνίας $A\hat{\Delta}B$ να είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $E\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma$ και $E\hat{\Delta}A = \hat{\Gamma}$

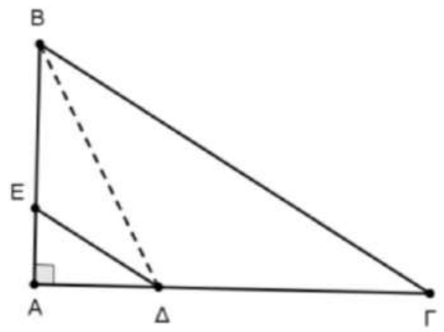
(Μονάδες 4 + 4)

ii) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

β) Αν $A\hat{\Delta}B = 60^o$ να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

(Μονάδες 9)



1594-Λύση

α) i) Ισχύει ότι:

- $E\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma$ (1), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΒΔ
- $E\hat{\Delta}A = \hat{\Gamma}$ (2), ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ

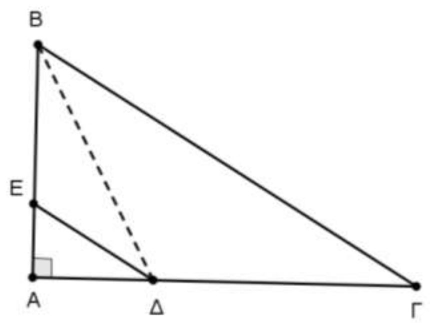
ii) Ισχύει ότι $E\hat{\Delta}B = E\hat{\Delta}A$ (3), διότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της $A\hat{\Delta}B$.

Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{\Gamma}$ (4)

Άρα το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές με ΔΒ = ΔΓ.

β) Η $A\hat{\Delta}B$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΔΒΓ οπότε ισχύει $A\hat{\Delta}B = \hat{\Gamma} + \Delta\hat{B}\Gamma$

Λόγω της (4) βρίσκουμε $60^o = \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow 60^o = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^o$



1595

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και το ύψος του ΑΜ. Φέρουμε ημιευθεία Γx, κάθετη στη $\mathrm{B\Gamma}$, προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα ΓΔ = ΑΒ.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\widehat{A}\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $\Gamma\widehat{\Delta}A$.

(Μονάδες 12)

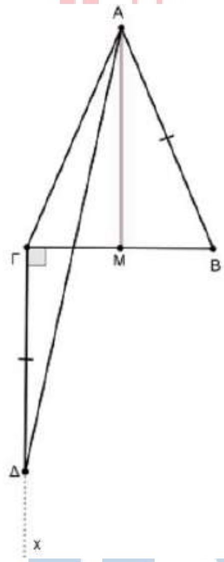
β) Να αποδείξετε ότι:

i) ΓΔ // ΑΜ

(Μονάδες 6)

ii) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{M\widehat{A}\Gamma}$.

(Μονάδες 7)



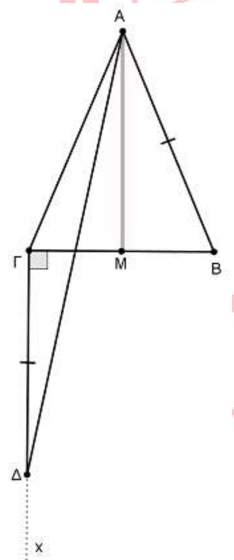
1595-Λύση

α) Είναι ΓΔ = ΑΒ από υπόθεση και ΑΒ = ΑΓ επειδή ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο, οπότε ΓΔ = ΑΓ.

Άρα το ΑΓΔ είναι ισοσκελές τρίγωνο με βάση την ΑΔ. Συνεπώς $\Delta\widehat{A}\Gamma = \Gamma\widehat{\Delta}A$.

β) i) Επειδή το ΑΜ είναι ύψος του τριγώνου ισχύει ότι $AM \perp B\Gamma$. Επίσης, από υπόθεση $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$, άρα ΓΔ//ΑΜ.

ii) Είναι $\Gamma\widehat{\Delta}A = M\widehat{A}\Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΓΔ, ΑΜ που τέμνονται από την ΑΔ. Ισχύει ακόμη από το ερώτημα (α) ότι $\Delta\widehat{A}\Gamma = \Gamma\widehat{\Delta}A$ οπότε είναι $\Delta\widehat{A}\Gamma = M\widehat{A}\Delta$. Τελικά η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\widehat{A}\Gamma$.



1596

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Έστω Αx η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας $\widehat{Α}_{εξ}$ = 120^o. Από την κορυφή Β φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Αx, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $Α\widehat{Β}Δ$ = 60^o

(Μονάδες 5)

ii. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.

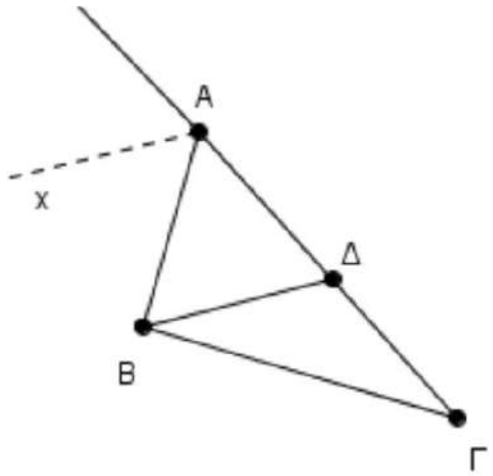
(Μονάδες 5)

iii. ΑΓ – ΑΒ = ΔΓ

(Μονάδες 5)

β) Αν η γωνία $Β\widehat{Δ}Α$ είναι διπλάσια της γωνίας $\widehat{Γ}$ του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΓ.

(Μονάδες 10)



1596-Λύση

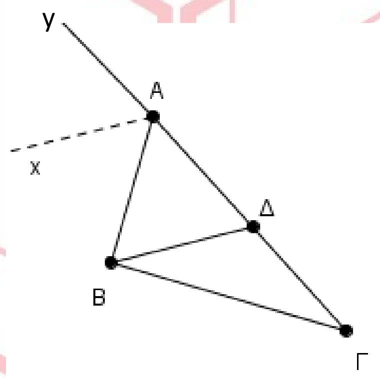
α) i. Είναι $A\widehat{\Delta}B = y\widehat{A}x = \frac{\widehat{A}_{\varepsilon\xi}}{2} = 60^o$

ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων Αx, ΒΔ που τέμνονται από την ΑΔ.

Επίσης $A\widehat{B}\Delta = x\widehat{A}B = \frac{\widehat{A}_{\varepsilon\xi}}{2} = 60^o$

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων Αx, ΒΔ που τέμνονται από την ΑΒ.

ii. Επειδή στο τρίγωνο ΑΒΔ δύο γωνίες του είναι ίσες με 60^o, θα είναι και η τρίτη του γωνία 60^o οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.



iii. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι ΑΒ = ΑΔ = ΒΔ.

Τότε ΔΓ = ΑΓ – ΑΔ = ΑΓ – ΑΒ.

β) Είναι $B\widehat{\Delta}A = 60^o$ και $B\widehat{\Delta}A = 2\widehat{\Gamma} \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 30^o$

Επίσης $B\widehat{\Delta}\Gamma = 180^o - B\widehat{\Delta}A = 180^o - 60^o = 120^o$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΔΓ, βρίσκουμε:

$\Delta\widehat{B}\Gamma + \widehat{\Gamma} + B\widehat{\Delta}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow \Delta\widehat{B}\Gamma + 30^o + 120^o = 180^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta\widehat{B}\Gamma + 150^o = 180^o \Leftrightarrow \Delta\widehat{B}\Gamma = 30^o$

1597

ΘΕΜΑ 2

Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ (προς το Α) και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ=ΑΒ και ΑΕ=ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

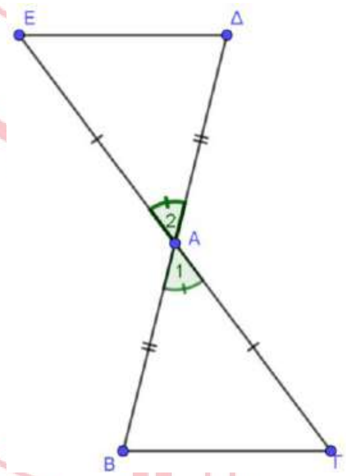
β) ΕΔ//ΒΓ (Μονάδες 13)

1597-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν:

- ΑΔ = ΑΒ από υπόθεση,
- ΑΕ = ΑΓ από υπόθεση,
- $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, ως κατακορυφήν

Από το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.



β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ προκύπτει ότι και οι αντίστοιχες γωνίες $\hat{E}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες, δηλαδή $\hat{E} = \hat{\Gamma}$.

Οι γωνίες αυτές είναι εντός εναλλάξ των ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΕΓ. Και αφού οι γωνίες αυτές είναι ίσες, οι ΔΕ, ΒΓ είναι παράλληλες.

1600

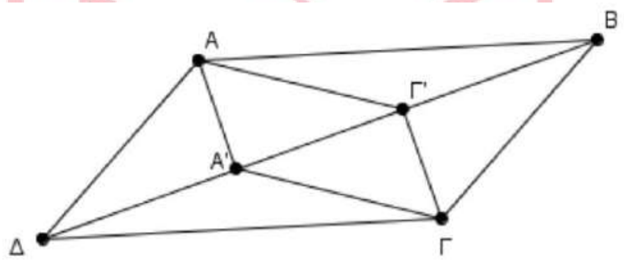
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Α΄, Γ΄ οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ. Αν τα σημεία Α΄ και Γ΄ δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

α) ΑΑ΄// ΓΓ΄ (Μονάδες 8)

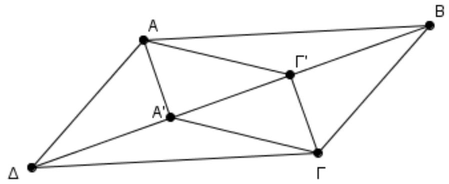
β) ΑΑ΄= ΓΓ΄ (Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο ΑΓ΄ΓΑ΄ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



1600-Λύση

α) Επειδή ΑΑ΄ $\perp$ ΒΔ και ΓΓ΄ $\perp$ ΒΔ, προκύπτει ότι ΑΑ΄ // ΓΓ΄



β) Τα τρίγωνα ΑΑ΄Δ και ΓΓ΄Β είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΑΔ = ΒΓ, διότι είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- Α$\widehat{Δ}$Α΄ = Γ$\widehat{Β}$Γ΄, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΑ΄Δ και ΓΓ΄Β έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία οπότε είναι ίσα. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες Α$\widehat{Δ}$Α΄ και Γ$\widehat{Β}$Γ΄ είναι ίσες, δηλαδή ΑΑ΄ = ΓΓ΄.

γ) Επειδή ΑΑ΄ // ΓΓ΄ και ΑΑ΄= ΓΓ΄,

το τετράπλευρο ΑΓ΄ΓΑ΄ είναι παραλληλόγραμμο.

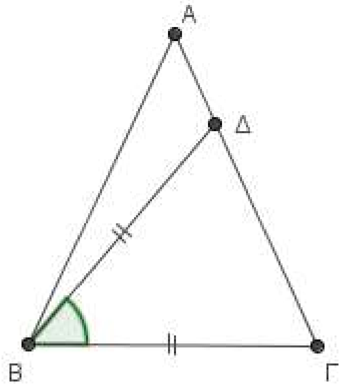
1602

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με γωνία $\hat{A} = 50^0$. Έστω Δ είναι σημείο της πλευράς ΑΓ, τέτοιο ώστε ΒΔ=ΒΓ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{\Delta B \Gamma}$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$. (Μονάδες 13)



1602-Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, ισχύει ότι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 50^o + 2\widehat{B} = 180^o \Leftrightarrow 2\widehat{B} = 130^o \Leftrightarrow \widehat{B} = 65^o$.

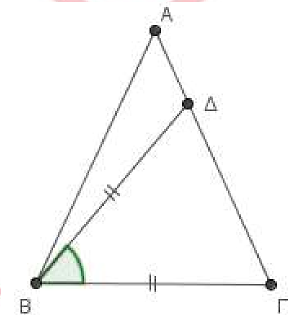
Άρα και $\widehat{\Gamma} = 65^o$.

β) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές διότι ΒΔ = ΒΓ. Τότε $B\widehat{\Delta}\Gamma = \widehat{\Gamma} = 65^o$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΒΓ έχουμε:

$\Delta\widehat{B}\Gamma + B\widehat{\Delta}\Gamma + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \Delta\widehat{B}\Gamma + 65^o + 65^o = 180^o \Leftrightarrow \Delta\widehat{B}\Gamma + 130^o = 180^o$

Άρα $\Delta\widehat{B}\Gamma = 50^o = \widehat{A}$



1653

ΘΕΜΑ 2

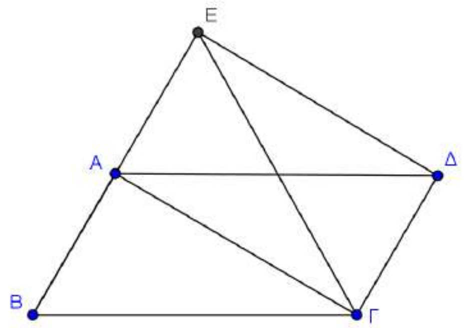
Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΑΓΔΕ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

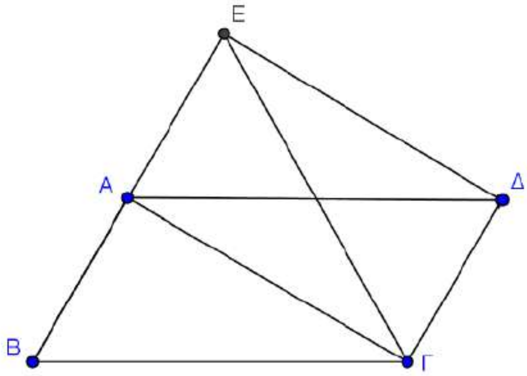
α) Το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$ (Μονάδες 8)



1653-Λύση



α) Είναι ΑΒ = ΓΔ (1) και ΑΒ // ΓΔ (2) ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Επίσης ΑΕ = ΓΔ (3) και ΑΕ // ΓΔ (4) ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΓΔΕ.

Άρα από (2), (4) προκύπτει ότι ΑΒ // ΑΕ άρα τα Β, Α και Ε είναι συνευθειακά

και επειδή ΑΒ = ΑΕ, λόγω των (1), (3), το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ.

β) Είναι ΑΔ = ΒΓ (5) διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Επίσης ΑΔ = ΓΕ (6) διότι οι διαγώνιες του ορθογωνίου είναι ίσες. Άρα από (5), (6) βρίσκουμε ΒΓ = ΓΕ, οπότε το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές.

γ) Είναι $Β\hat{Γ}Α = Γ\hat{Α}Δ$ (7), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ και $Α\hat{Δ}Ε = Γ\hat{Α}Δ$ (8) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΓ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΔ. Άρα από (7), (8) ισχύει $Β\hat{Γ}Α = Α\hat{Δ}Ε$.

1654

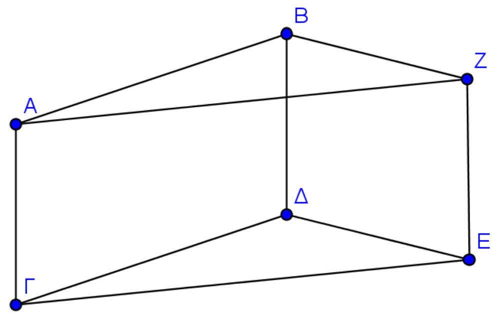
ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΓ και ΒΔΕΖ.

Να αποδείξετε ότι:

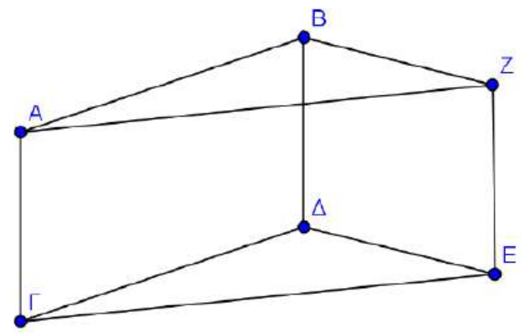
α) Το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}$. (Μονάδες 12)



1654-Λύση

α) Το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι απέναντι πλευρές του ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες και παράλληλες. Επίσης, το ΒΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι απέναντι πλευρές του ΒΔ και ΖΕ είναι ίσες και παράλληλες. Άρα οι ΑΓ και ΖΕ είναι ίσες και παράλληλες, συνεπώς και το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.



β) Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΓΔΕ έχουν:

- ΑΒ = ΓΔ, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΔΓ
- ΒΖ = ΔΕ, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΒΖΕΔ
- ΑΖ = ΓΕ, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΖΕΓ

Από το κριτήριο Π-Π Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΓΔΕ είναι ίσα, οπότε έχουν και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}$.

1655

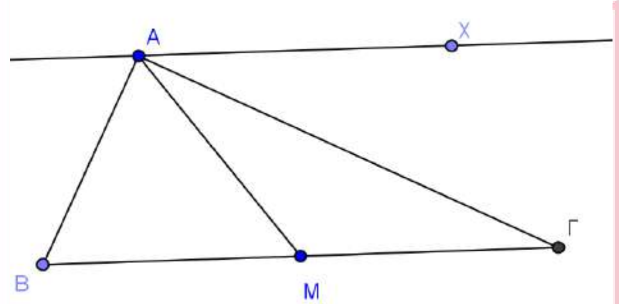
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε ημιευθεία Αx παράλληλη στη ΒΓ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΜ με το σημείο Γ).

Να αποδείξετε ότι:

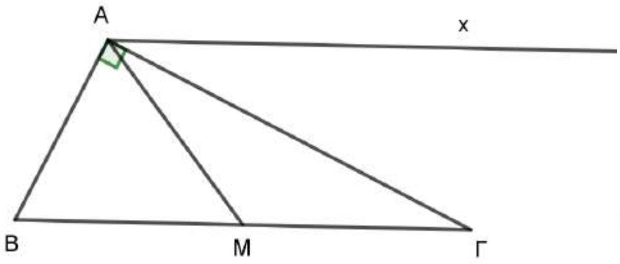
α) $M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$ (Μονάδες 12)

β) η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑx. (Μονάδες 13)



1655-Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα ισχύει ότι ΑΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$ = ΜΓ.



Επομένως το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές, οπότε άρα $Μ\hat{Α}Γ = Μ\hat{Γ}Α$ (1).

β) Είναι $Μ\hat{Γ}Α = Γ\hat{Α}x$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων Αx, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ. Από τις (1), (2) βρίσκουμε: $Μ\hat{Α}Γ = Γ\hat{Α}x$, άρα η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $Μ\hat{Α}x$.

1661

ΘΕΜΑ 2

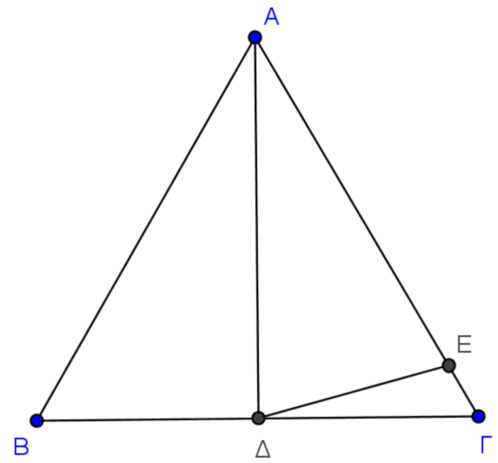
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και η διάμεσός του ΑΔ τέτοια ώστε $B\hat{A}\Delta = 30^o$.

Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΕ.

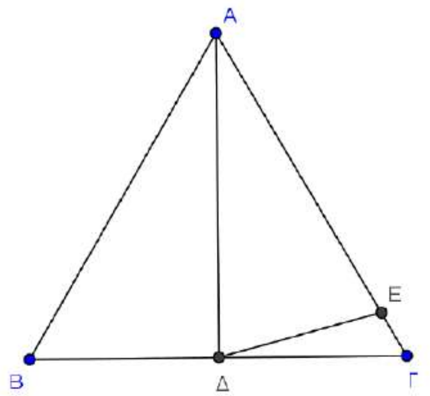
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ. (Μονάδες 8)



1661-Λύση



α) Επειδή ΑΒ =ΑΓ, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, άρα η διάμεσος ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου.

Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ, είναι $\Delta\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Delta = 30^o$, οπότε $\hat{A} = 60^o$.

Ισχύει ότι:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 60^o + \hat{B} + \hat{B} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{B} = 120^o \Leftrightarrow \hat{B} = 60^o$

Για το τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^o$, άρα είναι ισόπλευρο.

β) Επειδή ΑΔ=ΑΕ το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, οπότε $A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ, έχουμε:

$\Delta\hat{A}\Gamma + A\hat{\Delta}E + A\hat{E}\Delta = 180^o \Leftrightarrow 30^o + 2A\hat{\Delta}E = 180^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E = 75^o = A\hat{E}\Delta$

γ) $E\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{\Delta}\Gamma - A\hat{\Delta}E = 90^o - 75^o = 15^o$

1672

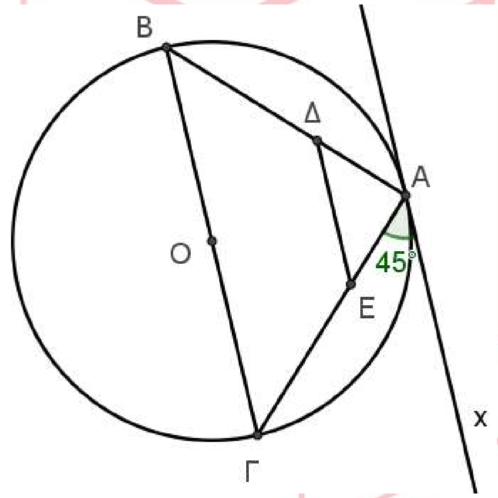
ΘΕΜΑ 2

Σε σημείο Α ενός κύκλου, φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου Αχ και τη χορδή ΑΓ που σχηματίζει με την εφαπτομένη γωνία 45^{o}. Φέρουμε τη διάμετρο ΓΒ και μια παράλληλη ευθεία στη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΓ. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

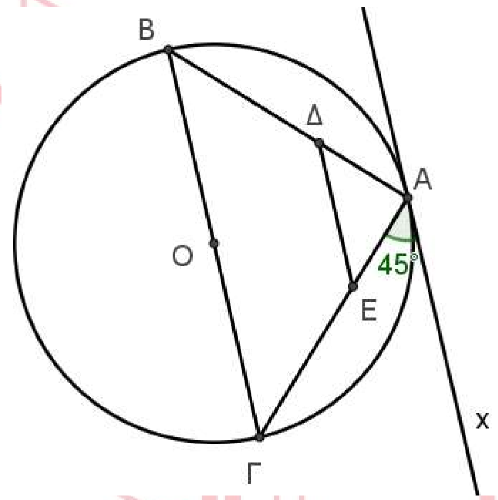
(Μονάδες 15)



1672-Λύση

α) Είναι $B\widehat{A}\Gamma = 90^o$ ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Ακόμη η γωνία $\Gamma\widehat{A}x$ σχηματίζεται από την εφαπτομένη Ax και τη χορδή ΑΓ άρα είναι ίση με τη γωνία που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$. Επομένως ισχύει: $\widehat{B} = \Gamma\widehat{A}x = 45^o$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ βρίσκουμε $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 45^o$



β) Το ΒΓΕΔ είναι τραπέζιο γιατί ΔΕ//ΒΓ και οι πλευρές ΒΔ και ΓΕ τέμνονται στο Α, άρα δεν είναι παράλληλες. Επίσης, έχει τις γωνίες που πρόσκεινται στη βάση ΒΓ ίσες, άρα είναι ισοσκελές τραπέζιο.

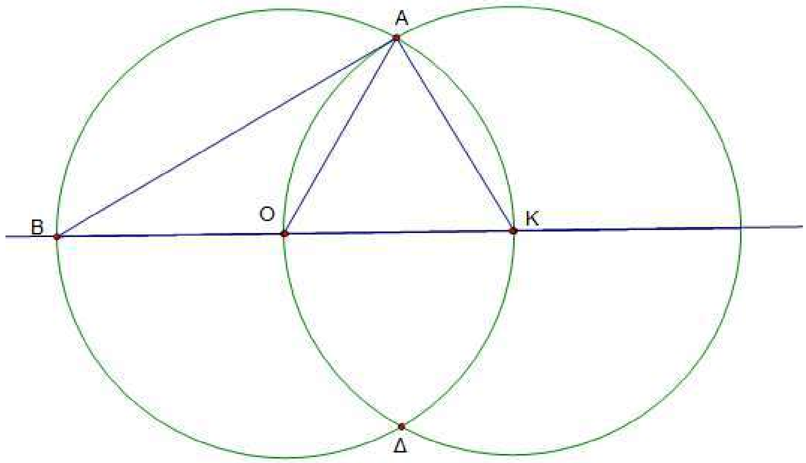
1673

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι (Ο,ρ) και (Κ,ρ) με ΟΚ=ρ, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Δ.

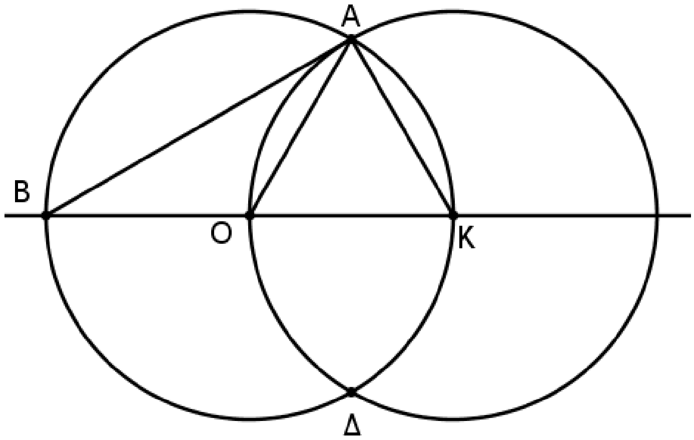
α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΚ. (Μονάδες 15)



1673-Λύση

α) Είναι ΟΑ = ΟΚ = ρ, ως ακτίνες του κύκλου (Ο, ρ). Ισχύει επίσης ότι ΚΑ = ρ ως ακτίνα του κύκλου (Κ, ρ). Άρα ΟΑ = ΟΚ = ΚΑ = ρ. Άρα το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο.



β) Επειδή ΟΑΚ ισόπλευρο τρίγωνο είναι $B\hat{K}A = 60^o$. Επίσης $B\hat{A}K = 90^o$, διότι είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο ημικύκλιο $\overset{\frown}{B\Delta K}$. Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΒΑΚ βρίσκουμε:

$B\hat{A}K + B\hat{K}A + A\hat{B}K = 180^o \Leftrightarrow 90^o + 60^o + A\hat{B}K = 180^o \Leftrightarrow A\hat{B}K = 30^o$

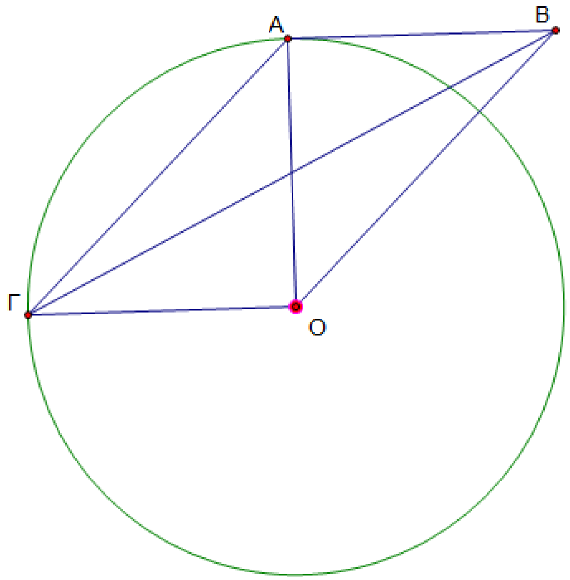
1678

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε κάθετες ακτίνες ΟΑ , ΟΓ και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα ΑΒ με $\mathrm{AB} = \mathrm{O\Gamma}$.

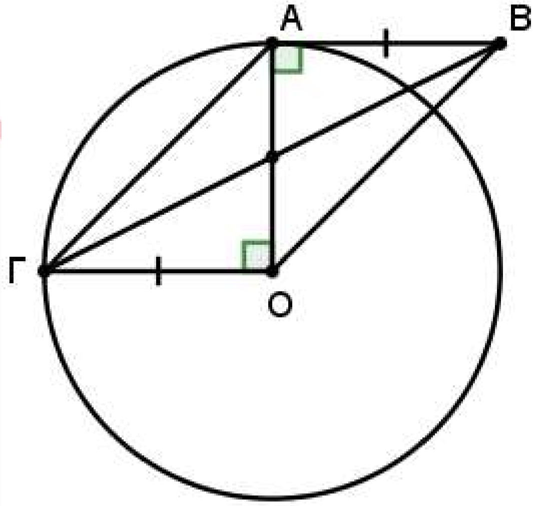
α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΟ και ΒΓ διχοτομούνται. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ. (Μονάδες 15)



1678-Λύση

α) Η ΟΑ είναι ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής με την εφαπτομένη ΑΒ, οπότε $ΟΑ \perp ΑΒ$. Επίσης $ΟΑ \perp ΟΓ$ από υπόθεση, άρα ΑΒ // ΟΓ. Επειδή ΑΒ // ΟΓ και ΑΒ = ΟΓ, τότε το τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι παραλληλόγραμμο. Οι ΑΟ και ΒΓ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου, οπότε διχοτομούνται.



β) Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές επειδή ΟΑ = ΑΒ = ρ. Τότε $\hat{Β} = Β\hat{Ο}Α = 45^{o}$ και $\hat{Β} = Ο\hat{Γ}Α = 45^{o}$ διότι είναι απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Είναι $Β\hat{Ο}Γ = Β\hat{Ο}Α + Α\hat{Ο}Γ = 45^{o} + 90^{o} = 135^{o}$ και $Γ\hat{Α}Β = Β\hat{Ο}Γ = 135^{o}$ διότι είναι απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

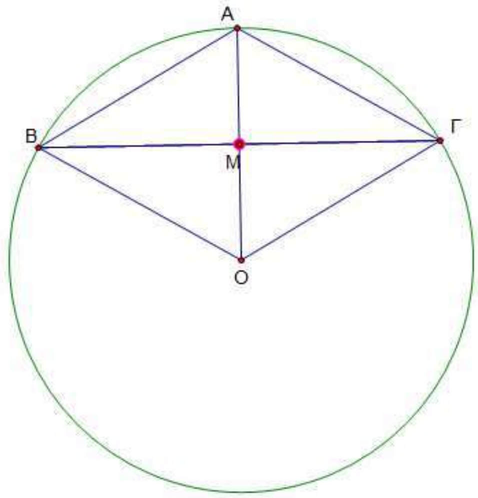
1679

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε την ακτίνα ΟΑ και τη χορδή ΒΓ κάθετη στην ΟΑ στο μέσο της Μ.

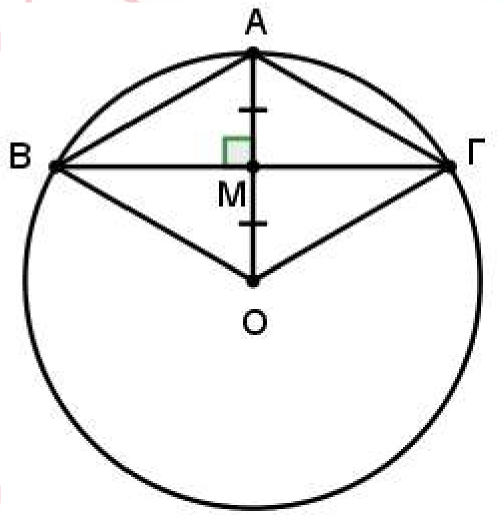
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΟΒ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΟΒ. (Μονάδες 15)



1679-Λύση

α) Επειδή ΟΜ ⊥ ΒΓ, το ΟΜ είναι απόστημα της χορδής ΒΓ, οπότε το Μ είναι μέσο της. Από υπόθεση το Μ είναι μέσο και της ΟΑ. Άρα τα τμήματα ΟΑ και ΒΓ του ΑΓΟΒ διχοτομούνται. Αυτό σημαίνει ότι το ΑΓΟΒ είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον ΟΑ⊥ ΒΓ**,** δηλαδή οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΑΓΟΒ είναι κάθετες. Άρα το ΑΓΟΒ είναι ρόμβος.



β) Στο τρίγωνο ΒΟΑ η ΒΜ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οπότε ΒΟ = ΒΑ. Τότε ΟΑ = ΒΟ = ΒΑ = ρ, οπότε το τρίγωνο ΒΟΑ είναι ισόπλευρο και επομένως ισχύει $B\hat{O}A = B\hat{A}O = O\hat{B}A = 60^o$.

Όμοια, το ΓΜ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου ΟΓΑ, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με ΟΑ = ΟΓ= ρ. Τότε ΟΑ = ΟΓ = ΓΑ = ρ, οπότε το τρίγωνο ΓΟΑ είναι ισόπλευρο και επομένως ισχύει $\Gamma\hat{O}A = \Gamma\hat{A}O = O\hat{\Gamma}A = 60^o$.

Είναι $B\hat{O}\Gamma = 60^o + 60^o = 120^o = B\hat{A}\Gamma$.

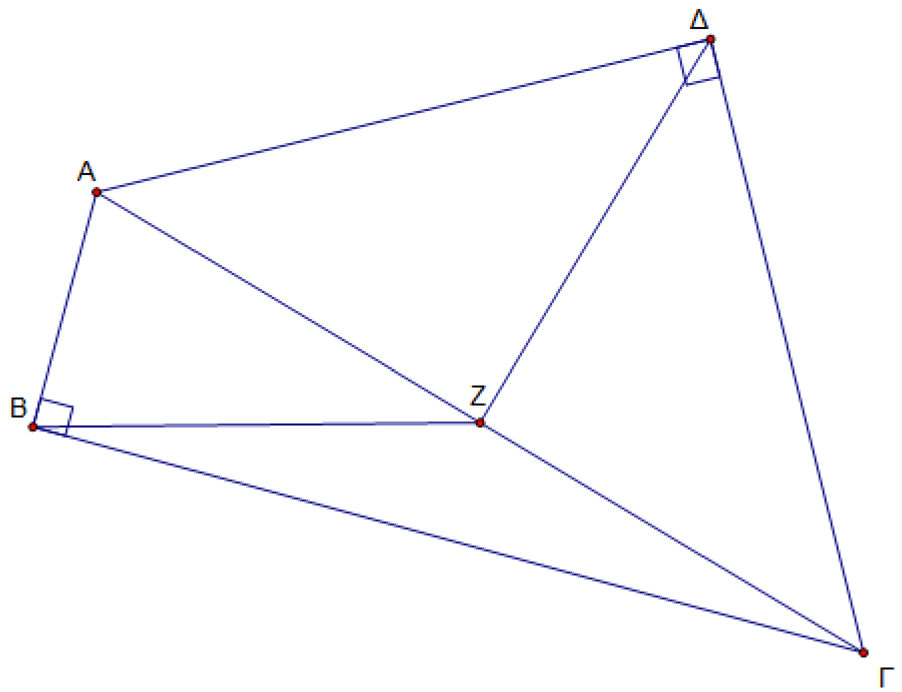
1685

ΘΕΜΑ 2

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με $\hat{B} = 90^o$ και Ζ το μέσο του ΑΓ. Με υποτείνουσα το ΑΓ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$ με $\hat{\Delta} = 90^O$.

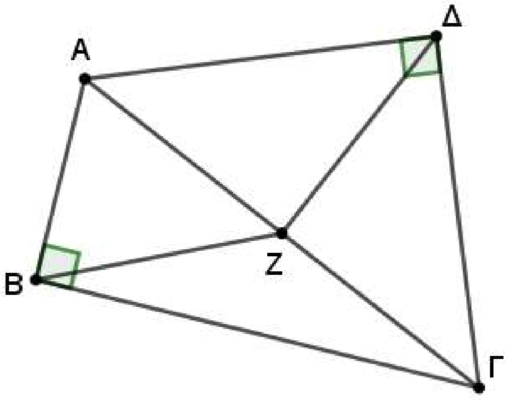
α) Να αποδείξετε ότι $BZ = \Delta Z$. (Μονάδες 13)

β) Αν $A\hat{\Gamma}B = 30^o$, να υπολογίσετε τις γωνίες ΒΑΔ και ΒΓΔ . (Μονάδες 12)



1685-Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΒΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου, άρα $BZ = \frac{A\Gamma}{2}$ (1).



Η ΔΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ, άρα $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΒΖ = ΔΖ.

β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ βρίσκουμε:

$B\widehat{A}\Gamma + A\widehat{\Gamma}B = 90^o \Leftrightarrow B\widehat{A}\Gamma + 30^o = 90^o \Leftrightarrow B\widehat{A}\Gamma = 60^o$

Επειδή το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οι οξείες γωνίες του είναι ίσες με 45^o, δηλαδή $\Delta\widehat{A}\Gamma = A\widehat{\Gamma}\Delta = 45^o$. Τότε:

$B\widehat{A}\Delta = B\widehat{A}\Gamma + \Delta\widehat{A}\Gamma = 60^o + 45^o = 105^o$ και $B\widehat{\Gamma}\Delta = A\widehat{\Gamma}B + A\widehat{\Gamma}\Delta = 30^o + 45^o = 75^o$

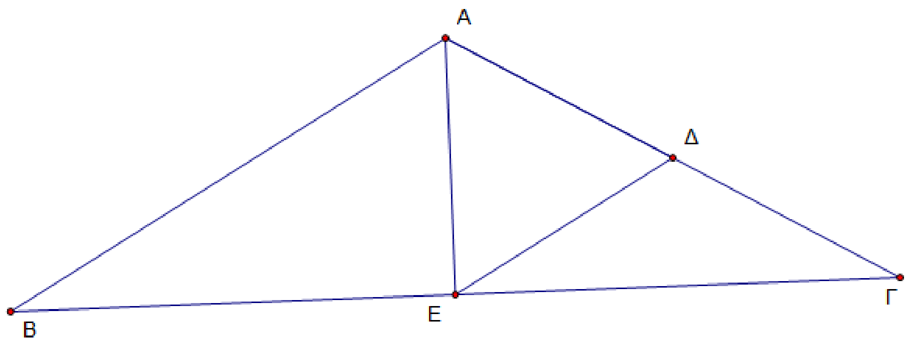
1686

ΘΕΜΑ 2

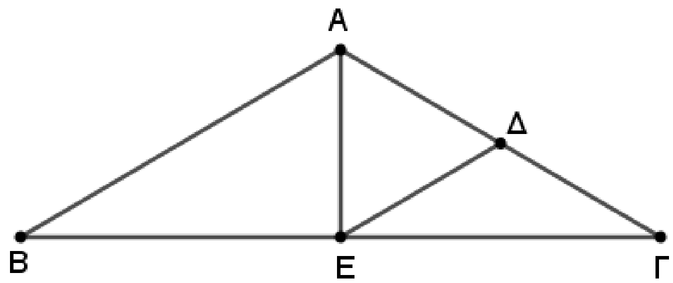
Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$, και γωνία $\hat{B}$ ίση με 30^{o}. Θεωρούμε Δ και Ε τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\overset{\Delta}{E\Delta\Gamma}$ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του. (Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\overset{\Delta}{A\Delta E}$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)



1686-Λύση



α) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ οπότε ΔΕ // ΑΒ και ΔΕ = $\frac{ΑΒ}{2}$. Ισχύει ότι ΔΓ= $\frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΑΒ}{2}$ = ΔΕ οπότε το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισοσκελές.

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι $\hat{Γ} = \hat{Β} = 30^o$.

Επειδή το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισοσκελές παίρνουμε $Δ\hat{Ε}Γ = \hat{Γ} = 30^o$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ βρίσκουμε:

$Ε\hat{Δ}Γ + Δ\hat{Ε}Γ + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow Ε\hat{Δ}Γ + 30^o + 30^o = 180^o \Leftrightarrow Ε\hat{Δ}Γ = 120^o$

β) Ισχύει ΕΔ = $\frac{ΑΓ}{2}$ (1) κι επειδή το Δ είναι μέσο της ΑΓ έχουμε ΑΔ = $\frac{ΑΓ}{2}$ (2).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΓ είναι Γ = 30^o άρα η απέναντι κάθετη ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή ΑΕ = $\frac{ΑΓ}{2}$ (3).

Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΕΔ = ΑΔ = ΑΕ οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

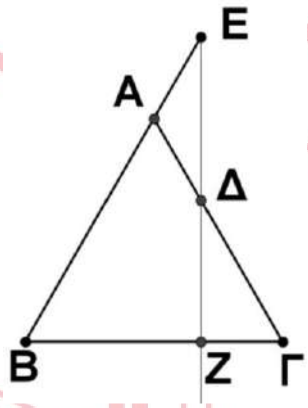
1689

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε σημείο Ε στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς ΑΓ, ώστε ΑΕ=ΑΔ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 10)

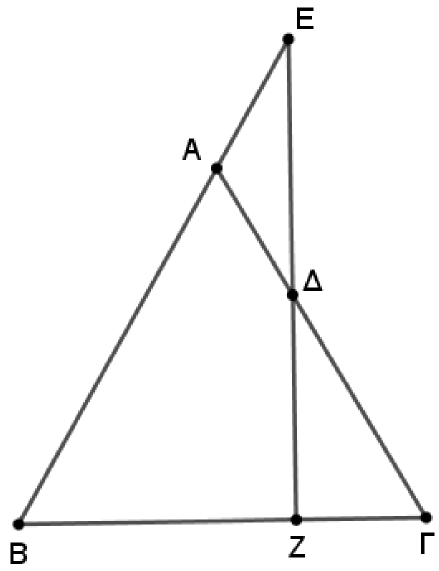
β) Αν Ζ είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ΕΔ (προς το Δ) με την ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΕΖ είναι κάθετη στην ΒΓ. (Μονάδες 15)



1689-Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, είναι $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^o$.

Τότε $\Delta\hat{A}E = 180^o - \hat{A} = 180^o - 60^o = 120^o$.



Επειδή το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι

$A\hat{\Delta}E = \hat{E}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ έχουμε:

$A\hat{\Delta}E + \hat{E} + \Delta\hat{A}E = 180^o \Leftrightarrow 2A\hat{\Delta}E + 120^o = 180^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2A\hat{\Delta}E = 60^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E = 30^o = \hat{E}$

β) Είναι $A\hat{\Delta}E = Z\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$ ως κατακορυφήν και $\hat{\Gamma} = 60^o$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΖΓ προκύπτει ότι:

$Z\hat{\Delta}\Gamma + \Delta\hat{Z}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 30^o + \Delta\hat{Z}\Gamma + 60^o = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{Z}\Gamma = 90^o$, άρα $EZ \perp B\Gamma$.

1690

ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του ΑΔ και την διάμεσο ΑΜ στην πλευρά ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

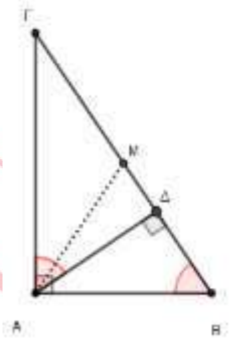
α) οι γωνίες $\hat{B}$ και $\Gamma\hat{A}\Delta$ είναι ίσες, (Μονάδες 12)

β) $A\hat{M}\Delta = 2 \cdot \hat{\Gamma}$. (Μονάδες 13)

1690-Λύση

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}$ = 90ο και $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$, ΑΔ το ύψος του προς στην ΒΓ και ΑΜ διάμεσός του στην πλευρά ΒΓ.

α)



Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A}$ = 90ο) ισχύει ότι:

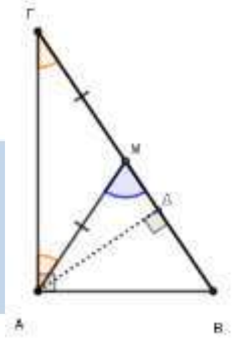
$\widehat{B} + \widehat{\Gamma}$ = 90ο ή $\widehat{B}$ = 90ο – $\widehat{\Gamma}$ (1)

Αφού ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ τότε $A\widehat{\Delta}\Gamma = 90^0$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο.

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ ισχύει ότι:

$\Gamma\widehat{A}\Delta + \widehat{\Gamma}$ = 90ο ή $\Gamma\widehat{A}\Delta$ = 90ο – $\widehat{\Gamma}$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $\widehat{B} = \Gamma\widehat{A}\Delta$.

β)



Αφού η ΑΜ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, τότε θα είναι ΑΜ = $\frac{B\Gamma}{2}$ = ΜΓ, αφού Μ μέσο της ΒΓ.

Αφού ΑΜ=ΜΓ τότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές γιατί έχει δυο πλευρές του ίσες, οπότε $\widehat{\Gamma} = M\widehat{A}\Gamma$ (3) ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του ΑΓ.

Στο τρίγωνο ΑΜΔ η γωνία $A\widehat{M}\Delta$ είναι εξωτερική της γωνίας $A\widehat{M}\Gamma$ του τριγώνου ΑΜΓ, οπότε θα είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου, δηλαδή $A\widehat{M}\Delta = M\widehat{A}\Gamma + \widehat{\Gamma}$ και αφού είναι $\widehat{\Gamma} = M\widehat{A}\Gamma$ (σχέση (3)), τότε θα είναι

$A\widehat{M}\Delta = \widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma}$ ή $A\widehat{M}\Delta = 2\widehat{\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = 60^{O}$. Φέρουμε τα ύψη ΑΕ και ΒΖ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία ΔΓ.

Να αποδείξετε ότι:

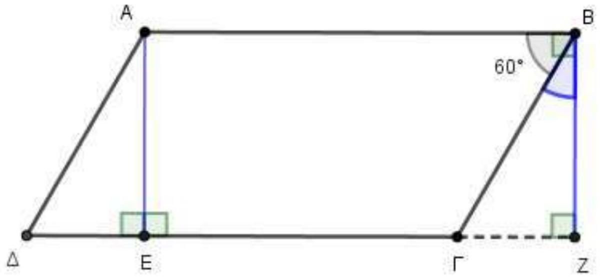
α) $ΓΖ = \frac{ΑΔ}{2}$, (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ίσο με το τρίγωνο ΒΓΖ, (Μονάδες 9)

γ) το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

1691-Λύση

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\widehat{B} = 60^0$ και ΑΕ, ΒΖ ύψη του από τις κορυφές Α και Β αντίστοιχα προς την ευθεία ΔΓ.



α) Οι ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και το ΒΖ είναι ύψος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, άρα θα είναι κάθετο στις παράλληλες ΑΒ και ΔΓ και θα είναι $A\widehat{B}Z = \widehat{Z} = 90^0$ (1). Οπότε $\Gamma\widehat{B}Z = A\widehat{B}Z - A\widehat{B}\Gamma = 90^o - 60^o = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΖΒ ($\widehat{Z} = 90^0$) είναι $\Gamma\widehat{B}Z = 30^0$, οπότε η απέναντι κάθετη των 30^0 θα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Δηλαδή $\Gamma Z = \frac{B\Gamma}{2}$ και αφού είναι ΒΓ=ΑΔ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, τότε $\Gamma Z = \frac{A\Delta}{2}$.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ έχουν:

- $\widehat{E} = \widehat{Z} = 90^0$, γιατί τα τμήματα ΑΕ και ΒΖ είναι κάθετα στη ΒΓ ως ύψη του παραλληλογράμμου.
- ΑΔ = ΒΓ, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
- $\widehat{\Delta} = B\widehat{\Gamma}Z$, ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη που σχηματίζονται από τις παράλληλες ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΔΓ.

Άρα τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν την υποτείνουσα και την προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μια προς μία.

γ) Το τετράπλευρο ΑΒΖΕ έχει τρείς γωνίες ορθές, την $A\widehat{B}Z$ από σχέση (1), την $A\widehat{E}Z$ και την $E\widehat{Z}B$ αφού τα ΑΕ και ΒΖ είναι ύψη, οπότε είναι ορθογώνιο.

1693

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε.

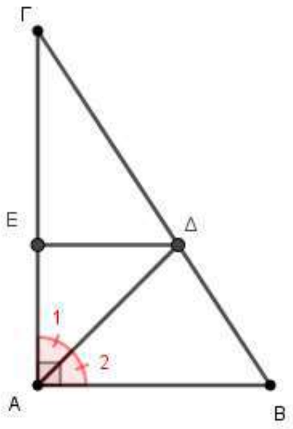
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΔΕ. (Μονάδες 9)

γ) Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20 μοίρες μεγαλύτερη της γωνίας $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{\Delta}\Gamma$. (Μονάδες 7)

1693-Λύση

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^0$, ΑΔ διχοτόμος της γωνίας Α και ΔΕ παράλληλη στην ΑΒ.



α) Η ΕΔ είναι παράλληλη στην ΑΒ και η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΒ, αφού είναι $\widehat{A} = 90^0$. Οπότε, η ΑΓ θα είναι κάθετη και στην παράλληλή της ΕΔ. Άρα, το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία ΓΕΔ.

β) Επειδή ΑΔ διχοτόμος της ορθής γωνίας $\widehat{A}$, ισχύει ότι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{\widehat{A}}{2} = 45^o$

Αφού είναι $\widehat{A}_2 = 45^o$ τότε θα είναι και $A\widehat{\Delta}E = 45^o$, ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΔ και ΑΒ με τέμνουσα την ΑΔ.

γ) Έστω ότι η $\widehat{B}$ είναι 20^0 μεγαλύτερη της $\widehat{\Gamma}$, δηλαδή $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} + 20^o$ (1)

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^o$ (2)

Οπότε, λόγω της σχέσης (1), η σχέση (2) γίνεται:

$\widehat{\Gamma} + 20^o + \widehat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow 2\widehat{\Gamma} = 70^o \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 35^o$. Τότε $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} + 20^o = 55^o$.

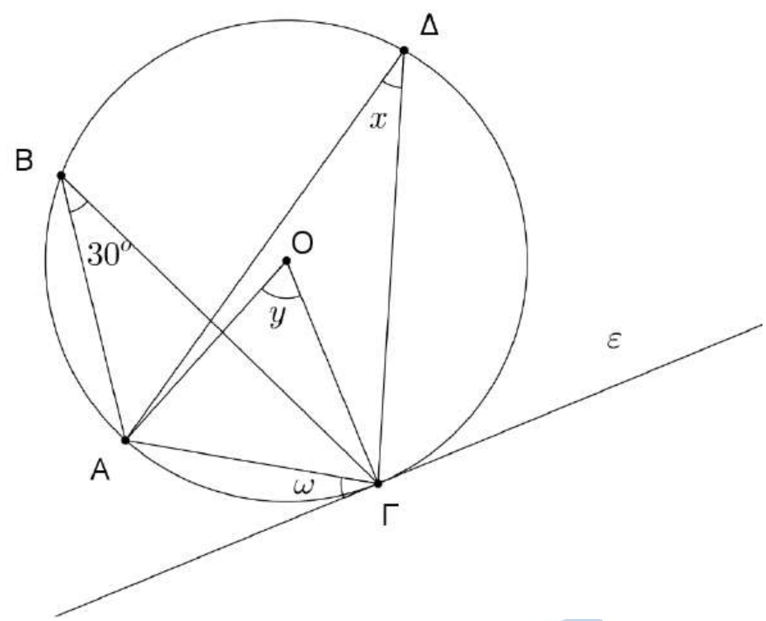
Οι $E\widehat{\Delta}\Gamma$ και $\widehat{B}$ είναι ίσες, ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΒ με τέμνουσα την ΒΓ. Άρα, $E\widehat{\Delta}\Gamma = \widehat{B} = 55^o$.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (Ο,ρ) στο σημείο Γ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες x,y και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΟΑΓ ως προς τις πλευρές. (Μονάδες 10)



1695-Λύση

α) Οι γωνιές $A\widehat{\Delta}\Gamma$ και $A\widehat{B}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένες του κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$, οπότε θα είναι ίσες. Δηλαδή $A\widehat{\Delta}\Gamma = A\widehat{B}\Gamma$, άρα $\hat{x} = 30^o$.

Η γωνία $A\widehat{O}\Gamma$ είναι επίκεντρη γωνία του κύκλου και βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$. Στο ίδιο τόξο βαίνει και η εγγεγραμμένη $A\widehat{B}\Gamma$. Οπότε, γνωρίζοντας ότι κάθε εγγεγραμμένη ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτήν θα είναι $A\widehat{B}\Gamma = \frac{A\widehat{O}\Gamma}{2}$.

Δηλαδή, $A\widehat{O}\Gamma = 2A\widehat{B}\Gamma$, άρα $\hat{y} = 60^o$ (1)

Η γωνία $\widehat{\omega}$ σχηματίζεται από τη χορδή ΑΓ και την εφαπτομένη ευθεία ε στο άκρο Γ της χορδής οπότε θα ισούται με κάθε εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$ της χορδής. Δηλαδή, είναι $\widehat{\omega} = A\widehat{B}\Gamma$, άρα $\widehat{\omega} = 30^o$.

β) Το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισοσκελές αφού ΟΑ = ΟΓ ως ακτίνες του κύκλου, και έχει τη γωνία της κορυφής του $A\widehat{O}\Gamma = y = 60^0$. Άρα, θα είναι ισόπλευρο.

1696

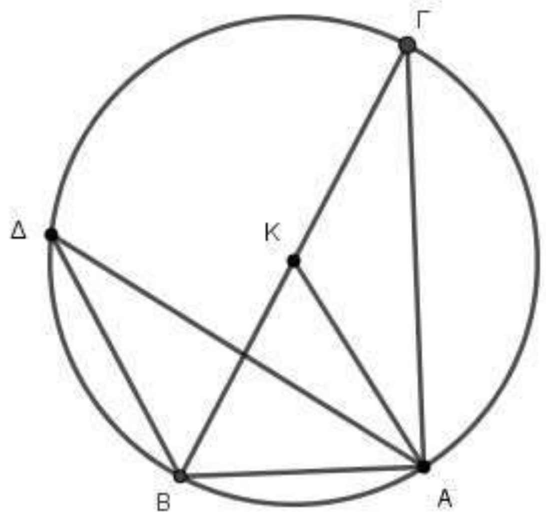
ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος (Κ,ρ), μια διάμετρός του ΒΓ και χορδή του ΒΑ=ρ. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των Β και Γ, όπως στο σχήμα που ακολουθεί,

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

β) να υπολογίσετε την γωνία $B\widehat{\Delta}A$. (Μονάδες 9)

γ) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)



1696-Λύση

α) Είναι ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ ως ακτίνες κύκλου και ΚΓ = ΒΑ από τα δεδομένα.

Άρα ΚΑ = ΚΒ = ΑΒ, οπότε το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισόπλευρο γιατί έχει τις τρεις πλευρές του ίσες.

β) Η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{\Delta}A$ και η επίκεντρη $B\hat{K}A$ βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ του κύκλου. Η γωνία $B\hat{K}A$, ως γωνία ισοπλεύρου τριγώνου, θα είναι ίση με 60^0.

Γνωρίζοντας ότι κάθε εγγεγραμμένη ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτήν, θα είναι $B\hat{\Delta}A = \frac{B\hat{K}A}{2}$. Οπότε, $B\hat{\Delta}A = \frac{60^o}{2}$, άρα $B\hat{\Delta}A = 30^o$.

γ) Οι γωνίες $B\hat{\Delta}A$ και $B\hat{\Gamma}A$ είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ του κύκλου, οπότε θα είναι ίσες και αφού $B\hat{\Delta}A = 30^o$ άρα και $B\hat{\Gamma}A = 30^0$.

Η ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου, επομένως το τόξο $\overset{\frown}{B\Delta\Gamma}$ είναι ημικύκλιο. Άρα, η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ που βαίνει στο ημικύκλιο είναι ορθή, δηλαδή $B\hat{A}\Gamma = 90^o$.

Η $\Gamma\hat{B}A = 60^0$ γιατί είναι και γωνία του ισοπλεύρου τριγώνου ΒΚΑ.

Επομένως, οι γωνίες του τριγώνου ΒΑΓ είναι $B\hat{\Gamma}A = 30^o$, $B\hat{A}\Gamma = 90^o$ και $\Gamma\hat{B}A = 60^0$.

1697

ΘΕΜΑ 2

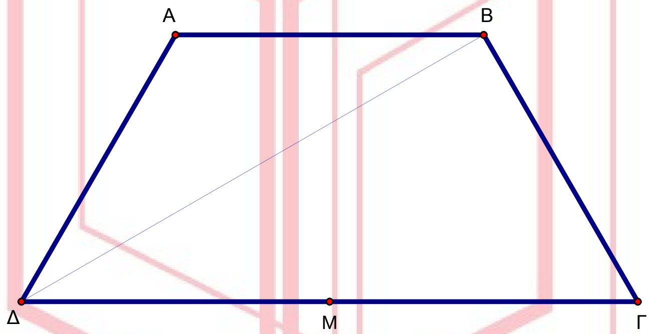
Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος έχουμε ΑΒ=ΑΔ=$\frac{ΓΔ}{2}$, $\hat{Δ} = 60^{o}$ και Μ το μέσο της πλευράς ΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Δ}$, (Μονάδες 9)

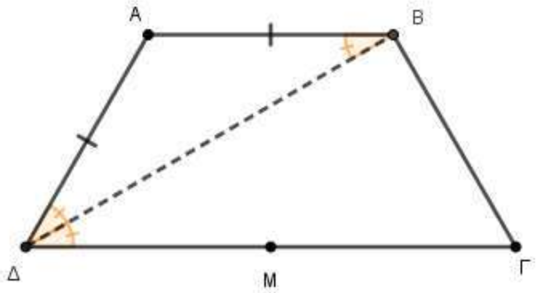
β) η ΒΜ χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

(Μονάδες 16)



1697-Λύση

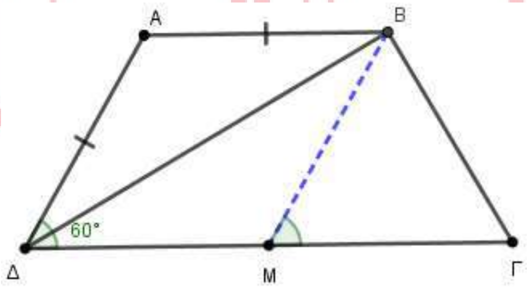
α)



Είναι $\Gamma\widehat{\Delta}B = A\widehat{B}\Delta$ (1) ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ με τέμνουσα την ΒΔ. Επειδή είναι ΑΒ = ΑΔ, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΔ, άρα $A\widehat{\Delta}B = A\widehat{B}\Delta$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $A\widehat{\Delta}B = \Gamma\widehat{\Delta}B$, άρα η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$.

β)



Φέρνουμε το τμήμα ΒΜ. Επειδή ΑΒ // ΔΓ ως βάσεις του τραπεζίου ΑΒΓΔ, άρα ΑΒ // ΔΜ. Αφού είναι ΑΒ = $\frac{\Gamma\Delta}{2}$ και το Μ είναι μέσο του ΔΓ από την υπόθεση, άρα ΑΒ =ΔΜ. Οπότε, το τετράπλευρο ΑΔΜΒ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΔΜ παράλληλες και ίσες άρα είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή είναι ΑΒ = ΑΔ από την υπόθεση άρα το παραλληλόγραμμο ΑΔΜΒ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος. Επειδή το ΑΔΜΒ είναι ρόμβος, ισχύει ότι ΒΜ = ΔΜ. Και αφού ΔΜ = ΜΓ γιατί Μ είναι μέσο του ΔΒ, τότε θα είναι ΒΜ = ΜΓ. Οπότε το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές.

Αφού $\widehat{\Delta} = 60^o$ τότε και $B\widehat{M}\Gamma = \widehat{\Delta} = 60^o$ ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ και ΒΜ με τέμνουσα την ΔΓ.

Επειδή το ισοσκελές τρίγωνο ΒΜΓ έχει τη γωνία της κορυφής του ίση με 60^o θα είναι ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ 2

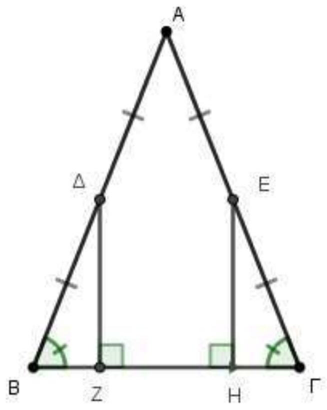
Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) .

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ. (Μονάδες 13)

β) Αν $\hat{A} = 75° + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

1699-Λύση

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ.



α) Έστω Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΔΖ, ΕΗ οι αποστάσεις των Ε, Ζ από τη βάση ΒΓ.

Τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΕΗΓ έχουν:

- $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\Delta$ = $\Gamma\hat{\mathrm{H}}\mathrm{E}$ = 90^0 αφού ΔΖ και ΕΗ ως αποστάσεις, από την υπόθεση, είναι κάθετες στη ΒΓ.
- ΔΒ = ΕΓ ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ
- $\widehat{\mathrm{B}}$ = $\widehat{\Gamma}$ ως προσκείμενες γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

Άρα τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΕΗΓ είναι ορθογώνια που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα.

Οπότε έχουν και ΔΖ = ΕΗ ως πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\mathrm{B}}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

Δηλαδή, τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ.

β) Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 75^o + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\mathrm{B}} = 180^o \Leftrightarrow 3\widehat{\mathrm{B}} = 105^o$. Άρα $\widehat{\mathrm{B}} = 35^o$.

Οπότε $\widehat{\mathrm{A}}$ = $75^o + 35^o = 110^o$.

