1529

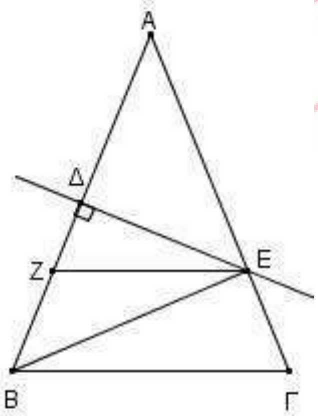
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\widehat{A}<90°$. Στο μέσο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΕ= ΒΕ. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)



1529-Λύση

α) Αφού Δ μέσο της ΑΒ και η ΔΕ είναι ευθεία κάθετη στην ΑΒ στο Δ, τότε το ΕΔ είναι διάμεσος και ύψος, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ, άρα είναι ΑΕ = ΒΕ.

β) Επειδή ΖΕ // ΒΓ και οι πλευρές ΒΖ και ΓΕ ως τμήματα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Α, το ΒΓΕΖ είναι τραπέζιο. Επίσης ισχύει ότι $A\widehat{B}\Gamma = \widehat{\Gamma}$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Άρα το τραπέζιο ΒΓΕΖ είναι ισοσκελές.

1531

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ (προς το μέρος του Δ) κατά τμήμα ΔΕ=ΑΔ και φέρουμε την ΒΕ που τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

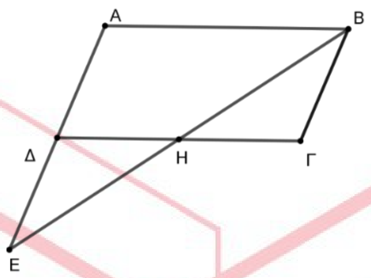
β) το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) η ΑΗ είναι διάμεσος του ΒΑΕ τριγώνου. (Μονάδες 9)

1531-Λύση

Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΒ=2ΒΓ, τμήμα ΔΕ στην προέκταση της ΑΔ τέτοιο ώστε ΔΕ=ΑΔ και Η το σημείο τομής της ΒΕ με την ΔΓ.

α)

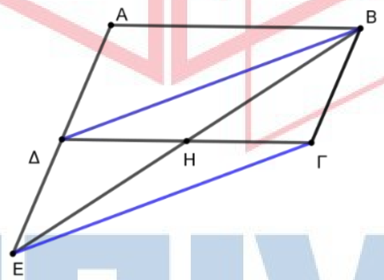


Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, άρα ΑΔ = ΒΓ.

Έχουμε ότι ΑΕ = ΑΔ + ΔΕ και αφού ΑΔ=ΔΕ τότε ΑΕ=2ΑΔ και επειδή ΑΔ=ΒΓ τότε

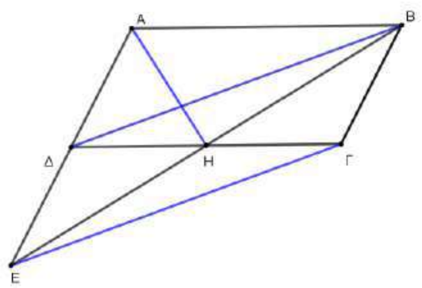
ΑΕ = 2ΒΓ. Από την υπόθεση είναι ΑΒ =2ΒΓ, επομένως ΑΕ=ΑΒ και το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΒ και ΑΕ.

β)



Από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΒΓ= // ΑΔ, και στην προέκταση της ΑΔ το τμήμα ΔΕ ισούται με το ΑΔ οπότε και ΔΕ =// ΒΓ. Άρα το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες.

γ)



Επειδή το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιές του ΓΔ, ΒΕ διχοτομούνται στο Η. Δηλαδή το Η είναι μέσο του ΒΕ, άρα η ΑΗ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΑΕ.

1532

ΘΕΜΑ 2

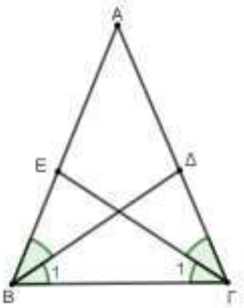
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Αν $EH \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) ΕΗ = ΔΖ. (Μονάδες 12)

1532-Λύση

α) Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ΒΔ, ΓΕ διχοτόμοι των γωνιών του Β, Γ αντίστοιχα.

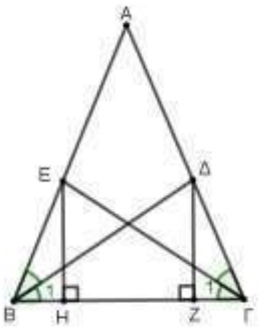


Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ έχουν:

- ΒΓ κοινή πλευρά
- $\widehat{B}$ =$\widehat{\Gamma}$ γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου
- $\widehat{B}_1 = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = \widehat{\Gamma}_1$ ως μισά των ίσων γωνιών Β και Γ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα.