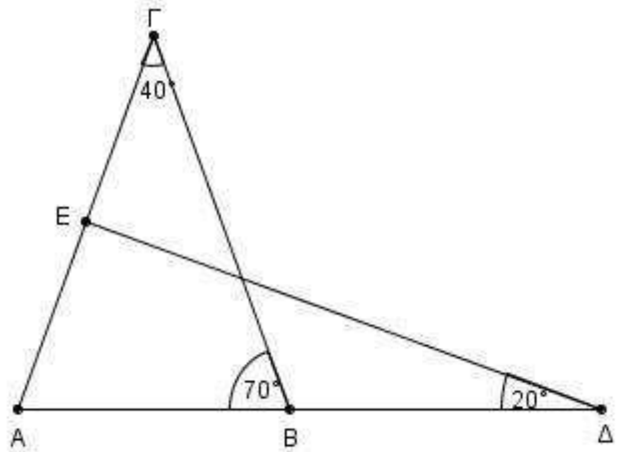
1700

ΘΕΜΑ 2

Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 12)

β) η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή. (Μονάδες 13)



1700-Λύση

α) Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o$ (1) και αφού $\widehat{B} = 70^0$ και $\widehat{\Gamma} = 40^o$ τότε από τη σχέση (1) βρίσκουμε ότι $\widehat{A} = 70^o$.

Επειδή είναι $\widehat{A} = 70^o = \widehat{B}$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΓΑ και ΓΒ.

β) Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΔ έχουμε:

$A\widehat{E}\Delta + \widehat{A} + \widehat{\Delta} = 180^o$ (2) και αφού $\widehat{\Delta} = 20^0$ ως δεδομένο και $\widehat{A} = 70^o$ από α) ερώτημα, τότε από τη σχέση (2) βρίσκουμε ότι $A\widehat{E}\Delta = 90^o$.

1702

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε $\mathrm{A\Gamma} < \mathrm{AB}$.Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{A\Gamma}$ και στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\mathrm{AE} = \mathrm{A\Gamma}$.

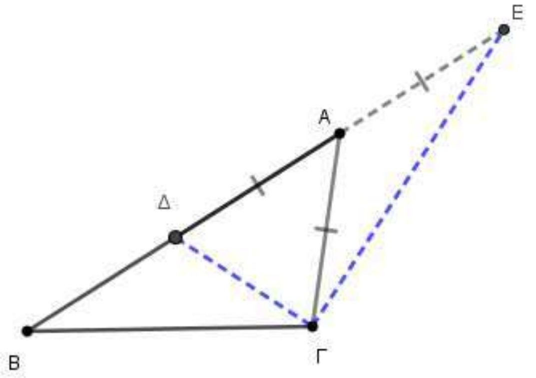
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\Gamma \perp \mathrm{E}\Gamma$, (Μονάδες 12)

β) η γωνία ΕΑΓ είναι διπλάσια της γωνίας ΑΔΓ. (Μονάδες 13)

1702-Λύση

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ<ΑΒ, σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΔ=ΑΓ και σημείο Ε στην προέκταση της ΒΑ τέτοιο ώστε ΑΕ=ΑΓ.



α) Φέρνουμε τα τμήματα ΔΓ και ΓΕ. Αφού από υπόθεση είναι ΑΔ = ΑΓ και ΑΕ = ΑΓ τότε ΑΔ = ΑΓ = ΑΕ. Οπότε στο τρίγωνο ΔΓΕ το τμήμα ΑΓ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΔΕ και είναι ίσο με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί, δηλαδή είναι ΑΓ= $\frac{\Delta E}{2}$.

Επομένως, το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά ΔΕ και με ορθή τη γωνία $E\hat{\Gamma}\Delta$, άρα ΔΓ $\perp$ ΕΓ.

β) Επειδή είναι ΑΓ = ΑΔ, το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές, άρα $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Delta}\Gamma$ (1).

Η $E\hat{A}\Gamma$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΔΓ, οπότε είναι $E\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta + A\hat{\Delta}\Gamma$ και αφού είναι $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Delta}\Gamma$ λόγω της σχέσης (1), άρα $E\hat{A}\Gamma = A\hat{\Delta}\Gamma + A\hat{\Delta}\Gamma = 2A\hat{\Delta}\Gamma$.

1704

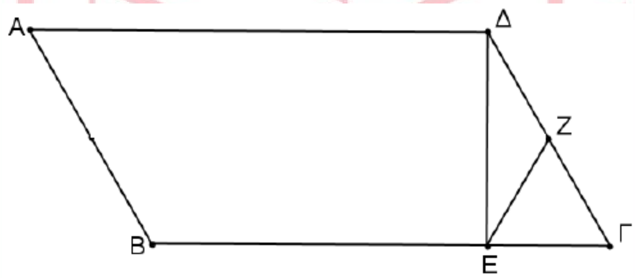
ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{B}=120^0$ και $\Delta E \perp B\Gamma$. Έστω ΕΖ η διάμεσος του τριγώνου ΔΕΓ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Α και Γ του παραλληλογράμμου. (Μονάδες 8)

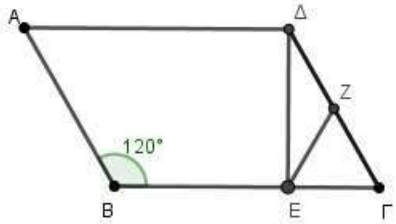
β) Αν Κ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, να αποδείξετε ότι ΕΖ=ΑΚ. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΖΓ. (Μονάδες 8)



1704-Λύση

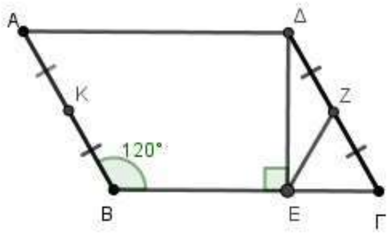
α)



Οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ οπότε είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $\widehat{A}+\widehat{B}=180^o$ και αφού $\widehat{B}=120^0$ άρα $\widehat{A}=60^o$.

Οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου άρα είναι ίσες, οπότε $\widehat{\Gamma}=\widehat{A}=60^o$.

β)



Έστω Κ το μέσο της πλευράς ΑΒ, τότε θα είναι ΑΚ = ΚΒ = $\frac{AB}{2}$ (1).

Αφού ΔΕ ⊥ ΒΓ τότε το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο και το ΕΖ είναι διάμεσος (από υπόθεση) που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του ΔΓ, άρα ΕΖ = $\frac{\Delta\Gamma}{2}$ (2).

Είναι ΑΒ=ΔΓ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ οπότε $\frac{AB}{2}=\frac{\Delta\Gamma}{2}$ (3)

Επομένως, από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΑΚ = ΕΖ.

γ) Επειδή ΕΖ = $\frac{\Delta\Gamma}{2}$ = ΖΔ = ΖΓ, το τρίγωνο ΕΖΓ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΖΕ, ΖΓ και τη γωνία $\widehat{\Gamma}=60^o$, οπότε θα είναι ισόπλευρο. Άρα $E\widehat{Z}\Gamma=60^o$.

1708

ΘΕΜΑ 4

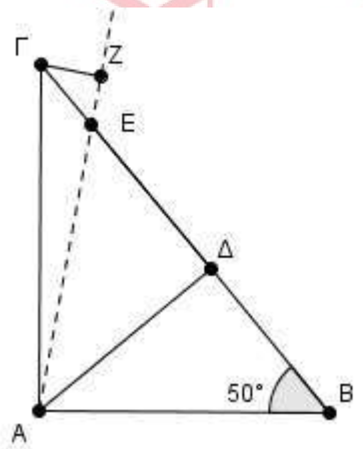
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^0$) με $\widehat{B} = 50^o$, το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην ΔΓ ώστε ΔΕ=ΒΔ. Το σημείο Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

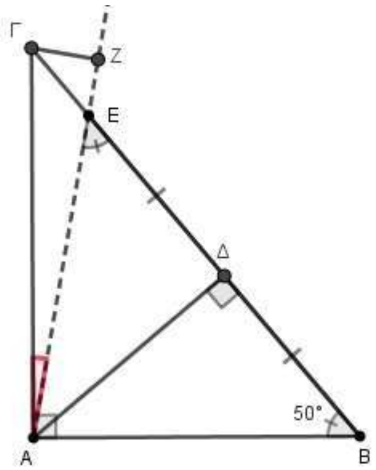
ii. $\Gamma\widehat{A}E = 10^o$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΓΕ. (Μονάδες 9)



1708-Λύση

α)



i. Αφού για το σημείο Ε ισχύει ΔΕ = ΒΔ (υπόθεση), άρα το Δ είναι μέσο του τμήματος ΒΕ. Στο τρίγωνο ΒΑΕ το ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος. Οπότε το τρίγωνο ΕΑΒ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΒ και ΑΕ.

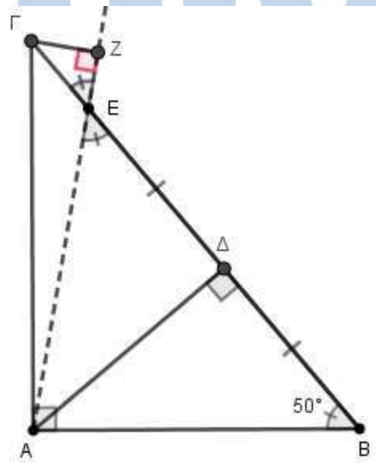
ii. Επειδή το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές με βάση το ΒΕ οπότε οι γωνίες της βάσης θα είναι ίσες, δηλαδή $A\hat{E}B = \hat{B} = 50^o$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΕ ισχύει $E\hat{A}B + A\hat{E}B + \hat{B} = 180^o$ και αφού $A\hat{E}B = \hat{B} = 50^o$ άρα και $E\hat{A}B + 2 \cdot 50^o = 180^o$, οπότε $E\hat{A}B = 180^o - 100^o = 80^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$\Gamma\hat{A}E + E\hat{A}B = 90^o$ και αφού $E\hat{A}B = 80^o$ τότε θα ισχύει $\Gamma\hat{A}E + 80^o = 90^o$, άρα $\Gamma\hat{A}E = 10^o$.

β)



Ισχύει ότι $\Gamma\hat{E}Z = A\hat{E}B = 50^o$ ως κατακορυφήν γωνίες. Επειδή $\Gamma\hat{Z}E = 90^o$, γιατί $\Gamma Z \perp AZ$ λόγω της προβολής του σημείου Γ στην ΑΕ, το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ορθογώνιο οπότε οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές, δηλαδή

$\Gamma\hat{E}Z + E\hat{\Gamma}Z = 90^o \Leftrightarrow 50^o + E\hat{\Gamma}Z = 90^o$ οπότε $E\hat{\Gamma}Z = 40^o$.

1709

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο η εξωτερική του γωνία $\hat{Γ}$ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας $\hat{Α}$. Από την κορυφή Α διέρχεται ημιευθεία Αx // ΒΓ στο ημιεπίπεδο (ΑΒ, Γ). Στην ημιευθεία Αx θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΔ=ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

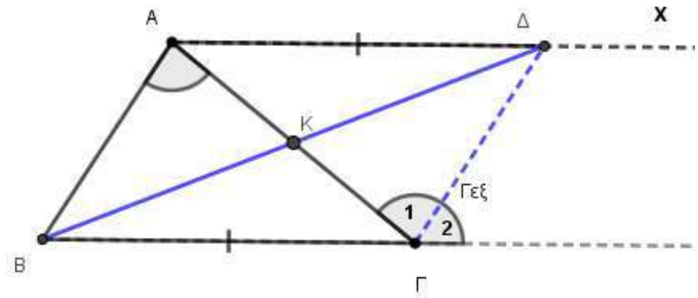
α) Η ΒΔ διέρχεται από το μέσο του τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 7)

β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της $\hat{Γ}_{εξ}$. (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

1709-Λύση

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε η $\widehat{\Gamma}_{εξ} = 2\widehat{A}$, ημιευθεία Αx παράλληλη στη ΒΓ και σημείο της Δ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΒΓ.



α) Αφού τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ είναι ίσα και παράλληλα, τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται έστω στο σημείο Κ. Άρα η ΒΔ διέρχεται από το μέσο Κ του τμήματος ΑΓ.

β) Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι πλευρές του ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες.

Είναι $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{A}$ (1) ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τις τέμνει η ΑΓ.

Όμως είναι $\widehat{\Gamma}_{εξ} = 2\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}_{εξ} = \widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma}_2$ οπότε θα είναι $2\widehat{A} = \widehat{A} + \widehat{\Gamma}_2$. Άρα $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}_2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$, οπότε η ΓΔ είναι διχοτόμος της $\widehat{\Gamma}_{εξ}$.

γ) Γνωρίζουμε ότι η εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι δυο εσωτερικών γωνιών του, άρα $\widehat{\Gamma}_{εξ} = \widehat{A} + \widehat{B}$. Με δεδομένο ότι $\widehat{\Gamma}_{εξ} = 2\widehat{A}$ θα είναι $2\widehat{A} = \widehat{A} + \widehat{B}$ άρα $\widehat{A} = \widehat{B}$. Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

1710

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ ώστε να ισχύει ΑΓ= ΓΔ= ΔΒ. Επίσης θεωρούμε σημείο Ο εκτός του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ έτσι ώστε να ισχύουν ΟΓ=ΑΓ και ΟΔ=ΔΒ.

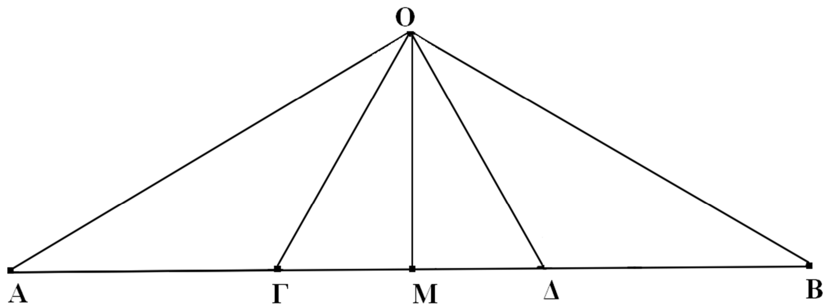
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η γωνία $\hat{ΓΟΔ}$ είναι 60^0 (Μονάδες 9)

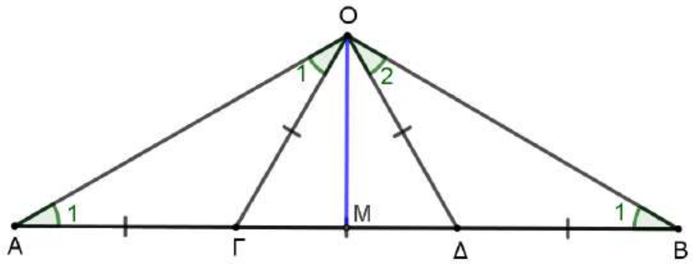
ii. οι γωνίες $\hat{ΟΑΓ}$, $\hat{ΟΒΔ}$ είναι ίσες και κάθε μια ίση με 30^0. (Μονάδες 9)

β) Αν Μ το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, να αποδείξετε ότι 2ΟΜ=ΟΑ.

(Μονάδες 7)



1710-Λύση



α) i. Είναι ΑΓ = ΟΓ = ΓΔ και ΓΔ = ΔΒ = ΟΔ, οπότε ΟΓ = ΓΔ = ΟΔ. Άρα το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισόπλευρο και οι γωνίες του είναι ίσες με 60^o. Άρα $\Gamma\widehat{O}\Delta = 60^o$.

ii. Επειδή ΟΓ = ΑΓ, το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισοσκελές οπότε $\widehat{A}_1 = \widehat{O}_1$.

Η γωνία $O\widehat{\Gamma}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΟΓΑ, οπότε:

$O\widehat{\Gamma}\Delta = \widehat{A}_1 + \widehat{O}_1 \Leftrightarrow 60^o = 2\,\widehat{A}_1 \Leftrightarrow \widehat{A}_1 = 30^o$.

Η γωνία ΟΔΒ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΟΓΑ, άρα:

$O\widehat{\Delta}B = \widehat{O}_2 + \widehat{B}_1 \Leftrightarrow 60^o = 2\,\widehat{B}_1 \Leftrightarrow \widehat{B}_1 = 30^o$.

β) Είναι $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = 30^o$, άρα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές. Η διάμεσος ΟΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΟΑΒ είναι και ύψος του, δηλαδή ΟΜ⊥ΑΒ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΑ, είναι $\widehat{A}_1 = 30^o$. Άρα για την απέναντι κάθετη πλευρά ΟΜ ισχύει: $OM = \frac{OA}{2} \Leftrightarrow 2OM = OA$.

1713

ΘΕΜΑ 4

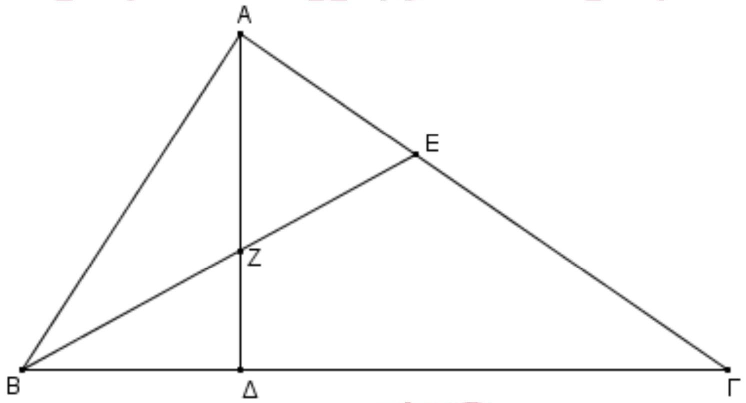
Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{\mathrm{A}}+\hat{\Gamma}=2\hat{\mathrm{B}}$ και έστω ΑΔ ύψος και ΒΕ διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{\mathrm{B}}=60^{\circ}$ και ΑΖ=ΒΖ. (Μονάδες 10)

ii. $\mathrm{A\Delta}=\dfrac{3}{2}\mathrm{BZ}$ (Μονάδες 8)

β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)



1713-Λύση

α) i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{B} + 2\hat{B} = 180^o \Leftrightarrow 3\hat{B} = 180^o \Leftrightarrow \hat{B} = 60^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ (ΑΔ ύψος, άρα ΑΔ⊥ΒΓ) για τις οξείες γωνίες του ισχύει:

$B\hat{A}\Delta + A\hat{B}\Delta = 90^o \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta = 30^o$.

Επειδή η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, ισχύει ότι: $A\hat{B}Z = \frac{A\hat{B}\Delta}{2} = \frac{60^o}{2} = 30^o$.

Επειδή $B\hat{A}\Delta = A\hat{B}Z = 30^o$ συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, οπότε ΑΖ = ΒΖ.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΖ είναι $Z\hat{B}\Delta = 30^o$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά του ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $\Delta Z = \frac{BZ}{2}$. Τότε:

ΑΔ = ΑΖ + ΖΔ

ΑΖ=ΒΖ από το i. Ερώτημα

Άρα $A\Delta = BZ + \frac{BZ}{2} = \frac{3}{2}BZ$.

β) Αν το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $Z\hat{A}E = 60^o$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ για τις οξείες γωνίες του ισχύει: $\Delta\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^o$. Επίσης από το ερώτημα α) i. είναι $\hat{B} = 60^o$ οπότε $B\hat{A}\Gamma + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow B\hat{A}\Gamma + 60^o + 30^o = 180^o \Leftrightarrow B\hat{A}\Gamma = 90^o$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ευθεία (ε) και δυο σημεία Α, Β εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Φέρουμε ΑΔ, ΒΓ κάθετες στην (ε) και Μ, Ν μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

α) Αν τα Α, Β είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε)

i) να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

1) ΑΔ < ΒΓ (Μονάδες 4)

2) ΑΔ = ΒΓ. (Μονάδες 4)

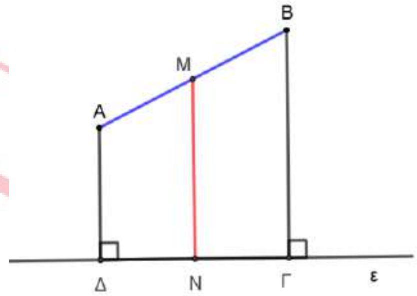
ii) να εκφράσετε το τμήμα ΜΝ σε σχέση με τα τμήματα ΑΔ, ΒΓ στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις. (Μονάδες 6)

β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει το τμήμα ΑΒ στο μέσο του Μ να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα Μ, Ν ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9+2)

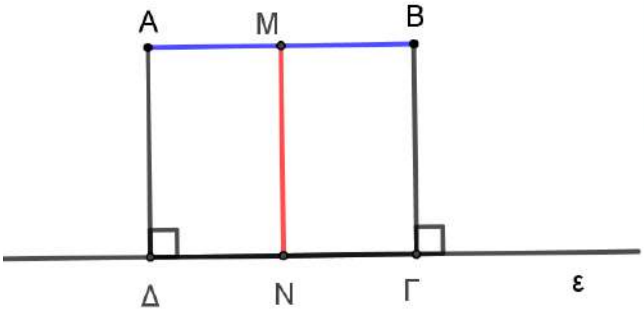
1715-Λύση

α) Επειδή ΑΔ ⊥ ε και ΒΓ ⊥ ε, τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ είναι κάθετα στην ίδια ευθεία οπότε είναι μεταξύ τους παράλληλα. Δηλαδή ΑΔ // ΒΓ .

i) 1) Αν ΑΔ < ΒΓ, τότε ΑΔ ≠ ΒΓ άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ δεν είναι παραλληλόγραμμο οπότε έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες και είναι τραπέζιο.



2) Αν ΑΔ = ΒΓ, τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $\widehat{\Delta} = 90^o$ (ΑΔ⊥ε), είναι τελικά ορθογώνιο.

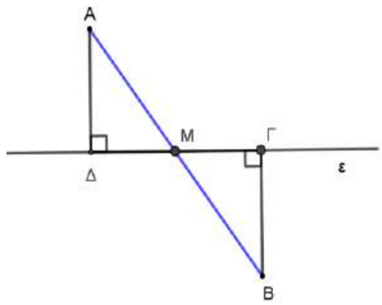


ii) 1) Όταν το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο, τότε το ΜΝ είναι διάμεσός του, άρα

ΜΝ = $\frac{ΑΔ+ΒΓ}{2}$.

2) Όταν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, τότε και τα ΑΜΝΔ, ΜΝΓΒ είναι ορθογώνια. Γιατί ΑΜ=ΔΝ ίσα και παράλληλα ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΔΓ. Ομοίως ΜΒ=//ΝΓ και τότε ΜΝ = ΑΔ = ΒΓ.

β) Αν η (ε) τέμνει το ΑΒ στο μέσο του Μ, τότε:



Τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΜΒΓ έχουν:

- $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma} = 90°$

1715-Λύση

- ΑΜ = ΜΒ, διότι Μ μέσο της ΑΒ
- $A\widehat{M}\Delta = B\widehat{M}\Gamma$, ως κατακορυφήν.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε θα έχουν ίσες και τις άλλες κάθετες πλευρές τους, δηλαδή ΑΔ=ΒΓ. Τότε το τετράπλευρο ΑΓΒΔ θα είναι παραλληλόγραμμο αφού δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

Επειδή ΑΜ > ΜΔ

και ΜΒ > ΜΓ θα είναι

ΑΜ+ΜΒ>ΜΔ+ΜΓ ⇔ ΑΒ > ΓΔ. Άρα το ΑΓΒΔ δεν έχει ίσες διαγώνιες οπότε δεν είναι ορθογώνιο. Επειδή οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται, τα μέσα Μ και Ν των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα ταυτίζονται.

1716

ΘΕΜΑ 4

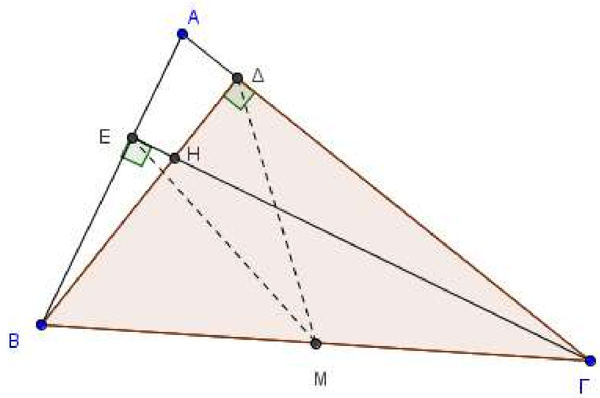
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που τέμνονται στο σημείο Η και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι

i. ΜΔ=ΜΕ (Μονάδες 10)

ii. Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ και ότι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{H}}\Delta = \hat{\Gamma}$, όπου $\hat{\Gamma}$ η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

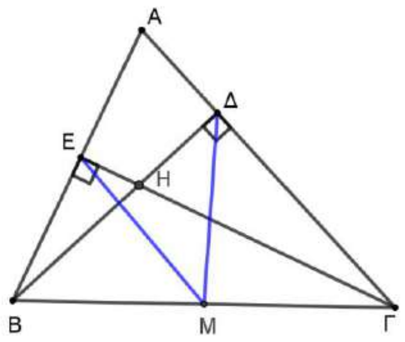
β) Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΗ. (Μονάδες 10)



1716-Λύση

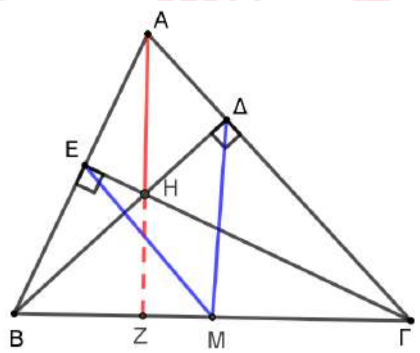
Τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ύψη του τριγώνου ΑΒΓ, άρα ΒΔ⊥ΑΒ και ΓΕ⊥ΑΓ. Επομένως $B\widehat{E}Γ = B\widehat{Δ}Γ = 90°$.

α) i.



Στα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ τα τμήματα ΜΕ, ΜΔ είναι διάμεσοι που αντιστοιχούν στην κοινή υποτείνουσα ΒΓ των δύο τριγώνων. Οπότε ΜΔ = $\frac{ΒΓ}{2}$ και ΜΕ = $\frac{ΒΓ}{2}$, άρα ΜΔ = ΜΕ.

ii.



Επειδή τα δύο ύψη ΒΔ και ΓΕ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Η, το Η είναι το ορθόκεντρό του. Οπότε το ΑΗ προεκτεινόμενο θα τέμνει τη ΒΓ σε σημείο Ζ και το τμήμα ΑΖ είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου. Άρα η ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΔ για τις οξείες γωνίες του ισχύει ότι:

$A\widehat{H}Δ + H\widehat{A}Δ = 90^o \Leftrightarrow A\widehat{H}Δ = 90^o - H\widehat{A}Δ$ (1)

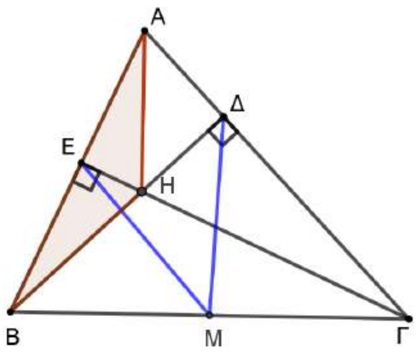
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΓ για τις οξείες γωνίες του ισχύει ότι:

$\widehat{Γ} + Z\widehat{A}Γ = 90^o \Leftrightarrow \widehat{Γ} = 90^o - Z\widehat{A}Γ \Leftrightarrow \widehat{Γ} = 90^o - H\widehat{A}Δ$ (2)

Από τις (1), (2) βρίσκουμε $A\widehat{H}Δ = \widehat{Γ}$.

1716-Λύση

β)



Στο τρίγωνο ΑΒΗ το ύψος στην ΑΒ είναι το ΗΕ και το ύψος στην ΒΗ είναι το ΑΔ οι φορείς των οποίων τέμνονται στο Γ. Άρα το σημείο Γ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΗ.

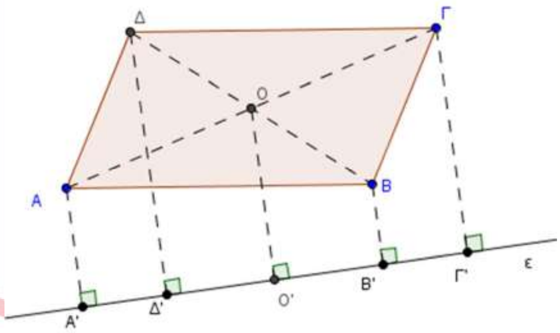
ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τις προβολές Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ των κορυφών του Α, Β, Γ, Δ αντίστοιχα, σε μια ευθεία ε.

α) Αν η ευθεία ε αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι ΑΑ΄=3, ΒΒ΄=2, ΓΓ΄=5, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ε είναι ίση με 4. (Μονάδες 8)

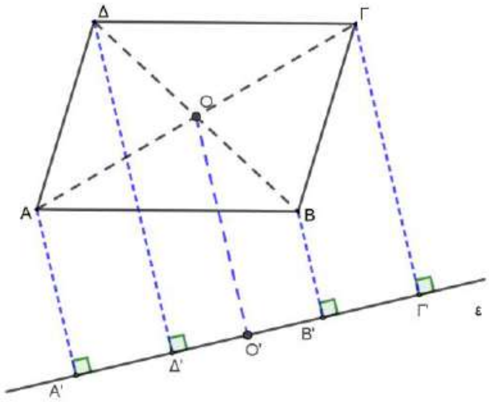
ii. Να βρείτε την απόσταση ΔΔ΄. (Μονάδες 9)



β) Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (Μονάδες 8)

1718-Λύση

α) Είναι ΑΑ’//ΒΒ’//ΓΓ’//ΔΔ’//ΟΟ’ ως κάθετα τμήματα στην ίδια ευθεία ε.



Η ευθεία ε δεν είναι παράλληλη στη διαγώνιο ΑΓ γιατί:

- Έστω ότι ε//ΑΓ

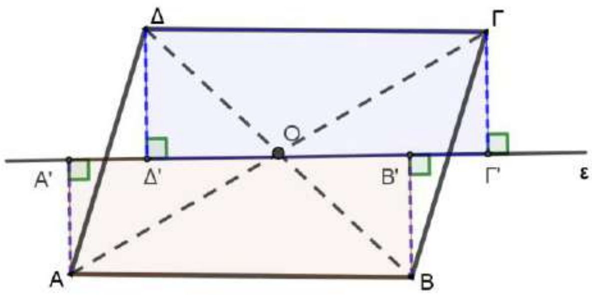
Τότε επειδή επιπλέον έχουμε ότι ΑΑ’//ΓΓ’, το ΑΑ’Γ’Γ θα είναι παραλληλόγραμμο και επομένως ΑΑ’=ΓΓ’ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Όμως ΑΑ’=3 ≠ 5=ΓΓ’ , άτοπο.

i. Από την παραλληλία ΑΑ΄ και ΓΓ΄ το ΑΑ΄Γ΄Γ είναι τραπέζιο με διάμεσο το ΟΟ΄. Άρα ΟΟ΄= $\frac{ΑΑ'+ΓΓ'}{2}=\frac{3+5}{2}=4$.

ii. Η ευθεία ε δεν είναι παράλληλη ούτε στη διαγώνιο ΒΔ, γιατί αν ήταν, τότε όπως προηγουμένως θα είχαμε ότι το ΒΟΟ’Β’ είναι παραλληλόγραμμο, επομένως ΒΒ’=ΟΟ’ , άτοπο γιατί ΒΒ’=2 ≠ 4=ΟΟ’.

Από την παραλληλία ΒΒ’ και ΔΔ’, το ΒΒ΄Δ΄Δ είναι τραπέζιο με διάμεσο το ΟΟ’. Άρα ΟΟ΄= $\frac{ΒΒ'+ΔΔ'}{2}$ ⇔ 4 = $\frac{2+ΔΔ'}{2}$ ⇔ 8 = 2 + ΔΔ΄ ⇔ ΔΔ΄= 6.

β)



Αν η ε είναι παράλληλη στις ΑΒ και ΓΔ και διέρχεται από το κέντρο Ο, τότε η ε θα είναι μεσοπαράλληλη των ΑΒ, ΓΔ. Οπότε τα τετράπλευρα ΑΑ΄Β΄Β και ΔΔ΄Γ΄Γ επειδή

1718-Λύση

έχουν τις απέναντι πλευρές τους παράλληλες θα είναι παραλληλόγραμμα με μία ορθή γωνία οπότε είναι ορθογώνια.

Τα τρίγωνα ΟΑΑ΄ και ΟΓΓ΄ είναι ορθογώνια και έχουν ΟΑ=ΟΓ γιατί το Ο είναι το κέντρο του ΑΒΓΔ και $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{A}' = \Gamma\widehat{\mathrm{O}}\Gamma'$ ως κατακορυφήν γωνίες. Οπότε είναι ίσα γιατί έχουν υποτείνουσες ίσες και μία οξεία γωνία ίση. Άρα ΑΑ΄=ΓΓ΄ και επειδή ΑΑ΄=ΒΒ΄ και ΓΓ΄=ΔΔ΄ ως απέναντι πλευρές των ορθογωνίων ΑΑ΄Β΄Β και ΓΓ΄Δ΄Δ, συμπεραίνουμε ότι ΑΑ΄ = ΒΒ΄= ΓΓ΄= ΔΔ΄.

1719

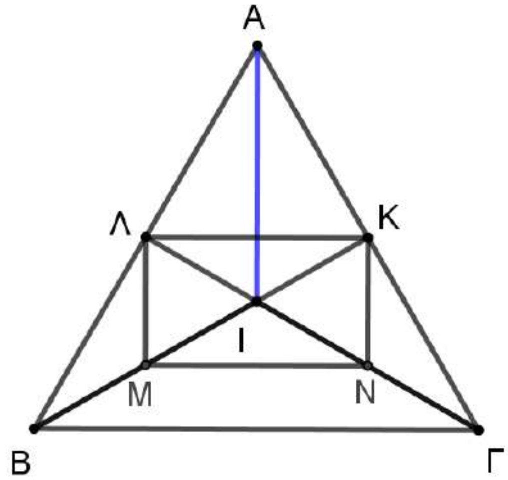
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΚ και ΓΛ, τα οποία τέμνονται στο Ι.

Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΙΒ και ΙΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε:

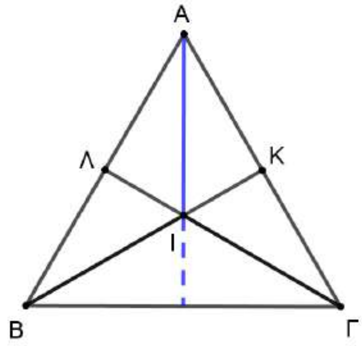
α) Το ΑΙ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (Μονάδες 15)



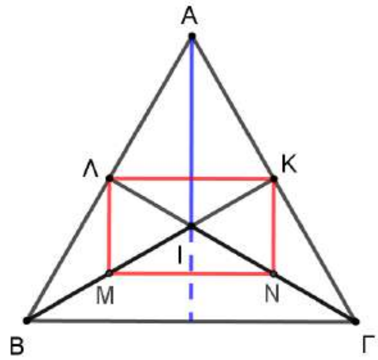
1719-Λύση

α)



Επειδή στο σημείο Ι τέμνονται τα ύψη ΒΚ και ΛΓ του τριγώνου ΑΒΓ, το Ι είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου οπότε το ΑΙ θα βρίσκεται στο φορέα του 3^{ου} ύψους και επειδή το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, κάθε ύψος είναι και διάμεσος, άρα η προέκταση του ΑΙ θα διχοτομεί την πλευρά ΒΓ.

β)



Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Λ, Κ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ οπότε ΛΚ // = $\frac{ΒΓ}{2}$ (1). Στο τρίγωνο ΙΒΓ τα Μ, Ν είναι τα μέσα των ΙΒ και ΙΓ οπότε ΜΝ // = $\frac{ΒΓ}{2}$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι ΛΚ=//ΜΝ, άρα το ΜΛΚΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Στο τρίγωνο ΑΒΙ το ευθύγραμμο τμήμα ΛΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΙ οπότε ΛΜ//ΑΙ.

Το ΑΙ βρίσκεται στο φορέα του 3^{ου} ύψους (α) ερώτημα) άρα ΑΙ$\perp$ΒΓ και επειδή ΒΓ//ΛΚ από τη σχέση (1), θα είναι ΑΙ$\perp$ΛΚ.

Άρα το τμήμα ΛΜ θα είναι κάθετο στο τμήμα ΛΚ. Επομένως $\widehat{ΜΛΚ}$=90° οπότε το παραλληλόγραμμο ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο γιατί έχει 1 γωνία ορθή.

1720

ΘΕΜΑ 4

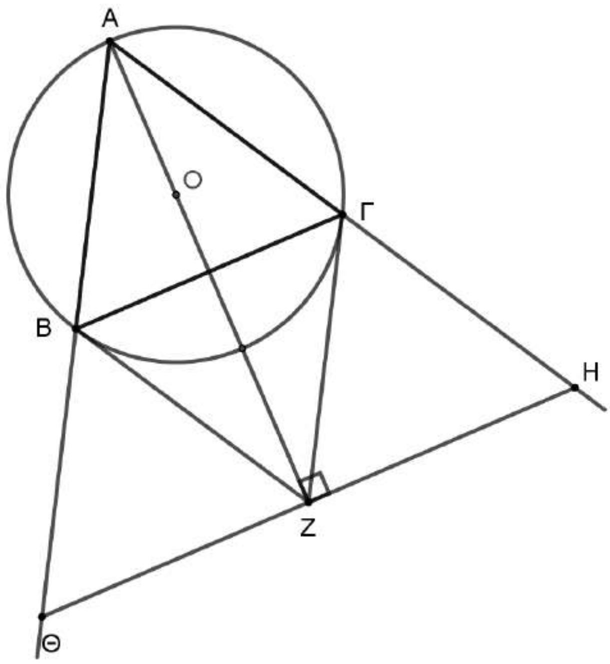
Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Τα τμήματα ΓΖ και ΒΖ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και Β αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΘΗ είναι κάθετο στο τμήμα ΑΖ στο Ζ , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

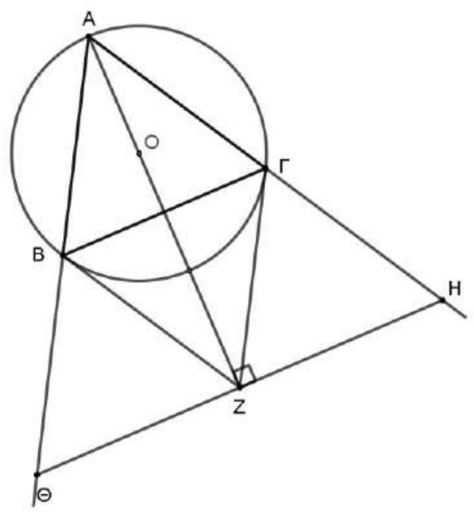
β) Το τετράπλευρο ΑΓΖΒ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΒΓΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)



1720-Λύση



α) Είναι ΖΒ = ΖΓ ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ζ προς τον κύκλο. Άρα το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισοσκελές. Οι γωνίες του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στα τόξα ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ και αφού είναι γωνίες 60^o, τότε τα αντίστοιχα τόξα τους θα είναι τόξα 120^o το καθένα.

Η γωνία $Β\hat{Γ}Ζ = \hat{Α} = 60^o$ (γωνία από τη χορδή ΒΓ και την εφαπτομένη ΓΖ ίση με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής). Οπότε, το ισοσκελές τρίγωνο ΒΓΖ έχει μία γωνία ίση με 60^o, άρα είναι ισόπλευρο.

β) Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΖ έχουμε: ΓΒ = ΓΖ = ΖΒ (1).

Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ βρίσκουμε: ΑΓ = ΑΒ = ΓΒ (2).

Από (1), (2) προκύπτει: ΑΓ = ΑΒ = ΓΖ = ΖΒ, δηλαδή το τετράπλευρο ΑΓΖΒ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

γ) Ισχύει ότι:

- $ΘΗ \perp ΑΖ$, από υπόθεση και
- $ΒΓ \perp ΑΖ$, γιατί είναι διαγώνιοι του ρόμβου ΑΓΖΒ και τέμνονται κάθετα.

Άρα ΒΓ // ΘΗ αφού είναι κάθετες στην ίδια ευθεία ΑΖ. Επομένως το τετράπλευρο ΒΓΗΘ είναι τραπέζιο αφού ΒΓ // ΘΗ και οι ΘΒ, ΗΓ δεν είναι παράλληλες γιατί τέμνονται στο Α. Επίσης:

- $\hat{Θ} = \hat{Β} = 60^o$ και $\hat{Η} = \hat{Γ} = 60^o$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΒΓ//ΘΗ τεμνομένων από ΑΘ και ΑΗ αντίστοιχα.

Άρα το τραπέζιο ΒΓΗΘ είναι ισοσκελές γιατί οι γωνίες της βάσης του ΒΗ είναι ίσες.

1721

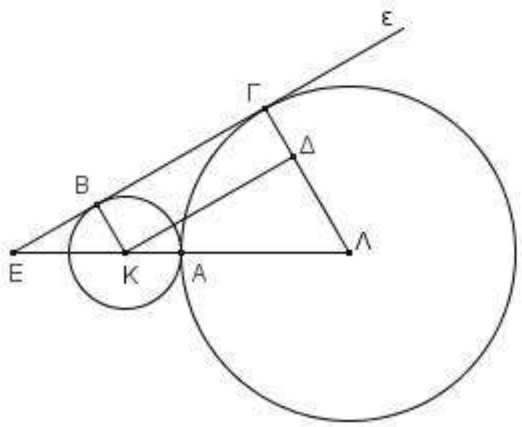
ΘΕΜΑ 4

Οι κύκλοι (Κ, ρ) και (Λ, 3ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Μία ευθεία ε εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Ε. Φέρουμε από το σημείο Κ παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα ΛΓ στο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΚΛ είναι 30°. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τμήμα ΕΛ=6ρ, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου (Κ, ρ). (Μονάδες 8)



1721-Λύση

α) Οι ακτίνες ΚΒ και ΛΓ είναι κάθετες στην εφαπτομένη ε, άρα ΚΒ//ΛΓ. Επίσης ΚΔ // ΒΓ από υπόθεση οπότε το ΒΓΔΚ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $\mathrm{K}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = 90^{o}$, τελικά το ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο.

β) Από το ορθογώνιο ΒΓΔΚ έχουμε ότι ΒΚ=ΓΔ=ρ. Επίσης ΔΛ = ΓΛ – ΓΔ = 3ρ-ρ = 2ρ και ΚΛ = ΚΑ + ΑΛ = ρ + 3ρ = 4ρ (διάκεντρος κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΔΛ η κάθετη πλευρά ΔΛ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας ΚΛ, οπότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από αυτή την πλευρά είναι γωνία 30^{o} . Δηλαδή $\Delta\widehat{\mathrm{K}}\Lambda = 30^{o}$.

γ) Είναι $\widehat{\mathrm{E}} = \Delta\widehat{\mathrm{K}}\Lambda = 30^{o}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΚΔ // ΕΓ που τέμνονται από την ΕΛ. Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΓΛ ισχύει ότι: $\Gamma\Lambda = \frac{\mathrm{E}\Lambda}{2} \Leftrightarrow$ $\mathrm{E}\Lambda = 2\Gamma\Lambda = 2 \cdot 3\rho = 6\rho$.

1722

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $ΔΕ \perp ΒΓ$ και ονομάζουμε Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β)Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

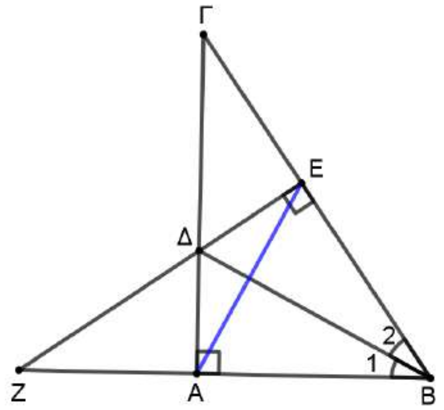
γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων ΑΕ και ΖΓ. (Μονάδες 6)

δ)Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

1722-Λύση

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90°$, ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$ και ΔΕ το κάθετο τμήμα στη ΒΓ που τέμνει την προέκταση της ΒΑ στο Ζ.

α)



Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΔ έχουν:

- $\widehat{A} = \widehat{E} = 90°$ (Υπόθεση και ΔΕ⊥ΒΓ)
- ΒΔ κοινή πλευρά
- $\widehat{B}_1$ = $\widehat{B}_2$ γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της $\widehat{B}$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε θα είναι ίσες και οι κάθετες πλευρές ΑΒ και ΒΕ στις οποίες είναι προσκείμενες οι ίσες γωνίες $\widehat{B}_1$ και $\widehat{B}_2$ αντίστοιχα. Άρα το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

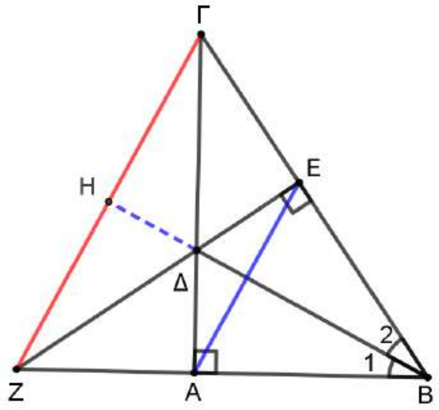
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ έχουν:

- $\widehat{A} = \widehat{E} = 90°$
- ΑΒ=ΒΕ (ΑΒΕ ισοσκελές – α) ερώτημα)
- $\widehat{B}$ κοινή γωνία

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίση μία κάθετη πλευρά τους και την προσκείμενη οξεία γωνία ίση.

1722-Λύση

γ)



Ισχύει ότι:

- ΒΑ = ΒΕ (ΑΒΕ ισοσκελές) (1)
- ΔΑ = ΔΕ (τριγ ΑΔΒ = τριγ ΒΔΕ από α) ερώτημα)

Άρα τα σημεία Β και Δ ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος ΑΕ, οπότε η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι ίσα, από το β) ερώτημα, θα έχουν ίσες υποτείνουσες, δηλαδή ΒΓ = ΒΖ (2). Άρα το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές. Η διχοτόμος ΒΔ της γωνίας $\widehat{B}$ στο τρίγωνο ΒΖΓ τέμνει την πλευρά ΓΖ στο σημείο Η και επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την ΓΖ, το τμήμα ΒΗ είναι ύψος και διάμεσός της πλευράς ΓΖ. Δηλαδή η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΓΖ.

δ) Επειδή ΑΕ $\perp$ ΒΔ και ΖΓ $\perp$ ΒΔ, είναι ΑΕ // ΖΓ. Επίσης οι ΖΑ και ΓΕ δεν είναι παράλληλες αφού τέμνονται στο Β. Άρα το ΑΕΓΖ είναι τραπέζιο. Ισχύει ότι: ΕΓ = ΒΓ – ΒΕ = ΒΖ – ΑΒ = ΑΖ (από τις ισότητες (1) και (2)). Συνεπώς το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1726

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

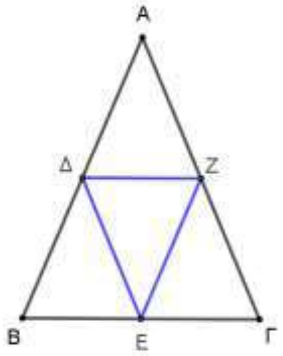
β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

i. ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 8)

ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο. (Μονάδες 9)

1726-Λύση

α)



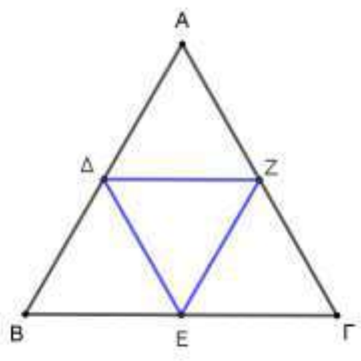
Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα.

Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα ΔΕ = $\frac{\mathrm{ΑΓ}}{2}$ (1)

Το ΕΖ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα ΕΖ = $\frac{\mathrm{ΑΒ}}{2}$ (2)

Επειδή ΑΒ=ΑΓ από (1) και (2) προκύπτει ότι ΔΕ=ΕΖ, δηλαδή το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισοσκελές.

β) i. Πρόταση: «Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ισόπλευρου τριγώνου είναι ισόπλευρο».

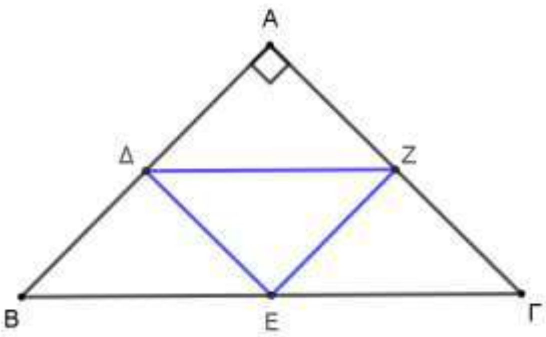


Επειδή το ΔΖ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει ότι ΔΖ = $\frac{\mathrm{ΒΓ}}{2}$ (3)

Επειδή ΑΒ=ΒΓ=ΑΓ από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΔΕ=ΕΖ=ΖΔ, οπότε το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

1726-Λύση

ii. Πρόταση: «Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου είναι ορθογώνιο και ισοσκελές».



Έστω ότι $\widehat{A} = 90^o$, και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Επειδή ΔΕ//ΑΓ, ΖΕ//ΑΒ (ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα μέσα 2 πλευρών ενός τριγώνου) και ΑΒ ⊥ ΑΓ θα είναι και ΔΕ ⊥ ΖΕ, άρα το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ορθογώνιο με $\hat{E} = 90^o$. Επειδή $ZE = \frac{AB}{2}$, $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$ και ΑΒ=ΑΓ θα είναι και ΖΕ=ΔΕ. Άρα το τρίγωνο ΔΕΖ είναι και ισοσκελές.

1727

ΘΕΜΑ 4

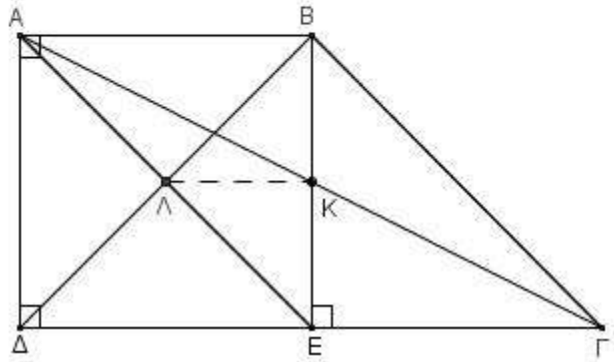
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A}=\hat{\Delta}=90°$, ΔΓ=2ΑΒ και $\hat{B}=3\hat{\Gamma}$. Από το Β φέρνουμε κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΓΔ στο Ε. Επίσης φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Λ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma}=45°$ (Μονάδες 8)

β) ΒΔ=ΑΕ (Μονάδες 9)

γ) ΚΛ=$\frac{1}{4}$ΔΓ. (Μονάδες 8)



1727-Λύση

α) Οι γωνίες $\widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AB, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, άρα είναι παραπληρωματικές. Οπότε

$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 3\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 4\widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 45^o$

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχει τρείς γωνίες ορθές, τις $\widehat{A}, \widehat{\Delta}$ από την υπόθεση και την $\Delta\widehat{E}B$ αφού η ΒΕ είναι κάθετη στην ΓΔ από κατασκευή, επομένως είναι ορθογώνιο. Οι ΑΕ, ΒΔ είναι διαγώνιοι του ορθογωνίου, οπότε είναι ίσες.

γ) Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΒΕΓ ισχύει:

$E\widehat{B}\Gamma + \widehat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow E\widehat{B}\Gamma + 45^o = 90^o \Leftrightarrow E\widehat{B}\Gamma = 45^o$. Επομένως το τρίγωνο ΒΕΓ έχει δύο γωνίες ίσες, τις $\widehat{\Gamma}$ και $E\widehat{B}\Gamma$, άρα είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΒΕ και ΕΓ.

Επίσης από το ορθογώνιο ΑΒΕΔ έχουμε ότι ΑΒ = ΔΕ και επειδή από τα δεδομένα έχουμε ότι 2ΑΒ=ΓΔ, συμπεραίνουμε ότι $\Delta E = \frac{1}{2}\Gamma\Delta$. Δηλαδή το σημείο Ε είναι μέσο της πλευράς ΓΔ. Οπότε ΑΒ=ΔΕ=ΕΓ. Τότε όμως το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο αφού ΑΒ=//ΕΓ και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Στο τρίγωνο ΑΕΓ το ΛΚ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΕ και ΑΓ, άρα $K\Lambda = \frac{1}{2}E\Gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ \Gamma\Delta\right) = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$.

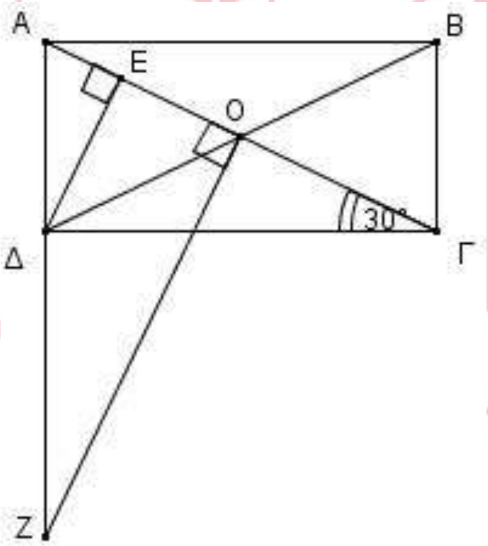
1729

ΘΕΜΑ 4

Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{\Delta\Gamma A} = 30°$ και Ο το κέντρο του. Φέρουμε ΔΕ $\perp$ ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{\Delta}\Gamma$ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρεις ίσες γωνίες. (Μονάδες 13)

β) Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Ο η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ζ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



1729-Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ οι οξείες γωνίες του $\Delta\hat{A}\Gamma$ και $\Delta\hat{\Gamma}A$ είναι συμπληρωματικές, οπότε αφού $\Delta\hat{\Gamma}A = 30^o$, τότε $\Delta\hat{A}\Gamma = 60^o$ (1). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΕ οι οξείες γωνίες του $\Delta\hat{A}\Gamma$ και $A\hat{\Delta}E$ είναι συμπληρωματικές, οπότε αφού $\Delta\hat{A}\Gamma = 60^o$, τότε $A\hat{\Delta}E = 30^o$ (2).

Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ίσες και διχοτομούνται, άρα

$O\Gamma = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} = O\Delta$.

Επομένως το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΔΓ, οπότε $O\hat{\Delta}\Gamma = O\hat{\Gamma}\Delta = 30^o$ (3).

Ισχύει ακόμη ότι: $A\hat{\Delta}E + E\hat{\Delta}O + O\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$. Δηλαδή $30^o + E\hat{\Delta}O + 30^o = 90^o$.

Άρα $E\hat{\Delta}O = 30^o$ (4).

Από τις (2), (3) και (4) έχουμε ότι $A\hat{\Delta}E = E\hat{\Delta}O = O\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$.

Άρα η γωνία $A\hat{\Delta}\Gamma$ χωρίζεται από τις ΔΕ και ΔΒ σε τρείς ίσες γωνίες.

β) Το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισοσκελές με ΟΑ=ΟΔ ως μισά των ίσων διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. Αφού $\Delta\hat{A}\Gamma = 60^o$ από(1) θα είναι $\Delta\hat{A}E = 60^o$. Άρα το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισόπλευρο με ΟΑ = ΟΔ = ΑΔ. Όμως ΑΔ=ΒΓ ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου. Άρα τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ έχουν:

- $\hat{O} = \hat{B} = 90°$ ($ZO \perp A\Gamma$ στο σημείο Ο)
- ΟΑ = ΒΓ
- $A\hat{\Gamma}B = 90° - 30° = 60^o = Z\hat{A}O$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με μία κάθετη πλευρά ίση και την προσκείμενη οξεία γωνία ίση.

1730

ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύει ΑΒ>ΑΔ, να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: $\widehat{\mathrm{AE\Delta}} = \widehat{\mathrm{BZ\Gamma}}$.

Ισχυρισμός 3: Οι ΔΕ και ΒΖ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\widehat{\Delta}$και$\widehat{\mathrm{B}}$.

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

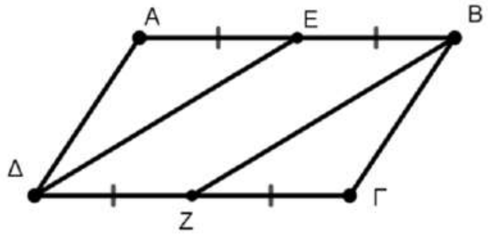
β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, ναβρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

1730-Λύση

α) Απόδειξη ισχυρισμού 1

Είναι ΔΖ = $\frac{ΔΓ}{2} = \frac{ΑΒ}{2}$ = ΕΒ και ΔΖ // ΕΒ (ως τμήματα των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ).

Δηλαδή το τετράπλευρο ΔΕΒΖ έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.



Απόδειξη ισχυρισμού 2

Επειδή το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ότι $Δ\hat{Ε}Β = Β\hat{Ζ}Δ$. Οπότε, και οι παραπληρωματικές τους $Α\hat{Ε}Δ$ και $Β\hat{Ζ}Γ$ θα είναι ίσες, δηλαδή $Α\hat{Ε}Δ = Β\hat{Ζ}Γ$.

Ο ισχυρισμός 3 δεν είναι αληθής και στο β ερώτημα γίνεται μία αιτιολόγηση.

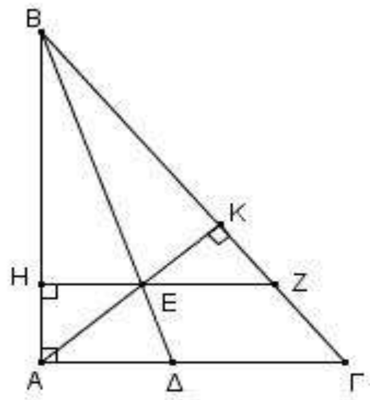
β) Ισχυρισμός 3

Έστω ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Δ}$. Τότε $Α\hat{Δ}Ε = Ε\hat{Δ}Ζ$ (1). Ισχύει επιπλέον ότι $Α\hat{Ε}Δ = Ε\hat{Δ}Ζ$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΕΔ. Από (1), (2) βρίσκουμε $Α\hat{Δ}Ε = Α\hat{Ε}Δ$. Οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, με ΑΕ = ΑΔ. Τότε ΑΔ = ΑΕ = $\frac{ΑΒ}{2} \Leftrightarrow$ ΑΒ = 2ΑΔ. Αν λοιπόν η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Δ}$, τότε η μία πλευρά του παραλληλογράμμου είναι διπλάσια της άλλης. Και αντιστρόφως, αν ΑΒ = 2ΑΔ, τότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, οπότε $Α\hat{Δ}Ε = Α\hat{Ε}Δ$. Και αφού είναι και $Α\hat{Ε}Δ = Ε\hat{Δ}Ζ$, θα έχουμε ότι $Α\hat{Δ}Ε = Ε\hat{Δ}Ζ$, δηλαδή ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Δ}$.

1865

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ με ΒΔ διχοτόμο και ΑΚ ύψος, που τέμνονται στο Ε. Η κάθετη από το Ε στην ΑΒ τέμνει τις ΑΒ και ΒΓ στα Η και Ζ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι:

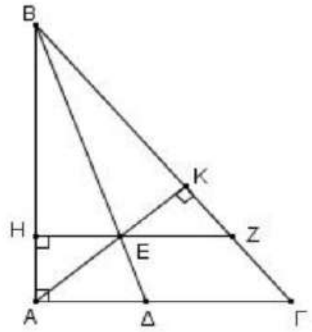
i. Τα τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

ii. Το τρίγωνο ΒΚΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

iii. Η ΒΔ είναι κάθετη στην ΑΖ (Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ. (Μονάδες 6)

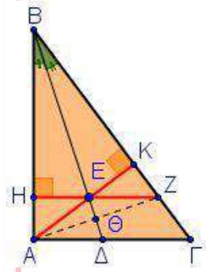
1865-Λύση



α) i) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ έχουν:

• $H\hat{E}A = K\hat{E}Z$, ως κατακορυφήν

• ΗΕ = ΕΚ, διότι το Ε είναι σημείο της διχοτόμου ΑΔ και ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $\hat{B}$.



Άρα τα τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ είναι ίσα.

ii) Τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΒΕΚ . Έχουν:

• $H\hat{B}E = E\hat{B}K$, διότι ΒΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$

• ΒΕ κοινή πλευρά

Άρα τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΒΕΚ είναι ίσα, οπότε είναι και ΒΗ = ΒΚ διότι είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $H\hat{E}B$, $B\hat{E}K$ αντίστοιχα. Επομένως το τρίγωνο ΒΚΗ είναι ισοσκελές

iii) Στο τρίγωνο ΑΒΖ το σημείο Ε είναι το σημείο τομής των υψών ΑΚ, ΖΗ άρα είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Οπότε και το ΑΘ είναι ύψος αφού διέρχεται από το Ε. Άρα η ΒΔ $\perp$ ΑΖ.

β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, το ΑΚ είναι ύψος και διχοτόμος. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Ε είναι σημείο τομής των διχοτόμων ΑΚ και ΒΔ άρα είναι έγκεντρο. Η ΓΕ διέρχεται από το Ε άρα είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

1866

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Με βάση την ΑΒ κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΒ, εκτός του τριγώνου ΑΒΓ, με γωνία $\hat{\Delta} = 120^o$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Η των πλευρών ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

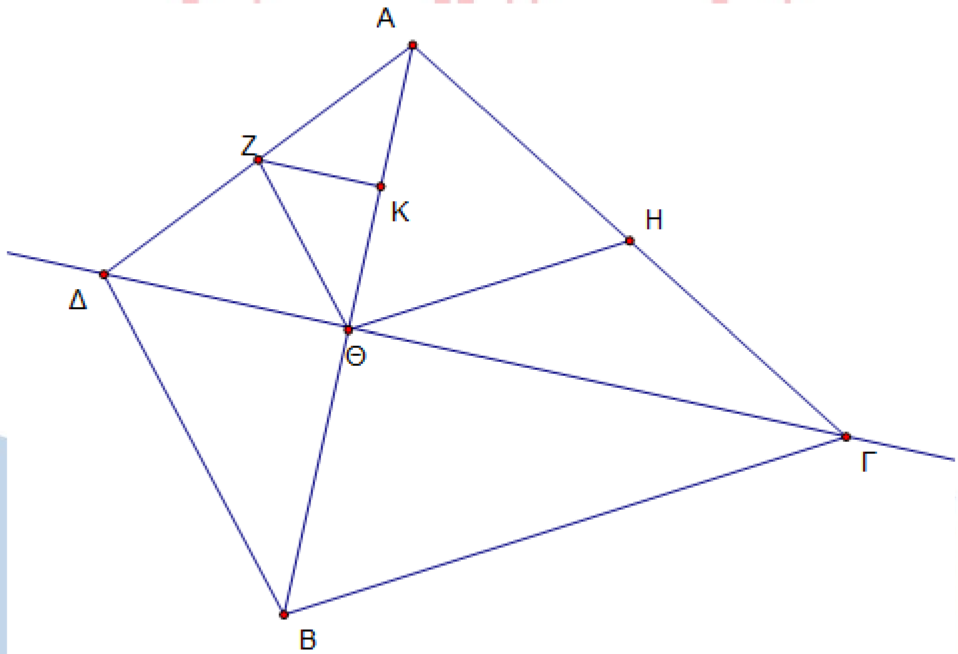
α) Να αποδείξετε ότι η ΔΓ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ. (Μονάδες 8)

β) Αν η ΔΓ τέμνει την ΑΒ στο Θ, να αποδείξετε ότι η γωνία $\mathrm{Z}\hat{\Theta}\mathrm{H}$ είναι ορθή.

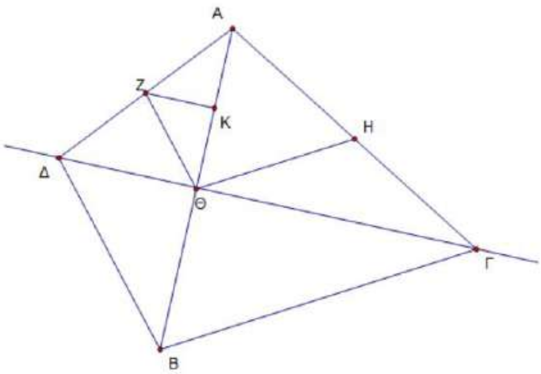
(Μονάδες 9)

γ) Αν η ΖΚ είναι η κάθετη στην ΑΒ από το σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $\mathrm{ZK} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{4}$.

(Μονάδες 8)



1866-Λύση



α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, οπότε ΓΑ = ΓΒ, δηλαδή το Γ ισαπέχει από τα Α και Β, οπότε ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

Επίσης το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές, οπότε ΔΑ = ΔΒ, δηλαδή το Δ ισαπέχει από τα Α και Β, οπότε ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

Επειδή τα σημεία Γ, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ, η ΓΔ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος αυτού.

β) Επειδή η ΓΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ, θα είναι και διχοτόμος των γωνιών $\hat{Δ}$ και $\hat{Γ}$, δηλαδή $Α\hat{Δ}Θ = Θ\hat{Δ}Β = 60^o$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΔ η ΘΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $ΘΖ = \frac{ΑΔ}{2} = ΖΑ$

Επομένως το τρίγωνο ΖΘΔ είναι ισοσκελές και αφού $Α\hat{Δ}Θ = 60^o$, το τρίγωνο ΖΘΔ είναι ισόπλευρο. Τότε: $Ζ\hat{Θ}Δ = 60^o$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΘΓ, έχουμε:

$Α\hat{Γ}Θ + Θ\hat{Α}Γ = 90^o \Leftrightarrow Α\hat{Γ}Θ + 60^o = 90^o \Leftrightarrow Α\hat{Γ}Θ = 30^o$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΓ η ΘΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $ΘΗ = \frac{ΑΓ}{2} = ΗΓ$

Επομένως το τρίγωνο ΘΗΓ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι:

$Η\hat{Θ}Γ = Α\hat{Γ}Θ \Leftrightarrow Η\hat{Θ}Γ = 30^o$

Τότε:

$Ζ\hat{Θ}Δ + Ζ\hat{Θ}Η + Η\hat{Θ}Γ = 180^o \Leftrightarrow 60^o + Ζ\hat{Θ}Η + 30^o = 180^o \Leftrightarrow Ζ\hat{Θ}Η = 90^o$

γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΘΔ βρίσκουμε:

$Α\hat{Δ}Θ + Δ\hat{Α}Θ = 90^o \Leftrightarrow 60^o + Δ\hat{Α}Θ = 90^o \Leftrightarrow Δ\hat{Α}Θ = 30^o$

Τότε για την απέναντι πλευρά στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΚ ισχύει ότι:

1866-Λύση

ZK = $\frac{AZ}{2} = \frac{\frac{A\Delta}{2}}{2} = \frac{A\Delta}{4}$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΔ και η ΒΔ είναι κάθετη στην ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Μ, Ε και Ζ των ΓΔ, ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

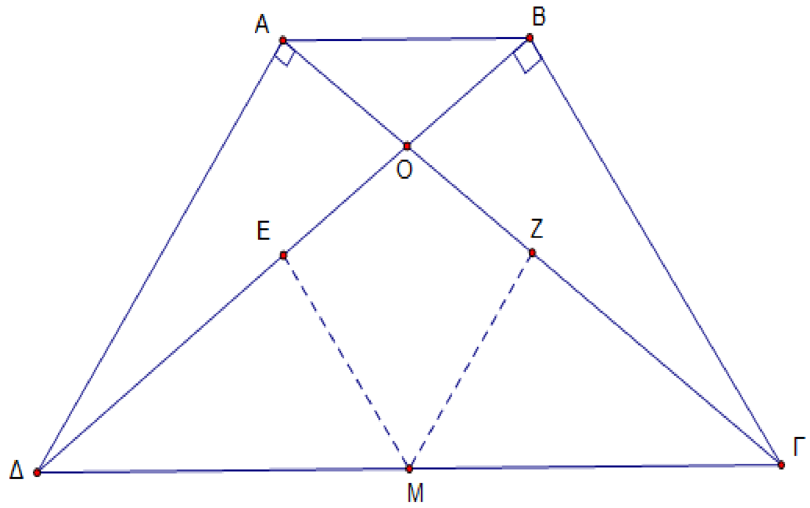
Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΕ=ΜΖ. (Μονάδες 6)

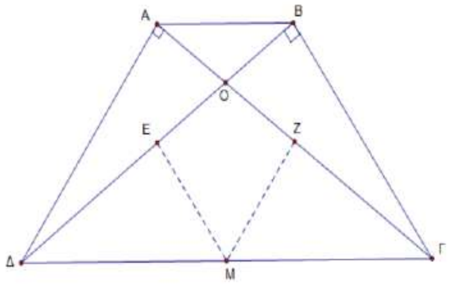
β) Η ΜΖ είναι κάθετη στην ΑΓ. (Μονάδες 6)

γ) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{M\Delta E}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{MZ\Gamma}}$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

δ) Η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ. (Μονάδες 6)



1867-Λύση



α) Το ΜΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΔΒΓ, οπότε ΕΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$

Το ΖΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΓΑΔ, άρα ΜΖ // ΑΔ και ΜΖ = $\frac{ΑΔ}{2}$

Επίσης, το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο οπότε ισχύει ότι ΒΓ = ΑΔ .

Οπότε προκύπτει ότι ΜΕ = ΜΖ .

β) Είναι ΜΖ // ΑΔ και ΑΔ $\perp$ ΑΓ άρα είναι και ΜΖ $\perp$ ΑΓ.

γ) Τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ έχουν:

- ΜΕ =ΜΖ, από το ερώτημα (α)
- ΜΔ = ΜΓ, διότι Μ μέσο του ΓΔ
- ΔΕ = $\frac{ΔΒ}{2} = \frac{ΑΓ}{2}$ = ΖΓ, διότι οι ΑΓ, ΒΔ είναι διαγώνιες του ισοσκελούς τραπεζίου.

Σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας Π – Π – Π, τα τρίγωνα είναι ίσα.

δ) Επειδή τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ είναι ίσα έχουν και

$Ο\hat{Δ}Γ = Ο\hat{Γ}Δ$ διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΜΕ, ΜΖ αντίστοιχα.

Άρα το τρίγωνο ΟΔΓ είναι ισοσκελές και ισχύει ΟΔ = ΟΓ. Τότε:

ΟΔ = ΟΓ $\Leftrightarrow$ ΟΕ + ΕΔ = ΟΖ + ΖΓ $\Leftrightarrow$ ΟΕ = ΟΖ

Επίσης ισχύει ΜΕ=ΜΖ, λόγω του ερωτήματος (α) . Άρα ΟΕ = ΟΖ και ΜΕ = ΜΖ οπότε η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ.

1871

ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με $\overset{\Lambda}{\mathrm{A}} = 120^o$. Φέρουμε ημιευθεία Αx κάθετη στην ΑΓ στο Α, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Έστω Λ το μέσο του ΑΒ και Κ το μέσο του ΔΓ.

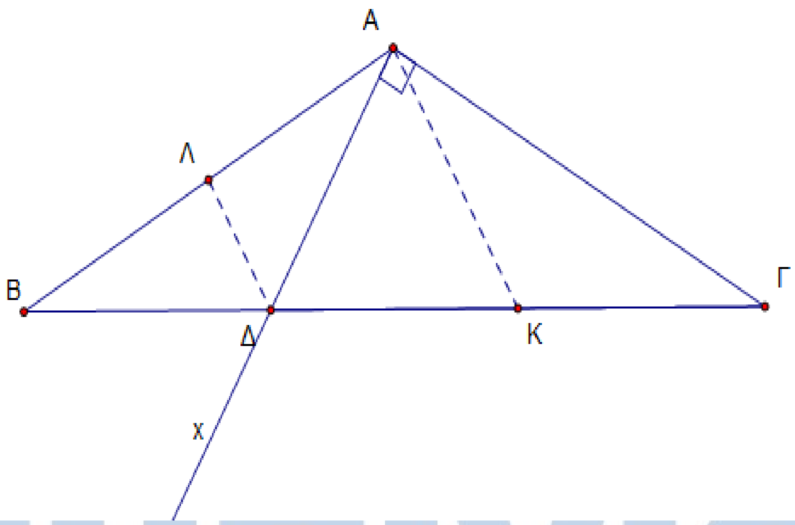
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta B}}$ είναι ισοσκελές (Μονάδες 8)

β) $\Delta\Gamma = 2\mathrm{B}\Delta$ (Μονάδες 8)

γ) $\Lambda\Delta // \mathrm{AK}$ (Μονάδες 5)

δ) ΑΚ=2ΛΔ (Μονάδες 4)



1871-Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ισχύει ότι $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$.

Είναι: $\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 2\widehat{\mathrm{B}} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\mathrm{B}} = 30^\circ = \widehat{\Gamma}$.

Είναι: $\widehat{\mathrm{A}} = 120^\circ \Leftrightarrow \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta + 90^\circ = 120^\circ \Leftrightarrow \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta = 30^\circ$.

Άρα $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta = \widehat{\mathrm{B}}$ οπότε το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές με ΑΔ = ΒΔ (1).

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ είναι $\widehat{\Gamma} = 30^\circ$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή:

$\mathrm{A}\Delta = \frac{\Delta\Gamma}{2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \mathrm{B}\Delta = \frac{\Delta\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 2\mathrm{B}\Delta$.

γ) Είναι: ΔΓ = 2ΒΔ και Κ μέσο ΔΓ άρα ΔΓ = 2ΔΚ οπότε ΔΚ = ΒΔ.

Άρα το Δ είναι μέσο της ΒΚ. Στο ΑΒΚ, το ΛΔ ενώνει τα μέσα των ΑΒ και ΒΚ οπότε ΛΔ // ΑΚ.

δ) Το ΛΔ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΚ στο τρίγωνο ΑΒΓ άρα

$\Lambda\Delta = \frac{\mathrm{AK}}{2} \Leftrightarrow \mathrm{AK} = 2\Lambda\Delta$

1872

ΘΕΜΑ 4

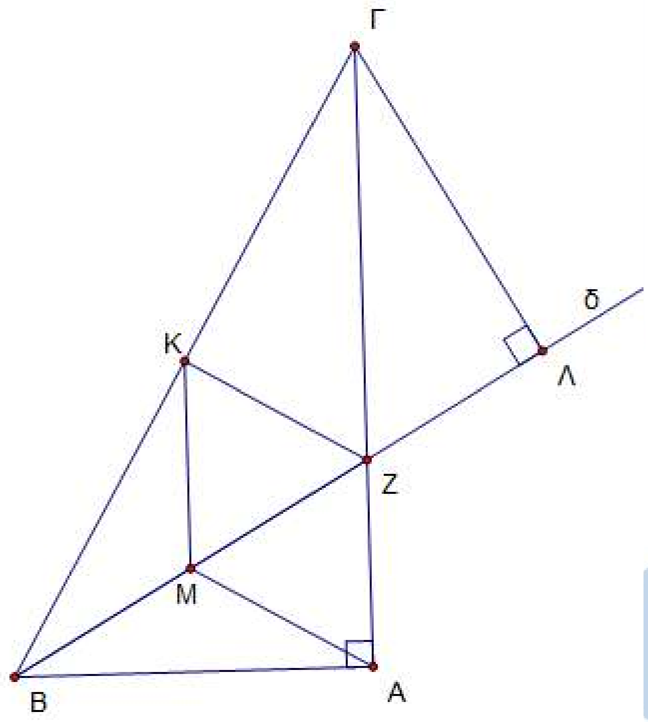
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με $\hat{A} = 90^o$ και $\hat{B} = 60^o$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Τα σημεία Μ και Κ είναι τα μέσα των ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΓΛ είναι κάθετο στη διχοτόμο Βδ να αποδείξετε:

α) Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{BZ\Gamma}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο ΑΜΚΖ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)

γ) $\Gamma Z = 2ZA$ (Μονάδες 7)

δ) $B\Lambda = A\Gamma$ (Μονάδες 6)



1872-Λύση

α) Επειδή η Βδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$, ισχύει ότι: $\Gamma\widehat{B}Z = A\widehat{B}Z = 30^o$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, βρίσκουμε:

$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow 60^o + \widehat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 30^o$.

Επειδή $\Gamma\widehat{B}Z = \widehat{\Gamma} = 30^o$, το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές με ΓΖ = ΒΖ (1).

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $AM = \frac{BZ}{2} = MZ$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΒΑΖ, βρίσκουμε:

$A\widehat{B}Z + B\widehat{Z}A = 90^o \Leftrightarrow 30^o + B\widehat{Z}A = 90^o \Leftrightarrow B\widehat{Z}A = 60^o$.

Οπότε το τρίγωνο ΑΜΖ είναι ισόπλευρο και ΑΜ = ΜΖ = ΑΖ (2).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{\Gamma} = 30^o$, άρα $AB = \frac{B\Gamma}{2} = BK$.

Από το α), το ΒΖΓ είναι ισοσκελές, άρα η ΚΖ ως διάμεσος της βάσης του, ΒΓ, είναι και ύψος του, επομένως $KZ \perp B\Gamma$.

Επειδή το Ζ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας Β οι αποστάσεις του ΚΖ και ΑΖ από τις πλευρές της γωνίας θα είναι ίσες, δηλαδή ΚΖ = ΑΖ (3).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΖ το ΚΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα $KM = \frac{BZ}{2} = MZ$ (4).

Από τις (2), (3), (4) το τετράπλευρο ΑΜΚΖ έχει τις πλευρές του ίσες και συνεπώς είναι ρόμβος.

γ) Είναι: $AZ = MZ = \frac{BZ}{2}$ και ΒΖ = ΖΓ.

Άρα $AZ = \frac{Z\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Gamma Z = 2ZA$.

δ) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΖΑ και ΓΖΛ έχουν:

ΓΖ = ΖΒ

$\Gamma\widehat{Z}\Lambda = B\widehat{Z}A$, ως κατακορυφήν

Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση οπότε είναι ίσα, οπότε έχουν και ΖΑ = ΖΛ (5) διότι είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\widehat{B}Z$ και $Z\widehat{\Gamma}\Lambda$.

Από τις σχέσεις (1), (5) προκύπτει:

$\Gamma Z + ZA = ZB + Z\Lambda \Leftrightarrow A\Gamma = B\Lambda$.

ΘΕΜΑ 4

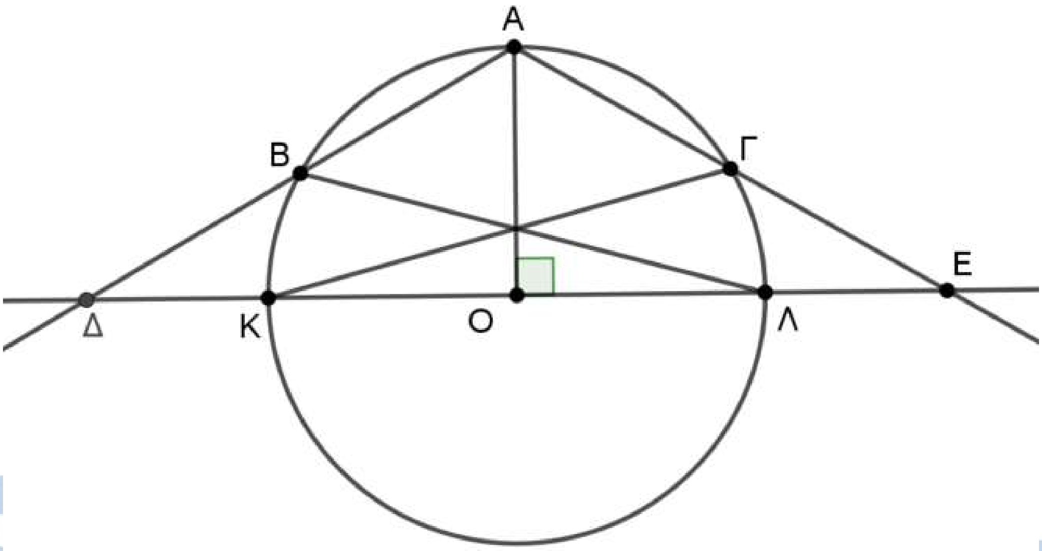
Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΚΛ. Έστω Α σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα ΟΑ να είναι κάθετη στην ΚΛ. Φέρουμε τις χορδές $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} = \rho$. Έστω Δ και Ε τα σημεία τομής των προεκτάσεων των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου ΚΛ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΒΑΓ είναι 120^{o}. (Μονάδες 7)

β) Τα σημεία Β και Γ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα. (Μονάδες 9)

γ) $\mathrm{K\Gamma} = \mathrm{\Lambda B}$. (Μονάδες 9)

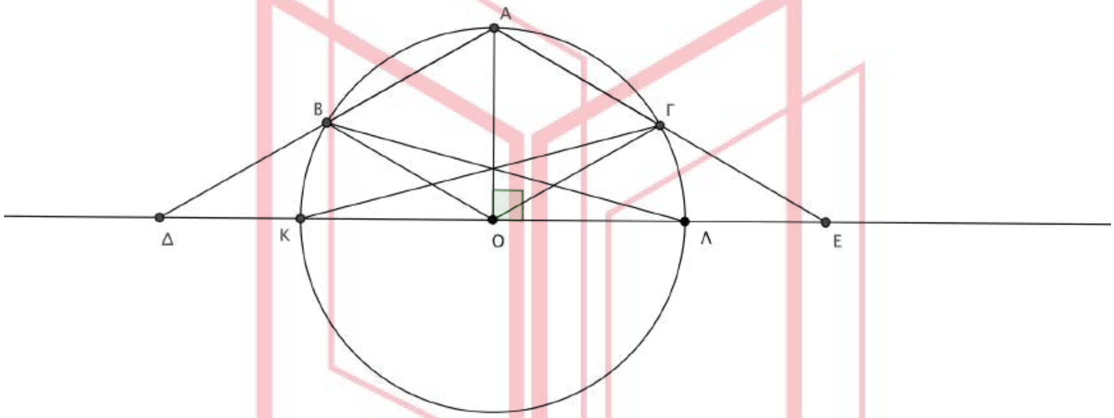


1874-Λύση

α) Επειδή ΟΑ = ΑΒ = ΟΒ = ρ, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο οπότε $B\widehat{A}O = 60^o$.

Επίσης ΟΑ = ΟΓ = ΑΓ = ρ οπότε το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισόπλευρο οπότε $O\widehat{A}\Gamma = 60^o$.

Άρα $B\widehat{A}\Gamma = B\widehat{A}O + O\widehat{A}\Gamma = 120^o$.



β) Το τρίγωνο ΔΟΑ είναι ορθογώνιο και ισχύει ότι:

$$A\widehat{\Delta}O + O\widehat{A}\Delta = 90^o \Leftrightarrow A\widehat{\Delta}O + 60^o = 90^o \Leftrightarrow A\widehat{\Delta}O = 30^o.$$

Άρα η ΑΟ που είναι απέναντι κάθετη πλευρά από την $A\widehat{\Delta}O$ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΑΔ, δηλαδή $AO = \frac{A\Delta}{2}$. Όμως ΑΒ =ΑΟ άρα $AB = \frac{A\Delta}{2}$.

Οπότε το σημείο Β είναι μέσο του ΑΔ. Όμοια δείχνουμε ότι το Γ είναι μέσο του ΑΕ.

γ) Είναι $A\widehat{O}\Gamma = 60^o$ επειδή το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισόπλευρο και $B\widehat{O}A = 60^o$ επειδή το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισόπλευρο. Οπότε:

$K\widehat{O}\Gamma = K\widehat{O}A + A\widehat{O}\Gamma = 90^o + 60^o = 150^o$

$B\widehat{O}\Lambda = B\widehat{O}A + A\widehat{O}\Lambda = 60^o + 90^o = 150^o$

Άρα οι επίκεντρες γωνίες $K\widehat{O}\Gamma$ και $B\widehat{O}\Lambda$ είναι ίσες. Συνεπώς τα τόξα ΚΓ και ΒΛ είναι ίσα . Οπότε και οι αντίστιχες χορδές ΚΓ και ΛΒ είναι ίσες, δηλαδή ΚΓ = ΛΒ.

1876

ΘΕΜΑ 4

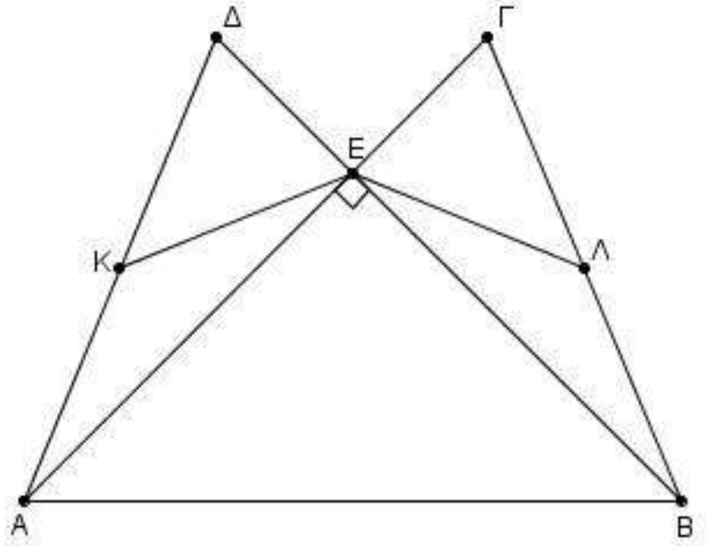
Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΑΒΔ (ΒΑ=ΒΔ), τέτοια ώστε οι πλευρές τους ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΔ=ΕΓ . (Μονάδες 7)

β) ΔΓ//ΑΒ . (Μονάδες 8)

γ) Το τρίγωνο ΕΚΛ είναι ισοσκελές και ΚΛ//ΑΒ. (Μονάδες 10)

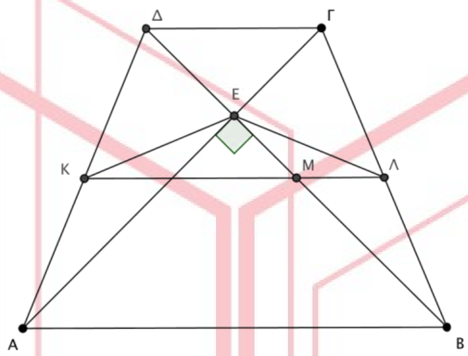


1876-Λύση

α) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΒΔ ισχύει ότι $E\widehat{A}B = E\widehat{B}A$ (1) επειδή περιέχονται στις ίσες πλευρές (ΑΒ = ΑΓ, ΒΑ = ΒΔ) των δύο τριγώνων και ΑΔ = ΒΓ (2).

Οπότε το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ισοσκελές λόγω της (1). Συνεπώς ΑΕ = ΕΒ.

Έχουμε ΒΔ = ΑΒ = ΑΓ. Επομένως ΕΔ = ΒΔ – ΕΒ = ΑΓ – ΑΕ = ΕΓ



β) Το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές αφού ΓΕ = ΔΕ, οπότε:

$$\Gamma\widehat{\Delta}E = 45^o$$

Το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές αφού ΕΑ = ΕΒ, οπότε:

$$A\widehat{B}\Delta = 45^o$$

Άρα οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ οι οποίες τέμνονται από την ΒΔ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους $\Gamma\widehat{\Delta}E$ και $A\widehat{B}\Delta$ ίσες, οπότε ΔΓ // ΑΒ.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΑ η ΕΚ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΑΔ, οπότε: ΕΚ = $\frac{A\Delta}{2}$

Όμοια, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ η ΕΛ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε: ΕΛ = $\frac{B\Gamma}{2}$

Όμως ΑΔ = ΒΓ, άρα ΕΚ = ΕΛ, οπότε το τρίγωνο ΕΚΛ είναι ισοσκελές.

Στο τρίγωνο ΑΔΒ φέρουμε από το μέσο Κ του ΑΔ ευθεία παράλληλη στην ΑΒ η οποία τέμνει την ΔΒ στο μέσο της Μ. Το τμήμα ΜΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΔΒ και ΒΓ του τριγώνου ΔΓΒ οπότε ΜΛ // ΔΓ, άρα και ΜΛ // ΑΒ και επειδή από το Μ διέρχεται μοναδική παράλληλη στην ΑΒ προκύπτει ότι τα σημεία Κ, Μ, Λ είναι συνευθειακά. Επομένως ΚΛ // ΑΒ.

1880

ΘΕΜΑ 4

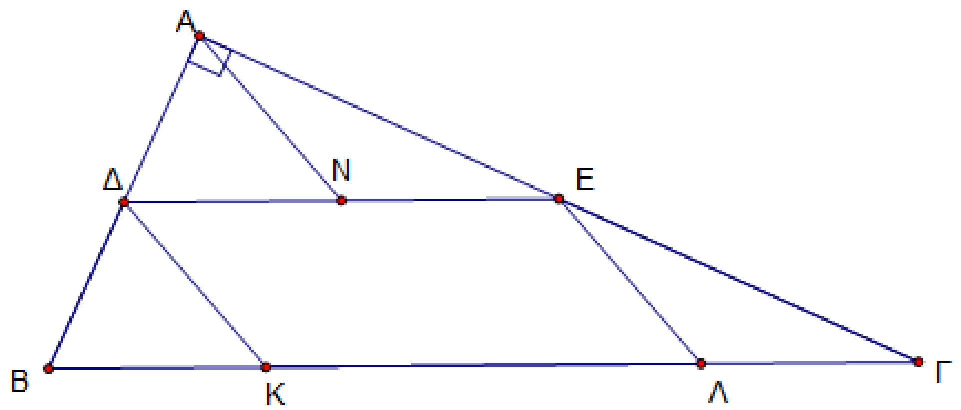
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με $\hat{A}=90^{\circ}$ και Δ, Ε και Ν τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΔΕ αντίστοιχα. Στο τμήμα ΒΓ θεωρούμε σημεία Κ και Λ ώστε $\Delta K = KB$ και $E\Lambda = \Lambda\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{K}\Lambda = 2\hat{B}$ και $E\hat{\Lambda}K = 2\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) $\Delta E = 2\Delta K$ (Μονάδες 6)



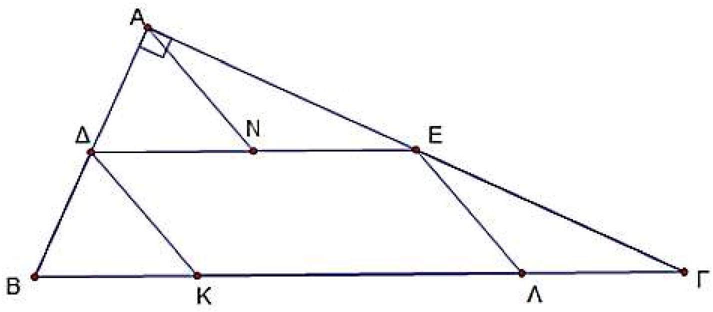
1880-Λύση

α) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΒ είναι ΔΚ = ΚΒ οπότε $\mathrm{B}\widehat{\Delta}\mathrm{K} = \widehat{\mathrm{B}}$.

Η γωνία $\Delta\widehat{\mathrm{K}}\Lambda$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔΒΚ, άρα: $\Delta\widehat{\mathrm{K}}\Lambda = \mathrm{B}\widehat{\Delta}\mathrm{K} + \widehat{\mathrm{B}} = 2\widehat{\mathrm{B}}$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΕΛΓ είναι ΕΛ = ΛΓ οπότε $\Lambda\widehat{\mathrm{E}}\Gamma = \widehat{\Gamma}$.

Η γωνία $\mathrm{E}\widehat{\Lambda}\mathrm{K}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΛΓ, άρα: $\mathrm{E}\widehat{\Lambda}\mathrm{K} = \Lambda\widehat{\mathrm{E}}\Gamma + \widehat{\Gamma} = 2\widehat{\Gamma}$



β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι: $\widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} = 90^{o}$

Από το ερώτημα (α) ισχύει ότι: $\Delta\widehat{\mathrm{K}}\Lambda + \mathrm{E}\widehat{\Lambda}\mathrm{K} = 2\widehat{\mathrm{B}} + 2\widehat{\Gamma} = 2(\widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma}) = 2 \cdot 90^{o} = 180^{o}$

Επειδή οι γωνίες $\Delta\widehat{\mathrm{K}}\Lambda$, $\mathrm{E}\widehat{\Lambda}\mathrm{K}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ΔΚ, ΕΛ που τέμνονται από την ΒΓ και είναι παραπληρωματικές, προκύπτει ότι ΔΚ // ΕΛ.

Επειδή το ΔΕ ενώνει μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει ότι

ΔΕ // ΒΓ $\Leftrightarrow$ ΔΕ // ΚΛ και ΔΕ = $\frac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$

Στο τετράπλευρο ΔΕΛΚ οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Επειδή το ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο και ΔΕ = $\frac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$ θα είναι και ΚΛ = $\frac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$. Οπότε, και για το υπόλοιπο μέρος της ΒΓ θα είναι: ΒΚ +ΛΓ = $\frac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$.

Αφού ΒΚ = ΚΔ = ΛΕ = ΛΓ (δηλαδή ΒΚ=ΛΓ) θα έχουμε ΒΚ = ΛΓ = $\frac{\mathrm{B}\Gamma}{4}$.

Άρα, τελικά είναι ΔΚ = $\frac{\mathrm{B}\Gamma}{4}$ και αφού ΔΕ = $\frac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$, θα είναι ΔΕ=2ΔΚ.

1881

ΘΕΜΑ 4

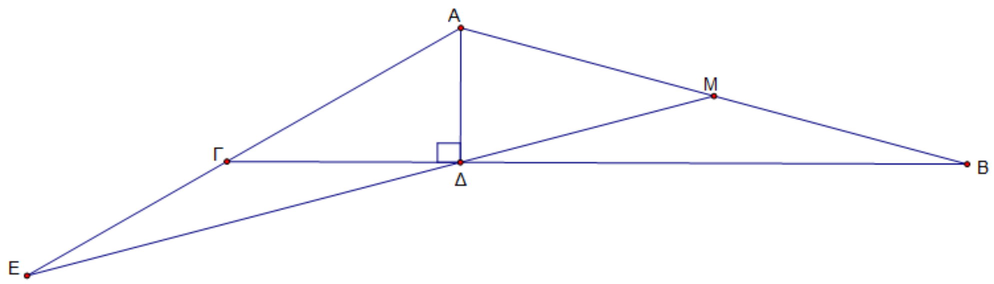
Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ ($\mathrm{AB} > \mathrm{A\Gamma}$), ΑΔ το ύψος του και Μ το μέσο του ΑΒ. Η προέκταση της ΜΔ τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ε ώστε $\mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{\Gamma E}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{E}}$. (Μονάδες 8)

β) $\hat{\Gamma} = 2\hat{\mathrm{B}} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\Delta$. (Μονάδες 10)

γ) ΓΕ<ΑΓ. (Μονάδες 7)



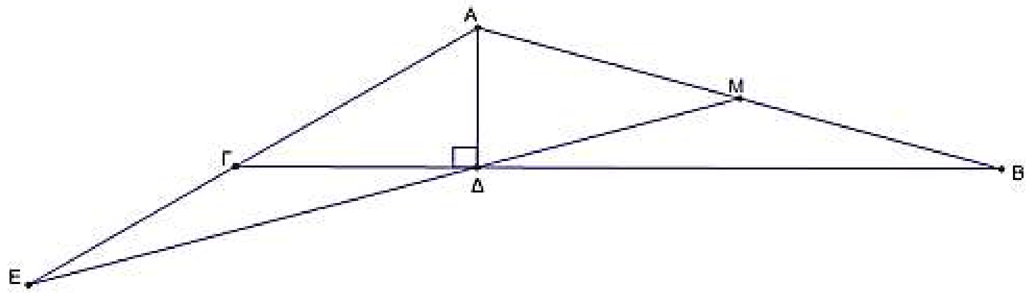
1881-Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ η ΔΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του άρα ΔΜ = $\frac{AB}{2}$ = ΜΒ

Συνεπώς το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές και ισχύει Μ$\widehat{\Delta}$Β = $\widehat{B}$ (1)

Είναι ΓΔ = ΓΕ, οπότε το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές. Άρα $\widehat{E}$ = Γ$\widehat{\Delta}$Ε (2)

Επειδή Μ$\widehat{\Delta}$Β = Γ$\widehat{\Delta}$Ε ως κατακορυφήν, από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\widehat{B}$ = $\widehat{E}$.



β) Η γωνία $\widehat{\Gamma}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΓΕΔ, οπότε $\widehat{\Gamma}$ = $\widehat{E}$ + Γ$\widehat{\Delta}$Ε = $\widehat{E}$ + $\widehat{E}$ = 2$\widehat{E}$ = 2$\widehat{B}$ (3)

Η γωνία Α$\widehat{M}$Δ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΜΔΒ, άρα Α$\widehat{M}$Δ = Μ$\widehat{\Delta}$Β + $\widehat{B}$ = $\widehat{B}$ + $\widehat{B}$ = 2$\widehat{B}$ (4)

Από τις (3), (4) προκύπτει: $\widehat{\Gamma}$ = 2$\widehat{B}$ = Α$\widehat{M}$Δ .

γ) Η ΑΓ είναι υποτείνουσα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, άρα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του. Άρα ΑΓ > ΓΔ και επειδή ΓΔ = ΓΕ θα είναι ΑΓ > ΓΕ.

1882

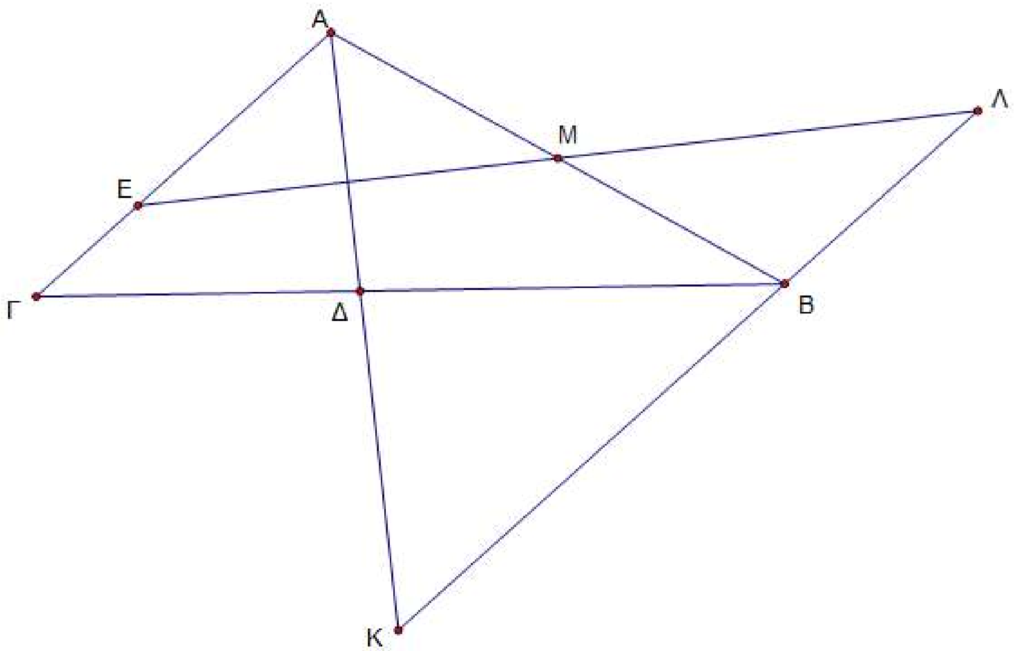
ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$, ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α και Μ το μέσον της ΑΒ. Η κάθετη από το Μ στην ΑΔ τέμνει το ΑΓ στο Ε. Η παράλληλη από το Β στο ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Κ και την προέκταση της ΕΜ στο Λ

Να αποδείξετε ότι:

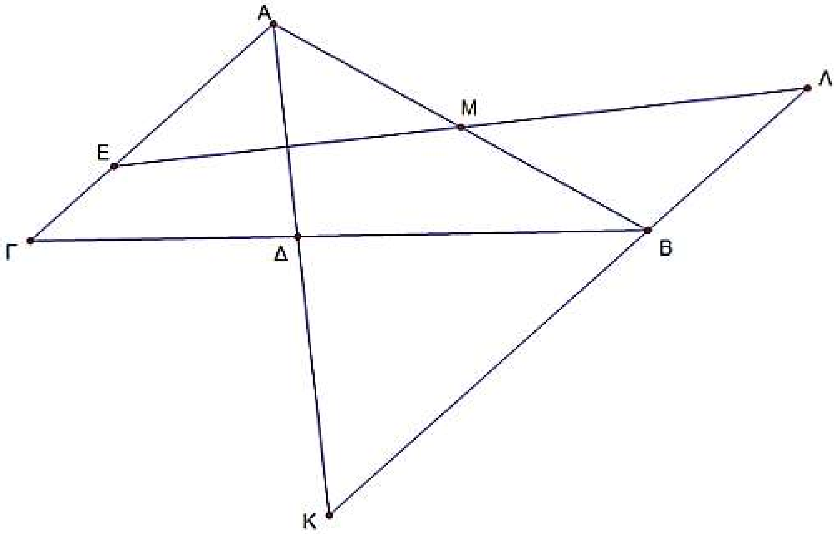
α) Τα τρίγωνα ΑΕΜ, ΜΒΛ και ΑΒΚ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



1882-Λύση

α) Η ΑΔ είναι ο φορέας του ύψους και της διχοτόμου του τριγώνου ΑΕΜ, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ΑΕ=ΑΜ και $A\hat{E}M = A\hat{M}E$ (1).



Επίσης $A\hat{E}M = M\hat{\Lambda}B$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΓ, ΛΚ που τέμνονται από την ΕΛ και $A\hat{M}E = B\hat{M}\Lambda$ (3) ως κατακορυφήν. Από (1), (2), (3) βρίσκουμε $B\hat{M}\Lambda = M\hat{\Lambda}B$, οπότε το τρίγωνο ΒΜΛ είναι ισοσκελές.

Είναι $\hat{K} = \Gamma\hat{A}\Delta$ (4) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΓ, ΚΛ που τέμνονται από την ΑΚ και $\Gamma\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}B$ (5) γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Από (4), (5) βρίσκουμε $\Delta\hat{A}B = \hat{K}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές.

β) Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΕΜ και ΜΒΛ και επειδή το Μ είναι μέσο του Β, έχουμε ΑΕ=ΑΜ=ΜΒ=ΒΛ. Οπότε ΑΕ=//ΒΛ, άρα το ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο.

1883

ΘΕΜΑ 4

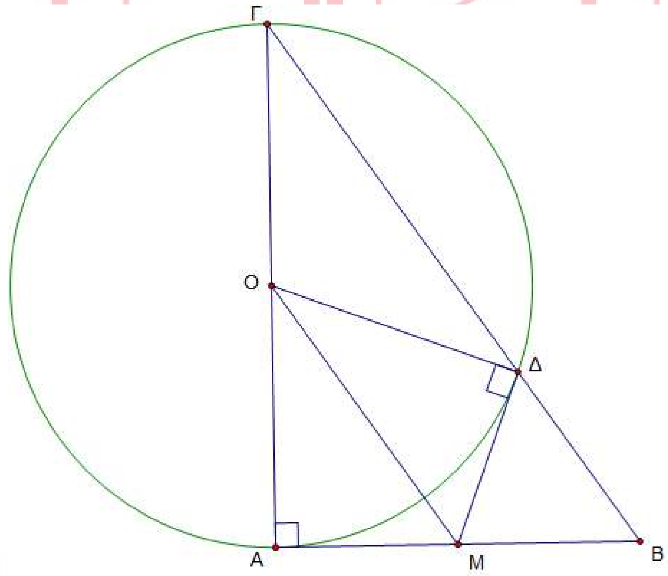
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ ($\hat{A}=90^\circ$). Με διάμετρο την πλευρά του ΑΓ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα ΒΓ στο Δ. Από το Δ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την ΑΒ στο Μ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\hat{A}\Delta=\hat{B}$ (Μονάδες 9)

β) $M\hat{\Delta}B=90^\circ-\hat{\Gamma}$ και το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Το Μ είναι το μέσο του ΑΒ. (Μονάδες 7)

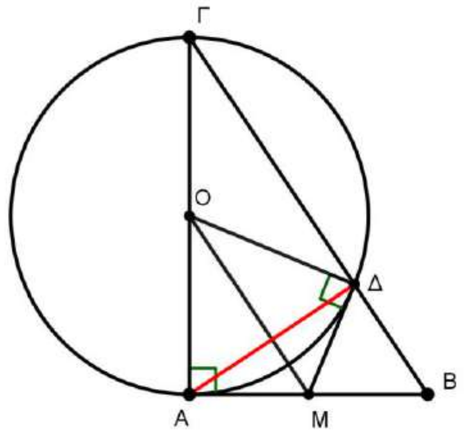


1883-Λύση

α) Η γωνία ΓΔΑ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο και είναι ορθή. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ βρίσκουμε: $\Gamma\hat{A}\Delta + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \Gamma\hat{A}\Delta = 90^o - \hat{\Gamma}$ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \hat{B} = 90^o - \hat{\Gamma}$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει: $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{B}$



β) Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές διότι ΟΓ = ΟΔ = ακτίνα και ισχύει ότι: $\hat{\Gamma} = O\hat{\Delta}\Gamma$. Τότε $M\hat{\Delta}B = 180^o - M\hat{\Delta}O - O\hat{\Delta}\Gamma = 180^o - 90^o - \hat{\Gamma}$ δηλαδή τελικά $M\hat{\Delta}B = 90^o - \hat{\Gamma}$. Και λόγω της (2) θα είναι $M\hat{\Delta}B = \hat{B}$. Άρα το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές με ΜΔ = ΜΒ (3).

γ) Επειδή $MA \perp OA$ και $M\Delta \perp O\Delta$, τα ΜΑ, ΜΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα, οπότε ΜΑ = ΜΔ (4).

Από τις (3), (4) βρίσκουμε ότι ΜΑ = ΜΒ, δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

1884

ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ ($\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$) και ΑΔ διάμεσος. Στο τμήμα ΑΔ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα ΚΖ και ΚΕ κάθετα στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΒΓ και ΚΖΕ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής στην πορεία της λύσης του έδωσε το εξής επιχείρημα:

«*Το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου* $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ *και μεσοκάθετος του ΒΓ. Οπότε και το τρίγωνο* $\overset{\Delta}{\mathrm{BK\Gamma}}$ *είναι ισοσκελές.*

Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{ABK}}$, $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma K}}$ *έχουν*

1. $\mathrm{BK} = \mathrm{K\Gamma}$

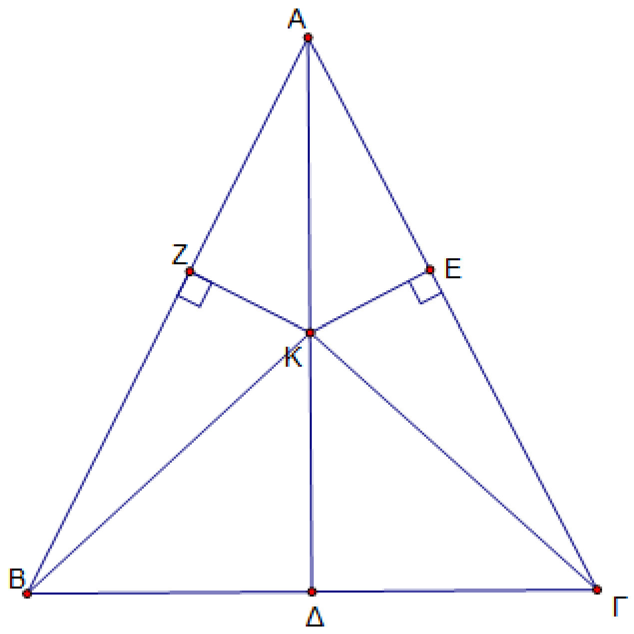
2. $\mathrm{B\hat{A}K} = \mathrm{\Gamma\hat{A}K}$ *επειδή ΑΚ διχοτόμος της* $\hat{\mathrm{A}}$

3. $\mathrm{A\hat{B}K} = \mathrm{A\hat{\Gamma}K}$ *ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.*

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.»

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία –Πλευρά- Γωνία διατηρώντας τις πλευρές ΒΚ και ΚΓ. (Μονάδες 7)

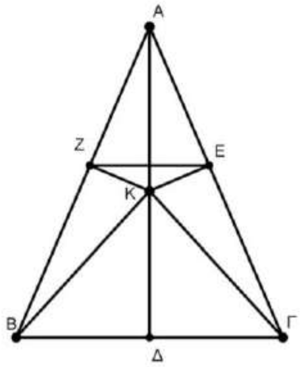
1884



1884-Λύση

α) Η ΑΔ είναι διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, άρα είναι και διχοτόμος και ύψος. Επειδή το Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ θα ισαπέχει από τα άκρα του, δηλαδή ΚΒ=ΚΓ, οπότε το τρίγωνο ΚΒΓ είναι ισοσκελές.

Επειδή το Κ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{A}$, ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας. Άρα ΖΚ = ΚΕ, οπότε το τρίγωνο ΖΚΕ είναι ισοσκελές.



β) Τα τρίγωνα ΒΖΚ και ΚΕΓ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΖΚ = ΚΕ, από το ερώτημα (α)
- ΚΒ = ΚΓ, από το ερώτημα (α)

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΖΚ και ΚΕΓ έχουν τις υποτείνουσες και από μία κάθετη πλευρά ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Οπότε ισχύει ΒΖ = ΓΕ.

Αφού ΑΒ = ΑΓ και ΒΖ = ΓΕ θα είναι και ΑΖ = ΑΕ. Επομένως το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές και έχει $A\widehat{Z}E = A\widehat{E}Z$ (1). Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΖΕ, έχουμε: $A\widehat{Z}E = A\widehat{E}Z = \frac{1}{2}(180^o - \widehat{A})$

Ομοίως, από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε: $\widehat{B} = \frac{1}{2}(180^o - \widehat{A})$.

Οπότε $A\widehat{Z}E = \widehat{B}$ και επειδή οι γωνίες αυτές είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΖΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ, συμπεραίνουμε ότι ΖΕ // ΒΓ. Και αφού οι ΒΖ και ΓΕ δεν είναι παράλληλες, το ΒΖΕΓ είναι τραπέζιο.

Επιπλέον ισχύει ΒΖ = ΓΕ άρα το ΒΖΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Η απάντηση είναι ελλιπής διότι ο μαθητής έλαβε υπόψη του γωνίες που δεν είναι προσκείμενες σε κάθε πλευρά. Έπρεπε να αναφέρει ότι αφού τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, θα έχουν και τις τρίτες τους γωνίες ίσες, δηλαδή $A\widehat{K}B = A\widehat{K}\Gamma$. Οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα με το κριτήριο ΓΠΓ.

1885

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) οι γωνίες ΗΔΖ και ΗΕΖ είναι ίσες . (Μονάδες 8)

γ) οι γωνίες ΕΔΖ και ΕΗΖ είναι ίσες. (Μονάδες 9)

1885-Λύση

α) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε ισχύει ότι: ΔΕ // ΒΓ άρα και ΔΕ // ΗΖ.

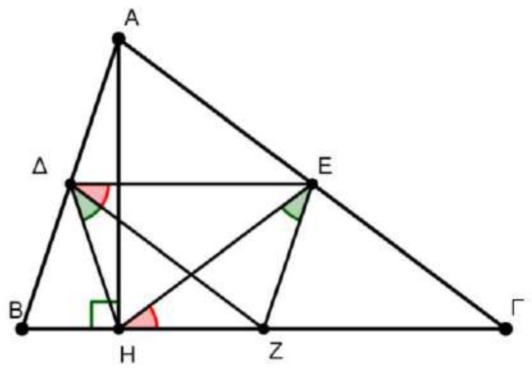
Το ΕΖ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα ισχύει ότι:

ΕΖ // ΑΒ και ΕΖ = $\frac{AB}{2}$ (1).

Αφού ΕΖ // ΑΒ και η ΔΗ τέμνει την ΑΒ, θα τέμνει και την παράλληλή της ΕΖ. Οπότε οι το τετράπλευρο ΔΕΗΖ έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες, άρα είναι τραπέζιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΒ η ΗΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα ΗΔ = $\frac{AB}{2}$ (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι ΕΖ = ΗΔ (3). Επομένως το τραπέζιο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές.



β) Τα τρίγωνα ΗΔΖ και ΗΕΖ έχουν:

- ΕΖ = ΗΔ, λόγω της (3)
- ΗΖ κοινή πλευρά
- Δ$\hat{Η}$Ζ = Ε$\hat{Ζ}$Η, ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τραπεζίου

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ– Π, τα τρίγωνα ΗΔΖ και ΗΕΖ είναι ίσα, άρα και Η$\widehat{Δ}$Ζ = Η$\hat{Ε}$Ζ.

γ) Είναι Ε$\widehat{Δ}$Ζ = Δ$\hat{Ζ}$Η (4) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΔΖ.

Επίσης, Δ$\hat{Ζ}$Η = Ε$\hat{Η}Z$ (5) από την ισότητα των τριγώνων ΔΗΖ και ΕΗΖ.

Από (4), (5) προκύπτει ότι Ε$\widehat{Δ}$Ζ = Ε$\widehat{Η}$Ζ.

1886

ΘΕΜΑ 4

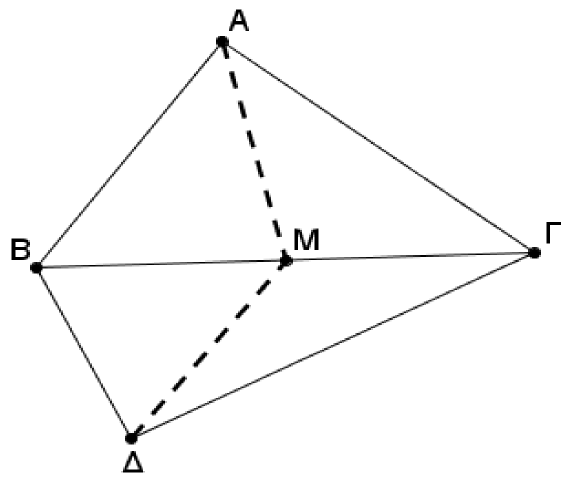
Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) και ΔΒΓ ($\hat{\Delta} = 90^o$) (όπου Α και Δ εκατέρωθεν της ΒΓ) και το μέσο Μ της ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) $A\hat{M}\Delta = 2A\hat{\Gamma}\Delta$ (Μονάδες 9)

γ) $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$ (Μονάδες 7)



1886-Λύση

α) Το τμήμα ΑΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή ΑΜ $= \frac{ΒΓ}{2}$.

Όμοια, το τμήμα ΔΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΒΔΓ, που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή ΔΜ $= \frac{ΒΓ}{2}$.

Άρα ΑΜ = ΔΜ, οπότε το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές.

β) Επειδή ΑΜ $= \frac{ΒΓ}{2}$ = ΜΓ το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές οπότε ισχύει ότι:

$Μ\hat{Α}Γ = Μ\hat{Γ}Α$ (1)

Επειδή ΔΜ $= \frac{ΒΓ}{2}$ = ΜΓ το τρίγωνο ΔΜΓ είναι ισοσκελές οπότε ισχύει ότι:

$Μ\hat{Δ}Γ = Μ\hat{Γ}Δ$ (2)

Η γωνία $Α\hat{Μ}Β$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΜΓ άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών, οπότε σε συνδυασμό με τη σχέση (1) βρίσκουμε:

$Α\hat{Μ}Β = Μ\hat{Α}Γ + Μ\hat{Γ}Α \Leftrightarrow Α\hat{Μ}Β = 2Μ\hat{Γ}Α$ (3)

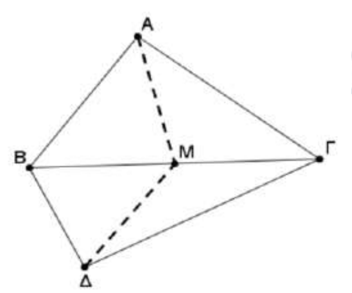
Η γωνία $Β\hat{Μ}Δ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΜΔΓ, άρα χρησιμοποιώντας τη σχέση (2) παίρνουμε

$Β\hat{Μ}Δ = Μ\hat{Δ}Γ + Μ\hat{Γ}Δ \Leftrightarrow Β\hat{Μ}Δ = 2Μ\hat{Γ}Δ$ (4)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (3), (4) και βρίσκουμε:

$Α\hat{Μ}Β + Β\hat{Μ}Δ = 2Μ\hat{Γ}Α + 2Μ\hat{Γ}Δ \Leftrightarrow Α\hat{Μ}Δ = 2Α\hat{Γ}Δ$

γ) Είναι $Β\hat{Α}Γ + Β\hat{Δ}Γ = 90^o + 90^o = 180^o$, δηλαδή δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματικές άρα το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο. Επομένως η πλευρά του ΓΔ φαίνεται από τις κορυφές Α και Β υπό ίσες γωνίες, δηλαδή $Γ\hat{Β}Δ = Γ\hat{Α}Δ$.



1888

ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε ΓΔ$\perp$ΒΓ με ΓΔ=ΑΒ (Α,Δ εκατέρωθεν της ΒΓ).

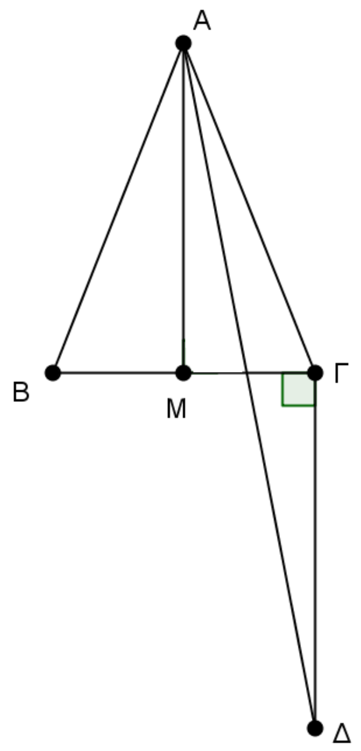
Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΜ // ΓΔ (Μονάδες 6)

β) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{M\hat{A}\Gamma}$. (Μονάδες 7)

γ) $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 45^o - \dfrac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$ (Μονάδες 7)

δ) ΑΔ < 2 ΑΒ (Μονάδες 5)



1888-Λύση

α) Η AM διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στη βάση του, οπότε θα είναι και ύψος και διχοτόμος του τριγώνου.

Επειδή AM⊥ΒΓ και ΓΔ⊥ΒΓ προκύπτει ότι AM//ΓΔ.

β) Ισχύει ότι AB = ΓΔ και AB = ΑΓ οπότε ΑΓ = ΓΔ. Άρα το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ, οπότε $\Gamma\widehat{A}\Delta = \widehat{\Delta}$.

Ισχύει επίσης ότι $M\widehat{A}\Delta = \widehat{\Delta}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AM, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ. Άρα $M\widehat{A}\Delta = \Gamma\widehat{A}\Delta$, επομένως η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\widehat{A}\Gamma$.

γ) Ισχύει ότι: $\Gamma\widehat{A}\Delta = \frac{M\widehat{A}\Gamma}{2} = \frac{\frac{B\widehat{A}\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\widehat{A}\Gamma}{4}$ (1)

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ βρίσκουμε:

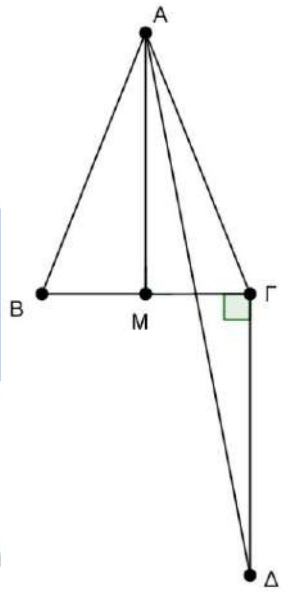
$$B\widehat{A}\Gamma + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow B\widehat{A}\Gamma + 2\widehat{B} = 180^o \Leftrightarrow B\widehat{A}\Gamma = 180^o - 2\widehat{B}$$

Τότε η (1) γράφεται:

$$\Gamma\widehat{A}\Delta = \frac{180^o - 2\widehat{B}}{4} = 45^o - \frac{\widehat{B}}{2}$$

δ) Από τη τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΓΔ, έχουμε:

$$A\Delta < A\Gamma + \Gamma\Delta \Leftrightarrow A\Delta < AB + AB \Leftrightarrow A\Delta < 2AB$$



1891

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ > ΑΔ και οι διχοτόμοι των γωνιών του ΑΡ, ΒΕ, ΓΣ και ΔΤ (όπου Ρ, Ε στην ΔΓ και Σ, Τ στην ΑΒ) τέμνονται στα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

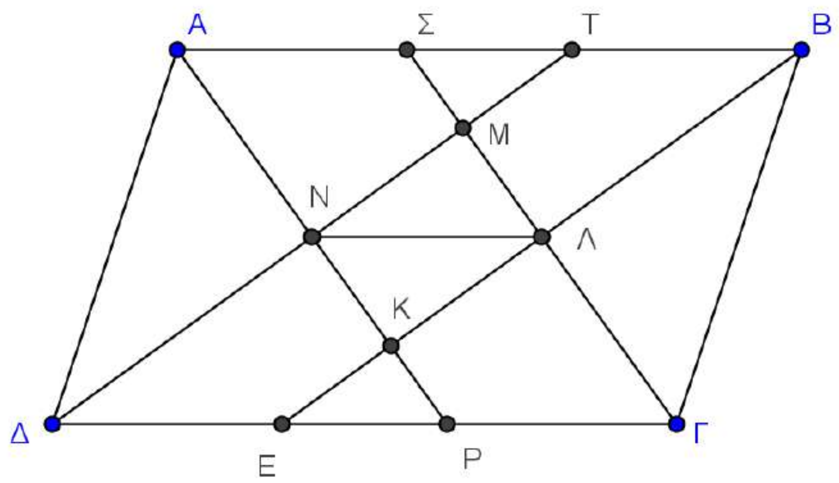
Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

γ) ΛΝ // ΑΒ (Μονάδες 5)

δ) ΛΝ = ΑΒ – ΑΔ (Μονάδες 5)



1891-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΔΤ και ΒΓΕ έχουν:

- $E\widehat{B}\Gamma = A\widehat{\Delta}T$, ως μισά των απέναντι γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ
- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ
- $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$, ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα ΑΔΤ και ΒΓΕ είναι ίσα, οπότε έχουν ΔΤ = ΒΕ (1) αφού οι πλευρές αυτές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$.

Επιπλέον, από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι ΑΤ = ΕΓ (2).