β) Έστω ΕΗ και ΔΖ οι κάθετες στην πλευρά ΒΓ.



Από το α) ερώτημα τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα, άρα θα είναι ίσες και οι πλευρές τους ΒΕ και ΓΔ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Gamma}_1$ και $\widehat{B}_1$ αντίστοιχα. (1)

Τα τρίγωνα ΕΒΗ και ΔΖΓ έχουν:

- $\widehat{H} = \widehat{Z} = 90°$ (ΕΗ⊥ΒΓ και ΔΖ⊥ΒΓ)
- $\widehat{B}$ =$\widehat{\Gamma}$ (γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου)
- ΒΕ = ΓΔ από (1)

Άρα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση.

Οπότε είναι και ΕΗ = ΔΖ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

1533

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του ΒΜ και ΓΝ. Προεκτείνουμε την ΒΜ (προς το Μ) κατά τμήμα ΜΔ=ΒΜ και την ΓΝ (προς το Ν) κατά τμήμα ΝΕ=ΓΝ.

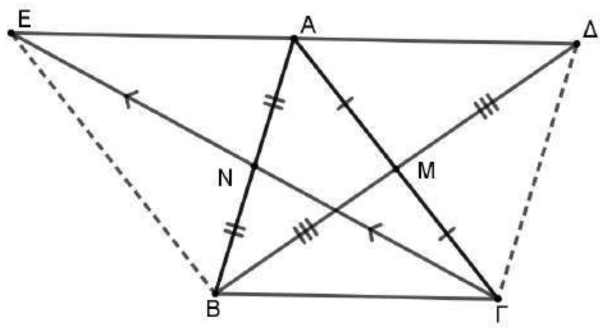
α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ//ΒΓ και ΑΕ//ΒΓ. (Μονάδες 13)

β) Είναι τα σημεία Ε, Α και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

1533-Λύση

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους ΒΜ και ΓΝ και τις προεκτείνουμε κατά τμήματα ΜΔ=ΒΜ και ΝΕ=ΓΝ αντίστοιχα.



α) Επειδή ΜΔ = ΒΜ από κατασκευή και ΑΜ = ΜΓ αφού ΒΜ διάμεσος, οι διαγώνιοι του τετράπλευρου ΑΒΓΔ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Άρα ΑΔ//ΒΓ.

Επειδή ΓΝ = ΝΕ από κατασκευή και ΑΝ = ΝΒ αφού ΓΝ διάμεσος, οι διαγώνιοι του τετράπλευρου ΑΓΒΕ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Άρα ΑΕ//ΒΓ.

β) Από το α) ερώτημα αποδείχθηκε ότι από το σημείο Α διέρχονται τα τμήματα ΑΕ και ΑΔ που είναι παράλληλα στη ΒΓ. Όμως επειδή από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη σ' αυτήν, συμπεραίνουμε ότι τα τμήματα ΑΔ και ΑΕ έχουν τον ίδιο φορέα, δηλαδή τα σημεία Ε, Α και Δ είναι συνευθειακά.

1534

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και η διαγώνιός του ΒΔ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις κάθετες ΑΕ και ΓΖ στη ΒΔ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

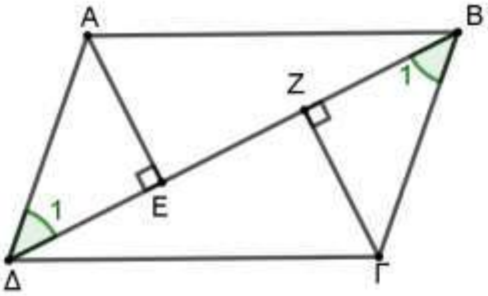
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

1534-Λύση

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, ΔΒ διαγώνιος και ΑΕ, ΓΖ οι κάθετες στη ΒΔ.

α)

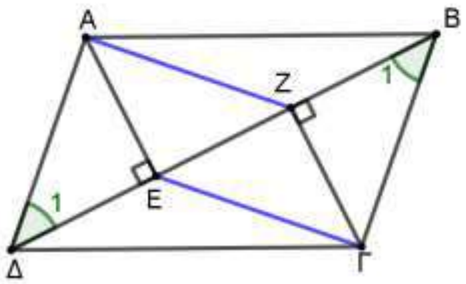


Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ έχουν:

- $\hat{\mathrm{E}} = \hat{\mathrm{Z}} = 90°$ (ΑΕ⊥ΒΔ και ΓΖ⊥ΒΔ)
- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και
- $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\mathrm{B}}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ.