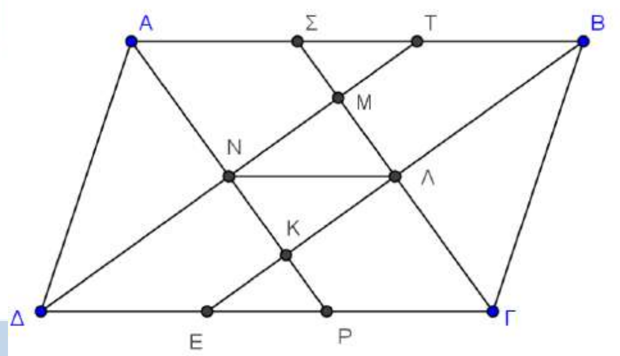
Επειδή ΑΒ = ΓΔ (ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο) ισχύει:

ΑΒ = ΓΔ $\Leftrightarrow$ ΑΤ + ΤΒ = ΔΕ + ΕΓ

η οποία λόγω της (2) γράφεται

ΤΒ = ΔΕ (3).

Από τις (1), (3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.



β) Όμοια δείχνουμε ότι το ΑΣΓΡ είναι παραλληλόγραμμο οπότε ΑΡ// ΣΓ και ΝΚ // ΜΛ. Επειδή το ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο, είναι ΜΝ // ΚΛ, οπότε και το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι $N\widehat{\Delta}E = \Sigma\widehat{T}M$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΓ που τέμνονται από την ΔΤ και

$N\widehat{\Delta}E = A\widehat{\Delta}N$, διότι η ΔΤ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$.

Άρα είναι $\Sigma\widehat{T}M = A\widehat{\Delta}N$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΤ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΤ.

Η ΑΝ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΔΤ, οπότε είναι ύψος και διάμεσός του, δηλαδή $\widehat{N} = 90^o$. Τελικά, επειδή το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ έχει μία γωνία ορθή, είναι ορθογώνιο.

γ) Το τρίγωνο ΑΔΤ είναι ισοσκελές (το αποδείξαμε στο β ερώτημα) οπότε ΑΔ = ΑΤ (4). Άρα η ΑΝ είναι και διάμεσος, οπότε το Ν είναι στο μέσο του ΔΤ. Όμοια προκύπτει ότι στο τρίγωνο ΓΒΕ το Λ είναι στο μέσο του ΒΕ. Από το παραλληλόγραμμο ΔΕΒΤ βρίσκουμε:

ΔΤ // = ΒΕ $\Leftrightarrow \frac{\Delta T}{2}$ // = $\frac{BE}{2} \Leftrightarrow$ ΔΝ // = ΕΛ

Άρα το ΔΝΛΕ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Συνεπώς είναι ΛΝ // ΔΕ οπότε και ΝΛ // ΑΒ.

δ) Είναι ΛΝ = ΒΤ = ΑΒ – ΑΤ και λόγω της (4) γίνεται

ΛΝ = ΑΒ – ΑΔ

1892

ΘΕΜΑ 4

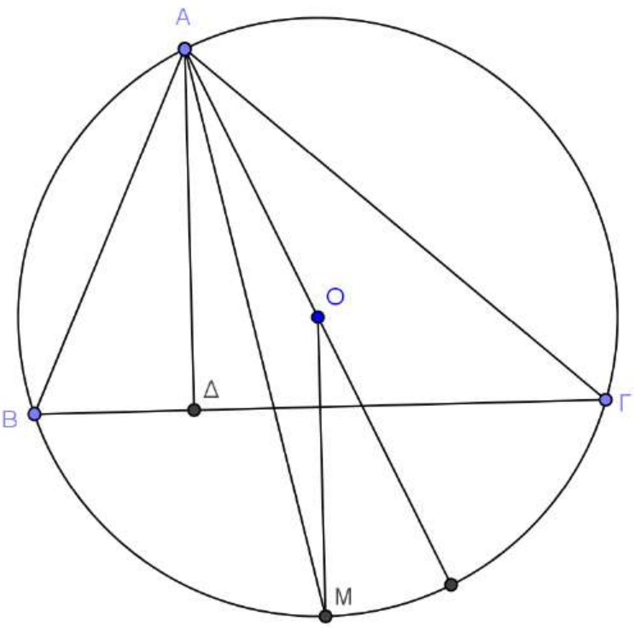
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο. Θεωρούμε το μέσο Μ του τόξου ΒΓ, το οποίο αντιστοιχεί σε κυρτή επίκεντρη γωνία και το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

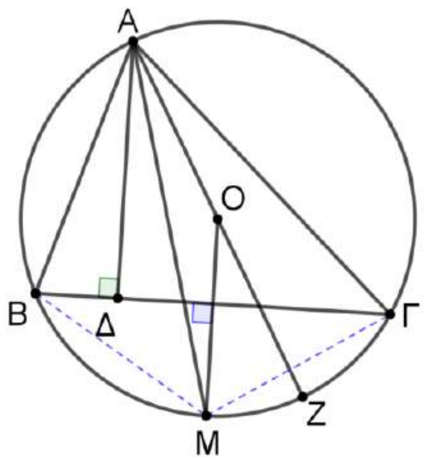
α) ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}O$. (Μονάδες 8)

β) $O\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B$ (Μονάδες 9)

γ) $\Delta\hat{A}O = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ (Μονάδες 8)



1892-Λύση



α) Επειδή το Μ είναι το μέσο του τόξου ΒΓ , τα τόξα ΒΜ και ΜΓ είναι ίσα, άρα το ίδιο ισχύει και για τις χορδές ΒΜ και ΜΓ.

Δηλαδή το Μ ισαπέχει από τα Β και Γ, άρα είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΒΓ. Το ίδιο ισχύει και για το Ο, εφόσον ΟΒ = ΟΓ ως ακτίνες του κύκλου. Οπότε η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ, άρα ΟΜ $\perp$ ΒΓ. Επίσης ΑΔ $\perp$ ΒΓ, άρα οι ΑΔ και ΟΜ είναι παράλληλες ως κάθετες στην ΒΓ.

Είναι $\Delta\hat{A}M$ = $A\hat{M}O$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΟΜ, ΑΔ, οι οποίες τέμνονται από την ΑΜ.

Επίσης οι ΟΑ και ΟΜ είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου, άρα ΟΑ = ΟΜ. Άρα το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΜ. Επομένως $M\hat{A}O$ = $A\hat{M}O$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $M\hat{A}O$ = $\Delta\hat{A}M$, άρα η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}O$.

β) Επειδή τα τόξα ΒΜ και ΜΓ είναι ίσα οι αντίστοιχες εγγεγραμμένες γωνίες ΒΑΜ και ΜΑΓ είναι ίσες. Από το ερώτημα (α) ισχύει $\Delta\hat{A}M$ = $M\hat{A}O$.

Οπότε $O\hat{A}\Gamma$ = $M\hat{A}\Gamma$ – $M\hat{A}O$ = $B\hat{A}M$ – $\Delta\hat{A}M$ = $\Delta\hat{A}B$.

γ) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο με $A\hat{\Delta}B$ ορθή. Άρα, από το άθροισμα γωνιών τριγώνου ΑΒΔ οι $B\hat{A}\Delta$ και $\hat{B}$ είναι συμπληρωματικές. Επομένως, $\Delta\hat{A}B + \hat{B} = 90^o$ (3).

Επίσης, το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο, άρα οι $\Gamma\hat{A}\Delta + \hat{\Gamma} = 90^o$.

Όμως $\Gamma\hat{A}\Delta = O\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{A}O$. Άρα $O\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{A}O + \hat{\Gamma} = 90^o$ (4).

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι $O\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{A}O + \hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B + \hat{B}$.

Όμως, όπως έχουμε αποδείξει στο β), $O\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B$, άρα $\Delta\hat{A}O + \hat{\Gamma} = \hat{B}$ ή $\Delta\hat{A}O = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

1894

ΘΕΜΑ 4

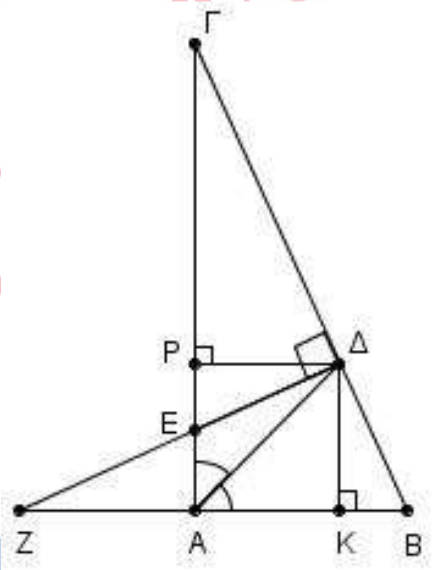
Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. ‘Εστω ΔΚ και ΔΡ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η κάθετη της ΒΓ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε και την προέκταση της πλευράς ΑΒ (προς το Β) στο σημείο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι:

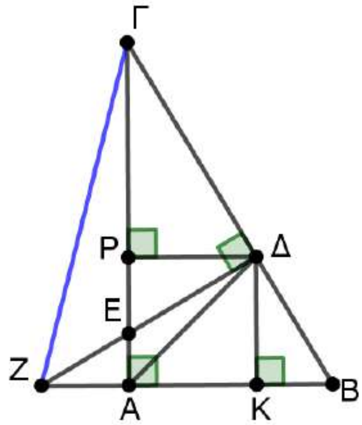
i. $\hat{B} = \Delta\hat{E}\Gamma$ (Μονάδες 8)

ii. ΔΕ=ΔΒ (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΔΓΖ (Μονάδες 9)



1894-Λύση



α) i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, από το άθροισμα γωνιών τριγώνου έχουμε $\widehat{B}$ + Α$\widehat{Γ}$Β = 90° ⇔ $\widehat{B}$ = 90° – Α$\widehat{Γ}$Β (1). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ έχουμε Δ$\widehat{Ε}$Γ + Ε$\widehat{Γ}$Δ = 90° ⇔ Δ$\widehat{Ε}$Γ + Α$\widehat{Γ}$Β = 90° ⇔ Δ$\widehat{Ε}$Γ = 90° – Α$\widehat{Γ}$Β (2).

Από (1), (2) βρίσκουμε ότι $\widehat{B}$ = Δ$\widehat{Ε}$Γ (είναι συμπληρωματικές της ίδιας γωνίας).

ii) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΚΒ και ΔΡΕ:

- Είναι ορθογώνια, καθώς οι ΔΚ και ΔΡ είναι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, από την υπόθεση.
- $\widehat{B}$ = Δ$\widehat{Ε}$Ρ από το προηγούμενο ερώτημα και
- ΔΚ = ΔΡ, διότι το Δ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας Β$\widehat{Α}$Γ και κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει από τις πλευρές της ΑΒ και ΑΓ.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν μία οξεία γωνία και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες, μία προς μία. Επομένως ΔΕ = ΔΒ, ως υποτείνουσές τους.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΕΓ και ΔΒΖ:

- Είναι ορθογώνια, γιατί ΔΕ ⊥ ΒΓ.
- Δ$\widehat{Ε}$Γ = $\widehat{B}$, λόγω του α)i. και
- ΔΕ = ΔΒ, λόγω του α)ii.

Άρα τα τρίγωνα ΔΕΓ και ΔΒΖ είναι ίσα, γιατί έχουν μία κάθετη πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα, μία προς μία ίσες. Άρα ΔΓ = ΔΖ, γιατί είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες Δ$\widehat{Ε}$Γ και $\widehat{B}$ στα ίσα τρίγωνα. Άρα, το τρίγωνο ΔΓΖ είναι ισοσκελές (με βάση ΓΖ) και ορθογώνιο με Γ$\widehat{Δ}$Ζ = 90°. Άρα Δ$\widehat{Γ}$Ζ = Δ$\widehat{Ζ}$Γ και από το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι Δ$\widehat{Γ}$Ζ + Δ$\widehat{Ζ}$Γ = 90°. Άρα Δ$\widehat{Ζ}$Γ = Δ$\widehat{Γ}$Ζ = 45°.

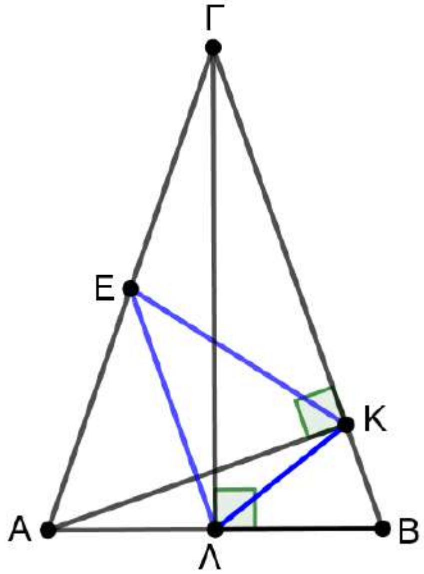
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΒ (ΑΓ=ΓΒ). Φέρουμε τα ύψη του ΑΚ και ΓΛ. Αν Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΚΕ. (Μονάδες 15)

1895-Λύση



α) Τα τρίγωνα ΑΚΓ και ΓΛΑ είναι ορθογώνια με υποτείνουσα την ΑΓ, γιατί τα ΑΚ και ΓΛ είναι ύψη του τριγώνου ΑΒΓ. Επίσης, το Ε είναι μέσο της ΑΓ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ η ΚΕ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα άρα ΚΕ = $\frac{ΑΓ}{2}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΛΑ η ΛΕ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα άρα ΛΕ = $\frac{ΑΓ}{2}$.

Επομένως ΚΕ = ΛΕ οπότε το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές με βάση την ΚΛ.

β) Επειδή το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι $Ε\hat{Λ}Κ = Ε\hat{Κ}Λ$ (1).

Επίσης, το Λ είναι μέσο της ΑΒ, εφόσον το ΓΛ είναι ύψος της βάσης του ισοσκελούς ΑΒΓ, άρα και διάμεσος. Άρα, στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΕΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών του ΑΓ και ΑΒ, οπότε ΛΕ // ΓΒ. Τότε $Ε\hat{Λ}Κ = Λ\hat{Κ}Β$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΛ και ΒΓ που τέμνονται από την ΚΛ.

Από (1), (2) συμπεραίνουμε ότι $Ε\hat{Κ}Λ = Λ\hat{Κ}Β$.

Επομένως η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Κ}Ε$.

1896

ΘΕΜΑ 4

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) έχουμε ότι $\hat{B} = 30^0$. Φέρουμε το ύψος ΑΗ και τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ. Από την κορυφή Β φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο ΑΜ, η οποία την τέμνει στο σημείο Ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

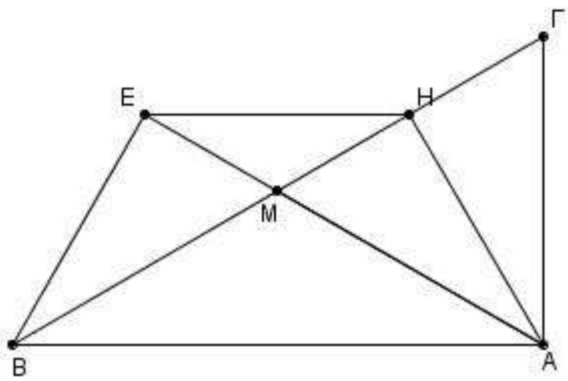
Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \frac{AB}{2}$, (Μονάδες 7)

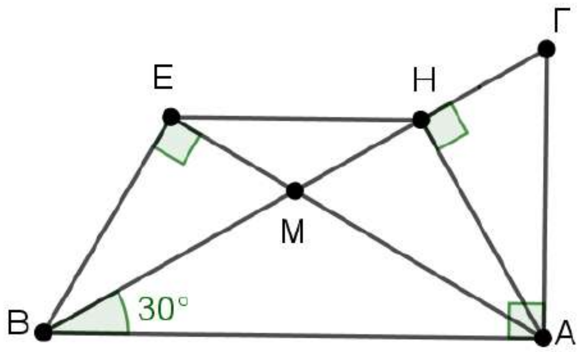
β) ΑΗ=ΒΕ, (Μονάδες 7)

γ) το τετράπλευρο ΑΗΕΒ είναι εγγράψιμο, (Μονάδες 6)

δ) ΕΗ//ΑΒ. (Μονάδες 5)



1896-Λύση



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα ΑΜ = ΜΒ = ΜΓ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

Οπότε το τρίγωνο ΜΒΑ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ και $Μ\widehat{Α}Β = Μ\widehat{Β}Α = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΑΒ είναι $Ε\widehat{Α}Β = 30^o$, άρα ΒΕ = $\frac{ΑΒ}{2}$ (1).

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΗΑ είναι $Η\widehat{Β}Α = 30^o$, άρα ΑΗ = $\frac{ΑΒ}{2}$ (2). Τότε από (1), (2) προκύπτει ΑΗ = ΒΕ.

γ) Επειδή $Β\widehat{Ε}Α = Β\widehat{Η}Α = 90^o$, στο τετράπλευρο ΑΗΕΒ η πλευρά του ΑΒ φαίνεται από τις κορυφές Ε και Η υπό ίσες γωνίες, άρα το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.

δ) Στο τετράπλευρο ΑΗΕΒ, εφόσον είναι εγγράψιμο, η πλευρά του ΑΗ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες, δηλαδή ισχύει $Α\widehat{Ε}Η = Η\widehat{Β}Α$.

Όμως $Η\widehat{Β}Α = 30^o$, άρα $Α\widehat{Ε}Η = 30^o = Ε\widehat{Α}Β$.

Άρα οι ευθείες ΕΗ και ΑΒ που τέμνονται από την ΑΕ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $Α\widehat{Ε}Η$ και $Ε\widehat{Α}Β$ ίσες. Επομένως ΕΗ // ΑΒ.

1898

ΘΕΜΑ 4

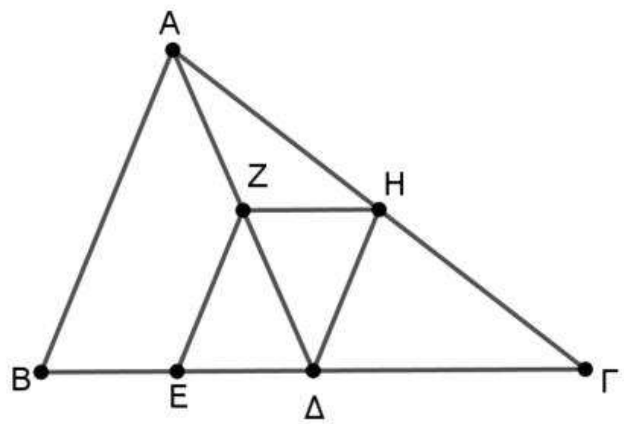
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Έστω Ε, Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο (η γωνία Β ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ. (Μονάδες 5)

1898-Λύση



α) Το ΕΖ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα ΕΖ // ΑΒ και ΕΖ = $\frac{AB}{2}$ (1).

Το ΔΗ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα ΔΗ // ΑΒ και ΔΗ = $\frac{AB}{2}$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΕΖ // ΔΗ και ΕΖ = ΔΗ οπότε το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο αφού δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

β) Είναι ΖΗ, ΕΔ απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ, οπότε ΖΗ = ΕΔ = $\frac{B\Delta}{2}$.

Όμως ΒΔ = $\frac{B\Gamma}{2}$, άρα ΖΗ = ΕΔ = $\frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$ (3).

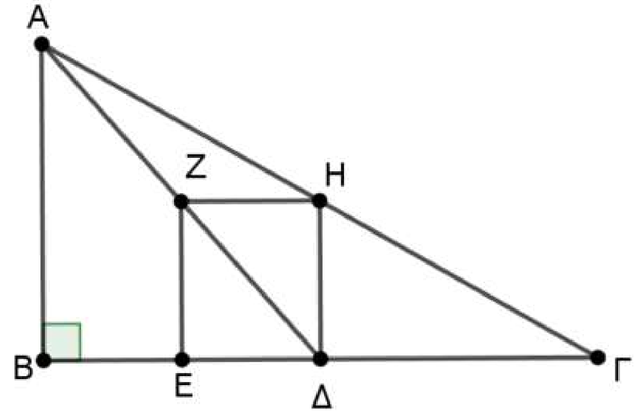
Το ΖΕ ενώνει τα μέσα στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα (ΖΕ // ΑΒ και) ΖΕ = $\frac{AB}{2}$ (4).

Εφόσον το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο, για να είναι ρόμβος αρκεί να έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. Από τη σχέση ΖΕ = ΖΗ και από τις (3) και (4) προκύπτει ότι $\frac{AB}{2} = \frac{B\Gamma}{4} \Leftrightarrow$ ΒΓ = 2ΑΒ.

γ) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με τη γωνία $\widehat{B} = 90^o$, τότε:

Εφόσον ΔΗ // ΑΒ και ΒΓ ⊥ ΑΒ, άρα και ΒΓ ⊥ ΔΗ

Επομένως $H\widehat{\Delta}E = 90^o$, οπότε το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ θα έχει μια ορθή γωνία και θα είναι ορθογώνιο.



11882

Θέμα 3

Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ και ΔΖΗ είναι ορθογώνια με ορθές γωνίες $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ}$, $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Δ}$ και $\text{Δ}\hat{\text{Ζ}}\text{Η}$, αντίστοιχα. Επίσης ΑΓ = ΑΔ και ΒΓ = ΔΖ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ και ΔΕ είναι ίσα.

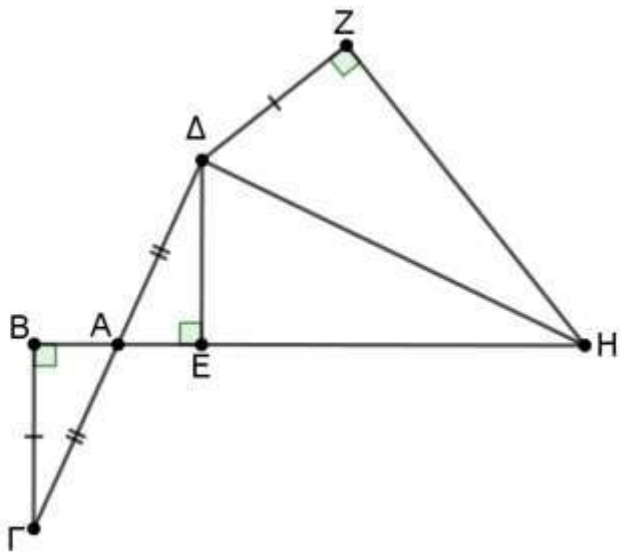
Μονάδες 10

β) Η ΔΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $\text{Ε}\hat{\text{Η}}\text{Ζ}$.

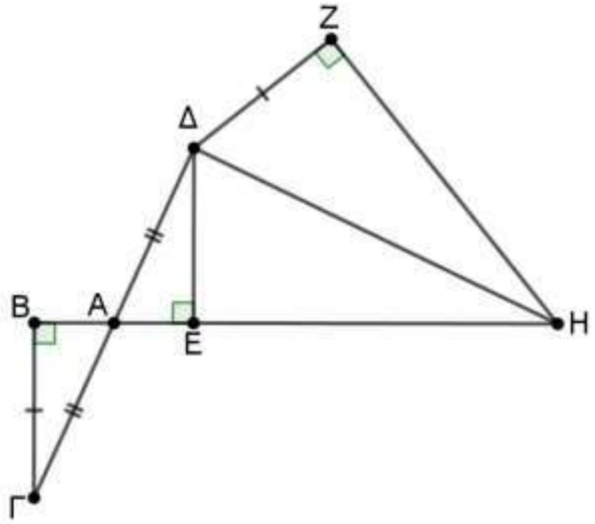
Μονάδες 6

γ) Αν, επιπλέον, οι ΑΔ και ΔΗ είναι κάθετες, τότε $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ε} = \dfrac{\text{Ε}\hat{\text{Η}}\text{Ζ}}{2}$.

Μονάδες 9



11882-Λύση



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ.

Είναι ορθογώνια με $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma$ και $\Delta\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{A}$ ορθές,

ΑΓ = ΑΔ ίσες από υπόθεση,

$\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = \Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$ ως κατακορυφήν.

Άρα, τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ είναι ίσα γιατί έχουν ίσες τις υποτείνουσές τους και δύο οξείες γωνίες. Επομένως, ΒΓ = ΔΕ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$ και $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$ των ίσων τριγώνων.

β) Άρα, λόγω της υπόθεσης ΒΓ = ΔΖ, θα είναι και ΔΕ = ΔΖ. Επομένως το Δ έχει ίσες αποστάσεις από τις πλευρές της γωνίας $\mathrm{E}\widehat{\mathrm{H}}\mathrm{Z}$, ΖΗ και ΗΕ, άρα θα είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\mathrm{E}\widehat{\mathrm{H}}\mathrm{Z}$. Δηλαδή η ΔΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{E}\widehat{\mathrm{H}}\mathrm{Z}$.

γ) Οι $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{E}$ και $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$ είναι συμπληρωματικές, ως οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΕΔ.

Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΗ, οι γωνίες $\Delta\widehat{\mathrm{H}}\mathrm{E}$ και $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$ είναι συμπληρωματικές.

Άρα, $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{E} = \Delta\widehat{\mathrm{H}}\mathrm{E}$, ως συμπληρωματικές της $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$.

Όμως, από το β΄ η ΔΗ είναι διχοτόμος της $\mathrm{E}\widehat{\mathrm{H}}\mathrm{Z}$, άρα $\Delta\widehat{\mathrm{H}}\mathrm{E} = \frac{\mathrm{E}\widehat{\mathrm{H}}\mathrm{Z}}{2}$. Συνεπώς, $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{E} = \frac{\mathrm{E}\widehat{\mathrm{H}}\mathrm{Z}}{2}$.

11892

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμία από αυτές το γράμμα Σ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή το γράμμα Λ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και κάποια γωνία ίση, τότε είναι ίσα.

ii. Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

iii. Κάθε τετράγωνο είναι και ρόμβος.

iv. Κάθε επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης που βαίνει στο ίδιο τόξο.

v. Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου η απόσταση από το μέσο κάθε πλευράς είναι τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

(Μονάδες 10)

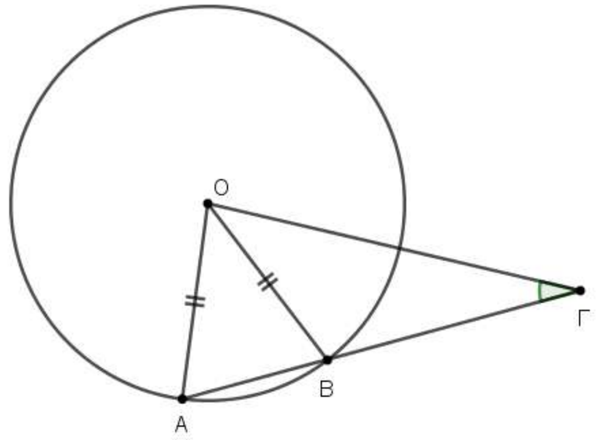
β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

(Μονάδες 15)

11892-Λύση

α)

i. Λάθος.



Τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΟΑΓ έχουν ΟΑ = ΟΒ, γιατί είναι ακτίνες του κύκλου, ΟΓ κοινή, και $\hat{\Gamma}$ κοινή. Όμως δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είναι ίσα, γιατί η $\hat{\Gamma}$ δεν είναι περιεχόμενη γωνία στις ίσες πλευρές. Μάλιστα τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΟΑΓ δεν είναι ίσα αφού ΑΓ>ΒΓ.

ii. Σωστό.

iii. Σωστό.

iv. Σωστό.

v. Λάθος. Η απόσταση του βαρύκεντρου από το μέσο της πλευράς είναι το $\frac{1}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

β) Σελίδα 88 σχολικού βιβλίου, παρ. 4.6.

11895

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.

ii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

iii. Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται.

iv. Η διάμεσος ενός τραπεζίου ισούται με το άθροισμα των δύο βάσεων του τραπεζίου.

v. Αν γνωρίζουμε ότι δύο κύκλοι που έχουν ακτίνες R και ρ με $R > \rho$, εφάπτονται, τότε συμπεραίνουμε ότι η απόσταση των κέντρων τους είναι $R + \rho$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα, ότι κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

(Μονάδες 15)

11895-Λύση

α)

i. Σ, Παράγραφος 4.6.

ii. Σ, Παράγραφος 6.2.

iii. Σ, Παράγραφος 5.2.

iv. Λ, Παράγραφος 5.10. Η διάμεσος ενός τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των δύο βάσεων του τραπεζίου.

iv. Λ, Παράγραφος 3.16. Αν εφάπτονται εσωτερικά η απόσταση των κέντρων είναι $\mathrm{R}-\rho$

β) Παράγραφος 3.6. ΘΕΩΡΗΜΑ IV (σελ 51).

11897

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΑΜ. Στην προέκταση της ΑΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα ΓΔ = ΑΓ. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΜ που τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΓ = ΓΕ. (Μονάδες 9)

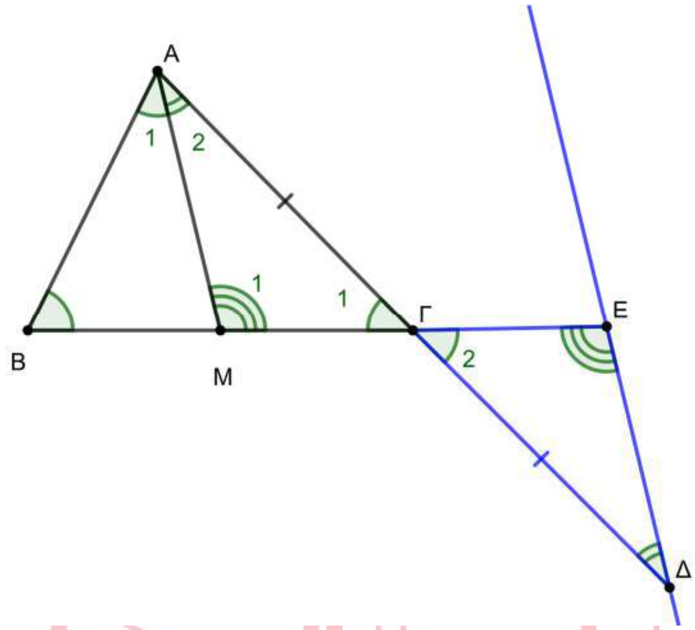
β) Το τετράπλευρο ΑΜΔΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

γ) $\widehat{\mathrm{B}}+\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{M}=\Gamma\widehat{\mathrm{E}}\Delta$. (Μονάδες 9)

11897-Λύση

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος ΑΜ. Προεκτείνουμε την ΑΓ κατά ΓΔ = ΑΓ.

Φέρουμε από το Δ παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ε.



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΔΕΓ. Αυτά έχουν:

ΑΓ = ΓΔ, από υπόθεση,

$\widehat{\Gamma}_1=\widehat{\Gamma}_2$, ως κατακορυφήν,

$\widehat{A}_2=\widehat{\Delta}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΜ και ΔΕ που τέμνονται από την ΑΔ.

Είναι ίσα, επειδή έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες αντίστοιχα ίσες. Έτσι ΜΓ = ΓΕ γιατί είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}_2$ και $\widehat{\Delta}$.

β) Αφού ΑΓ = ΓΔ και ΜΓ = ΓΕ, το τετράπλευρο ΑΜΔΕ είναι παραλληλόγραμμο επειδή οι διαγώνιοι του διχοτομούνται στο Γ.

γ) Στο τρίγωνο ΑΜΒ, η εξωτερική γωνία $\widehat{M}_1=\widehat{B}+B\widehat{A}M$. (2)

$\widehat{M}_1 = \Gamma\widehat{E}\Delta$ (3) επειδή είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΜ και ΔΕ που τέμνονται από την ΜΕ.

Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει ότι $\Gamma\widehat{E}\Delta=\widehat{B}+B\widehat{A}M$.

11898

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

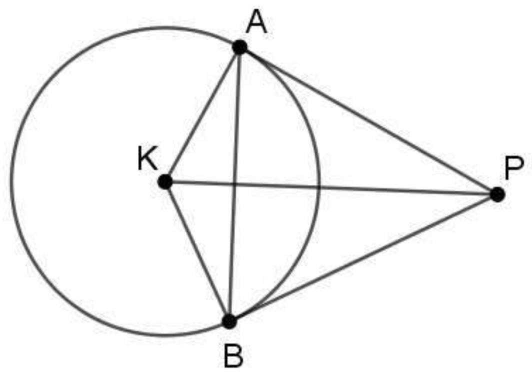
i. Οι μεσοκάθετες των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, που είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

ii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

iii. Σε κάθε τρίγωνο βαρύκεντρο ονομάζεται το σημείο τομής των διχοτόμων του.

iv. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που άγεται από οποιαδήποτε κορυφή είναι διχοτόμος της αντίστοιχης γωνίας και διάμεσος της απέναντι πλευράς.

v. Αν στο παρακάτω σχήμα η PK είναι η διακεντρική ευθεία του σημείου P, τότε η ίδια ευθεία είναι μεσοκάθετος της χορδής AB.



(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία ισούται με 30^o, τότε η απέναντι πλευρά της είναι το μισό της υποτείνουσας.

(Μονάδες 15)

11898-Λύση

α)

i. Σ, Παράγραφος 4.5.

ii. Σ, Παράγραφος 6.2.

iii. Λ, Παράγραφος 5.7. Βαρύκεντρο (ή κέντρο βάρους) λέγεται το σημείο τομής των διαμέσων κάθε τριγώνου.

iv. Λ, Παράγραφος 3.6. Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

iv. Σ, Παράγραφος 3.15.

β) Παράγραφος 5.9. Πόρισμα (μόνο το ευθύ).

11964

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι παραπληρωματικές.

ii. Υπάρχουν σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος που δεν ισαπέχουν από τα άκρα του.

iii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

iv. Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

v. Κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία βάση είναι ίσες. (Μονάδες 15)

11964-Λύση

α) i→ Λάθος , παράγραφος 4.6

ii→ Λάθος , παράγραφος 3.2

iii→ Σωστό , παράγραφος 6.2

iv→ Σωστό , παράγραφος 3.10

v→ Σωστό , παράγραφος 5.5

β) Σχολικό σελίδα 118, παράγραφος 5.11

12066

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ii. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου.

iii. Αν δύο διαφορετικές ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες προς μια τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

iv. Αν ένα τετράπλευρο έχει όλες τις γωνίες του ίσες, τότε είναι τετράγωνο.

v. Αν σε ένα τετράπλευρο δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

(Μονάδες 10)

β) Από ένα σημείο Α εκτός ευθείας ε φέρουμε το κάθετο τμήμα ΑΚ προς την ε και τα πλάγια τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Να αποδείξετε ότι, αν τα πλάγια τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους Β και Γ ισαπέχουν από το ίχνος Κ της καθέτου.

(Μονάδες 15)

12066-Λύση

α)

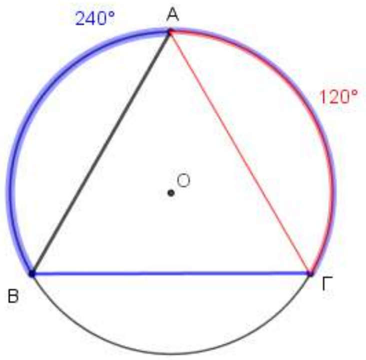
i. Λ

§ 3.4

Γιατί δεν αναφέρεται αν τα τόξα είναι και τα δύο μικρότερα ή μεγαλύτερα του ημικυκλίου.

Μπορούμε να δώσουμε ως αντιπαράδειγμα το εξής.

Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Οι ίσες πλευρές του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ είναι και ίσες χορδές του κύκλου. Στην χορδή ΑΓ το τόξο το μικρότερο του ημικυκλίου έχει μέτρο 120°, ενώ στην χορδή ΒΓ το τόξο το μεγαλύτερο του ημικυκλίου έχει μέτρο 240°. Είναι προφανές ότι, ενώ οι χορδές ΑΓ και ΒΓ είναι ίσες τα τόξα ΑΓ και ΒΑΓ δεν είναι ίσα.



ii. Λ

§ 3.10

Γιατί κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις <u>απέναντι</u> εσωτερικές γωνίες. Για παράδειγμα, η εξωτερική γωνία της ορθής γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου, είναι ίση με την εσωτερική της, δηλαδή την ορθή και όχι μεγαλύτερη.

iii. Σ

§ 4.2

iv. Λ

§ 5.5

Γιατί τότε είναι ορθογώνιο. Χρειάζεται επιπλέον να είναι και ρόμβος ώστε τελικά να είναι τετράγωνο.

v. Σ

§ 6.6

β) § 3.13

Θεώρημα Ι σχ. βιβλίο σελ. 65 (μόνο το ευθύ)

12068

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}$=90°) και Μ το μέσο της υποτείνουσας του ΒΓ. Από το Μ φέρουμε ΜΔ⊥ΑΒ και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΔΖ.

α) Να αποδείξετε ότι:

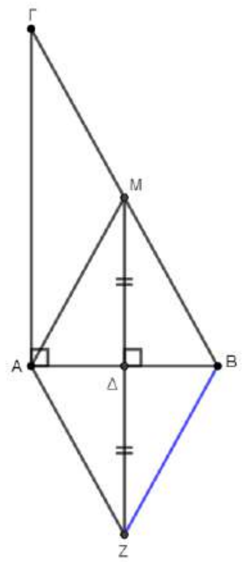
i. Το τρίγωνο ΜΒΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

ii. Το τετράπλευρο ΑΜΒΖ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

β) Αν το αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, τι είδους τετράπλευρο είναι το ΑΜΒΖ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

12068-Λύση

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}$=90°) και Μ το μέσο της υποτείνουσάς του ΒΓ. Φέρουμε ΜΔ⊥ΑΒ και έστω ΔΖ=ΜΔ.

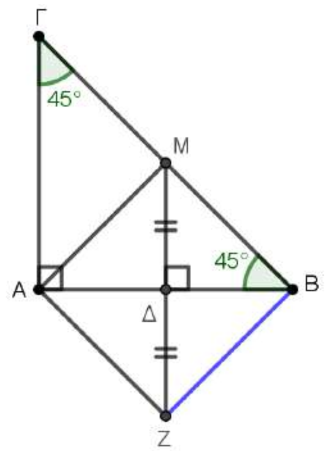


α)

i. Στο τρίγωνο ΜΒΖ επειδή ΜΔ=ΔΖ το τμήμα ΒΔ είναι διάμεσος της πλευράς ΜΖ και επιπλέον ΜΖ⊥ΑΒ από υπόθεση, άρα το τμήμα ΒΔ είναι και ύψος του. Επομένως το τρίγωνο ΜΒΖ είναι ισοσκελές.

ii. ΜΔ⊥ΑΒ (1) από υπόθεση και ΑΓ⊥ΑΒ αφού $\widehat{A}$=90°, άρα ΜΔ//ΑΓ ως κάθετες στο ίδιο τμήμα ΑΒ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ από το μέσο Μ της ΒΓ έχουμε ΜΔ//ΑΓ, άρα το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ. Στο τετράπλευρο ΑΜΒΖ οι διαγώνιές του διχοτομούνται αφού ισχύει επιπλέον ότι το Δ είναι μέσο και του τμήματος ΜΖ από κατασκευή. Άρα το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο και επειδή οι διαγώνιές του ΜΖ και ΑΒ είναι και κάθετες, τελικά το ΑΜΒΖ είναι ρόμβος.

β)



12068-Λύση

Αν το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές, τότε $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}=45^\circ$ (άθροισμα ίσων οξειών γωνιών ορθογωνίου τριγώνου). Στο ρόμβο ΑΜΒΖ γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του, άρα οι γωνίες $A\widehat{B}M=A\widehat{B}Z=45^\circ$. Οπότε $M\widehat{B}Z=90^\circ$ και ο ρόμβος ΑΜΒΖ έχει μία ορθή γωνία οπότε είναι και ορθογώνιο, άρα τελικά το ΑΜΒΖ είναι τετράγωνο.

12070

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Από κάθε σημείο Ρ που είναι εξωτερικό ενός κύκλου διέρχεται μόνο μία εφαπτόμενη ευθεία προς τον κύκλο.

ii. Σε όλα τα κυρτά πολύγωνα το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών τους είναι 4 ορθές.

iii. Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος.

iv. Σε κάθε τραπέζιο οι διαγώνιές του είναι ίσες.

v. Δύο εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα του ίδιου κύκλου, είναι ίσες.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου ανά δύο είναι ίσες.

(Μονάδες 15)

12070-Λύση

α)

i. Λ

(Από το σημείο Ρ που είναι εξωτερικό ενός κύκλου υπάρχουν δυο εφαπτόμενες προς τον κύκλο).

ii. Σ (θεωρία § 4.8)

iii. Σ (θεωρία § 5.5)

iv. Λ (η ιδιότητα αυτή ισχύει μόνο στα ισοσκελή τραπέζια και όχι σε κάθε τραπέζιο).

v. Σ (θεωρία § 6.2)

β) Απόδειξη κριτηρίου i) σχολικό βιβλίο σελίδα 103, § 5.2

12106

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες.

ii. Από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται άπειρες κάθετες στην ευθεία.

iii. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.

iv. Κάθε τετράπλευρο με ίσες διαγωνίους είναι ορθογώνιο.

v. Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη του κύκλου στο άκρο της χορδής ισούται με την επίκεντρη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.

(Μονάδες 15)

12106-Λύση

α) i. Σωστό (σελ. 60)

ii. Λάθος γιατί από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος.

iii. Σωστό (σελ. 89)

iv. Λάθος γιατί μπορούμε να σχεδιάσουμε τετράπλευρο με ίσες διαγωνίους οι οποίες δεν διχοτομούνται.

v. Λάθος γιατί η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής και η εγγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης.

β) σελ. 107

12165

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\widehat{A} = 120°$ και η διχοτόμος της γωνίας Δ που τέμνει την ΑΒ στο μέσο της Ε.

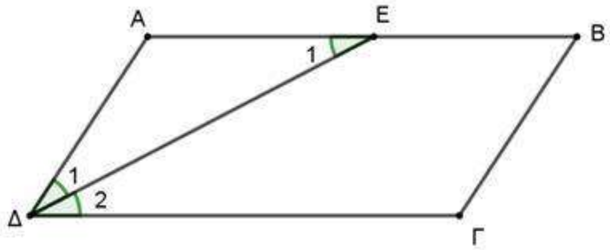
α) Να αποδείξετε ότι ΑΒ = 2ΑΔ. (Μονάδες 6)

β) Αν το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από το σημείο Ε στην ΓΔ την τέμνει στο Η, τότε να αποδείξετε ότι $\frac{ΔΕ}{ΗΕ} = 2$. (Μονάδες 7)

γ) Αν Μ το μέσο της ΓΔ, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΑΔ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι $Δ\widehat{A}Γ = 90°$. (Μονάδες 6)



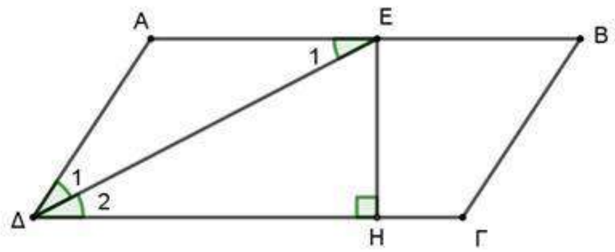
12165-Λύση

α) Επειδή η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ έχουμε ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$.

Όμως $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΕ, οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$. Άρα το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές οπότε ΑΔ = ΑΕ.

Επειδή το Ε είναι μέσο του ΑΒ έχουμε ΑΒ = 2ΑΕ = 2ΑΔ.

β)

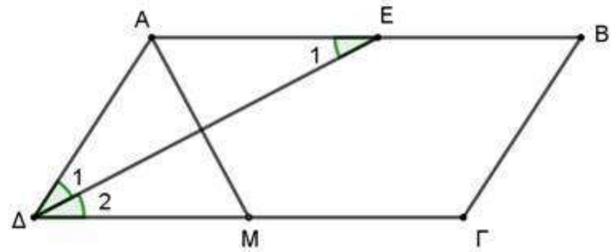


Οι γωνίες Α και Δ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ, οπότε είναι παραπληρωματικές δηλαδή $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180°$ και επειδή $\hat{A} = 120°$ έχουμε $\hat{\Delta} = 60°$.

Επειδή η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ προκύπτει $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$= 30°.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΗ έχουμε $\hat{\Delta}_2$= 30°, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ΕΗ είναι το μισό της υποτείνουσας ΔΕ, δηλαδή γωνία ΕΗ = $\frac{\Delta E}{2} \Rightarrow \frac{\Delta E}{EH} = 2$

γ)

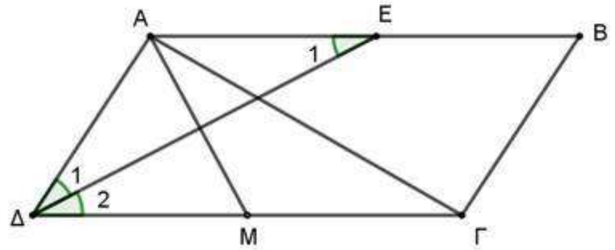


Από το ερώτημα (α) έχουμε ΑΒ = 2 ΑΔ και ΑΒ = ΔΓ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, οπότε ΔΓ = 2 ΑΔ (1). Επειδή το Μ είναι μέσο του ΔΓ, έχουμε ΔΓ = 2 ΔΜ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ΑΔ = ΔΜ.

Άρα το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές και επειδή η γωνία Δ είναι 60° το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

12165-Λύση

δ)



Επειδή το τρίγωνο ΜΑΔ είναι ισόπλευρο έχουμε ΑΜ = ΜΔ = $\frac{\Delta\Gamma}{2}$.

Στο τρίγωνο ΔΑΓ η ΑΜ είναι διάμεσος και ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΔΓ, οπότε η $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = 90°$.

12200

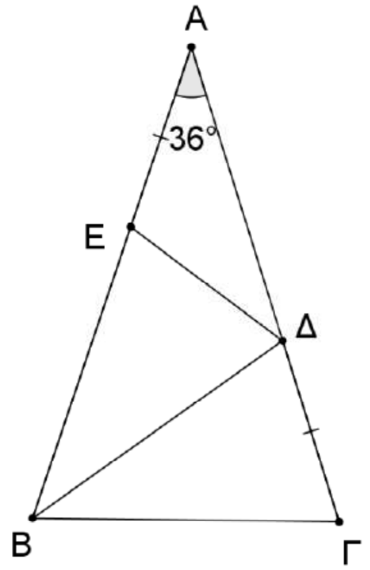
ΘΕΜΑ 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και $\widehat{A} = 36^o$. Έστω ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$ και Ε σημείο της πλευράς ΑΒ ώστε $AE = \Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = B\Delta$. (Μονάδες 8)

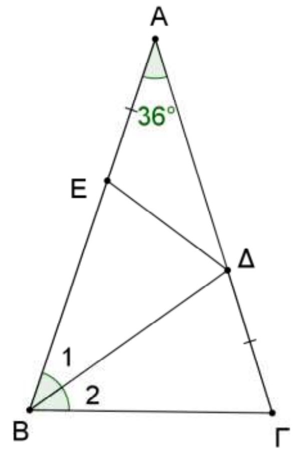
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

γ) Η παράλληλη από το Β προς την ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



12200-Λύση

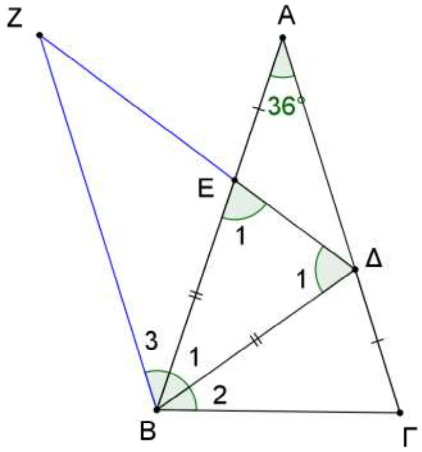
α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (1). Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, το δεδομένο $\widehat{A} = 36^o$ και τη σχέση (1) προκύπτει ότι $36^o + \hat{B} + \hat{B} = 180^o$ $\Leftrightarrow 2\hat{B} = 144^o \Leftrightarrow \hat{B} = 72^o$.



Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, άρα $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{72^o}{2} = 36^o$ (2). Από το δεδομένο $\widehat{A} = 36^o$ και τη σχέση (2) είναι $\widehat{A} = \hat{B}_1$, άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές γιατί έχει δύο ίσες γωνίες. Οπότε, απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}$, $\hat{B}_1$ βρίσκονται ίσες πλευρές αντίστοιχα, δηλαδή $B\Delta = A\Delta$ (3).

β) Από τα δεδομένα έχουμε $AB = A\Gamma$ και $AE = \Gamma\Delta$. Με αφαίρεση κατά μέλη είναι $AB - AE = A\Gamma - \Gamma\Delta$, δηλαδή $BE = A\Delta$ (4). Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι $B\Delta = BE$, άρα το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

γ) Έστω ΒΖ η παράλληλη στην ΑΓ που τέμνει την προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) στο Ζ.



12200-Λύση

Από το β) ερώτημα έχουμε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές ΒΔ και ΒΕ, οπότε οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ΔΕ του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ (5). Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΔΕ έχουμε ότι $\hat{B}_1 + \hat{\Delta}_1 + \hat{E}_1 = 180^o$ και επειδή είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ και από τη σχέση (4) θα έχουμε ότι

$36^o + \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_1 = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 144^o \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = 72^o$ (6).

Αφού ΒΖ, ΑΓ είναι παράλληλες με τέμνουσα την ΑΒ, τότε είναι $\hat{B}_3 = \hat{A}$ ως εντός εναλλάξ γωνίες. Αφού είναι $\hat{A} = 36^o$ από δεδομένα και $\hat{B}_3 = \hat{A}$ θα είναι $\hat{B}_3 = 36^o$. Είναι $\Delta\hat{B}Z = \hat{B}_1 + \hat{B}_3 = 36^o + 36^o = 72^o$ (7), όπου $\hat{B}_1 = 36^o$ από την (2).
Από τις σχέσεις (6) και (7) θα είναι $\hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{B}Z$, άρα το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές γιατί έχει δύο γωνίες ίσες.

12419

ΘΕΜΑ 4

Δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r), με R>r, τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από το σημείο Α φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διάκεντρο των κύκλων, η οποία τέμνει τους κύκλους (Κ, R) και (Λ, r) στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) ΓΔ=2ΚΛ

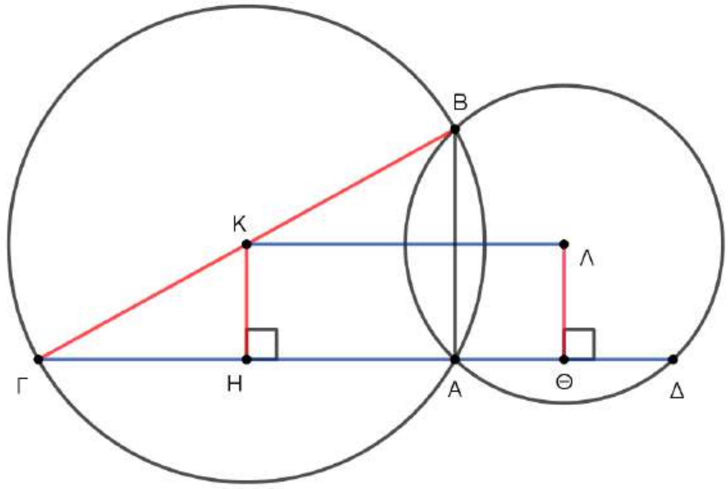
(Μονάδες 15)

β) Τα σημεία Β και Γ είναι αντιδιαμετρικά.

(Μονάδες 10)

12419-Λύση

α) Έστω οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r), με R>r, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α, Β και η τέμνουσα ΓΑΔ παράλληλη στη διάκεντρο ΚΛ.



Φέρουμε τα αποστήματα ΚΗ και ΛΘ των χορδών ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Το τετράπλευρο ΚΛΘΗ είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες (ΚΛ//ΗΘ από υπόθεση και ΚΗ//ΛΘ αφού ΚΗ, ΛΘ είναι κάθετα στη ΓΔ). Οπότε ΚΛ=ΗΘ.

Επίσης, τα σημεία Η, Θ είναι μέσα των χορδών ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Οπότε έχουμε:

ΓΔ=ΓΑ+ΑΔ=2ΗΑ+2ΑΘ=2(ΗΑ+ΑΘ)=2ΗΘ=2ΚΛ

β) Η διάκεντρος ΚΛ των δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους ΑΒ, οπότε ΑΒ⊥ΚΛ. Επίσης, ΚΛ//ΓΔ. Άρα, ΑΒ⊥ΓΔ. Επομένως, η γωνία $B\hat{A}Γ$ είναι ορθή και εγγεγραμμένη στον κύκλο (Κ, R), οπότε η ΒΓ είναι διάμετρος. Συνεπώς, τα σημεία Β και Γ είναι αντιδιαμετρικά.

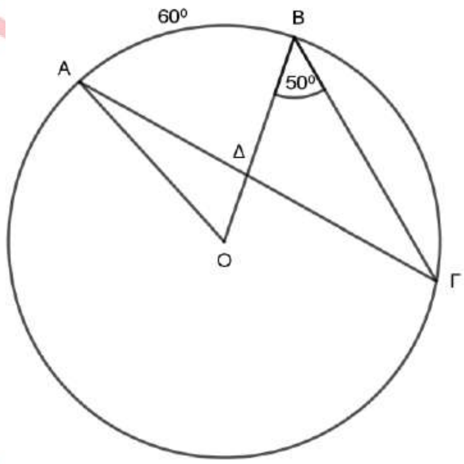
12638

Θέμα 2

Στον κύκλο του σχήματος, το Ο είναι το κέντρο του, το τόξο ΑΒ ισούται με 60^0 και η γωνία Β ισούται με 50^0. Αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:

α) πόσες μοίρες είναι η γωνία Γ. (Μονάδες 10)

β) πόσες μοίρες είναι η γωνία ΑΔΟ (Μονάδες 15)



12638-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η γωνία Γ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, που βαίνει στο τόξο ΑΒ άρα

$\hat{\Gamma} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \dfrac{60^0}{2} = 30^0$.

β) Στο τρίγωνο ΒΓΔ είναι: $\hat{B} + \hat{\Gamma} + B\hat{\Delta}\Gamma = 180^0$ ή $50^0 + 30^0 + B\hat{\Delta}\Gamma = 180^0$

οπότε η $B\hat{\Delta}\Gamma = 100^0$, επομένως η $A\hat{\Delta}O = 100^0$ ως κατά κορυφήν της.

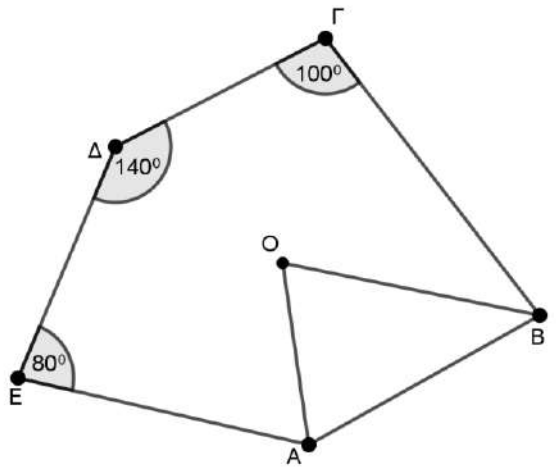
12640

Θέμα 2

Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του Γ ισούται με 100^0, η γωνία του Δ ισούται με 140^0 και η γωνία του Ε ισούται με 80^0 τότε, να υπολογίσετε:

α) το μέτρο του αθροίσματος $\widehat{A} + \widehat{B}$. (Μονάδες 12)

β) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ. (Μονάδες 13)



12640-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με ν πλευρές είναι 2·ν-4 ορθές.

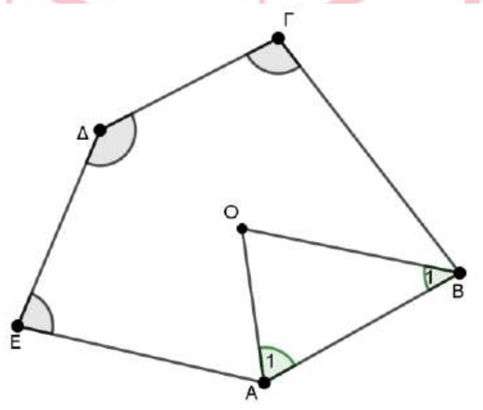
Έτσι για το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ το άθροισμα των γωνιών του είναι:

$2 \cdot 5 - 4 = 10 - 4 = 6$ ορθές ή $6 \cdot 90^0 = 540^0$.

Δηλαδή έχουμε: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} + \widehat{E} = 540^0$ η οποία λόγω των δεδομένων γράφεται:

$\widehat{A} + \widehat{B} + 100^0 + 140^0 + 80^0 = 540^0$ οπότε $\widehat{A} + \widehat{B} = 220^0$.

β)



Στο τρίγωνο ΑΟΒ είναι: $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{O} = 180^0$ (1).

Όμως ΑΟ και ΒΟ είναι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β αντίστοιχα, άρα:

$\widehat{A}_1 = \frac{\widehat{A}}{2}$ και $\widehat{B}_1 = \frac{\widehat{B}}{2}$. Έτσι $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$ η οποία λόγω του (α) ερωτήματος

δίνει: $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = \frac{220^0}{2} = 110^0$ οπότε από την (1) παίρνουμε:

$110^0 + \widehat{O} = 180^0$, επομένως $\widehat{O} = 70^0$, δηλαδή $A\widehat{O}B = 70^0$.

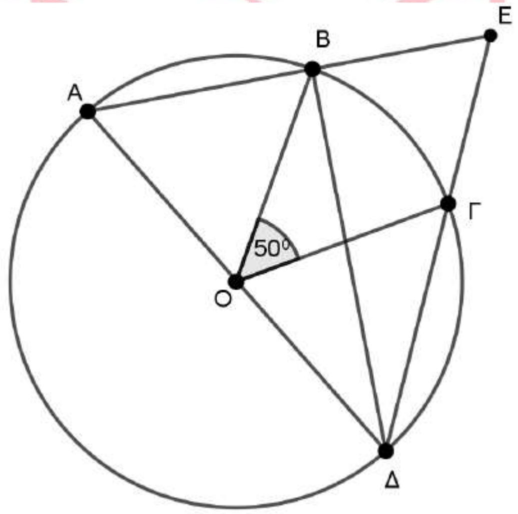
12642

Θέμα 2

Σε κύκλο με κέντρο το Ο, παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, ώστε η ΑΔ να είναι διάμετρος και η γωνία ΒΟΓ να ισούται με 50^0. Αν η προέκταση της ΑΒ προς το Β, τέμνει την προέκταση της ΔΓ προς το Γ στο Ε, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της γωνίας ΒΔΓ. (Μονάδες 10)

β) το μέτρο της γωνία ΑΕΔ. (Μονάδες 15)



12642-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η γωνία ΒΔΓ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και βαίνει στο τόξο ΒΓ, οπότε θα ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης. Άρα $\text{Β}\widehat{\Delta}\Gamma = \dfrac{\text{Β}\widehat{\text{Ο}}\Gamma}{2} = \dfrac{50^0}{2} = 25^0$.

β) Επειδή η ΑΔ είναι διάμετρος, η γωνία ΑΒΔ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, θα είναι ορθή. Άρα $\text{Α}\widehat{\text{Β}}\Delta = 90^0 = \Delta\widehat{\text{Β}}\text{Ε}$, οπότε το τρίγωνο ΔΒΕ είναι ορθογώνιο και η γωνία του ΒΔΕ λόγω του (α) ισούται με 25^0.

Επίσης οι γωνίες ΒΔΕ και ΒΕΔ είναι συμπληρωματικές.

Άρα η $\text{Β}\widehat{\text{Ε}}\Delta = 90^0 - 25^0 = 65^0$. Δηλαδή η $\text{Α}\widehat{\text{Ε}}\Delta = 65^0$.

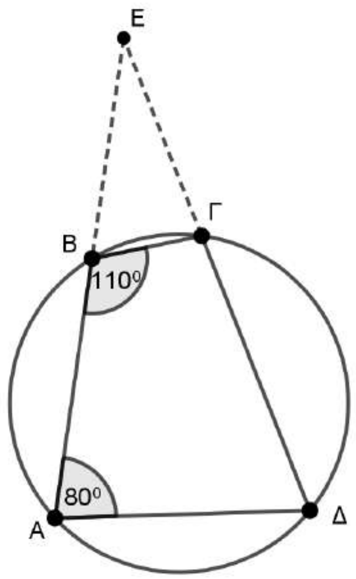
12643

Θέμα 2

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι πλευρές του ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Ε. Αν η γωνία Α του τετραπλεύρου ισούται με 80^0 και η γωνία Β ισούται με 110^0, να υπολογίσετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

α) το μέτρο της γωνία ΕΓΒ. (Μονάδες 12)

β) το μέτρο της γωνία ΒΕΓ. (Μονάδες 13)



12643-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η γωνία ΕΓΒ είναι εξωτερική στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, άρα θα ισούται με την απέναντι εσωτερική. Δηλαδή η $E\hat{\Gamma}B = \hat{A} = 80^0$.

β) Η γωνία ΕΒΓ είναι παραπληρωματική της γωνίας Β του τετραπλεύρου, οπότε θα ισούται με $180^0 - 110^0 = 70^0$. Έτσι στο τρίγωνο ΕΒΓ έχουμε:

$B\hat{E}\Gamma + E\hat{B}\Gamma + E\hat{\Gamma}B = 180^0$ ή $B\hat{E}\Gamma + 70^0 + 80^0 = 180^0$ οπότε η $B\hat{E}\Gamma = 30^0$.

12644

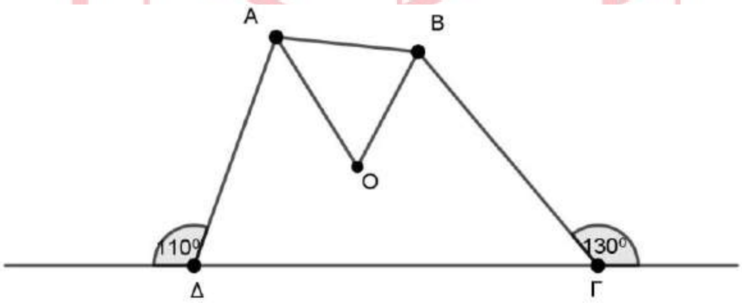
Θέμα 2

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η εξωτερική γωνία της Γ, ισούται με 130^0 και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με 110^0. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο τότε, να υπολογίσετε:

α) τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου. (Μονάδες 9)

β) το μέτρο του αθροίσματος $\widehat{A} + \widehat{B}$. (Μονάδες 9)

γ) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ. (Μονάδες 7)



12644-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 130^0$, $\widehat{\Delta}_{\varepsilon\xi} = 110^0$. Όμως $\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 180^0$ ή $\widehat{\Gamma} + 130^0 = 180^0$ άρα $\widehat{\Gamma} = 50^0$.

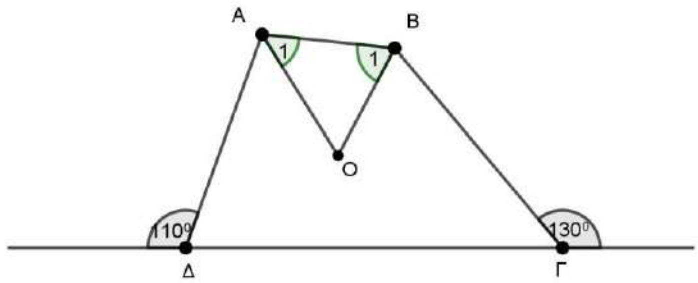
Επίσης $\widehat{\Delta} + \widehat{\Delta}_{\varepsilon\xi} = 180^0$ ή $\widehat{\Delta} + 110^0 = 180^0$ άρα $\widehat{\Delta} = 70^0$.

β) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με ν πλευρές είναι 2·ν-4 ορθές.

Έτσι για το τετράπλευρο ΑΒΓΔ, το άθροισμα των γωνιών του είναι:

2·4-4 = 8-4 = 4 ορθές ή $4 \cdot 90^0 = 360^0$. Δηλαδή έχουμε: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 360^0$ η οποία λόγω του (α) ερωτήματος γράφεται: $\widehat{A} + \widehat{B} + 50^0 + 70^0 = 360^0$ οπότε $\widehat{A} + \widehat{B} = 240^0$.

γ)



Στο τρίγωνο ΑΟΒ είναι: $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{O} = 180^0$ (1).

Όμως ΑΟ και ΒΟ είναι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β αντίστοιχα, άρα:

$\widehat{A}_1 = \dfrac{\widehat{A}}{2}$ και $\widehat{B}_1 = \dfrac{\widehat{B}}{2}$. Έτσι $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = \dfrac{\widehat{A}}{2} + \dfrac{\widehat{B}}{2} = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$ η οποία λόγω του (β) ερωτήματος

γράφεται: $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = \dfrac{240^0}{2} = 120^0$ οπότε από την (1) παίρνουμε:

$120^0 + \widehat{O} = 180^0$, επομένως $\widehat{O} = 60^0$, δηλαδή $A\widehat{O}B = 60^0$.

12704

ΘΕΜΑ 2

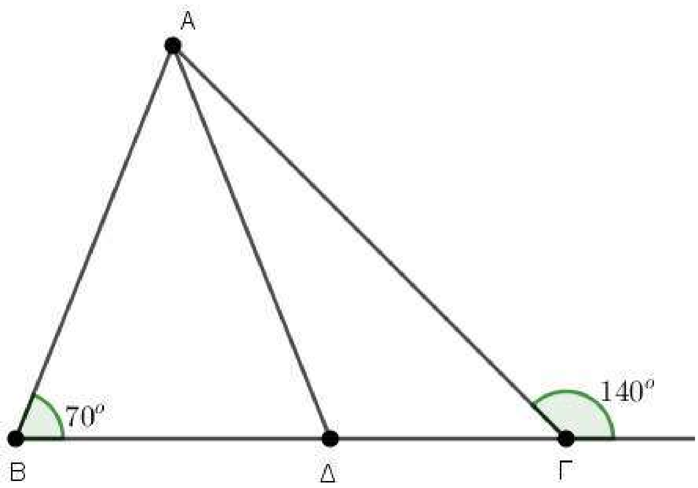
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{B}}=70^{o}$ και $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi\omega\tau}=140^{o}$.

Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ, ώστε ΑΔ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

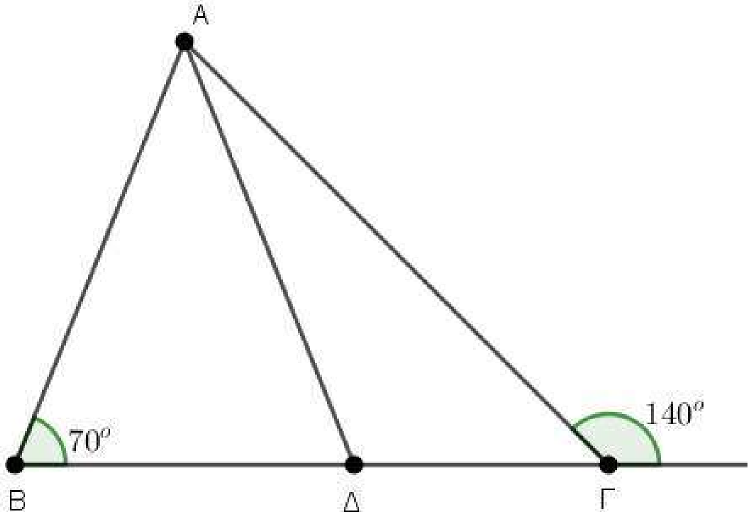
α) $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta=40^{o}$. (Μονάδες 9)

β) $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\Gamma = 110^{0}$. (Μονάδες 7)

γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)



12704-Λύση



α) Από την υπόθεση έχουμε ΑΔ = ΑΒ, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

Θα είναι $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Delta$ = $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{B}$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα. Άρα $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{B}$=70°.

Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι: $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta+\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Delta+\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{B}=180^o$.

Άρα $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta+70^o+70^o=180^o$, δηλαδή $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta=180^o-140^o = 40^o$.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΔ ισχύει ότι η εξωτερική γωνία $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\Gamma=\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Delta+\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta = 70^o + 40^o = 110^o$.

γ) $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}=180^o- 140^o = 40^o$, ως παραπληρωματική της $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi\omega\tau}$.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma+\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma+\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B} = 180^o$.

Επομένως η γωνία $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma= 180^o - \mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma - \mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B} = 180^o - 70^o - 40^o = 70^o$.

Άρα $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma=70^o=\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί έχει δύο γωνίες ίσες.

12707

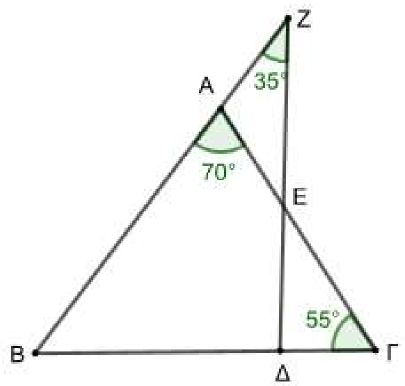
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}$ =70° και $\widehat{\Gamma}$ =55°. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το σημείο Α και παίρνουμε στην προέκταση σημείο Ζ ώστε $B\widehat{Z}\Delta$ =35°, όπου Δ εσωτερικό σημείο της ΒΓ. Η ΖΔ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) $Z\widehat{\Delta}B$ = 90°. (Μονάδες 8)

γ) το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



12707-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για τις γωνίες Α, Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180°$.

Όμως, $\widehat{A}$ =70° και $\widehat{\Gamma}$ =55°, επομένως $70° + \widehat{B} + 55° = 180°$ ή ισοδύναμα

$\widehat{B} = 180° - 70° - 55°$ και τελικά $\widehat{B} = 55°$.

Άρα $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 55°$ και συνεπώς το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ.

β) Στο τρίγωνο ΒΖΔ έχουμε $\widehat{B} + B\widehat{Z}\Delta + Z\widehat{\Delta}B = 180°$ ή ισοδύναμα

$55° + 35° + Z\widehat{\Delta}B = 180°$ οπότε $Z\widehat{\Delta}B = 180° - 90° = 90°$.

γ) Η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΖΕ. Επομένως,

$\widehat{A} = A\widehat{E}Z + A\widehat{Z}E$ ή ισοδύναμα $70° = A\widehat{E}Z + 35°$, οπότε $A\widehat{E}Z = 35° = A\widehat{Z}E$. Άρα το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές.

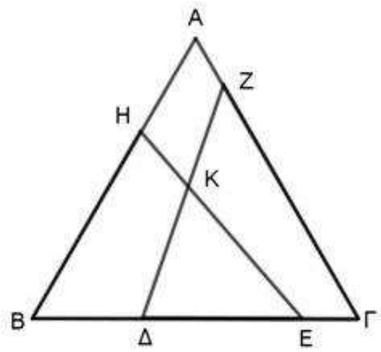
12708

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΒΓ και ΓΑ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα ώστε ΒΕ = ΓΖ. Στις πλευρές ΑΒ και ΓΒ θεωρούμε σημεία Η και Δ αντίστοιχα ώστε ΒΗ = ΓΔ. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΖ και ΕΗ τέμνονται στο σημείο Κ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΗ = ΔΖ και $B\hat{H}E = \Gamma\hat{\Delta}Z$. (Μονάδες 12)

β) τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΚΕΔ έχουν ίσες γωνίες μία προς μία. (Μονάδες 13)



12708-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΓΖΔ έχουν:

- ΒΕ = ΓΖ, από την υπόθεση
- ΒΗ = ΓΔ, από την υπόθεση
- $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 60°$, αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Από το κριτήριο ισότητας Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, επομένως, ΕΗ = ΖΔ και απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ, ΓΖ βρίσκονται αντίστοιχα οι ίσες γωνίες ΒΗΕ, ΓΔΖ.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΒΕΗ και ΓΖΔ προκύπτει ότι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ και ΓΖ βρίσκονται ίσες γωνίες, δηλαδή $\hat{H} = \hat{\Delta}$.

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι τα τρίγωνα ΚΕΔ και ΒΕΗ έχουν τη γωνία $\hat{E}$ κοινή και

$\hat{\Delta} = \hat{H}$.

Επομένως, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή, $\Delta\hat{K}E = \hat{B}$

12709

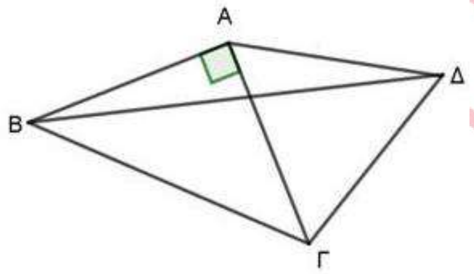
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\widehat{A}=90°$. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΑΒΔ. (Μονάδες 12)



12709-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\widehat{A}$ =90°, οπότε $\widehat{B}$ + $\widehat{\Gamma}$= 90° και επειδή είναι και ισοσκελές έχουμε $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Άρα 2$\widehat{B}$ = 90° ή $\widehat{B}$ = 45°, οπότε και $\widehat{\Gamma}$ = 45°.

β) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο οπότε ΑΓ = ΑΔ = ΔΓ.

Έχουμε ΑΒ = ΑΓ και ΑΓ = ΑΔ, οπότε ΑΒ = ΑΔ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

γ) Επειδή το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο έχουμε $\Delta\widehat{A}\Gamma$ =60°.

Οπότε $B\widehat{A}\Delta$ = $B\widehat{A}\Gamma$ + $\Delta\widehat{A}\Gamma$ = 90° + 60° = 150°.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $A\widehat{B}\Delta$ = $A\widehat{\Delta}B$ διότι ΑΒ = ΑΔ, οπότε από το άθροισμα των γωνιών του προκύπτει $A\widehat{B}\Delta$ + $A\widehat{\Delta}B$ +$B\widehat{A}\Delta$ = 180° ή 2$A\widehat{B}\Delta$ + 150° = 180° ή 2$A\widehat{B}\Delta$ = 30° ή $A\widehat{B}\Delta$ = 15°.

12710

ΘΕΜΑ 2

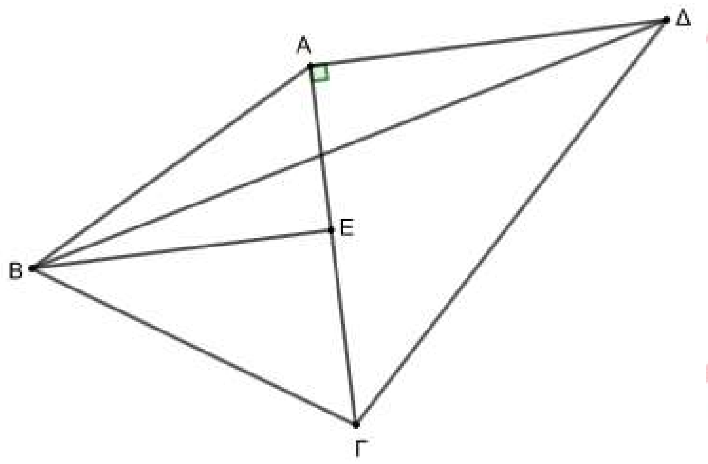
Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΒΕ. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με υποτείνουσα τη ΓΔ έτσι, ώστε τα σημεία Β και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ // ΑΔ. (Μονάδες 10)

β) οι γωνίες ΕΒΔ και ΑΔΒ είναι ίσες. (Μονάδες 7)

γ) το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)



12710-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, οπότε η διχοτόμος ΒΕ είναι και ύψος, δηλαδή η ΒΕ είναι κάθετη στην ΑΓ.

Το τρίγωνο ΓΑΔ είναι ορθογώνιο στην κορυφή Α , οπότε η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΓ.

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ και ΑΔ είναι κάθετα στην ΑΓ, οπότε είναι μεταξύ τους παράλληλα.

β) Οι γωνίες ΕΒΔ και ΑΔΒ είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΕ και ΑΔ που τέμνονται από την ΒΔ, άρα είναι ίσες.

γ) Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ και από το ισοσκελές τρίγωνο ΓΑΔ έχουμε ΑΓ = ΑΔ, οπότε ΑΒ = ΑΔ, επομένως το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές.

13441

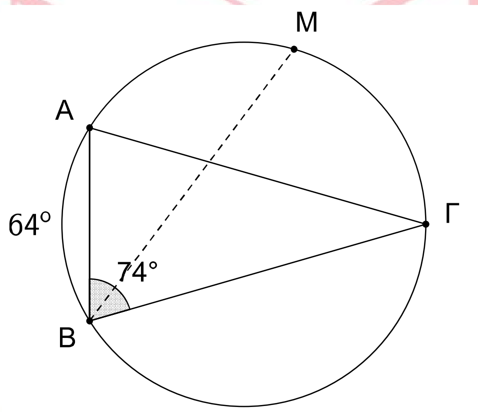
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο με $\hat{B} = 74^o$. Το μέτρο του τόξου ΑΒ που δεν περιέχει το σημείο Γ ισούται με 64^o και Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΓ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{Γ}$ και $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

β) Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η ΒΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. (Μονάδες 5)



13441-Λύση

α) Η $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο τόξο ΑΒ, συνεπώς το μέτρο της ισούται με το μισό του μέτρου του τόξου αυτού. Άρα $\hat{\Gamma} = \frac{64^o}{2} = 32^o$.

Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$.

Όμως $\hat{B} = 74^o$ από τα δεδομένα και $\hat{\Gamma} = 32^o$, οπότε έχουμε

$\hat{A} + 74^o + 32^o = 180^o$ ή $\hat{A} = 74^o$.

β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί έχει δύο ίσες γωνίες, τις $\hat{A} = \hat{B} = 74^o$.

γ) Το σημείο Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΓ, άρα τα τόξα ΑΜ και ΜΓ είναι ίσα. Οι γωνίες $A\hat{B}M$ και $\Gamma\hat{B}M$ είναι ίσες, γιατί είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στα ίσα τόξα ΑΜ και ΜΓ αντίστοιχα. Από την ισότητα $A\hat{B}M = \Gamma\hat{B}M$ συμπεραίνουμε ότι η ΒΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.

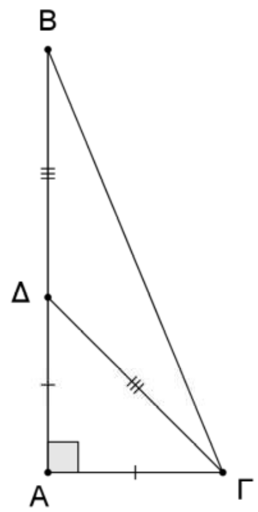
13442

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}} = 90^{\mathrm{o}}$. Στην πλευρά του ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ ώστε ΒΔ $=$ ΔΓ και ΑΔ $=$ ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\widehat{\Delta}\Gamma} = 45^{\mathrm{o}}$. (Μονάδες 12)

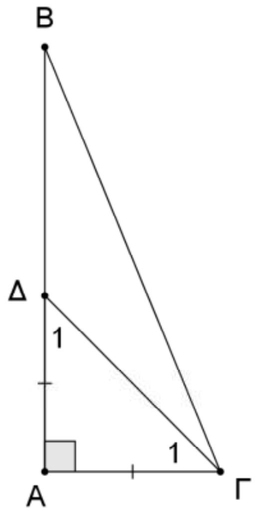
β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\mathrm{B}}$. (Μονάδες 13)



13442-Λύση

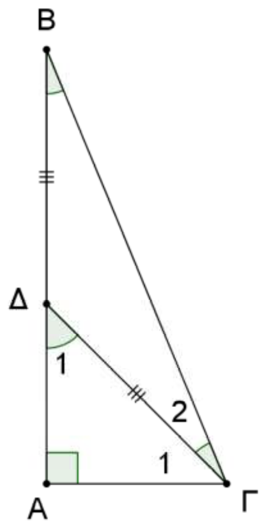
α) Έστω $\hat{\Delta}_1 = \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$. Από τα δεδομένα έχουμε $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A\Delta}$, άρα το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$ (1).

Όμως οι γωνίες $\hat{\Gamma}_1, \hat{\Delta}_1$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ είναι συμπληρωματικές. Χρησιμοποιώντας την ισότητα (1) προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_1 = 90^o$ ή $\hat{\Delta}_1 = 45^o$.



β) Από τα δεδομένα έχουμε $\mathrm{B\Delta} = \Delta\Gamma$, άρα το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}_2$ (2).

Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΒΓΔ άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}_2$. Έτσι λόγω του ερωτήματος α) και της ισότητας (2) θα είναι $\hat{\mathrm{B}} + \hat{\mathrm{B}} = 45^o$ ή $\hat{\mathrm{B}} = 22{,}5^o$.



13443

ΘΕΜΑ 2

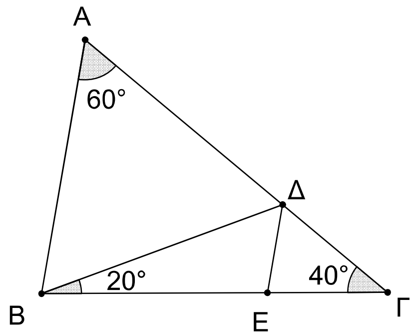
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 60^o$ και $\widehat{\Gamma} = 40^o$. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ, ώστε $\Gamma\widehat{B}\Delta = 20^o$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β) Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

i. $B\widehat{\Delta}E = 60^o$. (Μονάδες 8)

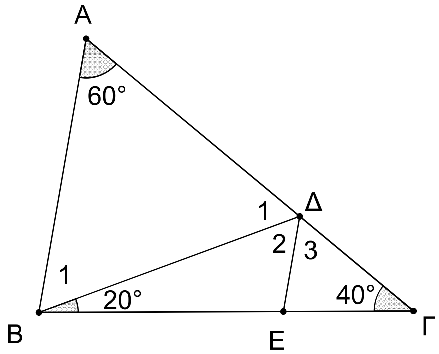
ii. Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\widehat{\Delta}\Gamma$. (Μονάδες 7)



13443-Λύση

α) Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΒΓΔ, άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 = \Gamma\hat{B}\Delta + \hat{\Gamma} = 20^o + 40^o = 60^o$.

Από την υπόθεση και το ερώτημα α) έχουμε ότι οι γωνίες $\hat{A}, \hat{\Delta}_1$ του τριγώνου ΑΒΔ είναι 60^o. Αυτό σημαίνει ότι και η τρίτη γωνία $\hat{B}_1$ θα είναι 60^o, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.



β) i. Είναι $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_2$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ με τέμνουσα την ΒΔ. Όμως από το ερώτημα α) είναι $\hat{B}_1 = 60^o$, άρα $\hat{\Delta}_2 = 60^o$ ή $B\hat{\Delta}E = 60^o$.

ii. Είναι $\hat{A} = \hat{\Delta}_3$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ με τέμνουσα την ΑΓ. Όμως $\hat{A} = 60^o$, άρα $\hat{\Delta}_3 = 60^o$.

Αφού $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_3 = 60^o$, η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Delta}\Gamma$.

13444

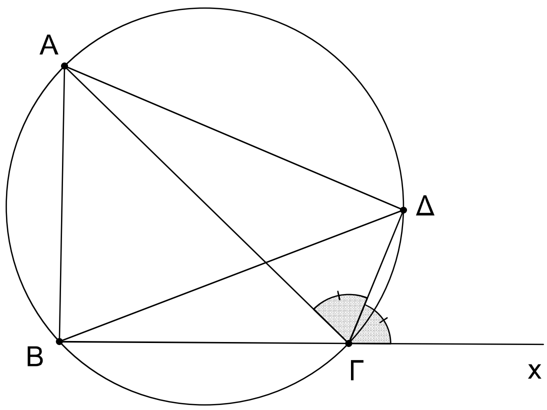
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ. Η γωνία $\Delta\hat{\Gamma}x$ είναι εξωτερική γωνία του τετραπλεύρου και η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}x$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\hat{A}\Delta = \frac{1}{2}A\hat{\Gamma}x$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές και να προσδιορίσετε τις ίσες πλευρές του. (Μονάδες 10)

γ) Αν η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $A\hat{\Gamma}B$ και $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι συμπληρωματικές. (Μονάδες 5)

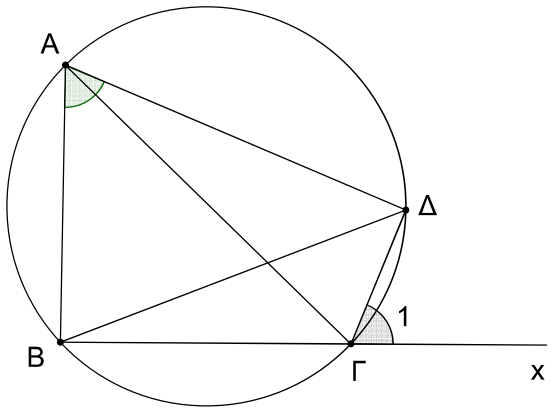


13444-Λύση

α) Η γωνία $\hat{\Gamma}_1$ είναι εξωτερική του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, συνεπώς ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του, δηλαδή $\hat{\Gamma}_1 = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ (1).

Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$, άρα $\hat{\Gamma}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$ (2).

Από τις ισότητες (1), (2) προκύπτει ότι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$ (3).



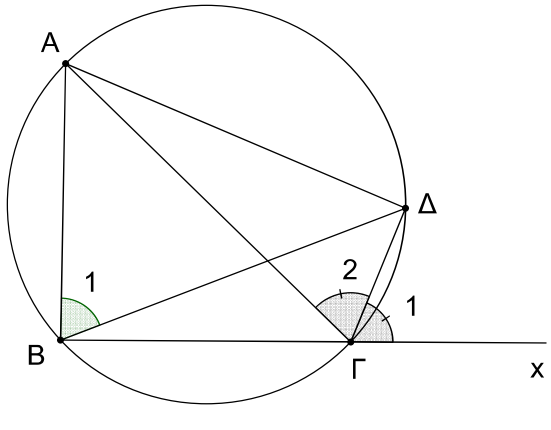
β) Είναι $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\Gamma}_2$ (4),

ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΑΔ.

Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$, άρα $\hat{\Gamma}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$ (5).

Από τις σχέσεις (4), (5) προκύπτει ότι $\hat{\mathrm{B}}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$ (6).

Από τις σχέσεις (3), (6) προκύπτει ότι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \hat{\mathrm{B}}_1$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές αφού έχει δύο ίσες γωνίες. Ίσες πλευρές του τριγώνου είναι οι ΔΒ και ΔΑ, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες του $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\hat{\mathrm{B}}_1$ αντίστοιχα.



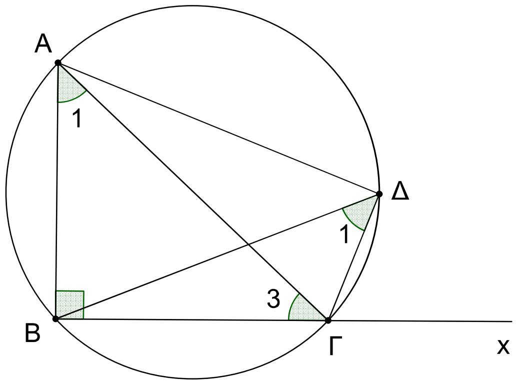
γ) Αν η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου, τότε το τόξο ΑΔΓ είναι ημικύκλιο, οπότε η γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ είναι ορθή ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Οι οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι συμπληρωματικές, δηλαδή

$\hat{\Gamma}_3 + \hat{\mathrm{A}}_1 = 90^{\mathrm{o}}$ (7).

13444-Λύση

Οι γωνίες $\widehat{A}_1, \widehat{\Delta}_1$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΒΓ, άρα $\widehat{A}_1 = \widehat{\Delta}_1$ (8).

Από τις ισότητες (7), (8) προκύπτει ότι $\widehat{\Gamma}_3 + \widehat{\Delta}_1 = 90^o$, άρα οι γωνίες $A\widehat{\Gamma}B$ και $B\widehat{\Delta}\Gamma$ είναι συμπληρωματικές.



13497

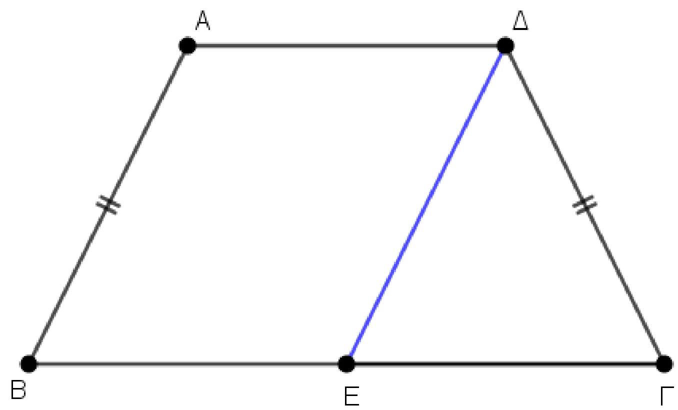
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με ΒΓ > ΔΓ.

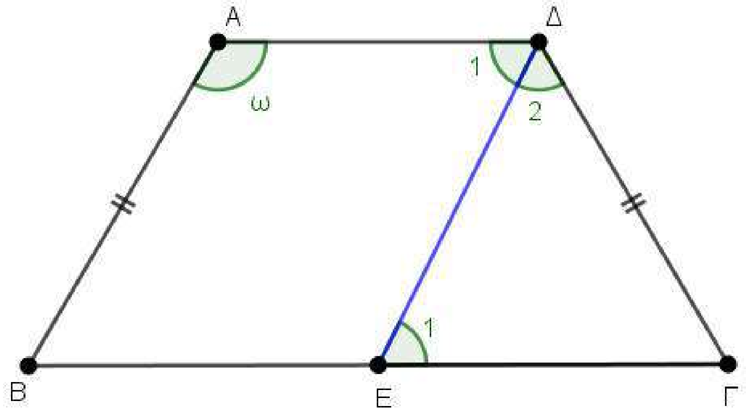
Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε σημείο Ε, τέτοιο ώστε ΓΕ = ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\Gamma$. (Μονάδες 12)

β) Αν $\widehat{\mathrm{A}}=120^{\mathrm{o}}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)



13497-Λύση



α) $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\mathrm{E}}_1$ (1), γιατί είναι γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ με τέμνουσα την ΔΕ.

$\widehat{\Delta}_2 = \widehat{\mathrm{E}}_1$ (2), γιατί είναι γωνίες προσκείμενες στη βάση ΔΕ του ισοσκελούς τριγώνου ΔΓΕ.

Από (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$, άρα η ΔΕ είναι διχοτόμος της $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\Gamma$.

β) Αν $\widehat{\mathrm{A}} = 120^{\mathrm{o}}$, τότε, επειδή το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές, θα είναι $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\Gamma = 120^{\mathrm{o}}$.

Επειδή αποδείξαμε στο α) ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\Gamma$,

θα είναι $\widehat{\Delta}_2 = 60^{\mathrm{o}}$ και λόγω της σχέσης (2), $\widehat{\mathrm{E}}_1 = 60^{\mathrm{o}}$.

Άρα, το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισόπλευρο, γιατί έχει δύο γωνίες 60^{o}, οπότε και η τρίτη γωνία $\widehat{\Gamma}$ θα είναι 60^{o}.

13499

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$) με $AB < A\Gamma$ και ΑΗ το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε $\Delta B = AB$ και $\Gamma E = \Gamma A$. Αν ΔΖ και ΕΘ είναι οι αποστάσεις των Δ και Ε από τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\widehat{A}\Delta = \Delta\widehat{A}H$ και $E\widehat{A}B = H\widehat{A}E$.

(Μονάδες 14)

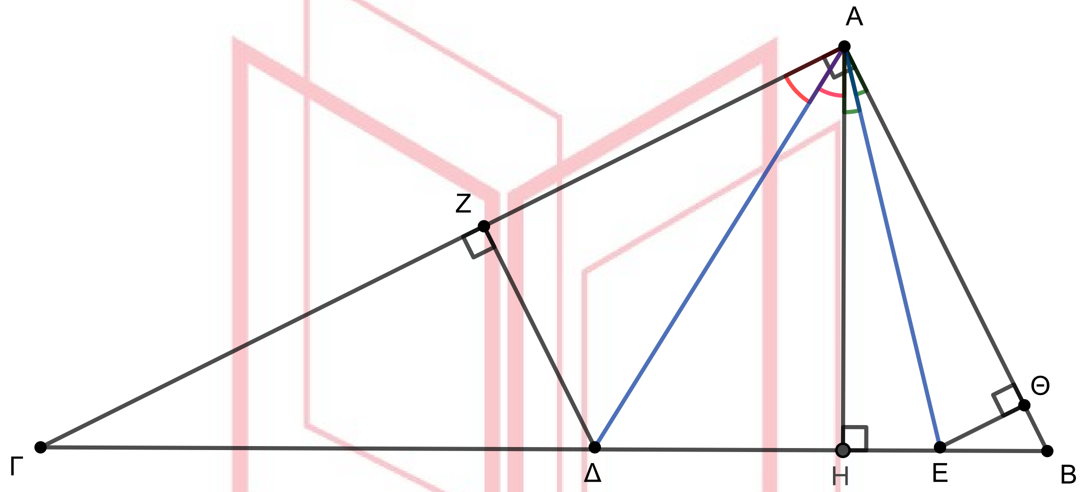
β) $\Delta E = \Delta Z + E\Theta$.

(Μονάδες 11)

13499-Λύση

ΛΥΣΗ

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}=90^o$) με $AB < AΓ$ και ΑΗ το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε $ΔB = AB$ και $ΓE = ΓA$. Φέρουμε τις αποστάσεις ΔΖ και ΕΘ των Δ και Ε από τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.



α) Από το σχήμα έχουμε ότι: $Γ\widehat{A}Δ = Γ\widehat{A}B - Δ\widehat{A}B = 90^o - Δ\widehat{A}B$ (1).

Οι γωνίες $Δ\widehat{A}H$ και $A\widehat{Δ}H$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΗ είναι συμπληρωματικές, οπότε: $Δ\widehat{A}H = 90^o - A\widehat{Δ}H$ (2).

Αφού $BΔ = BA$, το τρίγωνο ΒΔΑ θα είναι ισοσκελές με βάση ΔΑ, οπότε οι γωνίες $Δ\widehat{A}B$ και $A\widehat{Δ}H$ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση, δηλαδή $Δ\widehat{A}B = A\widehat{Δ}H$ (3).

Άρα, από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $Γ\widehat{A}Δ = Δ\widehat{A}H$ (4).

Έχουμε, επίσης, ότι: $E\widehat{A}B = Γ\widehat{A}B - Γ\widehat{A}E = 90^o - Γ\widehat{A}E$ (5).

Οι γωνίες $H\widehat{A}E$ και $A\widehat{E}H$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΕΗ είναι συμπληρωματικές, οπότε: $H\widehat{A}E = 90^o - A\widehat{E}H$ (6).

Αφού $ΓE = ΓA$, το τρίγωνο ΓΕΑ θα είναι ισοσκελές με βάση ΕΑ, οπότε οι γωνίες $Γ\widehat{A}E$ και $A\widehat{E}H$ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση, δηλαδή $Γ\widehat{A}E = A\widehat{E}H$ (7).

Άρα, από τις σχέσεις (5), (6) και (7) προκύπτει ότι $E\widehat{A}B = H\widehat{A}E$ (8).

β) Από (α) ερώτημα ισχύει ότι $E\widehat{A}B = H\widehat{A}E$, οπότε η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $H\widehat{A}B$ του τριγώνου ΑΗΒ.

Άρα, το σημείο Ε ισαπέχει από τις πλευρές ΑΗ και ΑΒ κι επομένως είναι $EH = EΘ$.

Από (α) ερώτημα ισχύει, επίσης, ότι $Γ\widehat{A}Δ = Δ\widehat{A}H$, οπότε η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $H\widehat{A}Γ$ του τριγώνου ΑΗΓ.

13499-Λύση

Άρα, το σημείο Δ ισαπέχει από τις πλευρές ΑΗ και ΑΓ κι επομένως είναι $ΔΗ = ΔΖ$.

Συνεπώς, $ΔΕ = ΔΗ + ΕΗ = ΔΖ + ΕΘ$.

13519

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ>ΑΔ. Στην ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε ΑΕ = ΑΔ. Από το μέσο Μ της ΔΕ φέρουμε παράλληλη προς την ΔΓ που τέμνει την ΒΓ στο Κ.

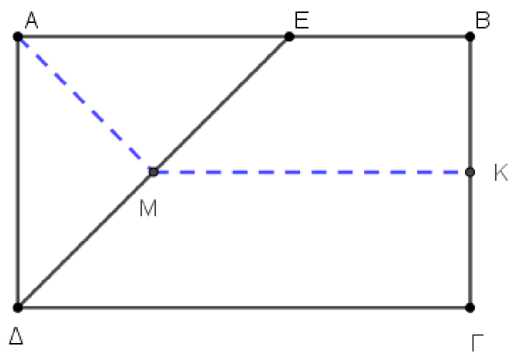
α) Να αποδείξετε ΑΜ $\perp$ ΔΕ. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι 2ΜΚ = 2ΑΒ - ΑΔ. (Μονάδες 9)

γ) Φέρνουμε την ΕΚ που τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο Ζ.
Να αποδείξετε ότι ΓΖ = ΑΒ – ΑΔ. (Μονάδες 9)

13519-Λύση

Κατασκευάζουμε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ > ΑΔ. Στην ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε, τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΕ. Από το μέσο Μ της ΔΕ φέρουμε παράλληλη προς την ΔΓ που τέμνει την ΒΓ στο Κ.



α) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, γιατί ΑΔ = ΑΕ.

Επομένως, η διάμεσος ΑΜ που αντιστοιχεί στην βάση θα είναι και ύψος.

Άρα, $ΑΜ \perp ΔΕ$.

β) Αν η ΔΕ ήταν παράλληλη στην ΒΓ, θα είχαμε από το Δ δύο παράλληλες, τις ΔΑ και ΔΕ προς την ΒΓ, που είναι άτοπο λόγω του $1^{ου}$ αιτήματος παραλληλίας. Επομένως, η ΔΕ δεν είναι παράλληλη προς την ΒΓ. Άρα, το ΕΒΓΔ είναι τραπέζιο γιατί ΕΒ//ΔΓ και η ΔΕ δεν είναι παράλληλη με την ΒΓ.

Από το μέσο Μ της ΔΕ φέραμε ΜΚ//ΔΓ, άρα το Κ είναι το μέσο πλευράς ΒΓ.

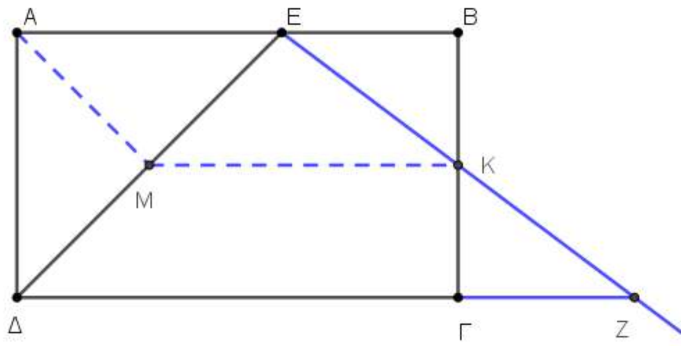
Η διάμεσος ΜΚ του τραπεζίου ΕΒΓΔ θα ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων, δηλαδή $ΜΚ = \frac{ΔΓ+ΕΒ}{2}$ ή 2ΜΚ = ΔΓ + ΕΒ (1).

Όμως ΔΓ=ΑΒ (2), ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και ΑΔ = ΑΕ (3), από υπόθεση. Επίσης, ΕΒ = ΑΒ-ΑΕ (4).

Από (1), (2), (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι 2ΜΚ = ΑΒ + ΑΒ – ΑΕ = 2ΑΒ – ΑΔ (5).

γ) Προεκτείνουμε την ΕΚ που τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο Ζ.

13519-Λύση



Στο τρίγωνο ΔΕΖ το Μ είναι μέσο της ΔΕ και ΜΚ//ΔΖ, άρα η ΜΚ διέρχεται από το μέσο Κ της ΕΖ. Επομένως:

$ΜΚ = \frac{ΔΖ}{2} \Leftrightarrow 2ΜΚ = ΔΖ \Leftrightarrow$(από (5)) $2ΑΒ - ΑΔ = ΔΓ + ΓΖ \Leftrightarrow$

$2ΑΒ-ΑΔ=ΑΒ+ΓΖ \Leftrightarrow ΓΖ = ΑΒ – ΑΔ$.

13520

ΘΕΜΑ 4

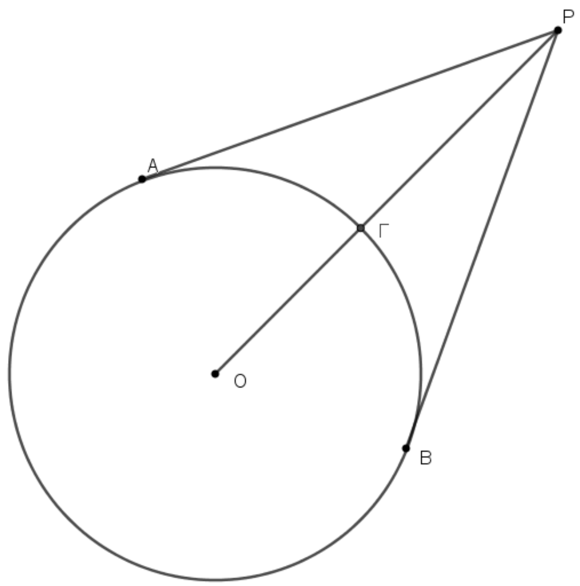
Δίνεται κύκλος (O,ρ) και σημείο Ρ εκτός του κύκλου. Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Η ΡΟ τέμνει το μικρότερο του ημικυκλίου τόξο ΑΒ στο Γ και $A\hat{P}B = 60^{o}$. Να αποδείξετε ότι:

α) ΟΡ = 2ρ. (Μονάδες 10)

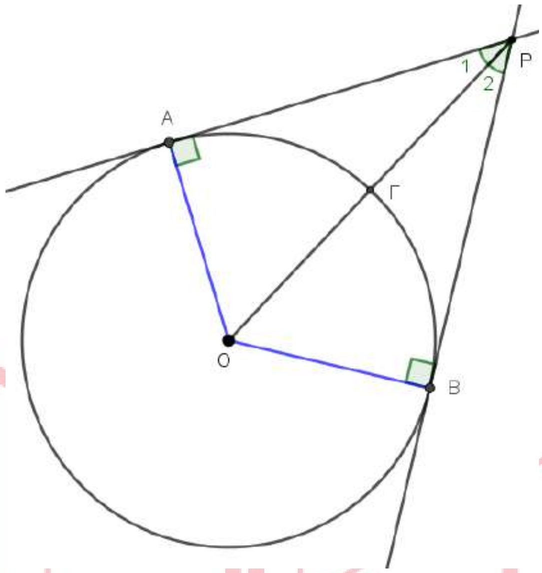
β) $A\hat{\Gamma}B$=120°. (Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι ρόμβος.

Συμφωνείτε μαζί του; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 05)



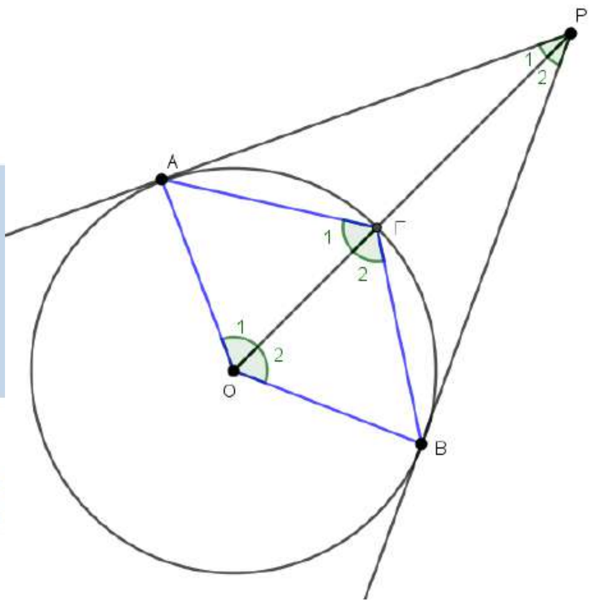
13520-Λύση



α) Φέρουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ που είναι κάθετες στα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Επομένως τα τρίγωνα ΟΑΡ και ΟΒΡ είναι ορθογώνια.

Η ΡΟ είναι διχοτόμος της $\mathrm{A\hat{P}B} = 60^o$, οπότε $\hat{\mathrm{P}}_1 = \hat{\mathrm{P}}_2 = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΡ είναι $\hat{\mathrm{P}}_1 = 30^o$, οπότε η απέναντι της γωνίας κάθετη πλευρά ΟΑ = $\frac{\mathrm{PO}}{2}$, δηλαδή ΡΟ = 2ρ, αφού ΟΑ = ΟΒ = ρ.



β) Στο τρίγωνο ΟΡΑ: $\hat{\mathrm{O}}_1 + \mathrm{O\hat{A}P} + \mathrm{O\hat{P}A}$ = 180°. Άρα, $\hat{\mathrm{O}}_1 =$ 180° – 90° – 30° = 60°.

ΟΑ = ΟΓ = ρ, οπότε το τρίγωνο ΟΓΑ είναι ισοσκελές με μία γωνία 60°, άρα είναι ισόπλευρο. Επομένως $\hat{\Gamma}_1 = 60^o$ (1).

Στο τρίγωνο ΟΡΒ: $\hat{\mathrm{O}}_2 + \mathrm{O\hat{B}P} + \mathrm{O\hat{P}B}$ = 180°. Άρα $\hat{\mathrm{O}}_2 =$ 180° – 90° – 30° = 60°.

13520-Λύση

ΟΒ = ΟΓ = ρ, οπότε το τρίγωνο ΟΓΒ είναι ισοσκελές με μία γωνία 60^o, άρα ισόπλευρο. Επομένως, $\hat{\Gamma}_2 = 60^o$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε ότι $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 60^o + 60^o = 120^o$.

γ) Στο β) ερώτημα αποδείξαμε ότι τα τρίγωνα ΟΓΑ και ΟΓΒ είναι ισόπλευρα.

Επομένως, ΑΓ = ΟΑ = ΟΓ = ΓΒ = ΟΒ. Το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι ρόμβος γιατί έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

13523

ΘΕΜΑ 4

Ο χαρταετός του σχήματος είναι ένα εξάγωνο με ίσες πλευρές και ίσες γωνίες.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΕ = ΒΔ. (Μονάδες 07)

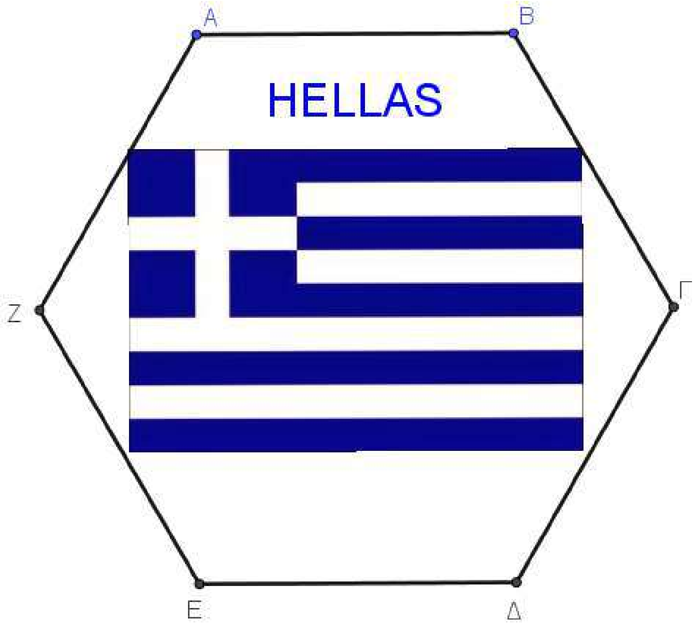
β) Να αποδείξετε ότι $ΑΕ \perp ΕΔ$. (Μονάδες 08)

γ) i. Αν οι ΑΔ και ΒΕ τέμνονται στο Ο, τότε να αποδείξετε ότι 2ΒΟ = ΑΔ.

(Μονάδες 05)

ii. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι υπάρχει κύκλος με διάμετρο την ΑΔ που διέρχεται από το Β. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

(Μονάδες 05)



13523-Λύση

α) Στο εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ οι πλευρές και οι γωνίες του είναι ίσες. Έστω λ το μήκος της πλευράς του εξαγώνου και φ η γωνία του.

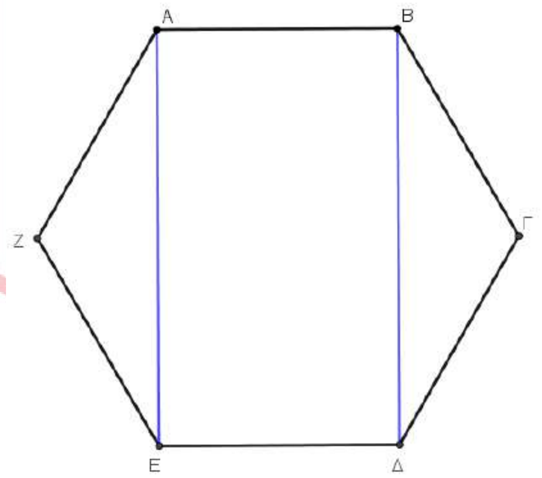
Τα τρίγωνα ΑΖΕ και ΒΓΔ έχουν:

ΑΖ = ΒΓ = λ, από την υπόθεση,

ΖΕ= ΓΔ = λ, από την υπόθεση,

$\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{E} = \mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta = \phi$, από την υπόθεση,

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΖΕ και ΒΓΔ είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες. Άρα, ΑΕ = ΒΔ, γιατί είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{E}$ και $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta$ αντίστοιχα.

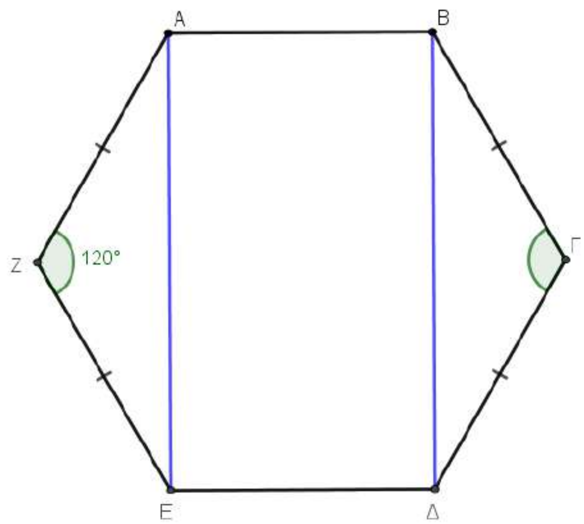


β) Το άθροισμα των γωνιών του εξάγωνου είναι (2ν-4)ορθές, δηλαδή

$(2 \cdot 6 - 4) \cdot 90^o = 720^o$. Επειδή όλες οι γωνίες ίσες, η κάθε μία θα είναι

$720^o : 6 = 120^o$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΖΕ (ΑΖ=ΖΕ) οι γωνίες της βάσης $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$ και $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A}$ θα είναι ίσες.



Στο τρίγωνο ΑΖΕ ισχύει:

13523-Λύση

$\hat{Z} + Z\hat{A}E + Z\hat{E}A$ = 180° ή $Z\hat{A}E + Z\hat{E}A$ = 180° -$\hat{Z}$ ή $2Z\hat{E}A$ = 180° – 120°

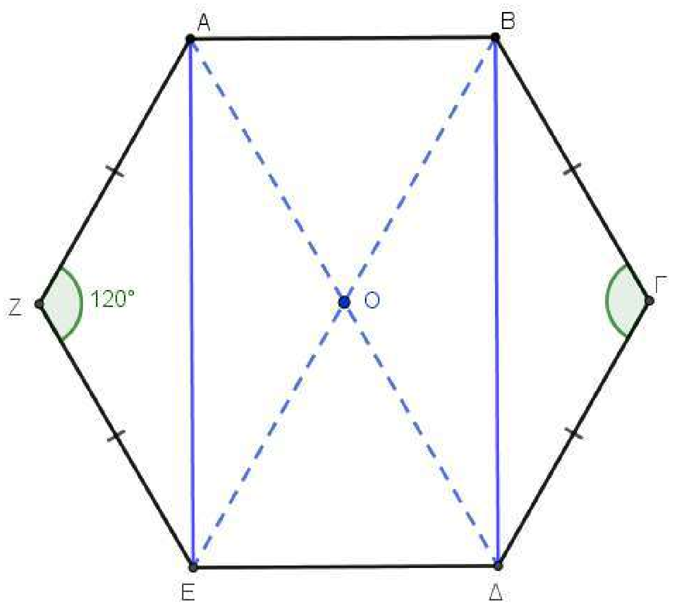
ή $2Z\hat{E}A$ = 60° . Άρα, $Z\hat{E}A$ = 30°.

Έτσι $A\hat{E}\Delta = Z\hat{E}\Delta - Z\hat{E}A$ = 120° – 30° = 90°, οπότε ΑΕ⊥ΕΔ.

γ) i. Επειδή ΑΒ = ΕΔ και ΑΕ = ΒΔ, το ΑΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες. Επιπλέον, λόγω του (β), το ΑΕΔΒ έχει μία γωνία ορθή (γωνία ΑΕΔ = 90°), άρα είναι ορθογώνιο. Οι διαγώνιες του ΑΔ και ΒΕ είναι ίσες και διχοτομούνται, επομένως ΒΟ = $\frac{BE}{2} = \frac{A\Delta}{2}$. Άρα, 2ΒΟ = ΑΔ.

ii. Στο ερώτημα i) αποδείξαμε ότι ΒΟ = ΑΟ = ΟΔ. Επομένως, τα Α, Β, Δ ισαπέχουν από το Ο. Άρα, βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΒ.

Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.



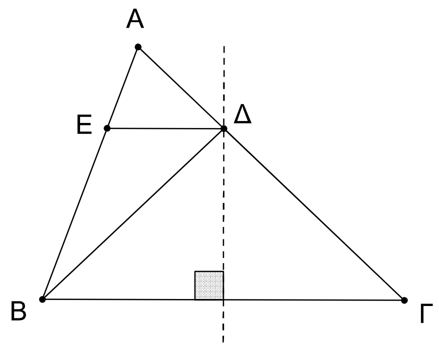
13534

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ $<$ ΑΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

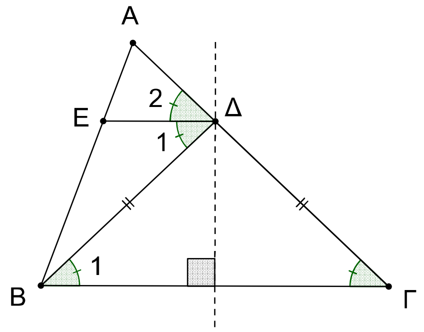
β) η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Β}$. (Μονάδες 13)



13534-Λύση

α) Το σημείο Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ, άρα ισαπέχει από τα άκρα του, δηλαδή $ΔΒ = ΔΓ$. Συνεπώς το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές.

β)



Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

- $\hat{Β}_1 = \hat{Γ}$ (1) ως προσκείμενες γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΒΓΔ.
- $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1$ (2) ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΒΓ, ΔΕ που τέμνονται από τη ΒΔ.
- $\hat{Γ} = \hat{Δ}_2$ (3) ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΒΓ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΓ.

Από τις ισότητες (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$, οπότε η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $Α\hat{Δ}Β$.

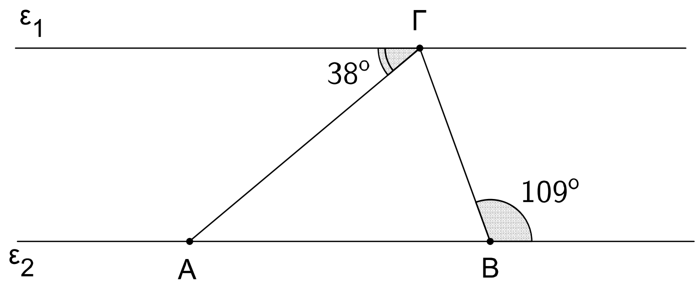
13535

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε_1 διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου ΑΒΓ και είναι παράλληλη στην ευθεία ε_2 που ορίζεται από τις κορυφές του Α και Β. Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 15)

β) να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του. (Μονάδες 10)



13535-Λύση

α) Είναι $\widehat{A} = 38^o$ (1) ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ε_1, ε_2 που τέμνονται από την ΑΓ.

Οι γωνίες $\widehat{B}$ και 109^o είναι παραπληρωματικές, άρα $\widehat{B} + 109^o = 180^o$ ή $\widehat{B} = 71^o$ (2). Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o$. Χρησιμοποιώντας τις ισότητες (1) και (2) έχουμε ότι $38^o + 71^o + \widehat{\Gamma} = 180^o$ ή $\widehat{\Gamma} = 180^o - 109^o$ ή $\widehat{\Gamma} = 71^o$.

β) Από το ερώτημα α) έχουμε ότι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 71^o$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί δύο γωνίες του είναι ίσες. Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου είναι οι ΑΓ, ΑΒ, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

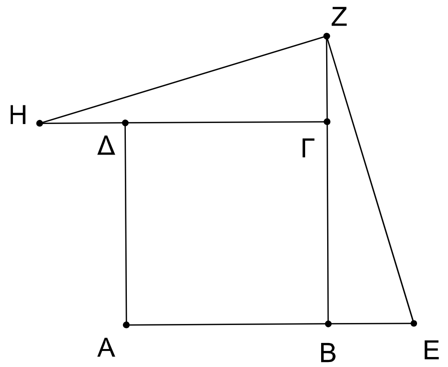
13536

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ προς το Β, ΒΓ προς το Γ και ΓΔ προς το Δ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε $ΒΕ = ΓΖ = ΔΗ$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΖΕ = ΖΗ$. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι $Ε\hat{Ζ}Η = 90^{o}$. (Μονάδες 10)

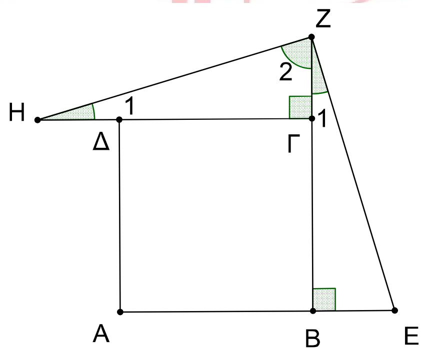


13536-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΓΖΗ έχουν:

- $\text{Ε}\hat{\text{Β}}\text{Ζ} = \text{Ζ}\hat{\Gamma}\text{Η} = 90^o$ ως παραπληρωματικές γωνίες των ορθών γωνιών $\hat{\text{Β}}$, $\hat{\Gamma}$ του τετραγώνου ΑΒΓΔ.
- $\text{ΒΕ} = \Gamma\text{Ζ}$, από τα δεδομένα.
- $\text{ΒΖ} = \Gamma\text{Η}$ ως άθροισμα των ίσων τμημάτων ΒΓ, ΓΔ (πλευρές τετραγώνου) και ΒΕ, ΓΖ (δεδομένο).

Τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΓΖΗ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Άρα θα είναι $\text{ΖΕ} = \text{ΖΗ}$, γιατί είναι οι πλευρές απέναντι από τις ορθές γωνίες.



β) Από την ισότητα των τρίγωνων ΒΕΖ και ΓΖΗ έχουμε ότι $\hat{\text{Ζ}}_1 = \hat{\text{Η}}_1$ (1), γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ, ΓΖ αντίστοιχα. Οι γωνίες $\hat{\text{Η}}_1, \hat{\text{Ζ}}_2$ είναι συμπληρωματικές, γιατί είναι οι οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΓΖΗ, άρα $\hat{\text{Η}}_1 + \hat{\text{Ζ}}_2 = 90^o$ (2). Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{\text{Ζ}}_1 + \hat{\text{Ζ}}_2 = 90^o$ ή $\text{Ε}\hat{\text{Ζ}}\text{Η} = 90^o$.

13537

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$, σημείο Δ της πλευράς ΑΓ, ώστε $ΑΔ = ΒΔ = ΒΓ$ και σημείο Ε της πλευράς ΑΒ, ώστε $ΑΕ = ΓΔ$.

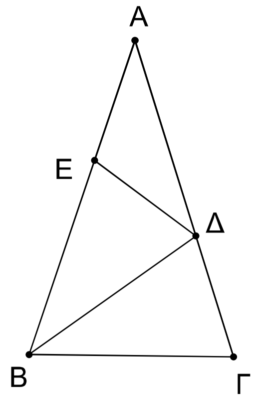
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{Γ} = 2\hat{Α}$. (Μονάδες 6)

ii. $\hat{Α} = 36^o$. (Μονάδες 6)

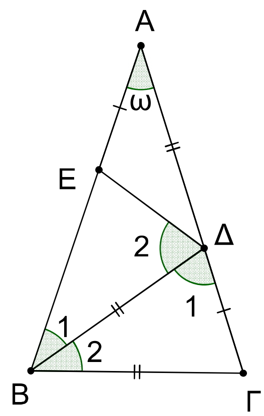
iii. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Στην προέκταση της ΔΕ προς το Ε θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε $ΔΖ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)



13537-Λύση

α) Έστω $\widehat{A} = \omega$ (1).



i. Γνωρίζουμε ότι $A\Delta = B\Delta$, άρα το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση AB, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{B}_1 = \omega$ (2).

Η γωνία $\widehat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $AB\Delta$, άρα είναι $\widehat{\Delta}_1 = 2\omega$ (3).

Είναι $B\Gamma = B\Delta$ (από τα δεδομένα), άρα το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση $\Gamma\Delta$, οπότε οι προσκείμενες στη βάση του γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}_1$, οπότε λόγω της σχέσης (3) θα είναι $\widehat{\Gamma} = 2\omega$ (4).

Από τις σχέσεις (1), (4) προκύπτει ότι $\widehat{\Gamma} = 2\widehat{A}$.

ii. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ (από τα δεδομένα), οπότε και οι προσκείμενες στη βάση $B\Gamma$ γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, άρα θα είναι και $\widehat{B} = 2\omega$ (5) λόγω της σχέσης (4).

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o$. Αξιοποιώντας τις σχέσεις (1), (4) και (5) θα είναι $\omega + 2\omega + 2\omega = 180^o$ ή $\omega = 36^o$. Άρα $\widehat{A} = 36^o$.

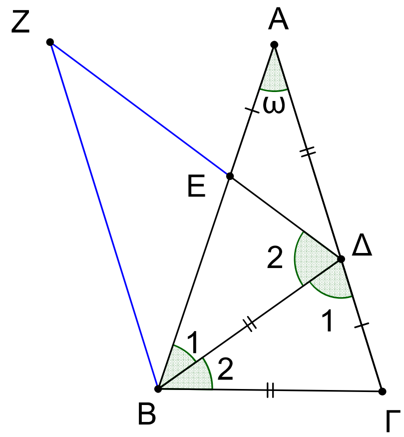
iii. Ένας τρόπος να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές είναι να αποδείξουμε ότι $AE = \Delta E$. Όμως από τα δεδομένα είναι $AE = \Delta\Gamma$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $\Delta E = \Delta\Gamma$. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $BE\Delta$ τα οποία έχουν:

- $B\Delta = B\Delta$, κοινή πλευρά.
- $B\Gamma = BE$, γιατί $B\Gamma = A\Delta$ από τα δεδομένα και $BE = A\Delta$ ως διαφορές των ίσων τμημάτων $AB = A\Gamma$ και $AE = \Gamma\Delta$.
- $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, αφού $\widehat{B}_1 = \omega = 36^o$ και $\widehat{B}_2 = \widehat{B} - \widehat{B}_1 = 2\omega - \omega = 36^o$.

Τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $BE\Delta$ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ). Άρα θα είναι ίσες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}_1, \widehat{B}_2$, δηλαδή $\Delta E = \Delta\Gamma$.

13537-Λύση

β)



Στην ισότητα των τριγώνων ΒΓΔ και ΒΕΔ έχουμε αποδείξει ότι $ΒΓ = ΒΕ$, οπότε και οι αντίστοιχες γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$. Από τη σχέση (3) έχουμε ότι $\hat{Δ}_1 = 72^o$, άρα $\hat{Δ}_2 = 72^o$.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΒΔ έχουν:

- $ΒΓ = ΒΔ$, από τα δεδομένα.
- $ΑΓ = ΖΔ$, από το δεδομένο του ερωτήματος.
- $\hat{Γ} = \hat{Δ}_2 = 72^o$.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΒΔ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ). Όμως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, οπότε και το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.

13538

ΘΕΜΑ 4

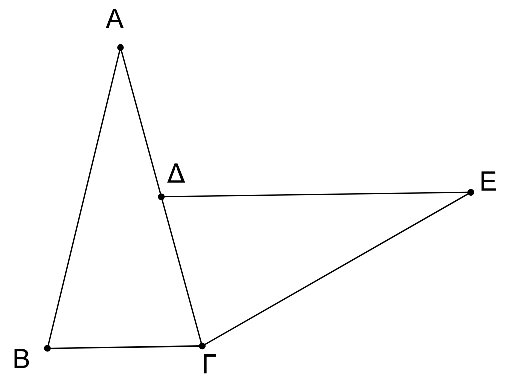
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ με $ΑΒ = ΑΓ = ΕΓ = ΕΔ$, όπου Δ είναι το μέσο της ΑΓ και $ΒΓ = \frac{ΑΒ}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Αν η προέκταση της ΕΔ προς το Δ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο Ζ είναι το μέσο της ΑΒ. (Μονάδες 8)

ii. $Ε\hat{Α}Γ = Ε\hat{Ζ}Γ$. (Μονάδες 7)



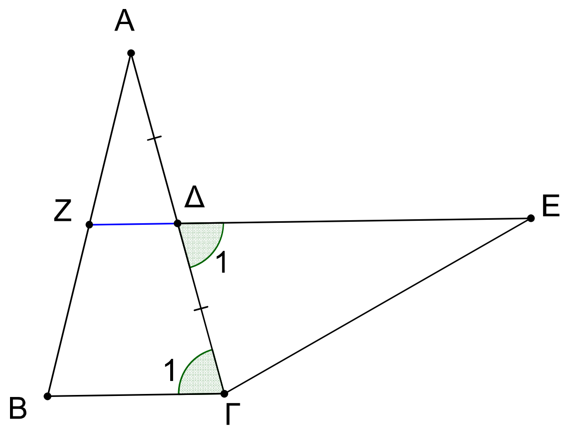
13538-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ έχουν:

- ΑΒ = ΕΓ, από τα δεδομένα.
- ΑΓ = ΕΔ, από τα δεδομένα.
- ΒΓ = ΓΔ, γιατί $ΒΓ = \frac{ΑΒ}{2}$ και $ΓΔ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΑΒ}{2}$, αφού το Δ είναι το μέσο της ΑΓ.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ είναι ίσα, γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (κριτήριο ΠΠΠ).

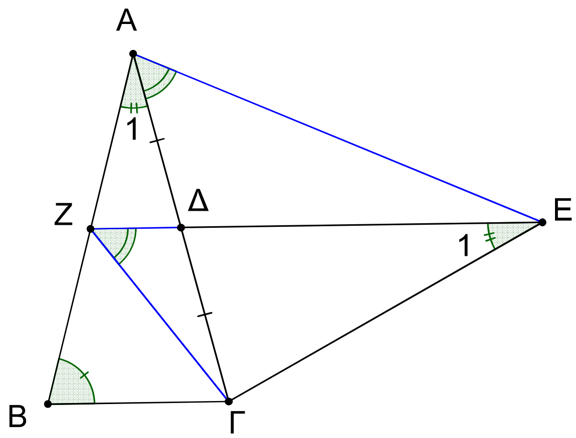
β)



i. Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΕΓΔ προκύπτει ότι $\hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1$, γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ, ΕΓ αντίστοιχα.

Οι ΒΓ και ΔΕ τεμνόμενες από την ΑΓ σχηματίζουν ίσες τις εντός εναλλάξ γωνίες τους $\hat{Γ}_1$ και $\hat{Δ}_1$, άρα η ΒΓ είναι παράλληλη στη ΔΕ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Δ είναι το μέσο της ΑΓ και η ΔΖ είναι παράλληλη στη ΒΓ, άρα το Ζ είναι το μέσο της ΑΒ.



ii. Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΕΓΔ προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$, γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα. Άρα το τετράπλευρο ΑΕΓΖ

13538-Λύση

είναι εγγράψιμο, αφού η πλευρά του ΓΖ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Α και Ε υπό ίσες γωνίες. Έτσι στο εγγράψιμο ΑΕΓΖ η πλευρά ΓΕ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Α και Ζ υπό ίσες γωνίες, άρα θα είναι $E\hat{A}\Gamma = E\hat{Z}\Gamma$.

13539

ΘΕΜΑ 4

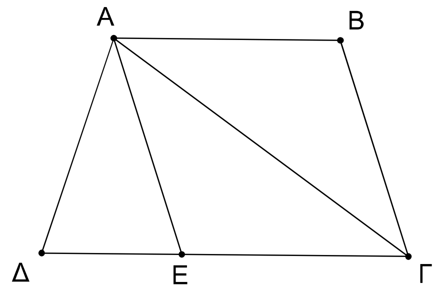
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και $\widehat{A} = 108^o$. Στη βάση ΓΔ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε οι ΑΓ, ΑΕ να τριχοτομούν τη γωνία $\widehat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 10)

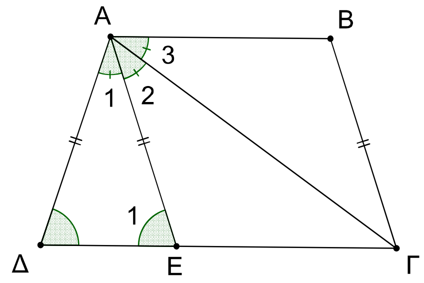
β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

ii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)



13539-Λύση



α) Αφού τα τμήματα ΑΓ, ΑΕ να τριχοτομούν τη γωνία $\widehat{Α} = 108^ο$, θα είναι

$\widehat{Α}_1 = \widehat{Α}_2 = \widehat{Α}_3 = \frac{\widehat{Α}}{3} = \frac{108^ο}{3} = 36^ο$.

Οι γωνίες $\widehat{Α}$ και $\widehat{Δ}$ του τραπεζίου είναι παραπληρωματικές, γιατί είναι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ. Άρα $\widehat{Δ} = 180^ο - \widehat{Α} = 180^ο - 108^ο = 72^ο$.

Είναι $\widehat{Ε}_1 = Β\widehat{Α}Ε$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΕ. Άρα $\widehat{Ε}_1 = Β\widehat{Α}Ε = \widehat{Α}_2 + \widehat{Α}_3 = 36^ο + 36^ο = 72^ο$.

β) i. Από το ερώτημα α) έχουμε ότι $\widehat{Δ} = \widehat{Ε}_1 = 72^ο$ (1), συνεπώς το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με ΑΔ = ΑΕ (2), γιατί έχει δύο γωνίες ίσες.

ii. Οι προσκείμενες γωνίες $Β\widehat{Γ}Δ$ και $\widehat{Δ}$ στη βάση ΓΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι ίσες, γιατί το τραπέζιο είναι ισοσκελές. Άρα $Β\widehat{Γ}Δ = \widehat{Δ}$ (3).

Από τις ισότητες (1) και (3) προκύπτει ότι $Β\widehat{Γ}Δ = \widehat{Ε}_1$, οπότε οι ΑΕ, ΒΓ είναι παράλληλες, γιατί τεμνόμενες από τη ΓΔ σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.

Είναι ΑΔ = ΒΓ (4), γιατί το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές. Από τις ισότητες (2) και (4) προκύπτει ότι ΑΕ = ΒΓ. Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του ΑΕ, ΒΓ είναι ίσες και παράλληλες. Όμως η ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $Β\widehat{Α}Ε$, αφού από το ερώτημα α) έχουμε ότι $\widehat{Α}_2 = \widehat{Α}_3 = 36^ο$. Συνεπώς το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι ρόμβος, γιατί είναι παραλληλόγραμμο και η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί τη γωνία του $Β\widehat{Α}Ε$.

13619

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος με $\widehat{A}_{\varepsilon\xi} = 100^o$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 220^o$.

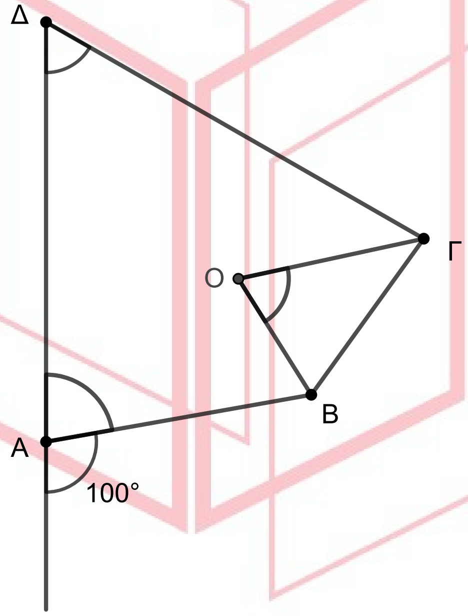
Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο Ο, τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\hat{\Delta}$ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $B\widehat{O}\Gamma = 70^o$.

(Μονάδες 15)

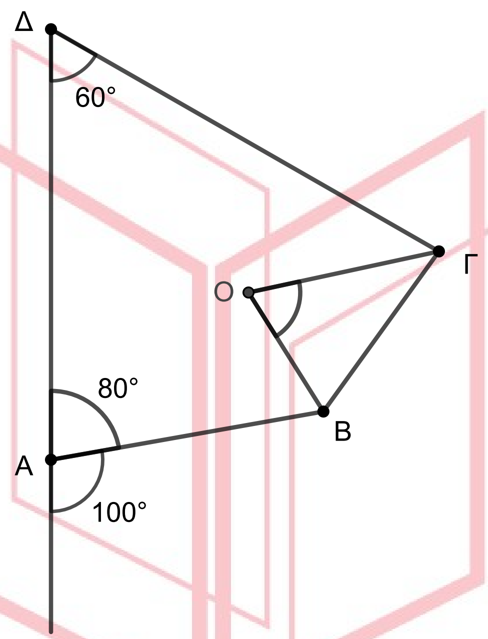


13619-Λύση

ΛΥΣΗ

Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\widehat{A}_{\varepsilon\xi} = 100^o$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 220^o$. Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ο.

α)



Για τις γωνίες $\widehat{A}_{\varepsilon\xi}$ και $\widehat{A}$ ισχύει:

$\widehat{A}_{\varepsilon\xi} + \widehat{A} = 180^o$ ή $100^o + \widehat{A} = 180^o$.

Άρα, $\widehat{A} = 180^o - 100^o = 80^o$.

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει:

$\widehat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^o$ ή $80^o + 220^o + \hat{\Delta} = 360^o$.

Άρα, $\hat{\Delta} = 360^o - 80^o - 220^o = 60^o$.

β) Στο τρίγωνο ΒΓΟ ισχύει:

$$O\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}O + B\hat{O}\Gamma = 180^o \quad (1)$$

Όμως

$$O\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}O = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} = \frac{220^o}{2} = 110^o$$

Οπότε, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$110^o + B\hat{O}\Gamma = 180^o$$

Άρα, $B\hat{O}\Gamma = 180^o - 110^o = 70^o$.

13653

ΘΕΜΑ 2

Σχεδιάζουμε γωνία $x\widehat{O}y = 60^o$ και παίρνουμε σημείο Α επί της πλευράς Οx, τέτοιο ώστε $AO = 2$. Φέρουμε τη διχοτόμο Οδ της γωνίας $x\widehat{O}y$ και θεωρούμε σημείο Μ στην Οδ, τέτοιο ώστε $AM = AO$. Να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία $\delta\widehat{O}y$.

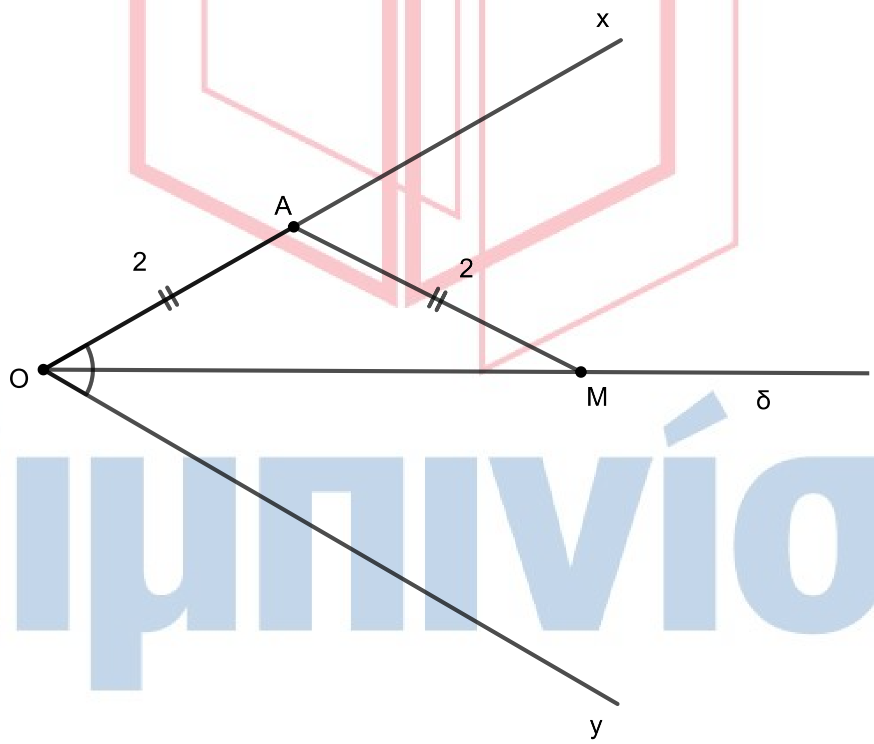
(Μονάδες 6)

β) Τις γωνίες του τριγώνου ΑΟΜ.

(Μονάδες 9)

γ) Το μήκος του ύψους ΑΒ που αντιστοιχεί στη βάση ΟΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΜ.

(Μονάδες 10)



13653-Λύση

α) Η ημιευθεία Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\widehat{O}y$, οπότε οι γωνίες $x\widehat{O}\delta$ και $\delta\widehat{O}y$ θα είναι ίσες.

Άρα, $x\widehat{O}\delta = \delta\widehat{O}y = 60^{o} \div 2 = 30^{o}$.

β) Είναι $A\widehat{O}M = x\widehat{O}\delta = 30^{o}$.

Το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ισοσκελές με βάση ΟΜ, αφού $AO = AM$.

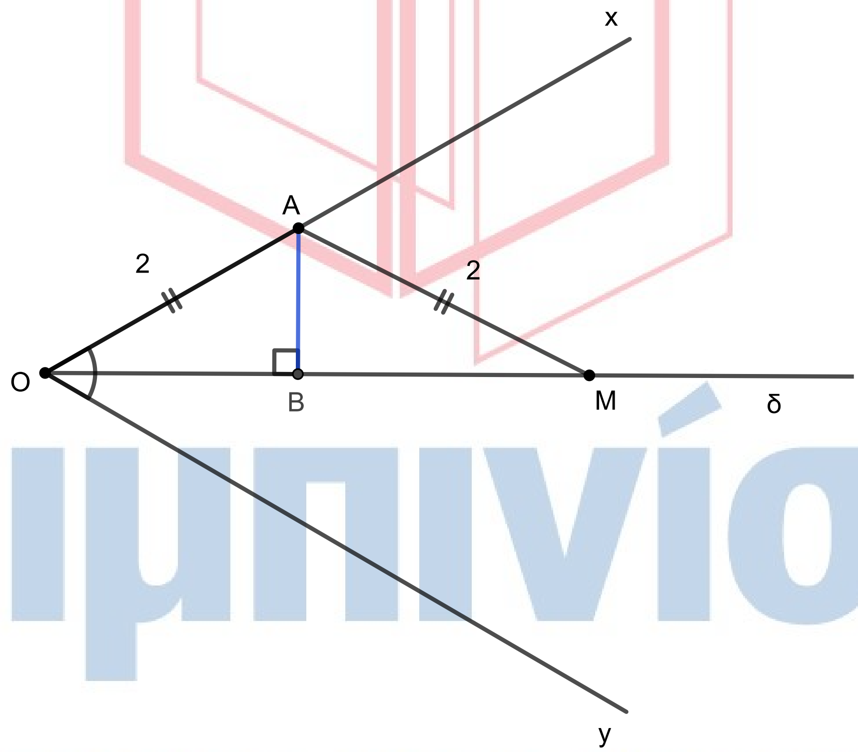
Επομένως, οι γωνίες $A\widehat{O}M$ και $A\widehat{M}O$ είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση.

Άρα, $A\widehat{O}M = A\widehat{M}O = 30^{o}$.

Στο τρίγωνο ΑΟΜ ισχύει:

$A\widehat{O}M + A\widehat{M}O + M\widehat{A}O = 180^{o}$ ή $30^{o} + 30^{o} + M\widehat{A}O = 180^{o}$. Άρα, $M\widehat{A}O = 120^{o}$.

γ) Φέρουμε το ύψος ΑΒ που αντιστοιχεί στη βάση ΟΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΜ.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ είναι $A\widehat{O}B = 30^{o}$. Οπότε, η απέναντι κάθετη πλευρά, δηλαδή η ΑΒ, ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΟΑ.

Άρα, $AB = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$.

13654

ΘΕΜΑ 2

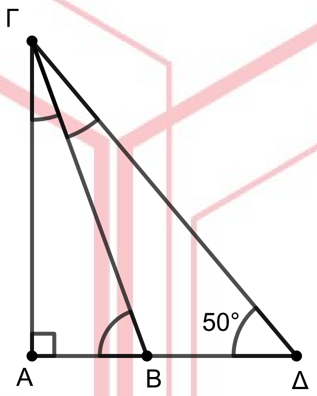
Στο ακόλουθο σχήμα είναι $\widehat{A} = 90^o$, $A\widehat{B}\Gamma - A\widehat{\Gamma}B = 50^o$ και $A\widehat{\Delta}\Gamma = 50^o$.

α) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες $A\widehat{B}\Gamma$ και $A\widehat{\Gamma}B$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{\Gamma}\Delta$.

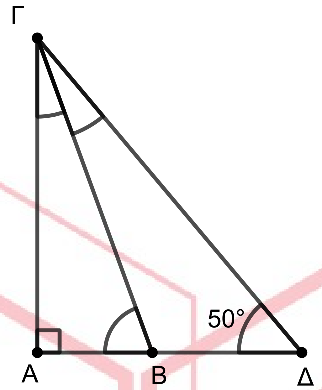
(Μονάδες 15)



13654-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



Σύμφωνα με την υπόθεση είναι $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B + 50^o$.

Για τις οξείες γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}B$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει:

$A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B = 90^o$ ή $A\hat{\Gamma}B + 50^o + A\hat{\Gamma}B = 90^o$ ή $2A\hat{\Gamma}B = 40^o$.

Άρα, $A\hat{\Gamma}B = 20^o$ κι επομένως $A\hat{B}\Gamma = 20^o + 50^o = 70^o$.

β) Η γωνία $\Delta\hat{B}A$ είναι ευθεία, οπότε:

$\Delta\hat{B}\Gamma + \Gamma\hat{B}A = 180^o$ ή $\Delta\hat{B}\Gamma + 70^o = 180^o$.

Άρα, $\Delta\hat{B}\Gamma = 180^o - 70^o = 110^o$.

Στο τρίγωνο ΔΒΓ ισχύει:

$\Gamma\hat{\Delta}B + \Delta\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o$ ή $50^o + 110^o + B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o$.

Άρα, $B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o - 50^o - 110^o = 20^o$.

Αφού $A\hat{\Gamma}B = B\hat{\Gamma}\Delta = 20^o$, συμπεραίνουμε ότι η ΓΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$.

13670

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 2ΑΒ. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΒΓ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΔ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΖΔ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο ΖΑΔΕ είναι εγγράψιμο.

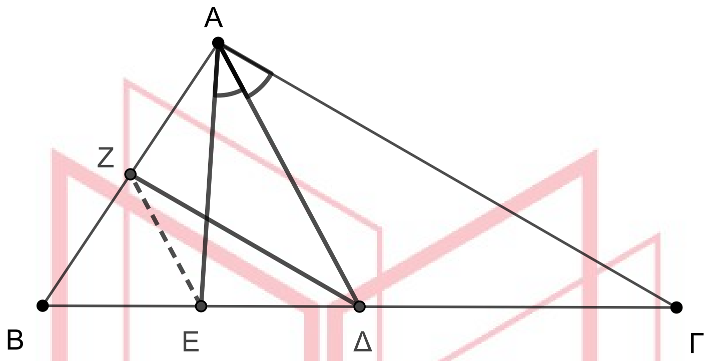
(Μονάδες 5)

γ) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΕΑΓ}$.

(Μονάδες 10)

13670-Λύση

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = 2ΑΒ$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΒΓ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΔ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Ζ.



α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο προς την πλευρά ΑΓ και το Δ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ. Επομένως, το Ζ θα είναι μέσο της πλευράς ΑΒ.

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΒΖ έχουν:

- $ΑΒ = ΒΔ$, ως μισά του ΒΓ, αφού $ΒΓ = 2ΑΒ$ (υπόθεση) και $ΒΓ = 2ΒΔ$ (το Δ είναι μέσο του ΒΓ).
- $ΒΕ = ΒΖ$, ως μισά των ίσων τμημάτων ΒΔ και ΑΒ αντίστοιχα.
- $\hat{B}$ κοινή γωνία.

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΒΖ είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (Π-Γ-Π).

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΕ και ΒΖΔ προκύπτει ότι $B\hat{A}E = B\hat{\Delta}Z$ (1), ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ και ΒΖ αντίστοιχα.

Το τετράπλευρο ΖΑΔΕ είναι εγγράψιμο διότι η πλευρά ΖΕ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Α και Δ υπό τις ίσες γωνίες $B\hat{A}E$ και $B\hat{\Delta}Z$ αντίστοιχα.

γ) Το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΒΔ$, οπότε $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Delta}A$ (2), ως προσκείμενες στη βάση ΑΔ.

Αφαιρώντας τις ισότητες (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$B\hat{A}\Delta - B\hat{A}E = B\hat{\Delta}A - B\hat{\Delta}Z$ ή $E\hat{A}\Delta = Z\hat{\Delta}A$ (3).

Επίσης, $Z\hat{\Delta}A = \Delta\hat{A}\Gamma$ (4), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΖ και ΑΓ τεμνόμενων από την ΑΔ.

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε $E\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$, άρα η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{A}\Gamma$.

13672

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^o$ και $AB > A\Gamma$. Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε κάθετη στη ΒΓ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία τέμνει τη διχοτόμο ΑΗ της γωνίας $\widehat{A}$ στο σημείο Ε. Έστω ΑΖ το ύψος στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\widehat{A}Z = \Delta\widehat{A}B$.

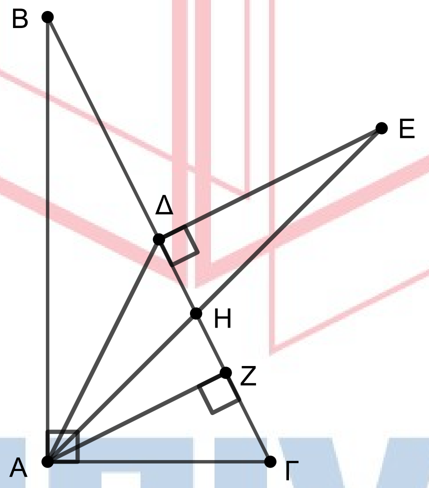
(Μονάδες 8)

β) $A\Delta = \Delta E$.

(Μονάδες 9)

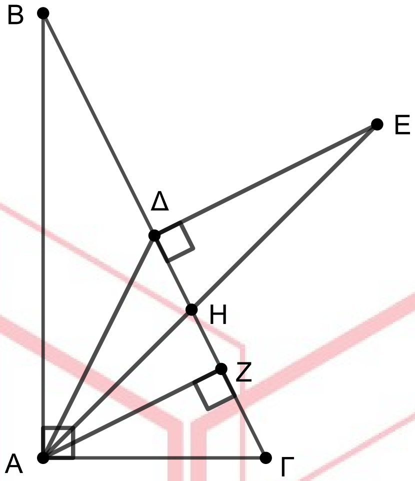
γ) $Z\widehat{A}\Delta = \widehat{\Gamma} - \widehat{B}$.

(Μονάδες 8)



13672-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΑΔ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΓ, οπότε $ΑΔ = ΔΒ = ΔΓ$.

Οι οξείες γωνίες $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι συμπληρωματικές, οπότε:

$$\hat{Β} = 90^{o} - \hat{Γ} \quad (1)$$

Οι οξείες γωνίες $Γ\hat{Α}Ζ$ και $\hat{Γ}$ του ορθογωνίου τριγώνου ΖΑΓ είναι συμπληρωματικές, οπότε:

$$Γ\hat{Α}Ζ = 90^{o} - \hat{Γ} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $Γ\hat{Α}Ζ = \hat{Β}$.

Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με $ΑΔ = ΔΒ$, οπότε θα είναι $Δ\hat{Α}Β = \hat{Β}$.

Επομένως, οι γωνίες $Γ\hat{Α}Ζ$ και $Δ\hat{Α}Β$ θα είναι ίσες, δηλαδή $Γ\hat{Α}Ζ = Δ\hat{Α}Β$ (3).

β) Η ΑΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$, οπότε $Γ\hat{Α}Η = Η\hat{Α}Β$ (4).

Με αφαίρεση των σχέσεων (3) και (4) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$Γ\hat{Α}Η - Γ\hat{Α}Ζ = Η\hat{Α}Β - Δ\hat{Α}Β$ ή $Ζ\hat{Α}Η = Η\hat{Α}Δ$ (5).

Επίσης, ΑΖ//ΔΕ διότι είναι κάθετες στη ΒΓ.

Άρα, $Ζ\hat{Α}Η = \hat{Ε}$ (6), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΖ και ΔΕ τεμνόμενων από την ΑΕ.

Από τις ισότητες (5) και (6) προκύπτει ότι $Η\hat{Α}Δ = \hat{Ε}$, οπότε θα είναι ίσες και οι απέναντι πλευρές τους ΔΕ και ΑΔ αντίστοιχα στο τρίγωνο ΑΔΕ, δηλαδή $ΔΕ = ΑΔ$.

γ) Είναι $Γ\hat{Α}Ζ + Ζ\hat{Α}Δ + Δ\hat{Α}Β = \hat{Α}$, οπότε:

13672-Λύση

$Z\widehat{A}\Delta = \widehat{A} - \Gamma\widehat{A}Z - \Delta\widehat{A}B = 90^o - \widehat{B} - \widehat{B} = \widehat{\Gamma} - \widehat{B}$, αφού είναι $\Gamma\widehat{A}Z = \Delta\widehat{A}B = \widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma} = 90^o - \widehat{B}$.

13687

ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B = 40^o$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε $ΑΓ = ΟΑ$ και $ΒΔ = ΟΒ$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 70^o$.

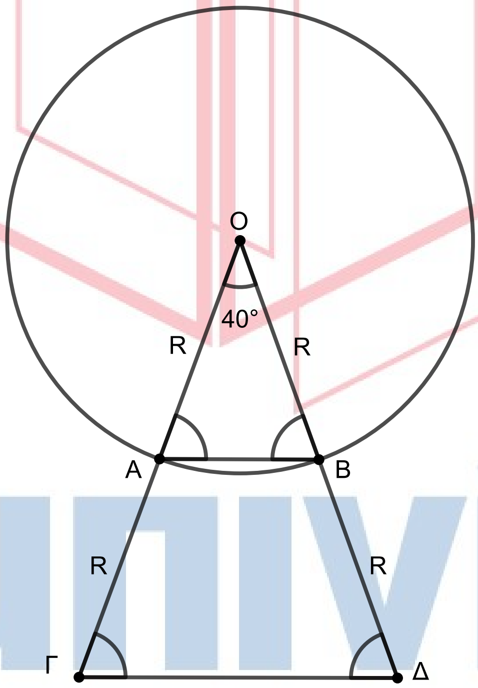
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $O\hat{Γ}Δ$ και $O\hat{Δ}Γ$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι $AB // ΓΔ$.

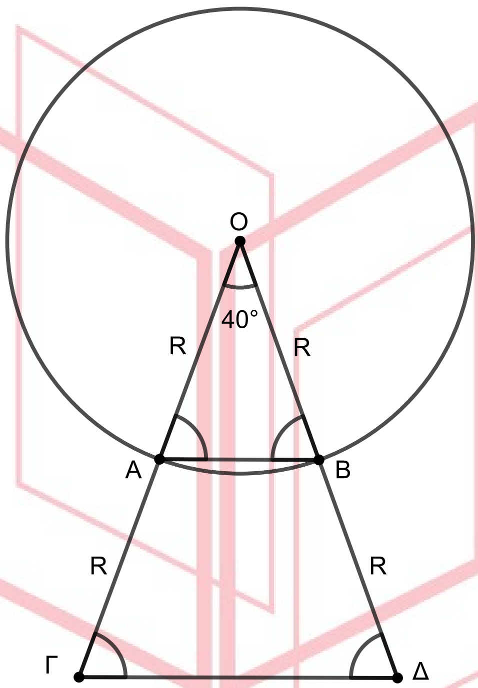
(Μονάδες 5)



13687-Λύση

ΛΥΣΗ

Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία $A\widehat{O}B = 40^o$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε $A\Gamma = OA$ και $B\Delta = OB$.



α) Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, αφού οι πλευρές ΟΑ και ΟΒ είναι ίσες με την ακτίνα R.

Επομένως, οι γωνίες $O\widehat{A}B$ και $O\widehat{B}A$ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση ΑΒ.

Στο τρίγωνο ΟΑΒ ισχύει:

$\widehat{O} + O\widehat{A}B + O\widehat{B}A = 180^o$ ή $40^o + 2O\widehat{A}B = 180^o$ ή $2O\widehat{A}B = 140^o$.

Άρα, $O\widehat{A}B = 70^o$ και $O\widehat{B}A = 70^o$.

β) Τα τμήματα ΟΓ και ΟΔ είναι ίσα ως αθροίσματα ίσων τμημάτων, αφού $O\Gamma = OA + A\Gamma = 2R$ και $O\Delta = OB + B\Delta = 2R$. Επομένως, το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ.

Στο τρίγωνο ΟΓΔ ισχύει:

$\widehat{O} + O\widehat{\Gamma}\Delta + O\widehat{\Delta}\Gamma = 180^o$ ή $40^o + 2O\widehat{\Gamma}\Delta = 180^o$ ή $2O\widehat{\Gamma}\Delta = 140^o$.

Άρα, $O\widehat{\Gamma}\Delta = 70^o$ και $O\widehat{\Delta}\Gamma = 70^o$.

γ) Οι ΑΒ και ΓΔ τέμνονται από την ΑΓ και σχηματίζουν τις εκτός εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους $O\widehat{A}B$ και $O\widehat{\Gamma}\Delta$ ίσες. Επομένως, ΑΒ//ΓΔ.

13697

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα ΑΕ, ΒΖ, ΒΔ και ΓΕ αναπαριστάνουν τέσσερεις ίσους ράβδους μήκους 40 cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου.

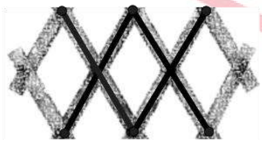
Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή ΑΕ // ΒΔ και ΒΖ // ΓΕ, και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή Κ κοινό μέσο των ΑΕ, ΒΖ και Λ κοινό μέσο των ΒΔ, ΓΕ. Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι ΑΕ και ΒΖ με κορυφή το κοινό τους μέσο Κ, η γωνία $B\widehat{K}E$, είναι ίση με 120^0.

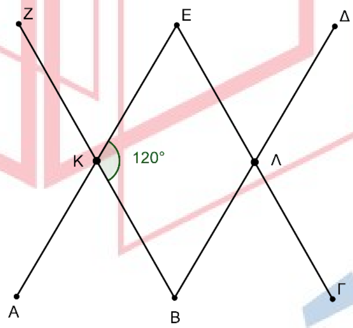
α) Να αποδείξετε ότι $A\widehat{K}B = K\widehat{B}\Lambda = B\widehat{\Lambda}\Gamma = 60^0$. (Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ είναι ίσα και ισόπλευρα. Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία. (Μονάδες 6)





13697-Λύση

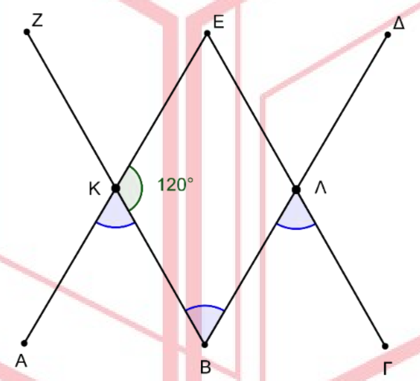
ΛΥΣΗ

α) Οι γωνίες $A\widehat{K}B$ και $B\widehat{K}E$ είναι παραπληρωματικές, οπότε ισχύει $A\widehat{K}B + B\widehat{K}E = 180^0$ και αφού $B\widehat{K}E = 120^0$ τότε $A\widehat{K}B + 120^0 = 180^0$ ή $A\widehat{K}B = 180^0 - 120^0$ ή $A\widehat{K}B = 60^0$ (1)

Είναι $A\widehat{K}B = K\widehat{B}\Lambda$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΕ και ΒΔ με τέμνουσα την ΒΖ και αφού είναι $A\widehat{K}B = 60^0$ από τη σχέση (1), θα είναι και $K\widehat{B}\Lambda = 60^0$ (2).

Είναι $K\widehat{B}\Lambda = B\widehat{\Lambda}\Gamma$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΖ και ΓΕ με τέμνουσα την ΒΔ και αφού είναι $K\widehat{B}\Lambda = 60^0$ από σχέση (2), θα είναι και $B\widehat{\Lambda}\Gamma = 60^0$ (3)

Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $A\widehat{K}B = K\widehat{B}\Lambda = B\widehat{\Lambda}\Gamma = 60^0$ (4).



β) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ έχουν:

- ΑΚ = ΒΛ = 20 cm, ως μισά των ίσων τμημάτων ΑΕ και ΒΔ μήκους 40 cm όπου Κ και Λ τα μέσα τους.
- ΚΒ = ΛΓ = 20 cm, ως μισά των ίσων τμημάτων ΒΖ και ΓΕ μήκους 40 cm όπου Κ και Λ τα μέσα τους.
- $A\widehat{K}B = B\widehat{\Lambda}\Gamma = 60^0$, από σχέση (4)

Επομένως τα τρίγωνα θα είναι ίσα, γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες. Οπότε θα είναι $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ και $\widehat{B}_2 = \widehat{\Gamma}_2$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΚΒ, ΛΓ και ΚΑ, ΛΒ αντίστοιχα.

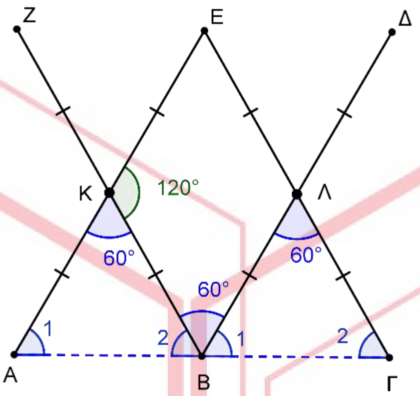
Επειδή είναι ΑΚ= ΚΒ = 20 cm, το τρίγωνο ΑΚΒ θα είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, οπότε θα έχει τις προσκείμενες στη βάση του γωνίες ίσες, δηλαδή $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2$ (5).

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΚΒ ισχύει ότι $\widehat{A}_1 + A\widehat{K}B + \widehat{B}_2 = 180^0$ και αφού είναι $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2$ από σχέση (5) και $A\widehat{K}B = 60^0$ τότε $2\widehat{A}_1 + 60^0 = 180^0$ ή $2\widehat{A}_1 = 180^0 - 60^0$ ή $2\widehat{A}_1 = 120^0$ ή $\widehat{A}_1 = 60^0$ (6).

Από σχέσεις (4), (5) και (6) προκύπτει ότι $A\widehat{K}B = \widehat{A}_1 = \widehat{B}_2 = 60^0$.

13697-Λύση

Συνεπώς, το τρίγωνο ΑΚΒ θα είναι ισόπλευρο γιατί έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, οπότε και το ίσο του τρίγωνο ΒΛΓ θα είναι και αυτό ισόπλευρο, οπότε κάθε γωνία του θα είναι ίση με 60^0, δηλαδή $B\widehat{\Lambda}\Gamma = \widehat{\Gamma}_2 = \widehat{B}_1 = 60^0$.



γ) Για να είναι τα Α, Β και Γ σημεία της ίδιας ευθείας, αρκεί να δειχθεί ότι η γωνία $A\widehat{B}\Gamma$ είναι ευθεία γωνία ή ότι $A\widehat{B}\Gamma = 180^0$.

Είναι $A\widehat{B}\Gamma = \widehat{B}_2 + K\widehat{B}\Lambda + \widehat{B}_1 = 3\cdot 60^0 = 180^0$, αφού είναι $\widehat{B}_2 = \widehat{B}_1 = 60^0$ ως γωνίες ισοπλεύρων τριγώνων ΑΚΒ και ΒΛΓ. Επομένως, τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

13699

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται δυο κύκλοι (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α. Έστω ότι μια ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους Β και Γ αντίστοιχα και ότι η εσωτερική εφαπτομένη (ζ) των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α τέμνει την ευθεία (ε) σε σημείο Μ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι ευθείες ΚΒ και ΛΜ τέμνονται σε σημείο, έστω Δ. (Μονάδες 10)

ii. το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

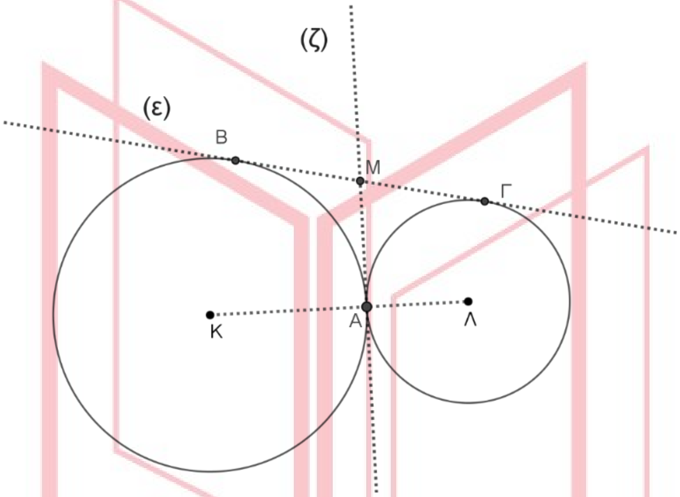
γ) Με ποια σχέση πρέπει να συνδέονται οι ακτίνες ρ_1 και ρ_2 των δύο κύκλων ώστε το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

13699-Λύση

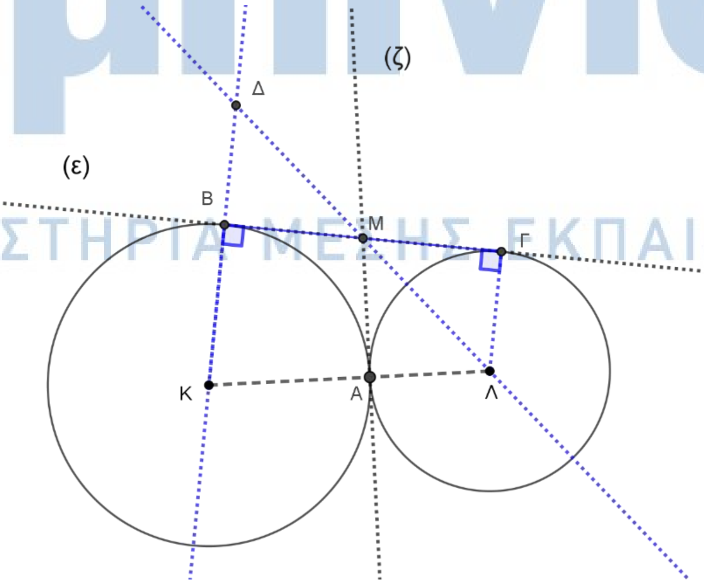
ΛΥΣΗ

Έστω οι κύκλοι (Κ, $ρ_1$) και (Λ, $ρ_2$) οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α, (ε) η ευθεία η οποία εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους Β και Γ αντίστοιχα. Έστω (ζ) η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α και Μ το σημείο τομής της με την ευθεία (ε).



α) Έστω ΚΒ και ΛΓ οι ακτίνες των δυο κύκλων (Κ, $ρ_1$) και (Λ, $ρ_2$) στα σημεία επαφής Β και Γ αντίστοιχα. Τότε τα ΚΒ και ΛΓ θα είναι κάθετα στην (ε), οπότε θα είναι ΚΒ // ΛΓ ως κάθετες στην ίδια ευθεία (ε).

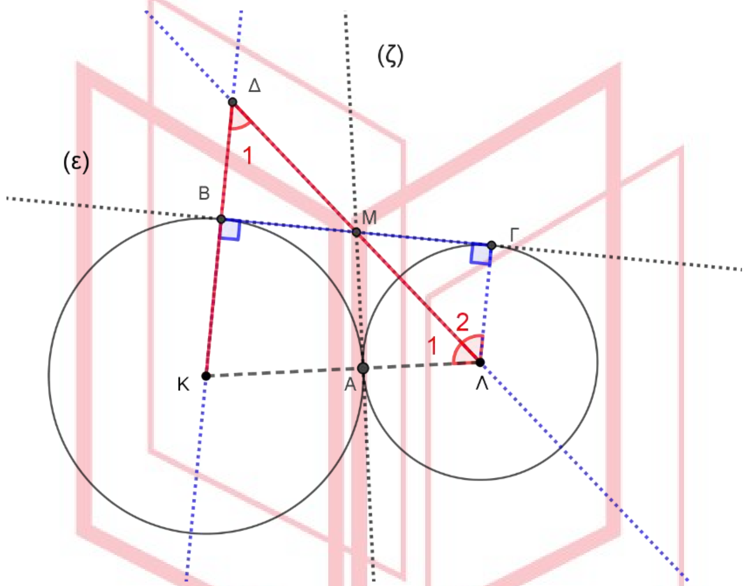
Η ΛΜ δεν είναι κάθετη στην (ε), γιατί αν η ΛΜ ήταν κάθετη στη (ε) τότε από το σημείο Λ θα άγονταν δυο κάθετες στην (ε), η ΛΜ και η ΛΓ ως ακτίνα στο σημείο επαφής Γ του κύκλου (Λ, $ρ_2$) με την ευθεία (ε), που είναι άτοπο, και αφού η ΛΜ τέμνει την ΛΓ στο Λ θα τέμνει και την παράλληλή της την ΚΒ έστω σε σημείο Δ.



β) Είναι ΚΔ // ΛΓ και τις τέμνει η ΛΔ, οπότε $\widehat{Δ}_1 = \widehat{Λ}_2$ (1) ως γωνίες εντός εναλλάξ.

13699-Λύση

Η ΔΛ είναι διακεντρική ευθεία του σημείου Μ στον κύκλο (Λ, ρ_2), οπότε θα διχοτομεί τη γωνία $\Gamma\widehat{\Lambda}A$ των ακτίνων στα σημεία επαφής Γ και Α, δηλαδή είναι $\widehat{\Lambda}_2 = \widehat{\Lambda}_1$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Lambda}_1$. Οπότε το τρίγωνο ΔΚΛ έχει δυο γωνίες ίσες, άρα θα είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΚΛ και ΚΔ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Delta}_1$ και $\widehat{\Lambda}_1$ αντίστοιχα.



γ) Το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ με ίσες πλευρές τις ΚΛ, ΚΒ θα είναι ορθογώνιο όταν $\Delta\widehat{K}\Lambda = 90^0$ Αν $\Delta\widehat{K}\Lambda = 90^0$ τότε η ΚΛ είναι κάθετη στην ΚΔ. Αν η ΚΛ είναι κάθετη στην ΚΔ, τότε η ΚΛ θα είναι παράλληλη με την ευθεία (ε) ως κάθετες στην ίδια ευθεία ΚΔ, οπότε και το τετράπλευρο ΚΛΓΒ θα είναι ορθογώνιο γιατί θα είχε τρεις ορθές γωνίας, τις $\Delta\widehat{K}\Lambda$, $K\widehat{B}\Gamma$ και $\Lambda\widehat{\Gamma}B$. Αν το ΚΛΓΒ είναι ορθογώνιο τότε θα ισχύει ΚΒ = ΛΓ ή $\rho_1 = \rho_2$. Επομένως, αν οι κύκλοι είναι ίσοι, τότε το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ θα είναι ορθογώνιο.

13704

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

ii. Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών του και μικρότερη από τη διαφορά τους.

iii. Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

iv. Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

v. Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι: *αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή*.

(Μονάδες 15)

13704-Λύση

α) i. Σωστό (σελ. 45)

ii. Λάθος. Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα: Κάθε πλευρά τριγώνου είναι **μικρότερη** από το άθροισμα των δύο άλλων και **μεγαλύτερη** από τη διαφορά τους.

iii. Λάθος, γιατί δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη είναι παράλληλες αν σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες **παραπληρωματικές**.

iv. Σωστό (σελ. 113)

v. Σωστό (σελ. 136)

β) Θεώρημα ΙΙ, σελ. 114

13741

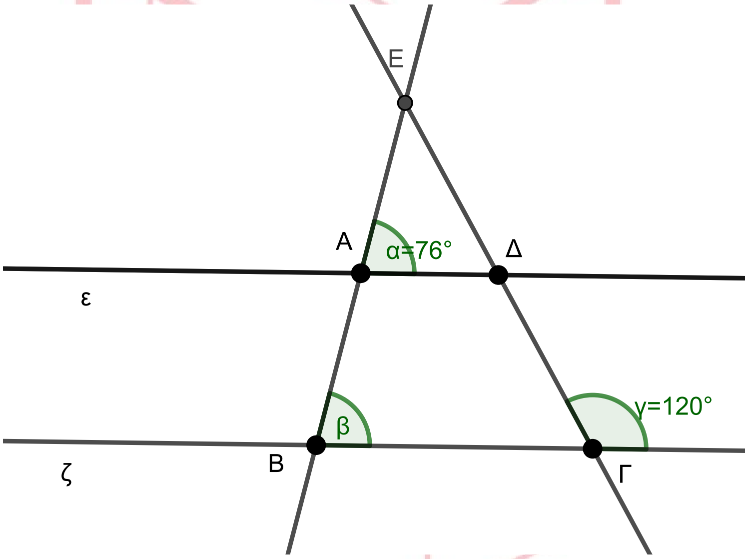
ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες. Αν είναι $\widehat{\alpha} = 76^o$ και $\hat{\gamma} = 120^o$, να υπολογίσετε :

α) Τη γωνία $\widehat{\beta}$. (Μονάδες 5)

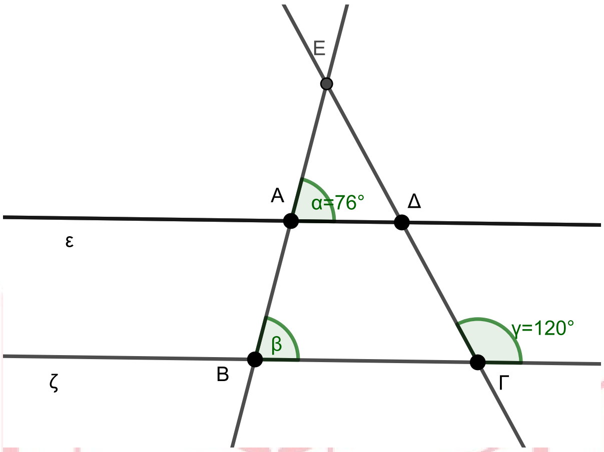
β) Τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ . (Μονάδες 12)

γ) Τη γωνία $\widehat{\mathrm{E}}$ του τριγώνου ΕΑΔ. (Μονάδες 8)



13741-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Οι γωνίες $\widehat{\alpha}$ και $\widehat{\beta}$ είναι εκτός εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ε και ζ που τέμνονται από την ευθεία ΑΒ. Οπότε $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta} = 76^o$.

β) Η γωνία $\widehat{\Gamma}$ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\gamma} = 120^o$, έτσι $\widehat{\Gamma} = 180^o - 120^o = 60^o$.

Οι γωνίες $\widehat{\Gamma}$ και $\widehat{\Delta}$ του τετράπλευρου είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ευθειών ε και ζ που τέμνονται από τη ΓΔ. Άρα είναι παραπληρωματικές, οπότε

$\widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 180^o$ ή $\widehat{\Delta} = 180^o - 60^o = 120^o$.

Η γωνία $\widehat{A}$ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\widehat{\alpha} = 76^o$. Έτσι $\widehat{A} + \widehat{\alpha} = 180^o$ ή $\widehat{A} + 76^o = 180^o$ και τελικά $\widehat{A} = 180^o - 76^o = 104^o$.

γ) Στο τρίγωνο ΕΑΔ έχουμε ήδη γνωστή τη γωνία $\widehat{\alpha} = 76^o$. Επιπλέον η γωνία $A\widehat{\Delta}E$ του τριγώνου είναι η παραπληρωματική της γωνίας $\widehat{\Delta}$ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ οπότε $A\widehat{\Delta}E + \widehat{\Delta} = 180^o$, ή $A\widehat{\Delta}E = 180^o - 120^o = 60^o$. Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ είναι 180^o, οπότε $A\widehat{\Delta}E + \widehat{\alpha} + \widehat{E} = 180^o$ ή $60^o + 76^o + \widehat{E} = 180^o$, δηλαδή $136^o + \widehat{E} = 180^o$ ή $\widehat{E} = 180^o - 136^o = 44^o$.

13742

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Μ το μέσο της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε ΒΚ ⊥ ΒΓ έτσι ώστε ΒΚ = ΑΓ (το σημείο Κ είναι στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α).

α) Να αποδείξετε ότι ΑΜ//ΒΚ και ΑΒ = ΒΚ. (Μονάδες 8)

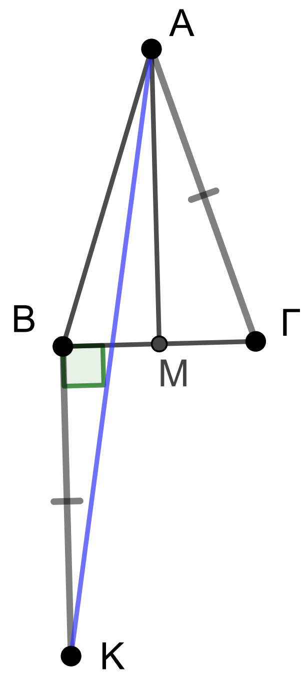
β) Να δείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΜ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι $B\widehat{K}A = 45^o - \frac{\widehat{\Gamma}}{2}$ (Μονάδες 6)

δ) Μπορεί το τετράπλευρο ΑΒΚΜ να είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

13742-Λύση

Έστω το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο Μ της πλευράς του ΒΓ. Φέρουμε ΒΚ⊥ΒΓ στο σημείο Β και θεωρούμε τμήμα ΒΚ=ΑΓ.



α) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, το τμήμα ΑΜ είναι η διάμεσος προς τη βάση του ΒΓ, οπότε το ΑΜ είναι και ύψος και διχοτόμος της γωνίας Α. Δηλαδή ΑΜ ⊥ ΒΓ και επιπλέον οι γωνίες ΒΑΜ και ΓΑΜ είναι ίσες.

Από την κατασκευή ΚΒ ⊥ ΒΓ και επειδή ΑΜ ⊥ ΒΓ, τότε ΑΜ//ΚΒ , ως κάθετες στη ΒΓ σε διαφορετικά σημεία της. Επιπλέον δίνεται ότι ΒΚ = ΑΓ και ξέρουμε ότι οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ είναι ίσες, οπότε ΑΒ = ΒΚ.

β) Δείξαμε στο ερώτημα α) ότι ΑΒ = ΒΚ, άρα το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $B\widehat{A}K = B\widehat{K}A$. Επιπλέον έχουμε ότι ΑΜ//ΒΚ, οπότε οι γωνίες $K\widehat{A}M$ και $B\widehat{K}A$ θα είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των ΑΜ//ΒΚ που τέμνονται από την ΑΚ. Άρα ισχύει ότι $B\widehat{A}K = B\widehat{K}A = K\widehat{A}M$ (1) οπότε η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\widehat{A}M$.

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΚ οι τρεις γωνίες του έχουν άθροισμα 180^o, δηλαδή $B\widehat{A}K + K\widehat{B}A + B\widehat{K}A = 180^o$. Επιπλέον $K\widehat{B}A = A\widehat{B}\Gamma + 90^\circ$, οπότε λόγω της (1) έχουμε: $2B\widehat{K}A + \widehat{B} + 90^\circ = 180^o$ ή αλλιώς $2\ B\widehat{K}A + \widehat{B} = 90^o$. Όμως οι γωνίες Β και Γ είναι ίσες ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου, οπότε 2 $B\widehat{K}A = 90^o - \widehat{\Gamma}$. Επομένως $B\widehat{K}A = 45^o - \frac{\widehat{\Gamma}}{2}$.

δ) Το τετράπλευρο ΑΒΚΜ έχει τις δυο απέναντι πλευρές του ΑΜ και ΒΚ παράλληλες. Αν ήταν παραλληλόγραμμο οι ΑΜ και ΒΚ θα ήταν και ίσες. Αν ΑΜ = ΒΚ τότε θα ισχύει ότι ΑΜ = ΑΒ. Όμως τα τμήματα ΑΜ και ΑΒ είναι κάθετο και πλάγιο τμήμα αντίστοιχα προς τη ΒΓ, οπότε ισχύει ότι ΑΜ < ΑΒ . Συνεπώς έχουμε ότι ΑΜ < ΚΒ και το τετράπλευρο ΑΒΚΜ δεν μπορεί να είναι παραλληλόγραμμο.

13743

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ στην πλευρά ΑΒ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ.

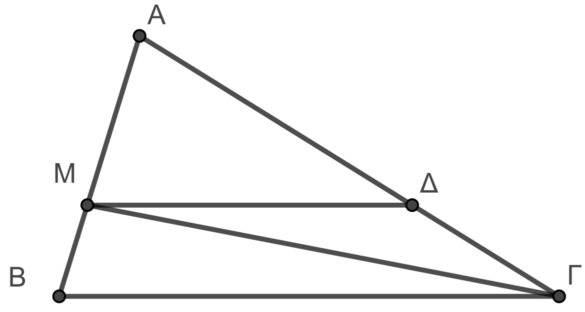
α) Να αποδείξετε ότι $Δ\widehat{Μ}Γ = Β\widehat{Γ}Μ$. (Μονάδες 05)

β) Αν το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Μ στην ΑΒ ώστε το τρίγωνο ΔΜΓ να είναι ισοσκελές με ΔΜ = ΔΓ και να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς σας. (Μονάδες 10)

γ) Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΓ να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΜΔΕΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

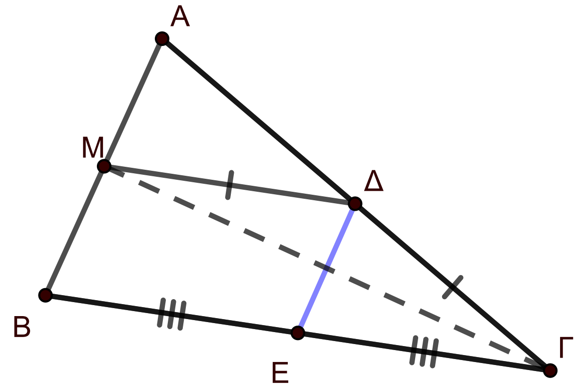
13743-Λύση

α)



Από το σημείο Μ φέρουμε ΜΔ//ΒΓ. Τότε οι γωνίες $Δ\widehat{Μ}Γ$ και $Β\widehat{Γ}Μ$ είναι ίσες, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΜΔ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΜΓ.

β)



Αν το ΔΜΓ είναι ισοσκελές με ΔΜ = ΔΓ, τότε οι γωνίες στη βάση του θα είναι ίσες, δηλαδή $Δ\widehat{Μ}Γ = Δ\widehat{Γ}Μ$. Στο ερώτημα α) αποδείξαμε ότι $Δ\widehat{Μ}Γ = Β\widehat{Γ}Μ$, οπότε $Δ\widehat{Γ}Μ = Β\widehat{Γ}Μ$, άρα η ΓΜ θα είναι διχοτόμος της γωνίας Γ. Όμως από την υπόθεση το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσσκελές με βάση ΑΒ, οπότε η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής Γ θα είναι και διάμεσος προς τη βάση του. Δηλαδή το ζητούμενο σημείο Μ είναι το μέσο της ΑΒ.

γ) Το Μ είναι το μέσο της ΑΒ και έχουμε φέρει ΜΔ//ΒΓ, άρα το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΓ. Δίνεται ότι το σημείο Ε είναι μέσο της ΒΓ άρα το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε το ΔΕ είναι παράλληλο στην ΑΒ, ή ΔΕ//ΜΒ. Το τετράπλευρο ΜΔΕΒ έχει τις απέναντι πλευρές του ανά δύο παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

13744

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ προς το Β και προς το Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε ΒΕ = ΓΖ. Αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες $A\hat{E}\Delta$ και $B\hat{Z}A$ είναι ίσες.

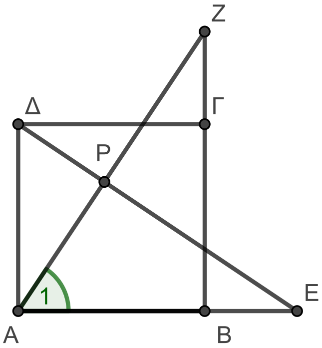
ii. Τα τμήματα ΑΖ και ΔΕ είναι κάθετα.

(Μονάδες 18)

β) Αν γνωρίζετε ότι το σημείο τομής Ρ των ΑΖ και ΔΕ είναι τέτοιο ώστε ΡΒ = ΑΒ, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Ε στην προέκταση του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 07)

13744-Λύση

α)



i. ΑΒ = ΒΓ, ως πλευρές του τετραγώνου, ΒΕ = ΓΖ, από την υπόθεση. Προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες έχουμε ΑΕ=ΒΖ (1), ως αθροίσματα ίσων τμημάτων.

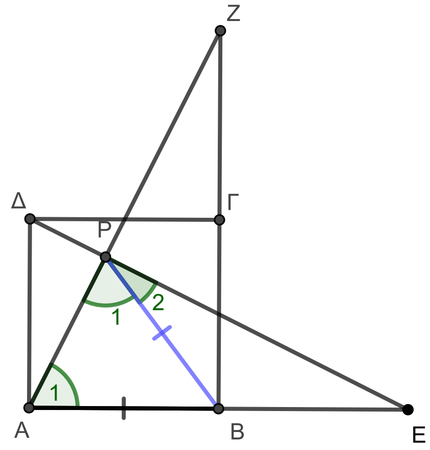
Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΖ:

- ΑΔ = ΑΒ, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ
- ΑΕ = ΒΖ, από τη σχέση (1)
- $\Delta\widehat{A}E = A\widehat{B}Z = 90^o$

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΖ έχουν τις κάθετες πλευρές τους μια προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα. Οι γωνίες $A\widehat{E}\Delta$ και $B\widehat{Z}A$ είναι ίσες γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ το άθροισμα των δύο οξειών γωνιών του είναι 90^o. Δηλαδή ισχύει $\widehat{A}_1 + B\widehat{Z}A = 90^o$, αλλά $B\widehat{Z}A = A\widehat{E}\Delta$, από το α)i. ερώτημα, οπότε $\widehat{A}_1 + A\widehat{E}\Delta = 90^o$ ή $\widehat{A}_1 + A\widehat{E}P = 90^o$ (όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ). Στο τρίγωνο ΑΕΡ το άθροισμα δύο γωνιών του είναι 90^o , οπότε η τρίτη γωνία του θα είναι 90^o. Δηλαδή $A\widehat{P}E = 90^o$, έτσι τα τμήματα ΑΖ και ΔΕ είναι κάθετα.

β)



13744-Λύση

Από την υπόθεση ΡΒ = ΑΒ , άρα το τρίγωνο ΒΑΡ είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{A}_1 = \widehat{P}_1$, ως προσκείμενες γωνίες στη βάση του. Από το προηγούμενο ερώτημα $\widehat{A}_1 + A\widehat{E}P = 90^o$, ως άθροισμα των οξειών γωνιών ορθογωνίου τριγώνου, οπότε $\widehat{P}_1 + A\widehat{E}P = 90^o$ (1). Επιπλέον ισχύει $\widehat{P}_1 + \widehat{P}_2 = 90^o$ (2) επειδή $A\widehat{P}E = 90^o$ από το α)ii. Από τις (1) και (2) έχουμε $A\widehat{E}P = \widehat{P}_2$, ή $B\widehat{E}P = \widehat{P}_2$, άρα το τρίγωνο ΒΕΡ είναι ισοσκελές με ΕΒ = ΡΒ. Όμως ΡΒ = ΑΒ, από υπόθεση, οπότε ΒΕ = ΑΒ και η θέση του σημείου Ε προσδιορίζεται στην προέκταση του ΑΒ ώστε ΒΕ = ΑΒ.

13745

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, το μέσο Μ της βάσης ΒΓ και τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στη βάση του.

α) Αν από το μέσο Μ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

i. ΜΕ = ΜΖ. (Μονάδες 6)

ii. Το ΑΕΜΖ είναι ρόμβος με περίμετρο ίση με 2ΑΒ. (Μονάδες 7)

β) Αν πάρουμε τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, διαφορετικό από το μέσο Μ, και φέρουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, τότε:

i. Ποιο είναι το είδος του τετράπλευρου ΑΚΔΛ;

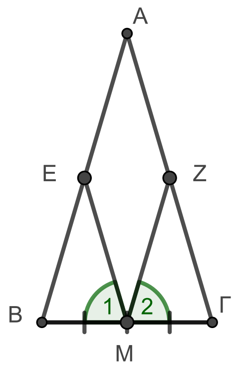
ii. Να συγκρίνετε την περίμετρο του τετράπλευρου ΑΚΔΛ με την περίμετρο του ρόμβου ΑΕΜΖ του ερωτήματος α ii) και να διατυπώστε λεκτικά το συμπέρασμα που προκύπτει.

(Μονάδες 12)

13745-Λύση

ΛΥΣΗ

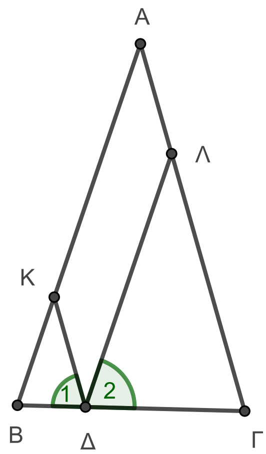
α) Έστω Μ το μέσο της βάσης ΒΓ στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ τότε :



i. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε ΜΕ//ΑΓ, οπότε το Ε θα είναι μέσο της ΑΒ και $ΜΕ = \frac{ΑΓ}{2}$ (1), ομοίως επειδή από το μέσο Μ φέρουμε ΜΖ//ΑΒ θα είναι Ζ μέσο της ΑΓ και $ΜΖ = \frac{ΑΒ}{2}$ (2). Επιπλέον δίνεται ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, οπότε από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ΜΕ = ΜΖ.

ii. Από την υπόθεση είναι ΜΕ//ΑΓ ή ΜΕ//ΑΖ και ΜΖ//ΑΒ ή ΜΖ//ΑΕ, οπότε το τετράπλευρο ΑΕΜΖ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές του ΜΕ και ΜΖ είναι ίσες από το α)i. ερώτημα, οπότε το ΑΕΜΖ είναι ρόμβος. Η περίμετρος του ρόμβου αυτού είναι ίση με $ΑΕ + ΕΜ + ΜΖ + ΑΖ = 4\,ΑΕ = 4\,\frac{ΑΒ}{2} = 2ΑΒ$. Διότι το τετράπλευρο είναι ρόμβος οπότε οι τέσσερις πλευρές του είναι ίσες με ΑΕ και $ΑΕ = \frac{ΑΒ}{2}$, αφού Ε μέσο της ΑΒ.

β) Αν το Δ είναι τυχαίο σημείο στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου, όπως στο σχήμα



13745-Λύση

i. Από την κατασκευή οι απέναντι πλευρές του τετράπλευρου ΑΚΔΛ είναι παράλληλες, αφού ΔΚ//ΑΓ ή ΔΚ//ΑΛ και ΔΛ//ΑΒ ή ΔΛ//ΑΚ. Άρα το ΑΚΔΛ είναι παραλληλόγραμμο. Θα αποδείξουμε ότι το ΑΚΔΛ, όταν το Δ δεν είναι το μέσο του ΒΓ δε μπορεί να είναι ρόμβος.

Οι γωνίες $\widehat{\Gamma}$ και $\widehat{\Delta}_1$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΚ και ΑΓ με τέμνουσα την ΒΓ, οπότε $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Gamma}$, άρα $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{B}$, (αφού οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι ίσες ως γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου) . Οπότε το ΒΚΔ είναι ισοσκελές τρίγωνο με ΚΔ = ΚΒ (1). Όμοια οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Delta}_2$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΛ και ΑΒ με τέμνουσα την ΒΓ, οπότε $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{B}$, άρα $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{\Gamma}$. Άρα το τρίγωνο ΔΛΓ είναι ισοσκελές με ΛΔ = ΛΓ (2). Επειδή $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{B}$, $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{\Gamma}$ και $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, προκύπτει ότι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Δηλαδή τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ έχουν τις γωνίες της βάσης τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες τους, $B\widehat{K}\Delta$ και $\Gamma\widehat{\Lambda}\Delta$, θα είναι μεταξύ τους ίσες. Αν το Δ δεν ταυτίζεται με το μέσο Μ της ΒΓ τα τμήματα ΒΔ και ΔΓ δεν είναι ίσα, οπότε και τα τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ δεν είναι ίσα. (Αν ήταν ίσα θα έπρεπε και οι πλευρές ΒΔ και ΔΓ που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\widehat{K}\Delta$ και $\Gamma\widehat{\Lambda}\Delta$ αντίστοιχα, να είναι ίσες). Οι πλευρές ΔΚ και ΔΛ δεν είναι ίσες, γιατί αν ήταν ίσες, τα τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ θα ήταν ίσα από το κριτήριο ΓΠΓ. Άτοπο, αφού αποδείξαμε ότι τα τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ δεν είναι ίσα.

Οπότε οι διαδοχικές πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΚΔΛ δεν είναι ίσες , επομένως αυτό δεν είναι πια ρόμβος.

ii. Για την περίμετρο του παραλληλογράμμου ΑΚΔΛ έχουμε ότι είναι ίση με ΑΚ + ΚΔ + ΔΛ + ΛΑ με τη βοήθεια των σχέσεων (1) και (2) του β)i. ερωτήματος η περίμετρος γίνεται ίση με ΑΚ + ΚΒ +ΓΛ + ΛΑ = ΑΒ + ΑΓ = ΑΒ + ΑΒ = 2ΑΒ.

Παρατηρούμε ότι η περίμετρος του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται όταν το Δ είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερή και ίση με 2ΑΒ.

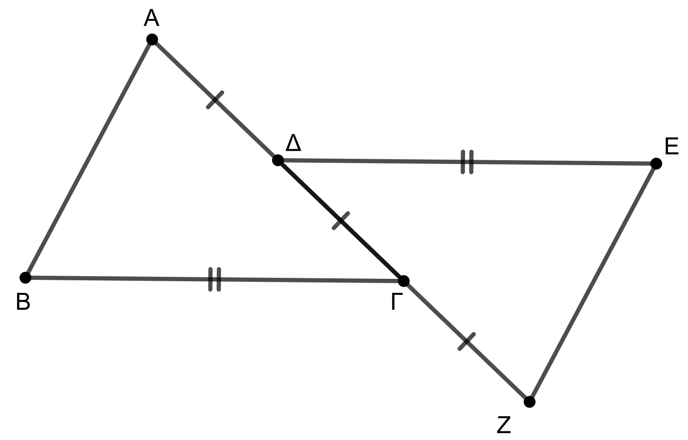
13748

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς ΑΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΒΓ όπως φαίνεται στο σχήμα. Προεκτείνουμε την ΑΓ προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΓΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΔ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

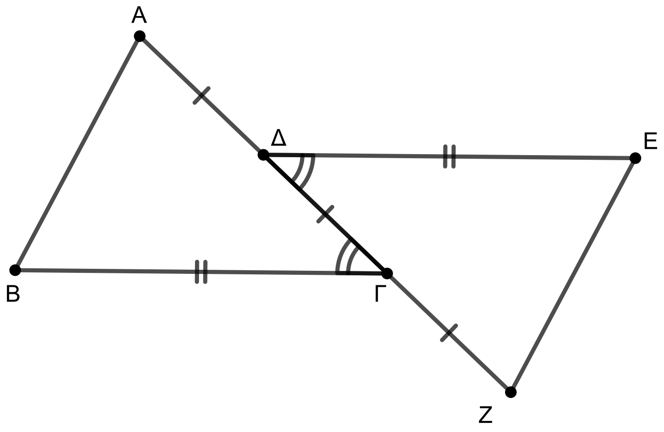
β) ΑΒ // ΕΖ. (Μονάδες 15)



13748-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



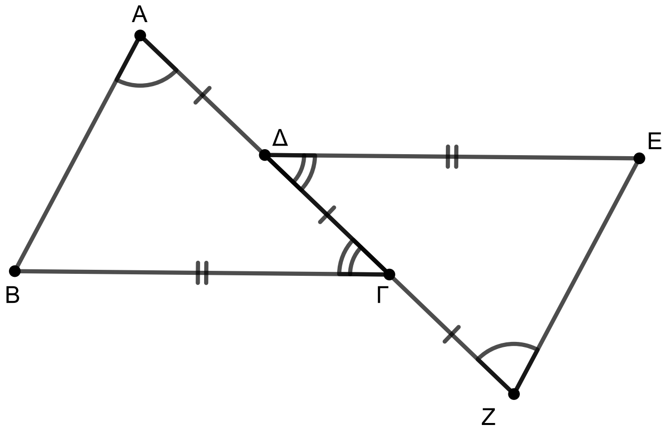
Για το τμήμα ΔΖ έχουμε: ΔΖ = ΔΓ + ΓΖ = 2ΔΓ. Όμως το Δ είναι το μέσο του ΑΓ, άρα 2ΔΓ =ΑΓ, οπότε θα είναι ΔΖ = ΑΓ (1).

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΔ έχουν:

- ΒΓ = ΔΕ, από την υπόθεση
- ΑΓ = ΔΖ, από τη σχέση (1)
- $A\hat{\Gamma}B = Z\hat{\Delta}E$, ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΓ και ΔΕ που τέμνονται από την ΔΓ.

Άρα είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες από το κριτήριο ΠΓΠ.

β)



Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΖΕΔ, προκύπτει ότι $B\hat{A}\Gamma = E\hat{Z}\Delta$ γιατί είναι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΓ και ΕΔ αντίστοιχα. Όμως, είναι γωνίες εντός εναλλάξ των ΑΒ και ΕΖ που τέμνονται από την ΑΖ, άρα ΑΒ // ΕΖ.

13749

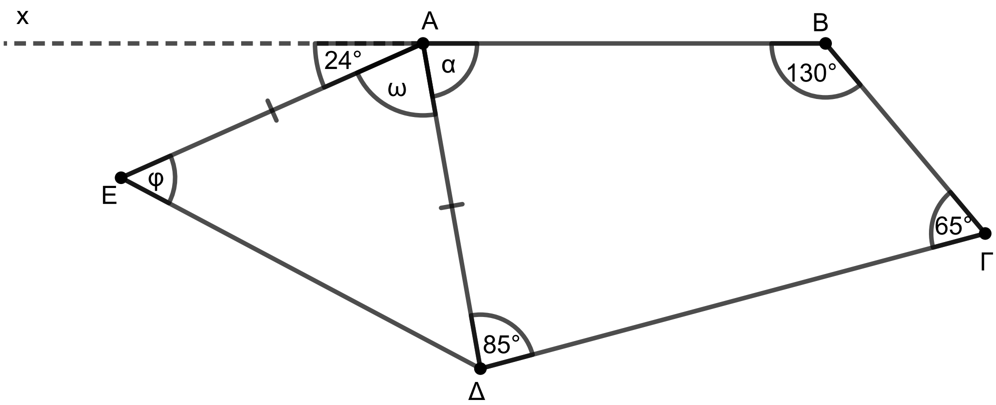
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔΕ είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος ΑΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ και η ημιευθεία Αx είναι προέκταση της ΒΑ προς το Α. Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

α) Τη γωνία $\widehat{\alpha}$. (Μονάδες 08)

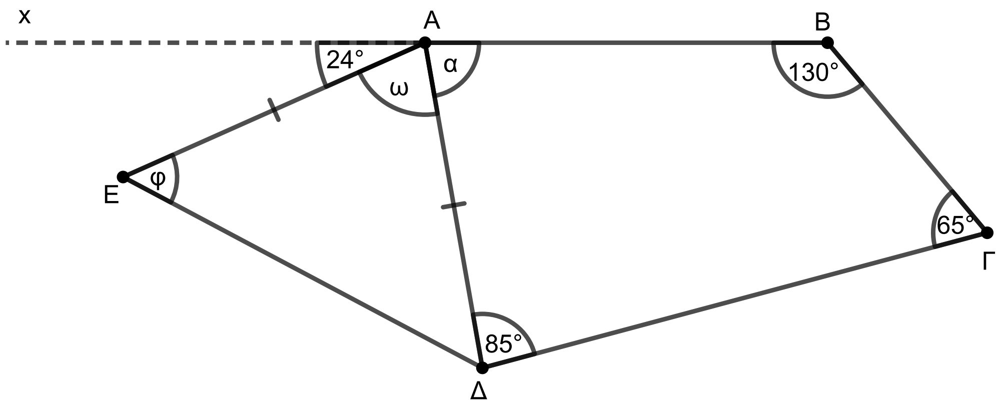
β) Τη γωνία $\widehat{\omega}$. (Μονάδες 08)

γ) Τη γωνία $\widehat{\varphi}$. (Μονάδες 09)



13749-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου ισούται με 360^{o}, οπότε επειδή η γωνία $\widehat{\alpha}$ είναι η $4^{η}$ γωνία του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ έχουμε:

$\widehat{\alpha} + 130^{o} + 65^{o} + 85^{o} = 360^{o}$ ή $\widehat{\alpha} = 360^{o} - 280^{o}$. Άρα $\widehat{\alpha} = 80^{o}$.

β) Η γωνία των 24^{o} με τη γωνία $\widehat{\omega}$ και τη γωνία $\widehat{\alpha}$ που υπολογίσαμε στο α) ερώτημα σχηματίζουν ευθεία γωνία. Άρα $24^{o} + \widehat{\omega} + \widehat{\alpha} = 180^{o}$ ή $24^{o} + \widehat{\omega} + 80^{o} = 180^{o}$. Άρα $\widehat{\omega} = 76^{o}$.

γ) Η διαγώνιος ΑΔ του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ, άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΕΔ. Η γωνία $\widehat{\varphi}$ είναι ίση με τη γωνία $Α\widehat{Δ}Ε$, ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΔΕ, του οποίου η γωνία της κορυφής είναι η $\widehat{\omega}$ με $\widehat{\omega} = 76^{o}$ από το β) ερώτημα. Επομένως $\widehat{\varphi} = \frac{180° - \omega}{2} = \frac{180° - 76°}{2} = 52^{o}$.

13750

ΘΕΜΑ 4

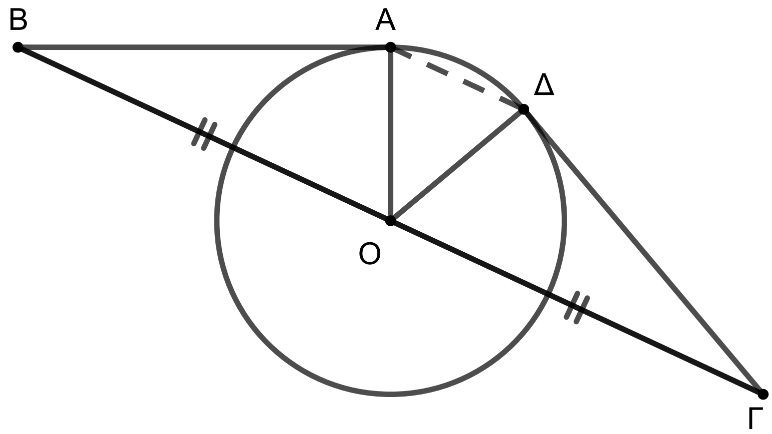
Από σημείο Β εξωτερικό ενός κύκλου (Ο,R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ. Ενώνουμε το σημείο Β με το κέντρο Ο του κύκλου και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΟΓ = ΒΟ. Από το σημείο Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ, όπως στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΑΒ = ΔΓ (Μονάδες 08)

ii. ΑΔ // ΒΓ (Μονάδες 10)

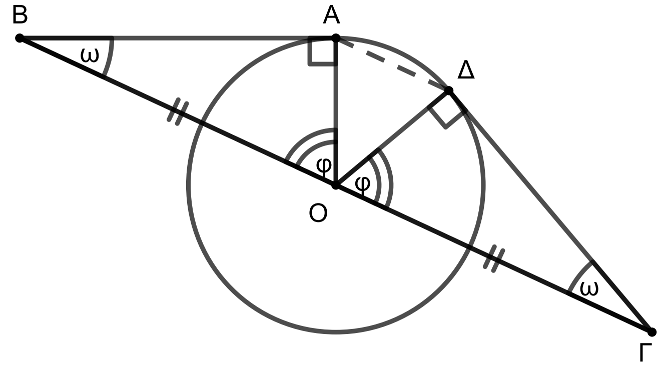
β) Αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΒΑ είναι ίσο με την ακτίνα R, τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο ΑΟΔ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)



13750-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



i. ΟΑ $\perp$ ΑΒ και ΟΔ $\perp$ ΔΓ διότι ΟΑ και ΟΔ είναι ακτίνες στα σημεία επαφής Α και Δ αντίστοιχα.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ, τα οποία έχουν:

- ΟΑ = ΟΔ, ακτίνες του κύκλου
- ΟΒ = ΟΓ, από την υπόθεση
- $O\hat{A}B = O\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$, αφού ΟΑ $\perp$ ΑΒ και ΟΔ $\perp$ ΔΓ

Τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Άρα θα έχουν ίσες και τις άλλες κάθετες πλευρές τους, δηλαδή ΑΒ = ΔΓ.

ii. Από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων του α) i. ερωτήματος προκύπτει ότι $O\hat{B}A = O\hat{\Gamma}\Delta = \omega$, γιατί είναι οξείες γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΟΑ και ΟΔ αντίστοιχα. Επίσης είναι $A\hat{O}B = \Delta\hat{O}\Gamma = \varphi$ ως οξείες γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, με $\omega + \varphi = 90^o$ (1), ως άθροισμα οξειών γωνιών ορθογωνίων τριγώνων.

Για τη γωνία $A\hat{O}\Delta$ έχουμε: $A\hat{O}\Delta = 180^o - 2\varphi = 2(90^o - \varphi) = 2\omega$ λόγω της (1). Το τρίγωνο ΑΟΔ είναι ισοσκελές, αφού ΟΑ = ΟΔ = R. Για τις ίσες του γωνίες $O\hat{A}\Delta$ και $O\hat{\Delta}A$ έχουμε: $O\hat{A}\Delta = O\hat{\Delta}A = \frac{180^o - A\hat{O}\Delta}{2} = \frac{180^o - 2\omega}{2} = 90^o - \omega = \varphi$, λόγω της (1).

Άρα $O\hat{A}\Delta = A\hat{O}B = \varphi$ και είναι γωνίες εντός εναλλάξ των ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΟΑ, οπότε ΑΔ//ΒΓ.

β) Αν το μήκος του ΒΑ είναι ίσο με R, τότε από το α) ερώτημα τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ θα είναι και ισοσκελή, αφού ΟΑ = ΑΒ = ΟΔ = ΔΓ = R. Επομένως οι γωνίες ω και φ θα είναι ίσες και η καθεμία θα ισούται με 45^o. Τότε $A\hat{O}\Delta = 180^o - 2\varphi = 90^o$, οπότε το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΔ έχει τη γωνία της κορυφής του ορθή, άρα είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

13752

ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{B} < 90^o$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΒΓ και από το σημείο Ε φέρουμε τμήμα ΕΖ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

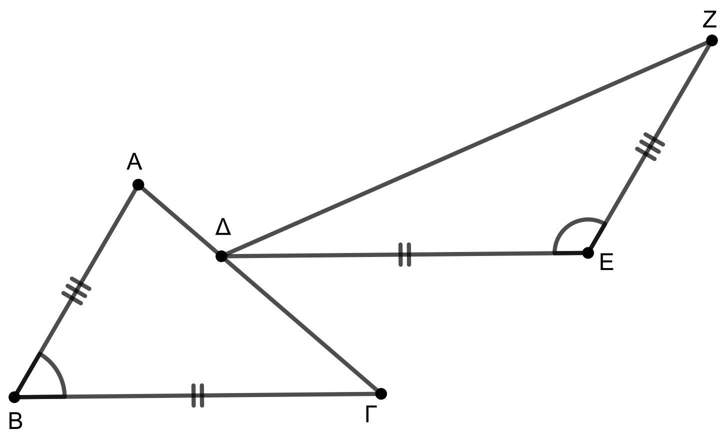
α) Ένας μαθητής κάνει τους παρακάτω διαδοχικούς συλλογισμούς. Να χαρακτηρίσετε Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) κάθε έναν από αυτούς.

1. Οι γωνίες $\Delta\widehat{E}Z$ και $A\widehat{B}\Gamma$ είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες.
2. Οπότε $\Delta\widehat{E}Z = A\widehat{B}\Gamma$.
3. Τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΑΒΓ είναι ίσα.
4. Το τμήμα ΔΖ είναι ίσο με το τμήμα ΑΓ.

(Μονάδες 08)

β) Να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς σας (Σ ή Λ) που αφορούν τους ισχυρισμούς 2. και 3. (Μονάδες 10)

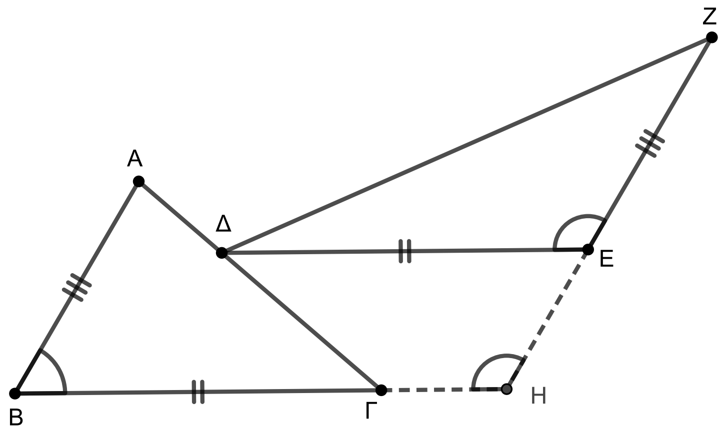
γ) Αν στα δεδομένα παραλείψουμε τη συνθήκη $\widehat{B} < 90^o$, να συγκρίνετε τα τμήματα ΑΓ και ΔΖ για τα διάφορα είδη της γωνίας $\widehat{B}$ και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 07)



13752-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



1. Σ
2. Λ
3. Λ
4. Λ

β) Η απάντηση στον συλλογισμό 2. είναι λάθος.

Προεκτείνουμε την ΖΕ και τη ΒΓ και έστω Η το σημείο τομής τους. Τότε:

$Z\hat{E}\Delta = E\hat{H}\Gamma$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες των παραλλήλων ΔΕ και ΒΗ που τέμνονται από την ΖΗ.

$E\hat{H}\Gamma + A\hat{B}\Gamma = 180^{o}$ γιατί είναι γωνίες εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και ΖΗ που τέμνονται από την ΒΗ. Άρα $Z\hat{E}\Delta + A\hat{B}\Gamma = 180^{o}$, δηλαδή είναι παραπληρωματικές γωνίες και αφού $\hat{B} < 90^{o}$ από την υπόθεση, τότε $Z\hat{E}\Delta > 90^{o}$. Άρα δεν είναι ίσες.

Η απάντηση στο συλλογισμό 3. είναι λάθος, γιατί τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μία, τις ΔΕ, ΒΓ και τις ΖΕ, ΑΒ, αλλά οι περιεχόμενες γωνίες αυτών των πλευρών δεν είναι ίσες αλλά παραπληρωματικές, όπως δικαιολογήθηκε παραπάνω.

γ) Οι γωνίες $Z\hat{E}\Delta$ και $A\hat{B}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές.

- Αν $A\hat{B}\Gamma < 90^{o}$, τότε $Z\hat{E}\Delta > 90^{o}$ και τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές άνισες. Οπότε, θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ομοίως άνισες. Δηλαδή, αφού $A\hat{B}\Gamma < Z\hat{E}\Delta$ τότε $A\Gamma < \Delta Z$.
- Αν $A\hat{B}\Gamma > 90^{o}$, τότε $Z\hat{E}\Delta < 90^{o}$ και τα τρίγωνα όπως προηγουμένως θα έχουν τις τρίτες πλευρές τους ομοίως άνισες. Δηλαδή, αφού $A\hat{B}\Gamma > Z\hat{E}\Delta$ τότε $A\Gamma > \Delta Z$.

13752-Λύση

- Αν $A\widehat{B}\Gamma = 90^o$, τότε και $Z\widehat{E}\Delta = 90^o$ και τα τρίγωνα είναι ορθογώνια με ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε θα είναι ίσα και συνεπώς θα έχουν ίσες και τις υποτείνουσές τους. Δηλαδή, αφού $A\widehat{B}\Gamma = Z\widehat{E}\Delta = 90^o$ τότε $A\Gamma = \Delta Z$.

Άρα η μόνη περίπτωση στην οποία τα τμήμα ΔΖ είναι ίσο με το τμήμα ΑΓ είναι όταν οι γωνίες $Z\widehat{E}\Delta$ και $A\widehat{B}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές και ίσες, δηλαδή ορθές.

13756

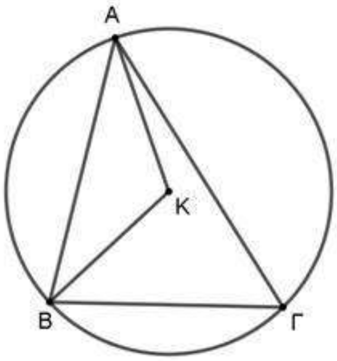
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ, ρ). Να αποδείξετε ότι:

α) $A\hat{K}B = 2\ A\hat{\Gamma}B$. (Μονάδες 7)

β) το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

γ) $K\hat{A}B + A\hat{\Gamma}B = 90°$. (Μονάδες 13)



13756-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η γωνία ΑΚΒ είναι επίκεντρη και βαίνει στο τόξο ΑΒ.

Η γωνία ΑΓΒ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο ΑΒ.

Άρα η επίκεντρη γωνία ΑΚΒ είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης γωνίας ΑΓΒ, δηλαδή

$A\hat{K}B = 2\ A\hat{\Gamma}B$.

β) Είναι ΚΑ = ΚΒ διότι είναι ακτίνες του κύκλου (Κ, ρ), άρα το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές.

γ) Στο τρίγωνο ΚΑΒ για το άθροισμα των γωνιών του έχουμε :

$K\hat{A}B + A\hat{B}K + A\hat{K}B = 180°$ (1).

Από το ερώτημα (α) έχουμε $A\hat{K}B = 2\ A\hat{\Gamma}B$ (2).

Από το ερώτημα (β), έχουμε $K\hat{A}B = A\hat{B}K$ (3), γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΚΒ.

Λόγω των σχέσεων (2), (3) η (1) γράφεται $2K\hat{A}B + 2A\hat{\Gamma}B = 180°$ ή $K\hat{A}B + A\hat{\Gamma}B = 90°$.

13767

ΘΕΜΑ 2

Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ έτσι ώστε $ΑΒ = ΒΓ$. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $Δ\hat{B}E$.

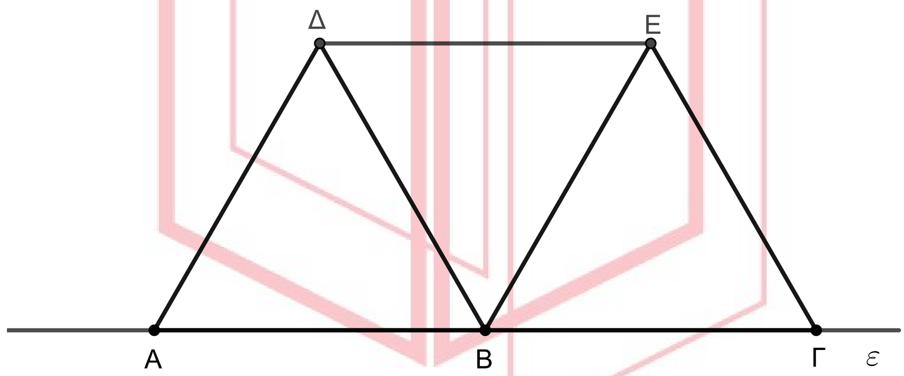
(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι ρόμβος.

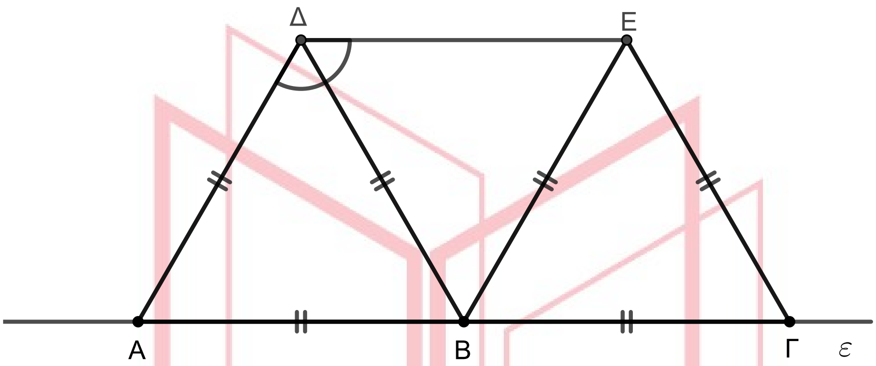
(Μονάδες 8)



13767-Λύση

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ πάνω σε ευθεία ε έτσι ώστε $ΑΒ = ΒΓ$ και κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε.



α) Οι γωνίες των ισόπλευρων τριγώνων ΑΒΔ και ΒΓΕ είναι 60° καθεμιά.

Η γωνία $Α\hat{Β}Γ$ είναι ευθεία, οπότε:

$Α\hat{Β}Δ + Δ\hat{Β}Ε + Ε\hat{Β}Γ = 180^\circ$ ή $60^\circ + Δ\hat{Β}Ε + 60^\circ = 180^\circ$

Άρα, $Δ\hat{Β}Ε = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

β) Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΔ ισχύει:

$$ΑΒ = ΑΔ = ΒΔ \quad (1)$$

Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΒΓΕ ισχύει:

$$ΒΓ = ΒΕ = ΓΕ \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $ΒΔ = ΒΕ$, αφού $ΑΒ = ΒΓ$ από υπόθεση. Επομένως, το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με βάση ΔΕ, οπότε οι γωνίες που είναι προσκείμενες στη βάση θα είναι ίσες. Συνεπώς, $Β\hat{Δ}Ε = Β\hat{Ε}Δ$ (3).

Στο τρίγωνο ΒΔΕ ισχύει:

$Β\hat{Δ}Ε + Β\hat{Ε}Δ + Δ\hat{Β}Ε = 180^\circ$ ή $Β\hat{Δ}Ε + Β\hat{Δ}Ε + 60^\circ = 180^\circ$ ή $2Β\hat{Δ}Ε = 120^\circ$

Άρα, $Β\hat{Δ}Ε = 60^\circ$ και $Β\hat{Ε}Δ = 60^\circ$ λόγω της σχέσης (3).

Αφού οι γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ είναι ίσες με 60° καθεμιά, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο.

γ) Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΒΔΕ ισχύει:

$$ΔΕ = ΒΕ = ΒΔ \quad (4)$$

Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, αφού $ΑΔ = ΑΒ = ΒΕ = ΔΕ$ από τις σχέσεις (1), (2) και (4), οπότε είναι ρόμβος.

13822

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ευθείες (ε) και (ψ).

α) Αν η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι μεγαλύτερη από την $A\hat{B}\psi$:

i. Να αποδείξετε ότι $B\hat{A}\varepsilon + A\hat{B}\psi < 180^o$. (Μονάδες 6)

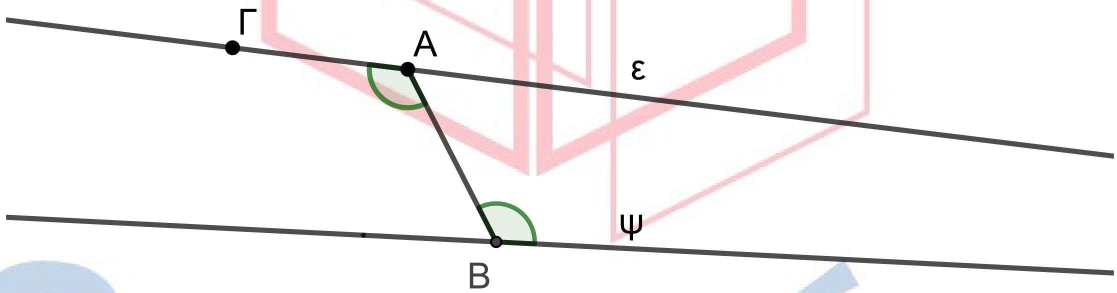
ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και ψ τέμνονται. Σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η AB βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;

(Μονάδες 6)

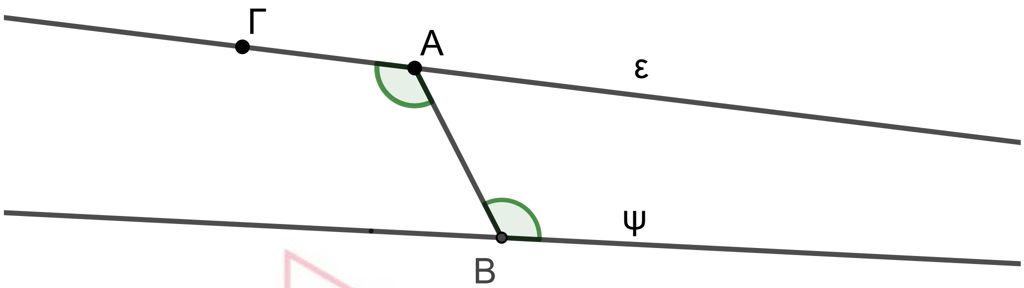
β) Να διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο α) για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών.

(Μονάδες 7)

γ) Αν ισχύει $B\hat{A}\Gamma < A\hat{B}\psi$, τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η AB βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί; (Μονάδες 6)



13822-Λύση



α) i. Η γωνία $B\hat{A}\varepsilon$ είναι παραπληρωματική της $B\hat{A}\Gamma$ άρα $B\hat{A}\varepsilon + B\hat{A}\Gamma = 180^o$.

Όμως η $A\hat{B}\psi$ είναι μικρότερη από την $B\hat{A}\Gamma$, λόγω της υπόθεσης. Άρα το άθροισμα $B\hat{A}\varepsilon + A\hat{B}\psi$ είναι μικρότερο από το άθροισμα $B\hat{A}\varepsilon + B\hat{A}\Gamma$.

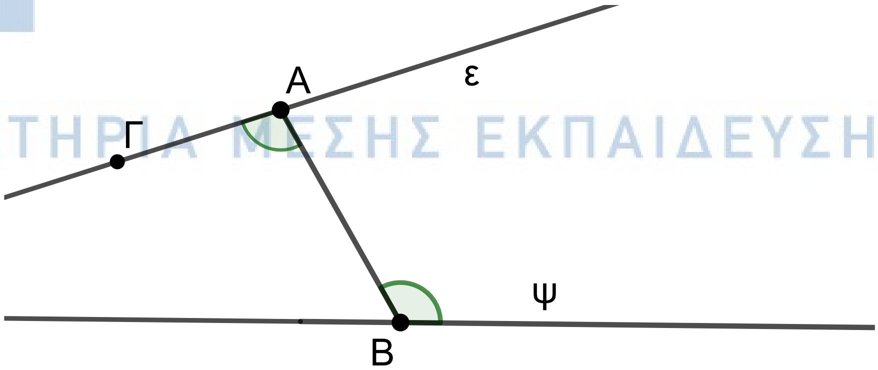
Επομένως $B\hat{A}\varepsilon + A\hat{B}\psi < 180^o$.

ii. Οι γωνίες $B\hat{A}\varepsilon$ και $A\hat{B}\psi$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ε και ψ που τέμνονται από την ΑΒ και επειδή $B\hat{A}\varepsilon + A\hat{B}\psi < 180^o$ οι ε και ψ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΒ προς το μέρος που βρίσκεται η $A\hat{B}\psi$.

β) Στο α) αποδείξαμε ότι αν δύο ευθείες τεμνόμενες από άλλη ευθεία σχηματίζουν εντός και εναλλάξ γωνίες που δεν είναι ίσες, τότε οι δύο αυτές ευθείες τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την τέμνουσα προς το μέρος που βρίσκεται η μικρότερη από τις δύο εντός και εναλλάξ γωνίες.

γ) Οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma$ και $A\hat{B}\psi$ είναι εντός και εναλλάξ των ευθειών ε και ψ με τέμνουσα την ΑΒ. Όμως δίνεται ότι $B\hat{A}\Gamma < A\hat{B}\psi$.

Εφαρμόζοντας την πρόταση που διατυπώσαμε στο β) για τις γωνίες $B\hat{A}\Gamma$ και $A\hat{B}\psi$, οι ευθείες ε και ψ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΒ προς το μέρος της $B\hat{A}\Gamma$, όπως φαίνεται παρακάτω.



13824

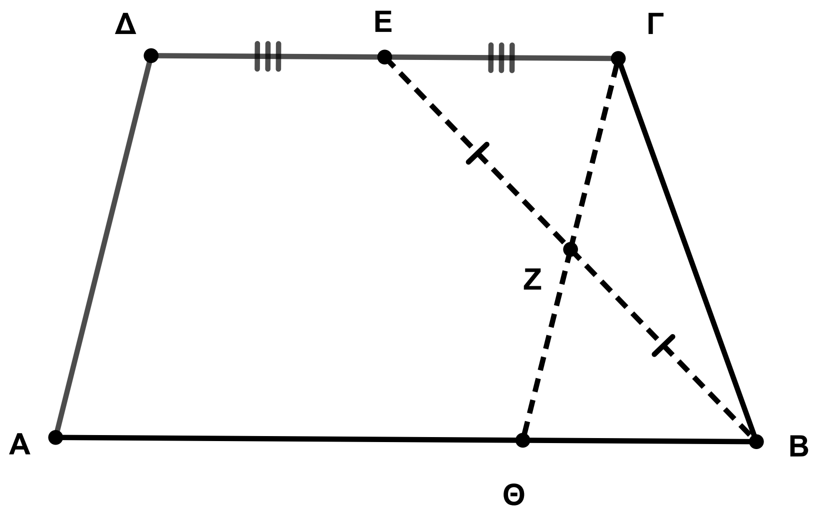
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ. Αν Ε και Ζ τα μέσα των ΓΔ και ΒΕ αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της ΑΒ και της προέκτασης της ΓΖ, να αποδείξετε ότι:

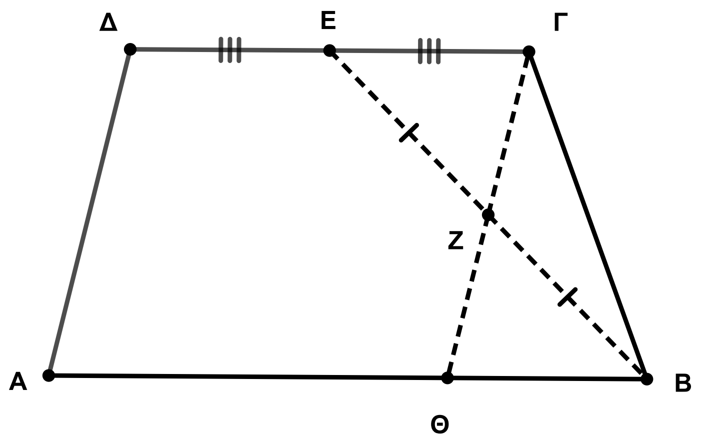
α) Τα τρίγωνα ΓΕΖ, ΘΒΖ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) ΕΓ=ΘΒ. (Μονάδες 5)

γ) Το τετράπλευρο ΕΒΘΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



13824-Λύση



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΓΕΖ και ΘΖΒ τα οποία έχουν:

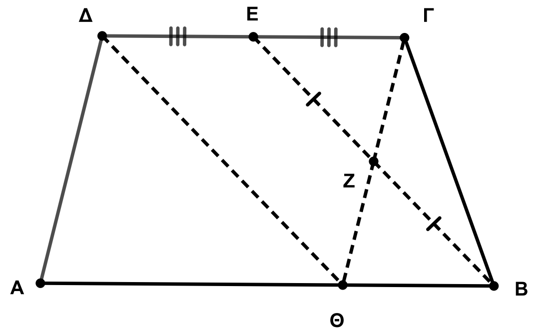
i. ΕΖ=ΖΒ (από υπόθεση)

ii. $Z\hat{E}\Gamma = Z\hat{B}\Theta$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΓΕ και ΘΒ που τέμνονται από την ΒΕ)

iii. $E\hat{Z}\Gamma = \Theta\hat{Z}B$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

β) από την ισότητα των τριγώνων ΓΕΖ και ΘΖΒ έχουμε ότι ΕΓ=ΘΒ ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $E\hat{Z}\Gamma = \Theta\hat{Z}B$, πλευρές.



γ) ΔΕ//ΒΘ ως τμήματα των βάσεων ΓΔ και ΑΒ του τραπεζίου ΑΒΓΔ. Από το ερώτημα β) έχουμε ΕΓ=ΒΘ, επίσης Ε μέσο της πλευράς ΓΔ άρα ΕΓ=ΔΕ άρα ΒΘ=ΔΕ, άρα το τετράπλευρο ΕΒΘΔ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΔΕ και ΘΒ, παράλληλες και ίσες.

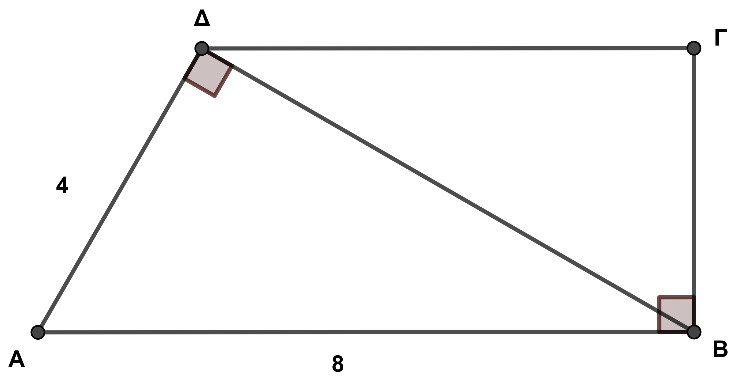
13828

ΘΕΜΑ 2

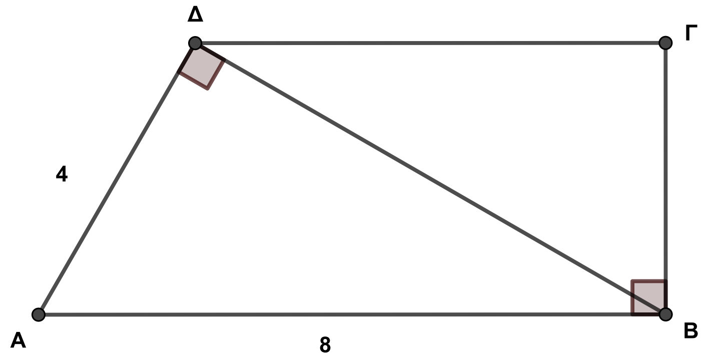
Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΔ και η πλευρά ΓΒ κάθετη στη βάση ΑΒ. Αν ΑΔ=4 και ΑΒ=8 τότε:

α) Να υπολογιστεί η γωνία $\Delta\widehat{A}B$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ. (Μονάδες 13)



13828-Λύση



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσα ΑΒ είναι διπλάσια της κάθετης πλευράς ΑΔ άρα η οξεία γωνία $\Delta\widehat{B}A$ ισούται με 30^o δηλαδή $\Delta\widehat{B}A=30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $\Delta\widehat{A}B+\widehat{\Delta}+\Delta\widehat{B}A=180^o$ ή $\Delta\widehat{A}B=60^o$.

β) Οι βάσεις ΑΒ και ΔΓ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι κάθετες στην ΒΓ άρα το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο στο Γ. Οι γωνίες $A\widehat{B}\Delta$ και $B\widehat{\Delta}\Gamma$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ, άρα $A\widehat{B}\Delta=B\widehat{\Delta}\Gamma=30^o$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΒ η κάθετη πλευρά ΒΓ βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία 30^o άρα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΔ, δηλαδή $B\Gamma=\frac{B\Delta}{2}$ ή $B\Delta=2B\Gamma$.

13829

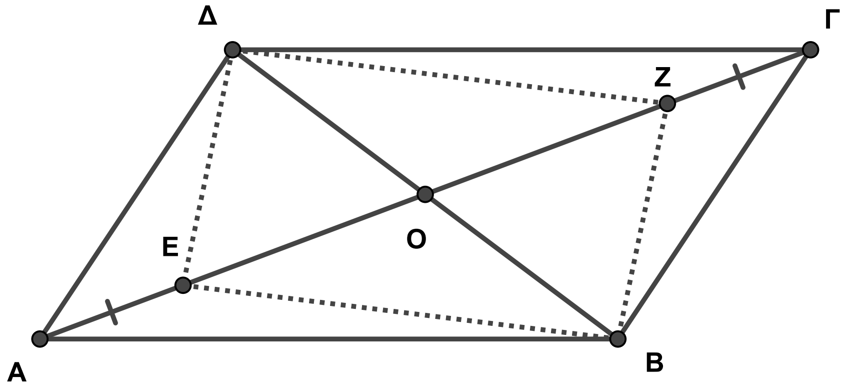
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ των τμημάτων ΑΟ και ΓΟ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΕ=ΓΖ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΖΒ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

13829-Λύση



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΖΒ που έχουν:

i. ΑΕ=ΓΖ (από υπόθεση)

ii. ΑΔ=ΒΓ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου)

iii. $E\widehat{A}\Delta = Z\widehat{\Gamma}B$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ)

Τα οποία είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες.

β) ΟΕ=ΟΑ-ΑΕ και ΟΖ=ΟΓ-ΖΓ. Όμως ΟΑ=ΟΓ αφού το σημείο Ο είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και ΑΕ=ΖΓ από υπόθεση. Άρα ΟΕ=ΟΖ ως διαφορές ίσων τμημάτων. Επιπλέον ΒΟ=ΟΔ αφού το σημείο Ο είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, επομένως οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΔΕΒΖ διχοτομούνται και το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

13831

ΘΕΜΑ 2

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\widehat{\mathrm{A}} = 90^{\mathrm{O}}$.

α) Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο τρίγωνο αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ΑΒ > ΑΓ. Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου και γιατί; (Μονάδες 10)

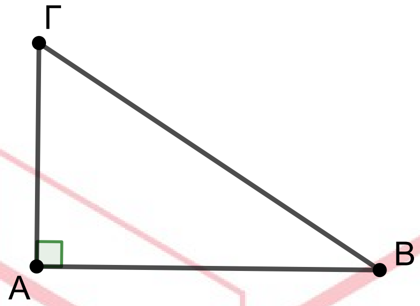
β) Αν για το τρίγωνο που σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε στο α) ερώτημα γνωρίζετε επιπλέον ότι η μια από τις οξείες γωνίες του είναι ίση με 30^{o}, τότε να απαντήσετε στα παρακάτω:

i. Πόσες μοίρες θα είναι η γωνία $\widehat{\mathrm{B}}$ και πόσες η γωνία $\widehat{\Gamma}$; (Μονάδες 8)

ii. Ποια πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας; (Μονάδες 7)

13831-Λύση

α) Το τρίγωνο θα είναι ορθογώνιο. Απέναντι από την ορθή γωνία $\hat{A}$ είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου. Αυτή είναι η ΒΓ.



Οι άλλες δύο πλευρές είναι μικρότερες από την ΒΓ και, λόγω της υπόθεσης ΑΒ > ΑΓ, άρα η μικρότερη πλευρά του τριγώνου είναι η ΑΓ.

Όμως, απέναντι από τη μικρότερη πλευρά ενός τριγώνου βρίσκεται η μικρότερη γωνία του. Άρα, η γωνία $\hat{B}$ είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου.

β) i. Εφόσον η μια οξεία γωνία του τριγώνου ΑΒΓ είναι 30^o η άλλη οξεία γωνία του είναι συμπληρωματική της, άρα 60^o. Όμως η μικρότερη γωνία του τριγώνου είναι η $\hat{B}$. Άρα $\hat{B} = 30^o$ και $\hat{\Gamma} = 60^o$.

ii. Η ΒΓ είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Εφόσον $\hat{B} = 30^o$ η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας $\hat{B}$ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, άρα η πλευρά ΑΓ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

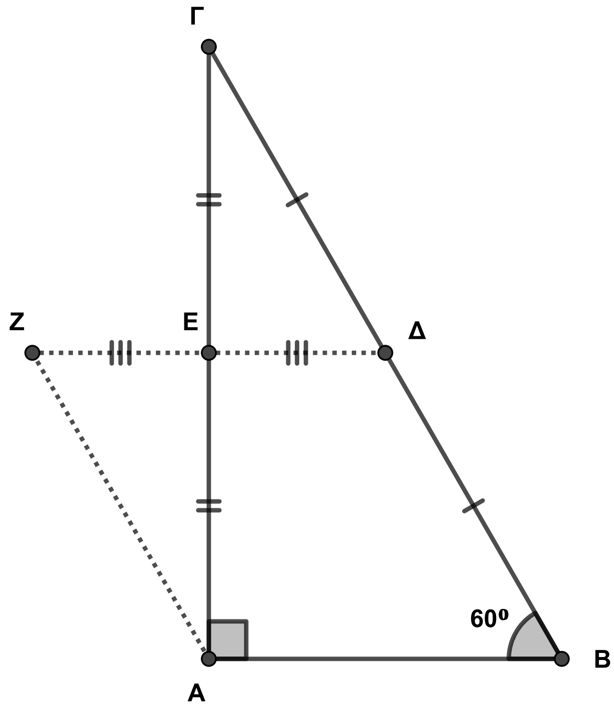
13837

ΘΕΜΑ 2

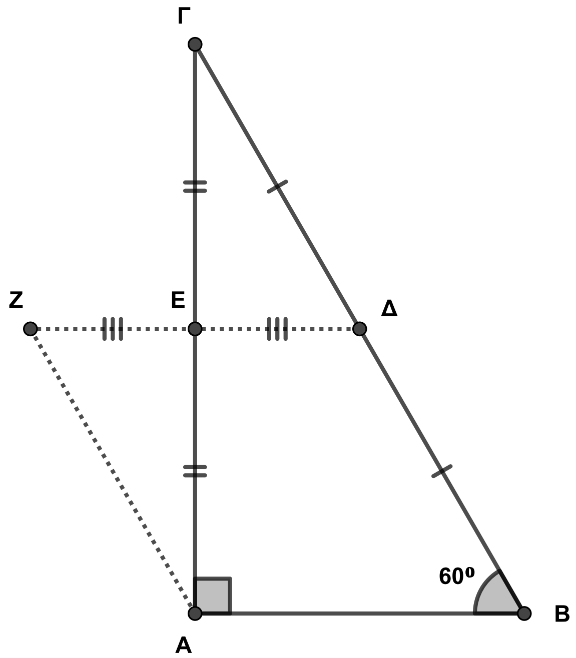
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}=90^o$ και $\widehat{B}=60^o$. Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε που είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ=ΔΕ.

α) Να αποδείξετε ότι ΓΔ=ΑΖ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)



13837-Λύση



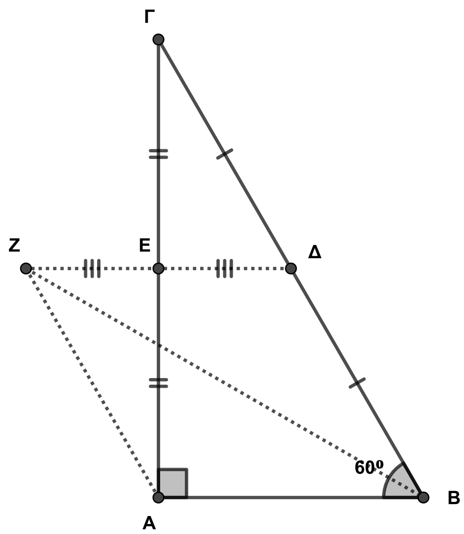
α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΓΕΔ που έχουν:

i. ΑΕ=ΕΓ (από υπόθεση)

ii. ΕΖ=ΕΔ (από υπόθεση)

iii. $\mathrm{A\hat{E}Z}$=$\mathrm{\Gamma\hat{E}\Delta}$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες, άρα ΑΖ=ΓΔ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών $\mathrm{A\hat{E}Z}$=$\mathrm{\Gamma\hat{E}\Delta}$.



β) ΑΖ=ΓΔ από το α) ερώτημα και ΓΔ=ΔΒ επειδή το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ. Άρα ΑΖ = ΔΒ = $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$. Από το άθροισμα των γωνιών του ορθογωνίου

13837-Λύση

τριγώνου ΑΒΓ έχουμε ότι $\hat{\Gamma}$=30°, συνεπώς η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΒ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΓ, δηλαδή ΑΒ = $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$. Άρα ΑΖ = ΑΒ και το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

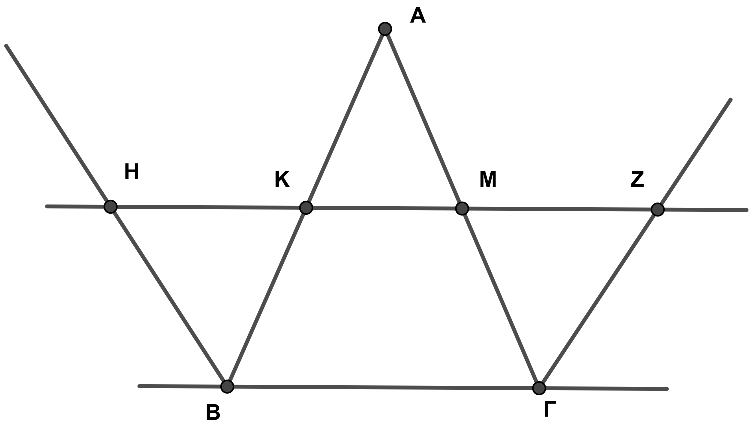
13838

ΘΕΜΑ 4

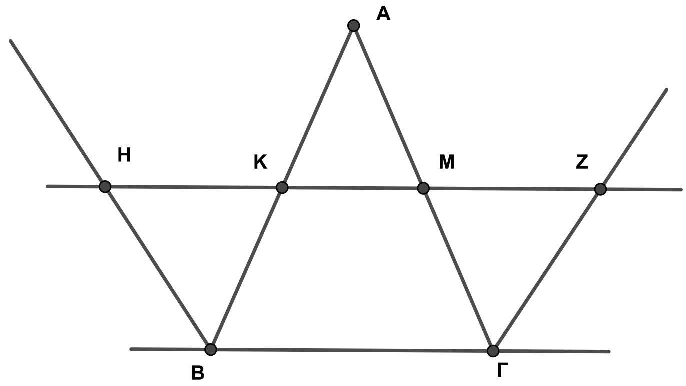
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), με Κ, Μ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Κ και Μ τέμνει τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών Β και Γ στα σημεία Η και Ζ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 11)

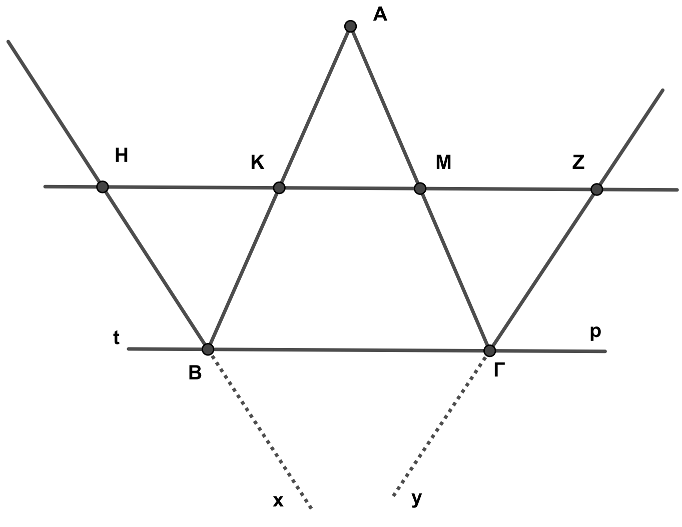
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 14)



13838-Λύση



α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Κ και Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, συνεπώς ΚΜ//ΒΓ. Το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο αφού έχει 2 πλευρές παράλληλες (ΚΜ, ΒΓ) και οι άλλες δύο πλευρές του (ΒΚ και ΓΜ) τέμνονται ως μέρη των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ. Από υπόθεση έχουμε ότι ΑΒ=ΑΓ και τα σημεία Κ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, συνεπώς ΚΒ=ΜΓ (ως μισά των ίσων τμημάτων ΑΒ και ΑΓ), άρα το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο αφού οι μη παράλληλες πλευρές του ΚΒ και ΜΓ είναι ίσες μεταξύ τους.



β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Κ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και ισχύει ΚΜ//ΒΓ, άρα και ΗΖ//ΒΓ (αφού τα σημεία Η και Ζ βρίσκονται στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Κ, Μ). Επιπλέον οι ΒΗ και ΓΖ τεμνόμενες από τη ΒΓ σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά γωνίες τους ($\Gamma\widehat{\mathrm{B}}x$ και $\mathrm{B}\widehat{\Gamma}y$) με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, αφού:

$\Gamma\widehat{\mathrm{B}}x=\mathrm{H}\widehat{\mathrm{B}}t$ (ως κατακορυφήν) και $\mathrm{H}\widehat{\mathrm{B}}t=\frac{\widehat{\mathrm{B}}\varepsilon\xi}{2}$

13838-Λύση

$B\widehat{\Gamma}y = Z\widehat{\Gamma}p$ (ως κατακορυφήν) και $Z\widehat{\Gamma}p = \frac{\widehat{\Gamma}\varepsilon\xi}{2}$

αλλά επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές οι ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι οξείες άρα οι εξωτερικές τους $\widehat{B}_{\varepsilon\xi}$ και $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ είναι αμβλείες δηλαδή ισχύει:

$\widehat{B}_{\varepsilon\xi} < 180^o$ ή $\frac{\widehat{B}\varepsilon\xi}{2} < 90^o$ και $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} < 180^o$ ή $\frac{\widehat{\Gamma}\varepsilon\xi}{2} < 90^o$

$\frac{\widehat{B}\varepsilon\xi}{2} + \frac{\widehat{\Gamma}\varepsilon\xi}{2} < 180^o$ ή

$H\widehat{B}t + Z\widehat{\Gamma}p < 180^o$ ή

$\Gamma\widehat{B}x + B\widehat{\Gamma}y < 180^o$. Οι ΒΗ και ΓΖ τέμνονται συνεπώς το τετράπλευρο ΒΓΖΗ είναι τραπέζιο με βάσεις ΒΓ και ΖΗ.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι προσκείμενες στη βάση ΒΓ συνεπώς είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ άρα και $\widehat{B}_{\varepsilon\xi} = \widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα) άρα και $\frac{\widehat{B}\varepsilon\xi}{2} = \frac{\widehat{\Gamma}\varepsilon\xi}{2}$ ή $K\widehat{B}H = M\widehat{\Gamma}Z$. Επίσης ισχύει $\Gamma\widehat{B}H = B\widehat{\Gamma}Z$ (ως άθροισμα ίσων γωνιών $\widehat{B} + K\widehat{B}H$ και $\widehat{\Gamma} + M\widehat{\Gamma}Z$). Το τραπέζιο ΒΓΖΗ είναι ισοσκελές, αφού έχει τις προσκείμενες στη βάση ΒΓ γωνίες του $\Gamma\widehat{B}H$ και $B\widehat{\Gamma}Z$ ίσες.

13840

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (O,R) και μία ευθεία x΄x η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο A. Θεωρούμε τυχαίο σημείο M της ημιευθείας Ax. Αν για κάποιο σημείο B του κύκλου ισχύει η σχέση MA = MB, να αποδείξετε ότι:

α) το MB είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O,R). (Μονάδες 7)

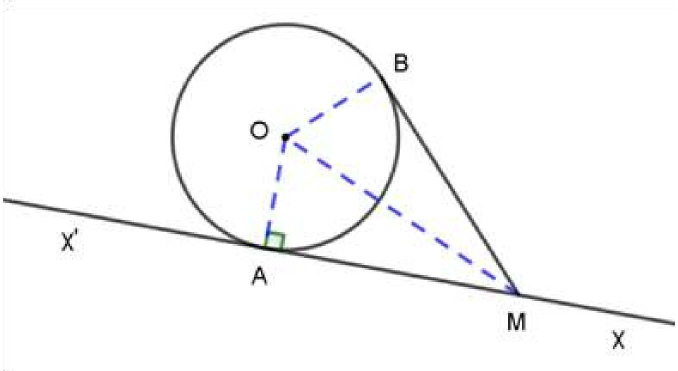
β) η διχοτόμος της γωνίας BMx είναι κάθετη στη MO. (Μονάδες 6)

γ) το τετράπλευρο AOBM είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 6)

δ) το ευθύγραμμο τμήμα OB τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας BMx. (Μονάδες 6)

13840-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Η ευθεία x΄x έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο Α. Επομένως, η ευθεία x΄x είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Άρα ΟΑ ⊥ ΜΑ.

Τα τρίγωνα ΜΟΒ και ΜΟΑ έχουν:

• ΜΟ, κοινή πλευρά

• ΟΒ = ΟΑ, ως ακτίνες του κύκλου (Ο,R)

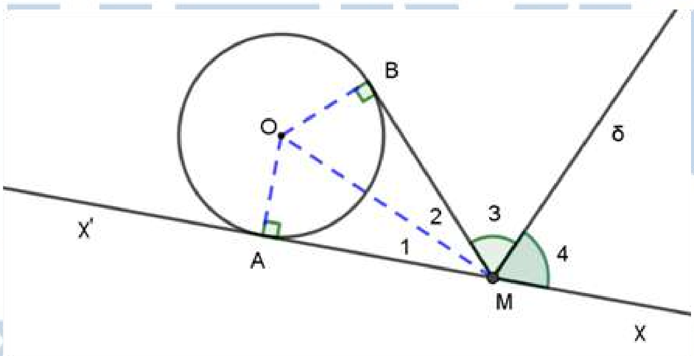
• ΜΒ = ΜΑ, από την υπόθεση

Επομένως, τα τρίγωνα από το κριτήριο ισότητας Π-Π-Π είναι ίσα. Απέναντι από την πλευρά ΟΜ βρίσκονται αντίστοιχα ίσες γωνίες, οπότε $\hat{A} = \hat{B}$.

Επειδή $\hat{A} = 90°$ συμπεραίνουμε ότι $\hat{B} = 90°$.

Άρα, το ΜΒ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (Ο,R).

β)



Έστω Μδ η διχοτόμος της γωνίας ΒΜx.

Τα τμήματα ΜΑ και ΜΒ είναι εφαπτόμενα του κύκλου (Ο,R). Η ΜΟ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ, οπότε $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$. Επειδή Μδ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΒΜx έχουμε $\hat{M}_3 = \hat{M}_4$.

$A\hat{M}x = 180°$ οπότε $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{M}_3 + \hat{M}_4 = 180°$, ή $2\hat{M}_2 + 2\hat{M}_3 = 180°$, ή $\hat{M}_2 + \hat{M}_3 = 90°$, δηλαδή $O\hat{M}\delta = 90°$. Άρα η Μδ είναι κάθετη στη ΜΟ.

13840-Λύση

γ) Στο τετράπλευρο ΑΟΒΜ έχουμε $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$ οπότε $\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$. Επομένως δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές οπότε το ΑΟΒΜ είναι εγγράψιμο.

δ) Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ και η διχοτόμος Μδ τέμνονται από το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από 180°, οπότε το ΟΒ και η Μδ θα τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας ΟΜ που βρίσκονται οι γωνίες.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ σχηματίζει με το ΟΜ τη γωνία ΒΟΜ .

Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ σχηματίζει με τη διχοτόμο Μδ τη γωνία ΟΜδ.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $B\widehat{O}M + O\widehat{M}\delta < 180°$.

Η γωνία ΒΟΜ είναι οξεία γωνία του ορθογωνίου τριγώνου ΟΒΜ, οπότε $B\widehat{O}M < 90°$.

Η γωνία ΟΜδ είναι ίση με το άθροισμα των γωνιών M_2 και M_3, όμως από το ερώτημα (β) έχουμε $\widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 90°$, οπότε $O\widehat{M}\delta = \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 90°$.

Έχουμε $B\widehat{O}M + O\widehat{M}\delta = B\widehat{O}M + 90° < 90° + 90°$, δηλαδή $B\widehat{O}M + O\widehat{M}\delta < 180°$.

13841

ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β και Μ το μέσο της. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Αν η ΕΜ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ζ τότε:

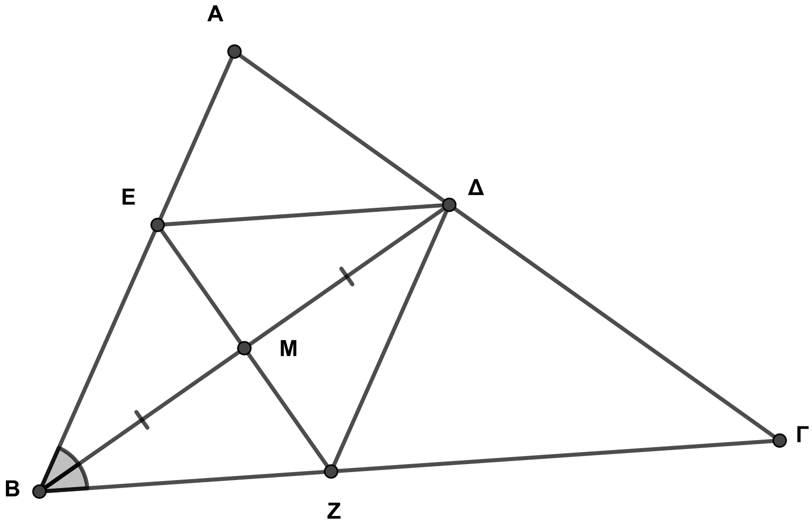
α) Να αποδείξετε ότι ΒΕ=ΕΔ. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι ΒΕ//ΖΔ. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι ρόμβος. (Μονάδες 5)

δ) Ποιο θα έπρεπε να είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ώστε το τετράπλευρο ΔΕΒΖ να είναι τετράγωνο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

13841-Λύση



α) Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι ΔΕ//ΒΓ άρα $\Delta\widehat{B}Z=E\widehat{\Delta}B$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΔ και ΒΖ που τέμνονται από την ΒΔ. Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$, άρα $\Delta\widehat{B}Z=\Delta\widehat{B}E$. Συνεπώς $E\widehat{\Delta}B = \Delta\widehat{B}E$ ως ίσες με την $\Delta\widehat{B}Z$, άρα το τρίγωνο ΒΕΔ είναι ισοσκελές με ΒΕ=ΕΔ.

β) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΜΖ και ΔΜΕ τα οποία έχουν:

i. ΒΜ=ΜΔ (υπόθεση)
ii. $\Delta\widehat{B}Z=E\widehat{\Delta}B$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΔ και ΒΖ που τέμνονται από την ΒΔ)
iii. $B\widehat{M}Z=\Delta\widehat{M}E$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα ΒΜΖ, ΔΜΕ είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, άρα και ΒΖ=ΔΕ ως απέναντι πλευρές από τις ίσες γωνίες $B\widehat{M}Z$ και $\Delta\widehat{M}E$.

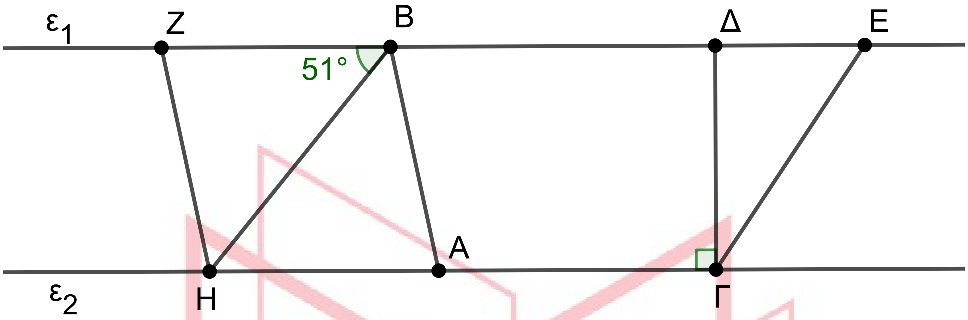
Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις πλευρές του ΒΖ και ΔΕ παράλληλες και ίσες άρα και ΒΕ//ΖΔ (ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου).

γ) Από το α) ερώτημα έχουμε ΒΕ=ΕΔ, άρα το παραλληλόγραμμο ΔΕΒΖ είναι ρόμβος αφού έχει δυο διαδοχικές πλευρές του ίσες.

δ) Για να είναι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ τετράγωνο, εφόσον είναι ρόμβος, πρέπει η γωνία $\widehat{B}$ να είναι ορθή. Όταν η γωνία $\widehat{B}$ είναι ορθή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β.

13842

ΘΕΜΑ 2



Στο παραπάνω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΖΗ είναι ρόμβος.

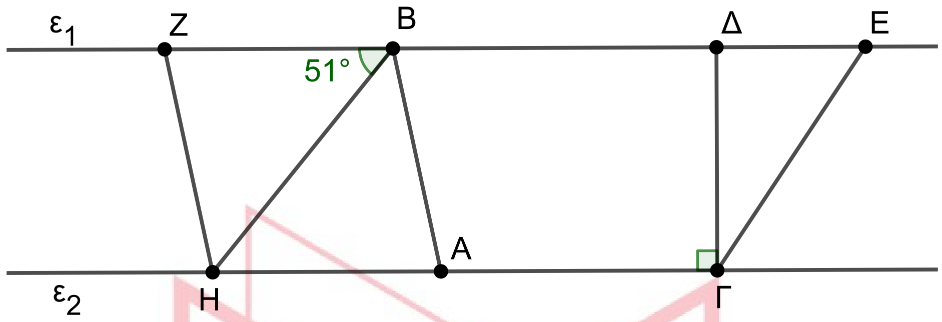
Επίσης δίνεται ότι $Z\hat{B}H = 51^o$ και ότι η $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ορθή.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{B}H$. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{H}B$. (Μονάδες 6)

γ) Αν η γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου ΓΔΕ είναι ίση με 56°, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΓΔΕ. (Μονάδες 10)

13842-Λύση



α) Εφόσον το ΑΒΖΗ είναι ρόμβος η διαγώνιός του ΒΗ διχοτομεί τη γωνία του $A\hat{B}Z$.

Επομένως $A\hat{B}H = Z\hat{B}H = 51^o$.

β) Οι $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες, γιατί οι ΒΖ και ΑΗ είναι παράλληλες, ως απέναντι πλευρές ρόμβου. Άρα οι $Z\hat{B}H$ και $A\hat{H}B$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ε_1$ και $ε_2$ με τέμνουσα την ΒΗ. Άρα $A\hat{H}B = 51^o$.

γ) Η ΓΔ τέμνει κάθετα την $ε_2$ από την υπόθεση (εφόσον η γωνία $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ορθή), συνεπώς τέμνει κάθετα και την $ε_1$ που είναι παράλληλη της $ε_2$.

Άρα η γωνία $\Gamma\hat{\Delta}E$ είναι ορθή και το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ορθογώνιο. Άρα οι οξείες γωνίες του $\hat{\Gamma}$ και $\hat{E}$ είναι συμπληρωματικές. Επομένως $\hat{\Gamma} = 90^o - \hat{E} = 90^o - 56^o = 34^o$.

13843

ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι οι ευθείες x΄x και y΄y εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα μιας διαμέτρου του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) οι ευθείες x΄x και y΄y είναι παράλληλες. (Μονάδες 4)

β) οι διχοτόμοι των γωνιών ΒΑx και ΑΒy τέμνονται σε σημείο Μ. (Μονάδες 6)

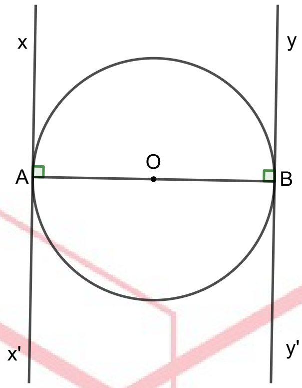
γ) το σημείο Μ είναι το μέσο του ημικυκλίου ΑΒ. (Μονάδες 10)

δ) αν η διχοτόμος της γωνίας ΒΑx τέμνει την y΄y στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας ΑΒy τέμνει την x‘x στο σημείο Δ, τότε ΜΓ = ΜΔ. (Μονάδες 5)

13843-Λύση

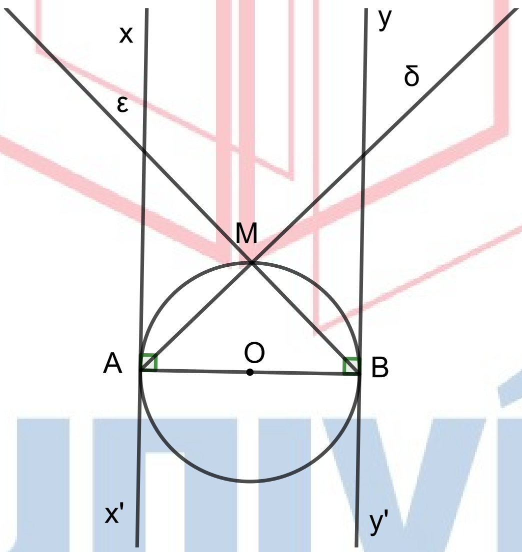
ΛΥΣΗ

α)



Οι ευθείες x΄x και y΄y εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα της διαμέτρου του AB, επομένως, είναι κάθετες στην AB και συνεπώς είναι μεταξύ τους παράλληλες.

β)



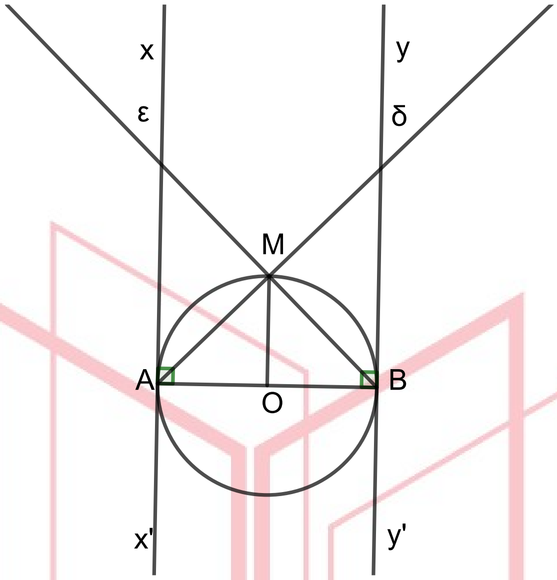
Έστω Αδ και Βε οι διχοτόμοι των γωνιών ΒΑx και ΑΒy αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται από τη διάμετρο ΑΒ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από 180°, οπότε η Αδ και η Βε θα τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας ΑΒ που βρίσκονται οι γωνίες.

Πράγματι, έχουμε ότι $B\hat{A}\delta + A\hat{B}\varepsilon = \frac{90°}{2} + \frac{90°}{2} = 90° < 180°$.

Άρα, οι Αδ και Βε τέμνονται σε σημείο Μ του ημιεπιπέδου στο οποίο βρίσκονται οι γωνίες.

13843-Λύση

γ)



Από το ερώτημα (β) έχουμε ΒΑ̂Μ = ΒΑ̂δ = $45°$ και ΑΒ̂Μ = ΑΒ̂ε = $45°$.

Επομένως, το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές με ΜΑ = ΜΒ.

Άρα, το σημείο Μ ανήκει στη μεσοκάθετο της διαμέτρου ΑΒ.

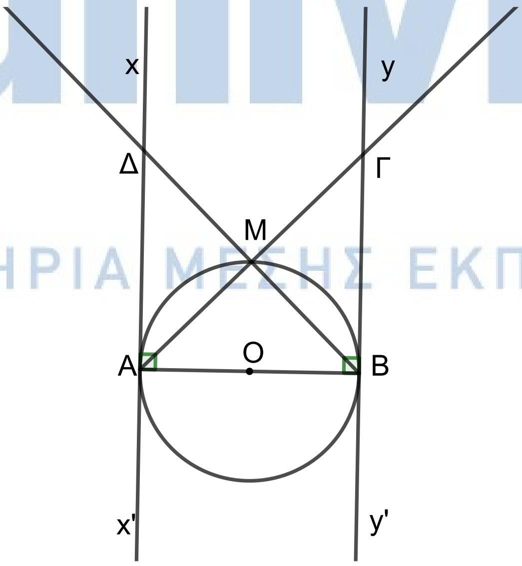
Το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ορθογώνιο διότι ΜΟ μεσοκάθετος της ΑΒ, οπότε ΑΟ̂Μ = $90°$.

Στο τρίγωνο ΑΟΜ έχουμε ΟΑ̂Μ = $45°$ επομένως, ΟΜ̂Α = $90°$-$45° = 45°$.

Το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ισοσκελές με ΟΜ = ΟΑ = R.

Δηλαδή, το σημείο Μ είναι σημείο του κύκλου (Ο,R) και επειδή ανήκει στη μεσοκάθετο της ΑΒ συμπεραίνουμε ότι το σημείο είναι το μέσο του ημικυκλίου ΑΒ.

δ)



Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΒΜΓ έχουν :

- ΑΜ = ΒΜ, από το ερώτημα (γ)

13843-Λύση

- $A\widehat{M}\Delta = B\widehat{M}\Gamma$, ως κατακορυφήν
- $M\widehat{A}\Delta = M\widehat{B}\Gamma = 45°$

Από το κριτήριο ισότητας Γ-Π-Γ τα τρίγωνα είναι ίσα. Απέναντι από τις ίσες γωνίες ΜΑΔ και ΜΒΓ βρίσκονται αντίστοιχα ίσες πλευρές, δηλαδή ΜΔ = ΜΓ

13845

ΘΕΜΑ 4

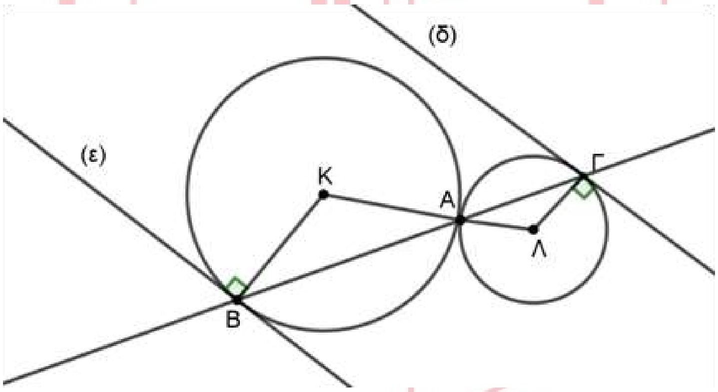
Οι κύκλοι (Κ,R), (Λ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το Α και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία Β και Γ. Φέρουμε τις εφαπτόμενες (ε) και (δ) στα σημεία Β και Γ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $K\hat{B}A = \Lambda\hat{\Gamma}A$. (Μονάδες 8)

β) (ε) // (δ). (Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο ΚΓΛΒ θα είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 7)



13845-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές με ΚΒ = ΚΑ, ως ακτίνες του κύκλου (Κ,R).

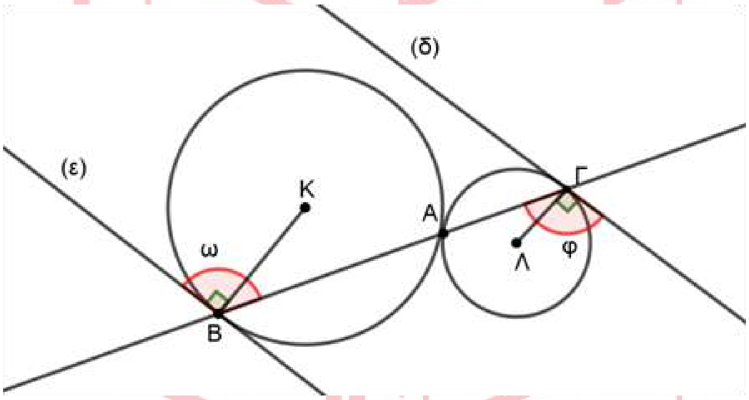
Άρα $K\hat{B}A = K\hat{A}B$ (1).

Το τρίγωνο ΑΛΓ είναι ισοσκελές με ΛΑ = ΛΓ, ως ακτίνες του κύκλου (Λ,ρ).

Άρα $\Lambda\hat{A}\Gamma = \Lambda\hat{\Gamma}A$ (2).

Οι γωνίες ΚΑΒ και ΛΑΓ είναι κατακορυφήν, οπότε είναι ίσες. Άρα από τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει $K\hat{B}A = \Lambda\hat{\Gamma}A$.

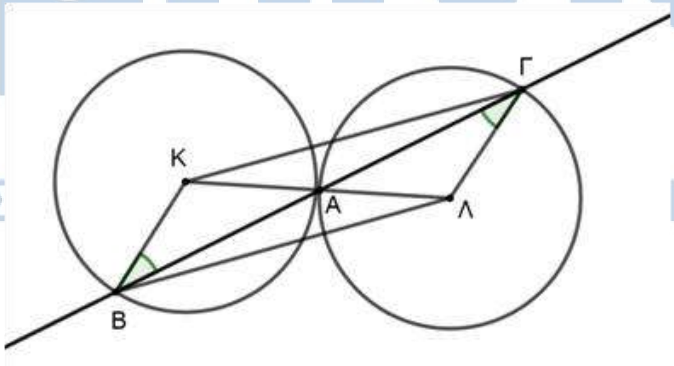
β)



Έστω ω και φ οι γωνίες όπως φαίνονται στο σχήμα. Για τις γωνίες ω, φ έχουμε $\hat{\omega} = 90° + K\hat{B}A$ και $\hat{\phi} = 90° + \Lambda\hat{\Gamma}A$. Από το ερώτημα (α) οι γωνίες ΚΒΑ και ΛΓΑ είναι ίσες, έτσι και οι γωνίες ω, φ είναι ίσες.

Οι ίσες γωνίες ω και φ είναι εντός εναλλάξ των ευθειών (ε) και (δ) που τέμνονται από τη ΒΓ, συνεπώς (ε) // (δ).

γ)



Για να είναι το τετράπλευρο ΚΓΛΒ παραλληλόγραμμο, θα πρέπει οι απέναντι πλευρές του ΚΒ και ΓΛ να είναι ίσες και παράλληλες.

Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι οι εντός εναλλάξ γωνίες ΚΒΑ και ΛΓΑ των ΚΒ και ΓΛ που τέμνονται από τη ΒΓ είναι ίσες. Άρα προκύπτει ότι ΚΒ // ΓΛ.

13845-Λύση

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΒ και ΓΛ είναι ακτίνες των δύο κύκλων, οπότε για να είναι ίσα θα πρέπει οι κύκλοι να είναι ίσοι μεταξύ τους.

Άρα για να είναι το τετράπλευρο ΚΓΛΒ παραλληλόγραμμο θα πρέπει $R = \rho$.

13850

ΘΕΜΑ 4

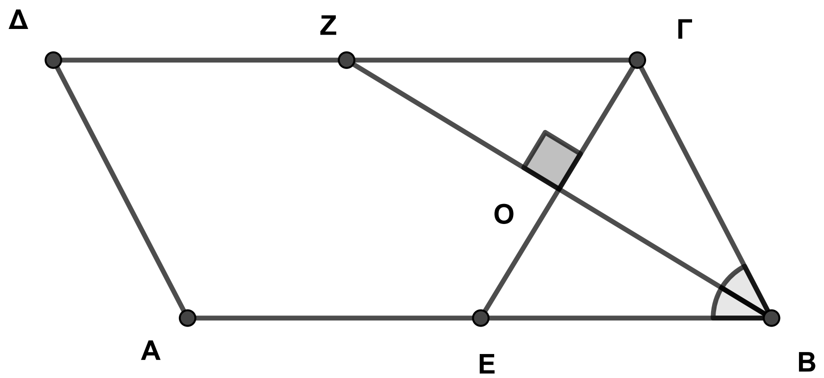
Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος και η ΒΖ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$. Φέρουμε ΓΟ κάθετη στη ΒΖ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

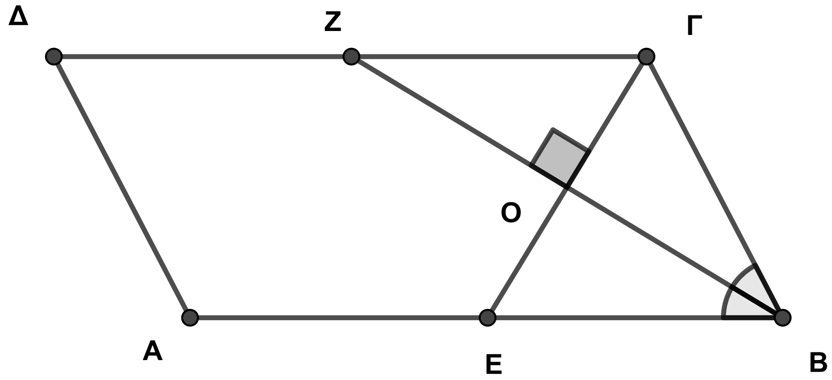
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι ρόμβος (Μονάδες 6)

δ) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας $\widehat{B}$ ώστε το τετράπλευρο ΕΒΓΖ να είναι τετράγωνο; (Μονάδες 4)



13850-Λύση



α) Έχουμε ΒΖ διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ και ΒΟ ⊥ ΓΕ από υπόθεση. Συνεπώς το τμήμα ΒΟ στο τρίγωνο ΕΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΕΓ.

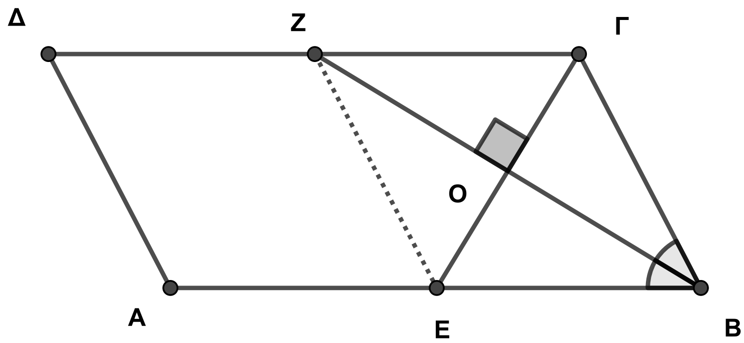
β) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ τα οποία έχουν:

i. $Γ\hat{O}Ζ=Ε\hat{O}Β=90^o$

ii. ΟΓ=ΟΕ (Ο μέσο της ΓΕ γιατί το ΒΟ είναι διχοτόμος άρα και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΕΒΓ)

iii. $Ζ\hat{Γ}Ο=Β\hat{Ε}Ο$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΕ, ΓΖ που τέμνονται από την ΓΕ)

Τα τρίγωνα ΟΖΓ, ΟΒΕ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.



γ) Από τη σύγκριση στο ερώτημα β) έχουμε ΟΖ=ΟΒ ως πλευρές των ίσων τριγώνων ΖΟΓ και ΒΟΕ απέναντι από τις ίσες γωνίες $Ζ\hat{Γ}Ο$ και $Β\hat{Ε}Ο$ και ΟΓ=ΟΕ (Ο μέσο της ΓΕ γιατί το ΒΟ είναι διχοτόμος άρα και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΕΒΓ). Το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι ΓΕ και ΒΖ διχοτομούνται στο σημείο Ο και επειδή είναι και κάθετες από υπόθεση (ΒΖ ⊥ ΓΕ) είναι ρόμβος.

δ) Για να είναι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ τετράγωνο θα πρέπει να είναι εκτός από ρόμβος (ερώτημα γ)) και ορθογώνιο άρα θα πρέπει $\widehat{B}=90^o$.

13851

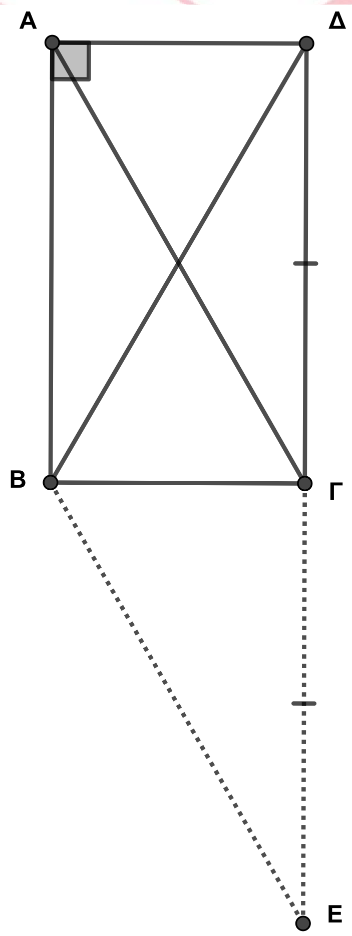
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΔΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓΕ=ΔΓ.

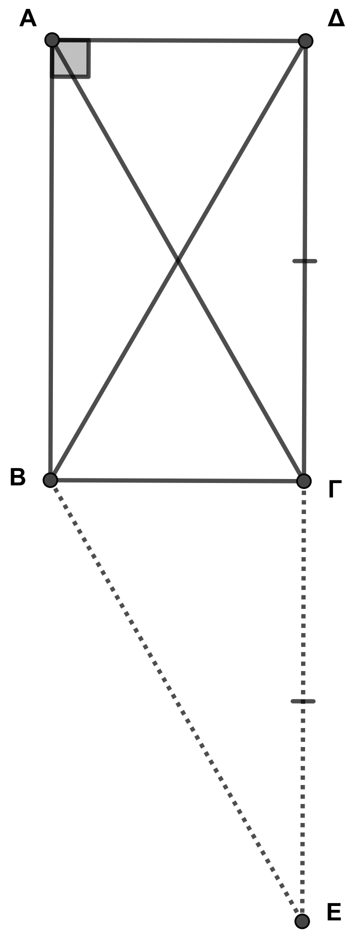
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Αν $\Delta\widehat{B}E=120^o$ να αποδείξετε ότι ΒΔ=2ΑΔ. (Μονάδες 9)



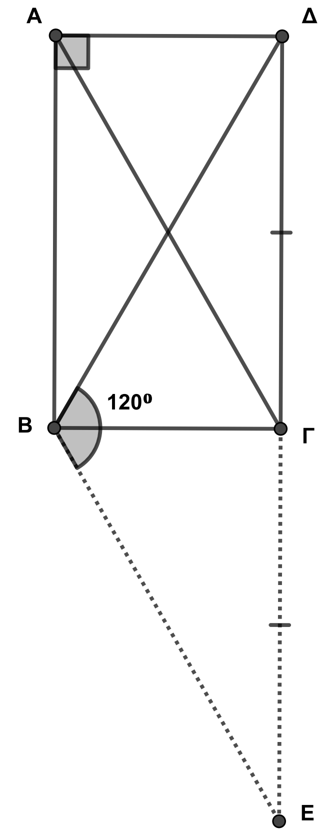
13851-Λύση



α) Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ οι απέναντι πλευρές ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες δηλαδή ΑΒ=ΓΔ, επιπλέον από υπόθεση έχουμε ότι ΓΔ=ΓΕ, άρα ΑΒ=ΓΕ. Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχουμε ΑΒ//ΓΔ άρα και ΑΒ//ΓΕ. Το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΑΒ και ΓΕ παράλληλες και ίσες.

β) Στο παραλληλόγραμμο ΑΓΕΒ έχουμε ΑΓ=ΒΕ ως απέναντι πλευρές επίσης στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχουμε ΑΓ=ΒΔ ως διαγώνιοι του ορθογωνίου, άρα ΒΕ=ΒΔ δηλαδή το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

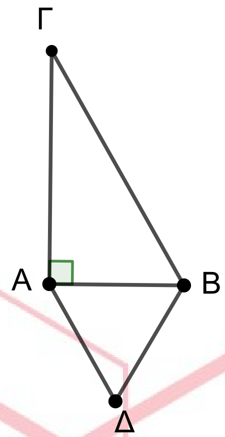
13851-Λύση



γ) Από το ερώτημα β) έχουμε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με βάση τη ΔΕ, συνεπώς ΒΔ=ΒΕ και $B\hat{\Delta}E=B\hat{E}\Delta=30^o$ αφού $E\hat{B}\Delta=120^o$. Από το ερώτημα α) έχουμε ότι το ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο άρα ΑΓ//ΒΕ συνεπώς $B\hat{E}\Gamma=A\hat{\Gamma}\Delta=30^o$ ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΒΕ και ΑΓ που τέμνονται από την ΕΓ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε $A\hat{\Gamma}\Delta=30^o$ άρα η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΔ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΑΓ, δηλαδή $A\Delta=\frac{A\Gamma}{2}$. Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες άρα $A\Delta=\frac{B\Delta}{2}$ ή ΒΔ=2ΑΔ.

13853

ΘΕΜΑ 4



Στο παραπάνω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^o$. Επίσης οι ΑΔ και ΒΓ είναι παράλληλες και το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8)

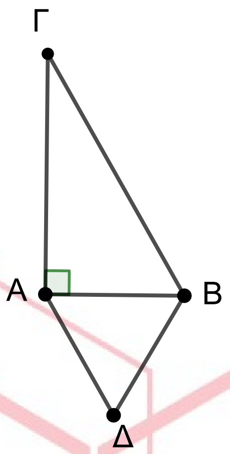
β) Αν η περίμετρος του ΑΒΔ είναι 12 να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του ΑΒΓ.

(Μονάδες 7)

γ) Αν το σημείο Κ είναι σημείο της υποτείνουσας τέτοιο ώστε το ΑΔΒΚ να είναι παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε τη θέση του σημείου Κ. Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το ΑΔΒΚ; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 10)

13853-Λύση



α) Οι γωνίες $\Delta\hat{A}B$ και $A\hat{B}\Gamma$ είναι εντός και εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ με τέμνουσα την ΑΒ. Επομένως $\Delta\hat{A}B = A\hat{B}\Gamma$.

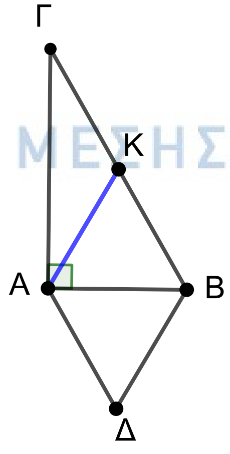
Όμως το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο, επομένως η καθεμία από τις γωνίες του είναι 60^o. Δηλαδή $\Delta\hat{A}B = 60^o$. Επομένως από την ισότητα $\Delta\hat{A}B = A\hat{B}\Gamma$ προκύπτει ότι $A\hat{B}\Gamma = 60^o$.

Όμως οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές, άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A\hat{\Gamma}B = 90^o - 60^o = 30^o$.

β) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο, άρα έχει ίσες πλευρές. Επομένως το μήκος κάθε πλευράς του είναι $AB = A\Delta = B\Delta = 12:3 = 4$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\hat{\Gamma} = A\hat{\Gamma}B = 30^o$, επομένως η απέναντι πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $AB = \frac{B\Gamma}{2}$ ή $B\Gamma = 2AB = 2 \cdot 4 = 8$.

γ) Αν το ΑΔΒΚ του παρακάτω σχήματος είναι παραλληλόγραμμο τότε έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες (ιδιότητα παραλληλογράμμου).



Άρα ΒΚ = ΑΔ.

13853-Λύση

Λόγω του ισοπλεύρου ΑΒΔ είναι ΑΔ = ΑΒ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\Gamma} = 30^o$ άρα ΑΒ = $\frac{B\Gamma}{2}$.

Οπότε ΒΚ = ΑΔ = ΑΒ = $\frac{B\Gamma}{2}$, δηλαδή το Κ είναι το μέσο της ΒΓ.

Πράγματι, αν το Κ είναι μέσο της ΒΓ, τότε ισχύει ότι ΒΚ = $\frac{B\Gamma}{2}$ και λόγω της $\hat{\Gamma} = 30^o$ στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = $\frac{B\Gamma}{2}$. Άρα ΒΚ = ΑΒ.

Όμως λόγω του ισοπλεύρου ΑΒΔ είναι ΑΔ = ΑΒ, άρα ΑΔ = ΒΚ.

Επίσης ΑΚ = $\frac{B\Gamma}{2}$, λόγω του ότι η ΑΚ ως διάμεσος της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας ΒΓ.

Όμως, λόγω του ισοπλεύρου ΑΒΔ είναι ΒΔ = ΑΒ και λόγω της $\hat{\Gamma} = 30^o$ στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = $\frac{B\Gamma}{2}$. Άρα ΒΔ = $\frac{B\Gamma}{2}$, άρα ΒΔ = ΑΚ.

Άρα, τελικά με Κ μέσο της ΒΓ αποδεικνύεται ότι ΑΔ = ΒΚ και ΒΔ = ΑΚ, δηλαδή το ΑΔΒΚ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες και επομένως είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον, εφόσον ΑΔ = ΒΔ το παραλληλόγραμμο ΑΔΒΚ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, επομένως είναι ρόμβος.

13855

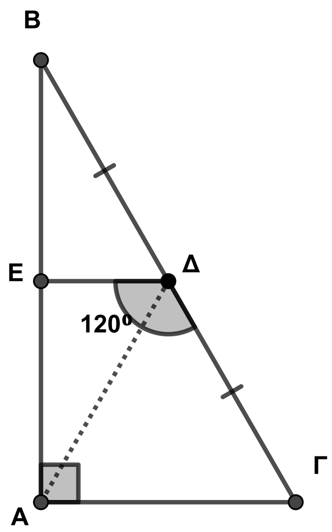
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{Α}$=90^ο. Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΑΓ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι Ε$\widehat{Δ}$Γ=120^ο, τότε:

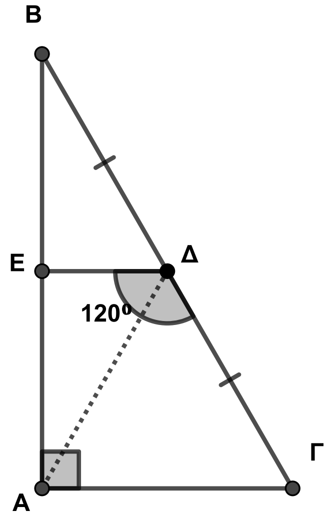
α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνία Δ$\widehat{Γ}$Α. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

γ) Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΖ=ΑΓ και την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΗ=$\frac{ΒΓ}{2}$. Να αποδείξετε ότι Α$\widehat{Η}$Ζ=90^ο. (Μονάδες 12)



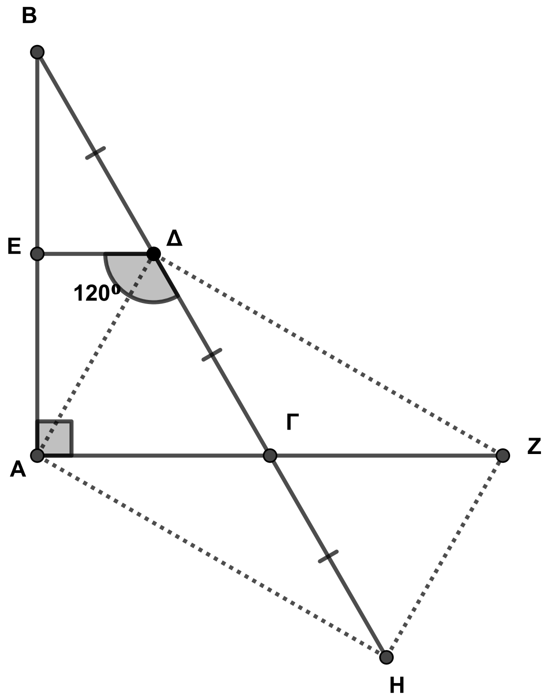
13855-Λύση



α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και ΔΕ// ΑΓ άρα το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ. Οι γωνίες $Ε\widehat{Δ}Γ$ και $Δ\widehat{Γ}Α$ είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΕΔ και ΑΓ που τέμνονται από την ΓΔ, συνεπώς είναι παραπληρωματικές άρα $Ε\widehat{Δ}Γ + Δ\widehat{Γ}Α = 180^o$ ή $120^o + Δ\widehat{Γ}Α = 180^o$ ή $Δ\widehat{Γ}Α = 60^o$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $ΑΔ=\frac{ΒΓ}{2}$ ή ΑΔ=ΔΓ. Στο ίδιο τρίγωνο οι γωνίες $\widehat{Β}$ και $\widehat{Γ}$ είναι συμπληρωματικές, από το α) ερώτημα έχουμε $\widehat{Γ}=60^o$ άρα $\widehat{Β}=30^o$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\widehat{Β}=30^o$ άρα η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΓ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΓ, δηλαδή $ΑΓ=\frac{ΒΓ}{2}$ ή ΑΓ=ΔΓ. Συνεπώς το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο αφού έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες ΑΔ=ΑΓ=ΔΓ.

13855-Λύση



γ) Στο τετράπλευρο ΑΗΖΔ οι διαγώνιοι ΔΗ και ΑΖ διχοτομούνται στο Γ αφού ΔΓ=$\frac{\mathrm{Β}\Gamma}{2}$=ΓΗ (από υπόθεση και τη λύση του ερωτήματος β)) και ΑΓ=ΓΖ (από υπόθεση). Άρα ΑΗΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

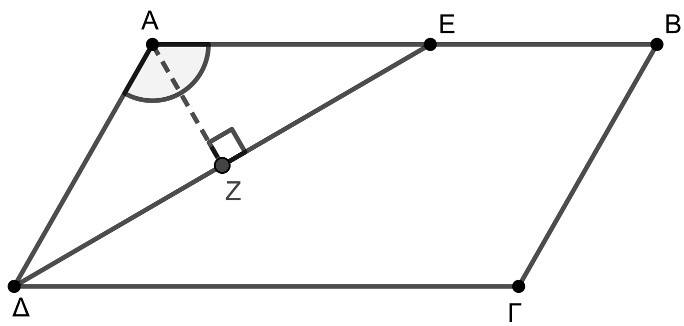
Στο β) ερώτημα δείξαμε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο άρα ΑΓ=ΓΔ ή 2ΑΓ=2ΓΔ ή ΑΖ=ΔΗ, άρα το παραλληλόγραμμο ΑΗΖΔ είναι ορθογώνιο αφού έχει ίσες διαγωνίους, συνεπώς Α$\widehat{\mathrm{Η}}$Ζ=90°.

ΘΕΜΑ 2

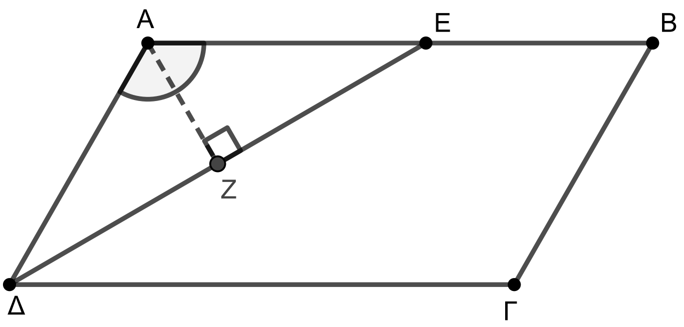
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία $\widehat{A} = 120^o$ και ΑΒ=2ΑΔ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε, και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα ΑΖ στη ΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) γωνία $A\widehat{\Delta}E = 30^o$ (Μονάδες 10)

β) $AZ = \frac{AB}{4}$ (Μονάδες 15)



14876-Λύση



α) Οι γωνίες $\widehat{\mathrm{A}}$ και $\widehat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματικές, ως γωνίες εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που τις τέμνει η ΑΔ, δηλαδή $\widehat{\mathrm{A}}+\widehat{\Delta} = 180°$. Επειδή είναι $\widehat{\mathrm{A}} = 120°$ τότε $\widehat{\Delta} = 60°$ και αφού ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$ θα είναι $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{E} = 30°$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΖ (ΑΖ $\perp$ ΔΕ) είναι $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{E} = 30^{o}$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά από τη γωνία αυτή ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή ΑΖ = $\frac{\mathrm{A\Delta}}{2}$.

Όμως είναι ΑΔ = $\frac{\mathrm{AB}}{2}$ από την υπόθεση, οπότε ΑΖ = $\frac{\mathrm{AB}}{4}$.

14882

ΘΕΜΑ 4

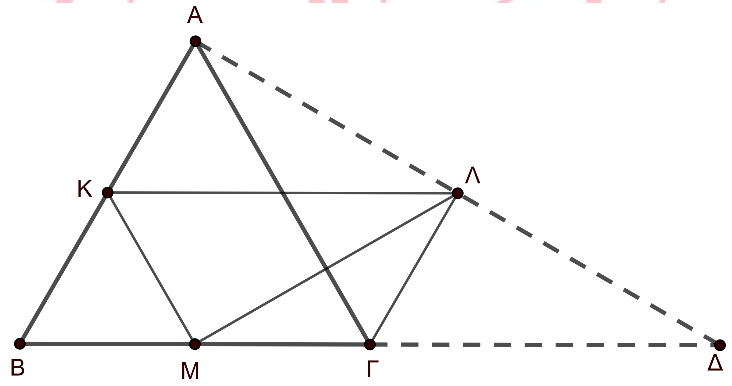
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα ΓΔ = ΒΓ. Αν Μ, Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΔ. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι:

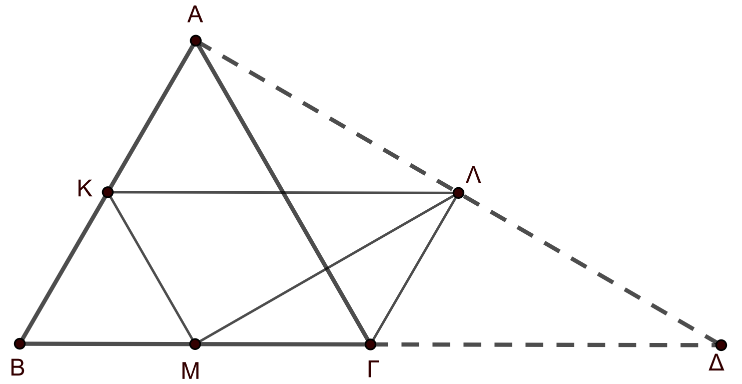
i. Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή. (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)



14882-Λύση

α)



Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι: $B\widehat{A}\Gamma = \widehat{B} = B\widehat{\Gamma}A = 60^o$

Ισχύει ακόμη ότι ΓΔ = ΒΓ και ΒΓ = ΑΓ, άρα ΓΔ = ΑΓ, οπότε το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές, επομένως $\Gamma\widehat{A}\Delta = \widehat{\Delta}$ (1).

Η γωνία $A\widehat{\Gamma}B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΓΔ, άρα $A\widehat{\Gamma}B = \Gamma\widehat{A}\Delta + \widehat{\Delta}$ και λόγω της (1) $60^o = 2\widehat{\Delta}$ ή $\widehat{\Delta} = 30^o$. Οπότε λόγω της (1) είναι και $\Gamma\widehat{A}\Delta = 30^o$. Ισχύει ακόμη ότι:

$B\widehat{A}\Delta = B\widehat{A}\Gamma + \Gamma\widehat{A}\Delta = 60^o + 30^o = 90^o$.

β)

i. Το ΚΛ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, οπότε ΚΛ // ΒΔ ή ΚΛ//ΜΓ.

Επιπλέον το Γ είναι το μέσο της ΒΔ, αφού ΒΓ = ΓΔ από υπόθεση και το Λ είναι το μέσο της ΑΔ, άρα ΛΓ//ΑΒ. Το τμήμα ΚΜ τέμνει τη μία από τις δύο παράλληλες την ΑΒ, άρα θα τέμνει και την άλλη. Δηλαδή τα τμήματα ΚΜ και ΛΓ τέμνονται , οπότε δεν είναι παράλληλα. Έτσι το ΚΛΓΜ είναι τραπέζιο.

Το ΛΓ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα $\Lambda\Gamma = \frac{AB}{2}$ (2)

Το ΚΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $KM = \frac{A\Gamma}{2}$ (3)

Επειδή ΑΒ = ΑΓ, από τις (1), (2) βρίσκουμε ότι ΛΓ = ΚΜ, οπότε το τραπέζιο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές.

Για τις βάσεις του έχουμε $K\Lambda = \frac{B\Delta}{2}$, αφού Κ και Λ τα μέσα των ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα, δηλαδή $K\Lambda = \frac{2\,B\Gamma}{2}$ ή ΚΛ = ΒΓ, ενώ $M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$, αφού το Μ είναι μέσο του ΒΓ. Δηλαδή ΚΛ = ΒΓ και $M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$ και έτσι η μεγάλη βάση του τραπεζίου είναι διπλάσια της μικρής.

14882-Λύση

ii. Ισχύουν τα εξής:

- $B\widehat{K}M = B\widehat{A}\Gamma = 60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη που σχηματίζονται από τις παράλληλες ΚΜ και ΑΓ που τέμνονται από την ΑΒ.
- $A\widehat{K}\Lambda = \widehat{B} = 60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη που σχηματίζονται από τις παράλληλες ΚΛ και ΒΔ που τέμνονται από την ΑΒ.
- $A\widehat{K}\Lambda + \Lambda\widehat{K}M + B\widehat{K}M = 180^o$ ή $60^o + \Lambda\widehat{K}M + 60^o = 180^o$, δηλαδή $\Lambda\widehat{K}M = 60^o$.

Τα τρίγωνα ΜΚΛ και ΑΚΛ έχουν:

- ΚΛ κοινή πλευρά
- $A\widehat{K}\Lambda = \Lambda\widehat{K}M = 60^o$
- ΑΚ = ΚΜ, διότι $AK = \frac{AB}{2}$ και $KM = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB}{2}$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΜΚΛ και ΑΚΛ είναι ίσα, άρα:

$K\widehat{M}\Lambda = K\widehat{A}\Lambda$ δηλαδή $K\widehat{M}\Lambda = 90^o$. Επομένως το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο.

14884

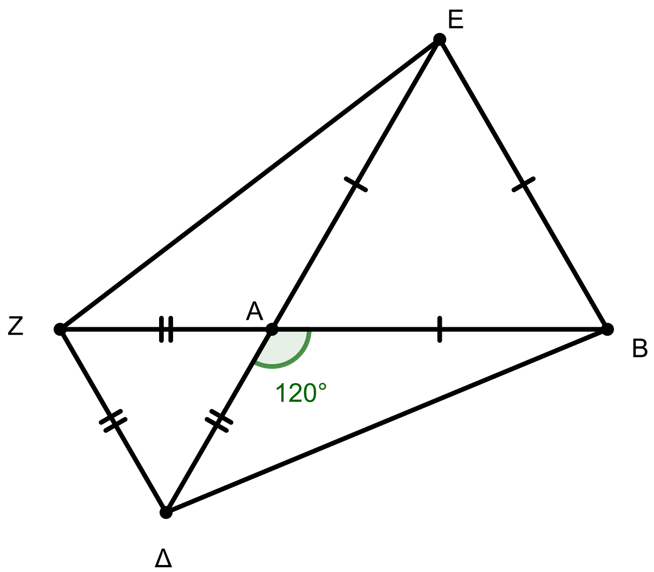
ΘΕΜΑ 2

Έστω τρίγωνο ΑΒΔ με $\widehat{A} = 120^o$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο στο ΒΕ. (Μονάδες 12)



14884-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ είναι ισόπλευρα, άρα όλες οι γωνίες τους είναι 60^o.

$Z\hat{A}B = Z\hat{A}\Delta + \Delta\hat{A}B = 60^o + 120^o = 180^o$, άρα τα σημεία Ζ, Α, Β είναι συνευθειακά.

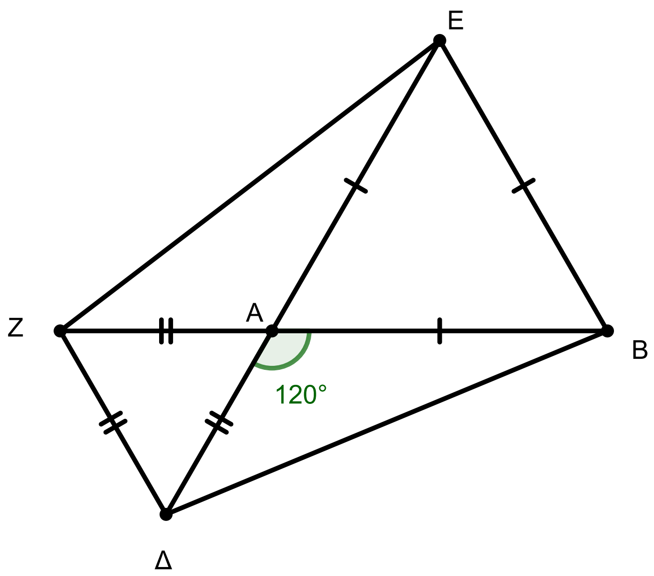
Ομοίως $E\hat{A}\Delta = E\hat{A}B + B\hat{A}\Delta = 60^o + 120^o = 180^o$ και τα σημεία Ε, Α και Δ είναι επίσης συνευθειακά.

Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ έχουν:

- ΑΖ = ΑΔ, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΖΔ
- ΑΒ = ΑΕ, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΕ
- $Z\hat{A}E = \Delta\hat{A}B$, ως κατακορυφήν αφού ΖΑΒ και ΕΑΔ ευθείες

Με βάση το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα.

β) $A\hat{\Delta}Z = A\hat{E}B = 60^o$ ως γωνίες ισόπλευρων τριγώνων και είναι γωνίες εντός εναλλάξ των ΔΖ και ΒΕ που τέμνονται από την ΔΕ, άρα ΔΖ // ΒΕ.



14886

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90°$), τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών του και το ύψος του ΑΚ. Αν Θ είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

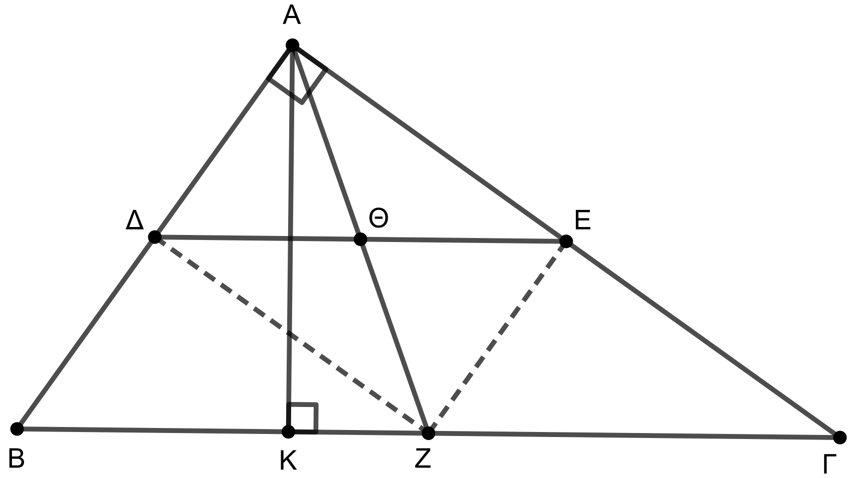
i. Το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

ii. ΑΘ=ΘΕ=$\frac{ΒΓ}{4}$ (Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον είναι $\widehat{Γ} = 30^{o}$, τότε:

i. να βρείτε τη γωνία Α$\widehat{Z}$Β. (Μονάδες 5)

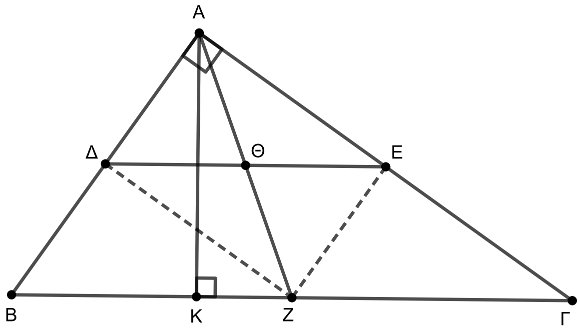
ii. να αποδείξετε ότι ΒΚ = $\frac{ΒΓ}{4}$. (Μονάδες 5)



14886-Λύση

α)

i.



Το τμήμα ΕΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα ΕΖ // ΑΒ οπότε και ΕΖ // ΑΔ και ΕΖ = $\frac{\text{ΑΒ}}{2}$ = ΑΔ. Άρα το τετράπλευρο ΑΔΖΕ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΔ και ΕΖ ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον η γωνία του Α είναι ορθή, άρα το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο.

ii. Το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε ΔΕ//ΒΓ και ΔΕ = $\frac{\text{ΒΓ}}{2}$.

Οι ΑΖ, ΔΕ είναι διαγώνιες του ορθογωνίου ΑΔΖΕ, οπότε είναι ίσες και διχοτομούνται με Θ το κέντρο του. Άρα ΑΘ = $\frac{\text{ΑΖ}}{2}$ = $\frac{\text{ΔΕ}}{2}$ = ΘΕ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΘΕ ενώνει τα μέσα των ΑΖ και ΑΓ στο τρίγωνο ΑΖΓ, άρα ΘΕ = $\frac{\text{ΖΓ}}{2} = \frac{\frac{\text{ΒΓ}}{2}}{2} = \frac{\text{ΒΓ}}{4}$.

β)

i. Επειδή Ζ$\hat{\text{Ε}}$Γ = 90^{o}, το ΖΕ είναι ύψος στο τρίγωνο ΑΖΓ και επειδή είναι και διάμεσος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα Ζ$\hat{\text{Α}}$Γ = $\hat{\Gamma}$ = 30^{o}.

Η γωνία Α$\hat{\text{Ζ}}$Β είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΖΓ, άρα: Α$\hat{\text{Ζ}}$Β = Ζ$\hat{\text{Α}}$Γ + $\hat{\Gamma}$ = 60^{o}.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\Gamma}$ = 30^{o}, άρα ΑΒ = $\frac{\text{ΒΓ}}{2}$ (1). Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε: $\hat{\text{Β}}$ + $\hat{\Gamma}$ = 90^{o} ή $\hat{\text{Β}}$ = 60^{o}. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΒ έχουμε: Β$\hat{\text{Α}}$Κ + $\hat{\text{Β}}$ = 90^{o} ή Β$\hat{\text{Α}}$Κ = 30^{o}. Οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΚ είναι ΒΚ = $\frac{\text{ΑΒ}}{2}$ και λόγω της (1) ΒΚ = $\frac{\frac{\text{ΒΓ}}{2}}{2}$ ή

$\text{ΒΚ} = \frac{\text{ΒΓ}}{4}$.

14887

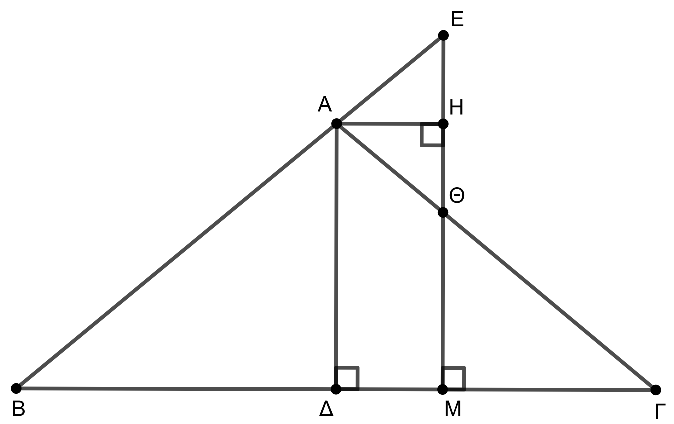
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), και τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το σημείο Μ φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Θ αντίστοιχα. Αν ΑΔ και ΑΗ τα ύψη των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΘΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

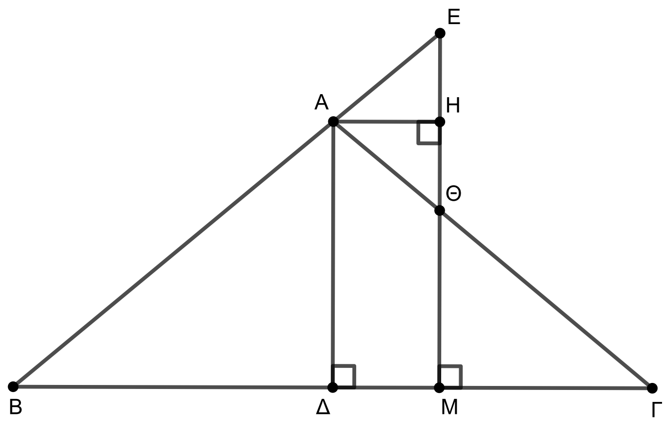
α) $\Delta\widehat{A}H = 90^o$. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) ΜΘ+ΜΕ = 2ΑΔ. (Μονάδες 9)



14887-Λύση



α) Το τετράπλευρο ΔΜΗΑ έχει τρείς ορθές γωνίες οπότε είναι ορθογώνιο. Άρα $\Delta\hat{A}H = 90^o$.

β) Το τμήμα ΑΗ είναι παράλληλο στην ΒΓ, καθώς και τα δύο είναι κάθετα στην ΕΜ. Ισχύει ότι $\Gamma\hat{A}H = A\hat{\Gamma}B$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΗ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ. Επίσης, $A\hat{B}\Gamma = E\hat{A}H$ ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΗ και ΒΓ που τέμνονται από την ΒΕ. Όμως, λόγω του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, με βάση ΒΓ, είναι $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B$. Άρα τελικά $\Gamma\hat{A}H = E\hat{A}H$ και η ΑΗ είναι διχοτόμος στο τρίγωνο ΑΘΕ. Επιπλέον το ΑΗ είναι και ύψος, οπότε το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΘ και ΘΕ.

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΘΕ το ύψος ΑΗ θα είναι και διάμεσος, άρα ΘΗ = ΗΕ και ΘΕ = 2ΘΗ.

Για το τμήμα ΜΕ έχουμε: ΜΕ = ΜΘ + ΘΕ = ΜΘ + 2ΘΗ (1).

Άρα λόγω της (1) έχουμε: ΜΘ + ΜΕ = ΜΘ + ΜΘ + 2ΘΗ = 2ΜΘ + 2ΘΗ = 2(ΜΘ + ΘΗ) = 2ΜΗ.

Επιπλέον είναι ΑΔ = ΜΗ διότι είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΔΜΗΑ από το α) ερώτημα, επομένως ΜΘ + ΜΕ = 2ΑΔ.