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση.

β)



Επειδή ΑΕ ⊥ ΒΔ και ΓΖ ⊥ ΒΔ, προκύπτει ότι ΑΕ // ΓΖ ως κάθετες στην ίδια ευθεία ΒΔ. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ είναι ίσα από το α), προκύπτει ότι οι πλευρές ΑΕ και ΓΖ είναι ίσες αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Delta}_1$ και $\widehat{\mathrm{B}}_1$ αντίστοιχα. Άρα το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες.

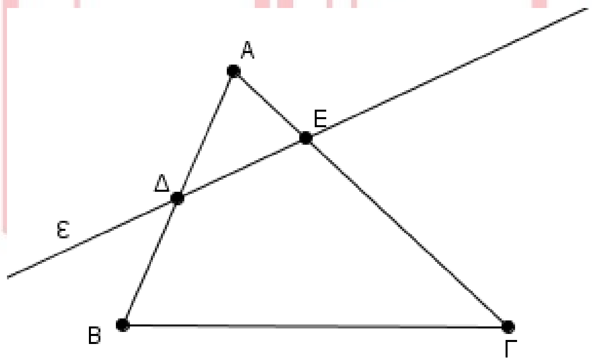
1536

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ε) που τέμνει την πλευρά ΑΓ σε εσωτερικό της σημείο Ε. Η ευθεία (ε) χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε ένα τρίγωνο ΑΔΕ και σε ένα τετράπλευρο ΒΔΕΓ .

α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΒΔΕΓ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του ΑΒΓ τριγώνου, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)



1536-Λύση

α) Αν το ΒΔΕΓ είναι τραπέζιο, θα έχει δύο μόνο απέναντι πλευρές παράλληλες. Επειδή οι πλευρές ΒΔ και ΓΕ τέμνονται στην κορυφή Α του τριγώνου, παράλληλες θα πρέπει να είναι οι ΔΕ και ΒΓ. Δηλαδή, η ευθεία ε από το μέσο Δ της πλευράς ΑΒ θα πρέπει είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ. Επομένως το σημείο Ε θα είναι μέσο της ΑΓ.

β) Για να είναι το ΒΔΕΓ ισοσκελές τραπέζιο πρέπει $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$. Άρα πρέπει το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές.

1537

ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, προεκτείνουμε την πλευρά ΔΑ (προς το Α) κατά τμήμα ΑΗ=ΔΑ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$, η οποία τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ.

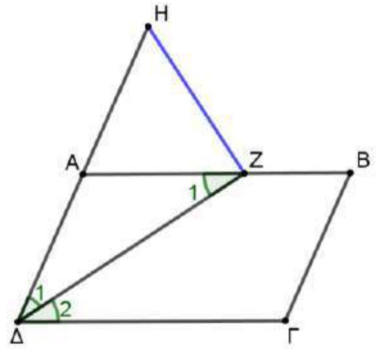
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Το τρίγωνο ΔΖΗ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Z}$. (Μονάδες 13)

1537-Λύση

Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο, τμήμα ΑΗ στην προέκταση της ΔΑ τέτοιο ώστε ΑΗ=ΔΑ και ΔΖ διχοτόμος της $\widehat{\Delta}$.



α) Είναι $\widehat{\Delta}_2 = \hat{Z}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΖ. Επίσης $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$ αφού ΔΖ διχοτόμος της γωνίας Δ. Άρα $\widehat{\Delta}_1 = \hat{Z}_1$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές με ΑΔ=ΑΖ.

β) Από το α) ερώτημα είναι ΔΑ = ΑΖ. Όμως ΑΗ = ΔΑ, από υπόθεση, άρα ΖΑ = ΑΔ = ΑΗ = $\frac{\Delta H}{2}$. Δηλαδή, στο τρίγωνο ΔΖΗ η διάμεσος του ΖΑ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΔΗ, επομένως $\hat{Z} = 90^o$.

1538

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΒ=2ΑΔ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε.

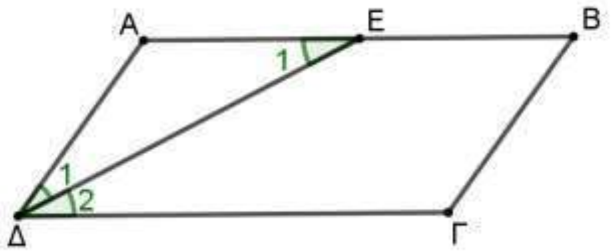
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Είναι το σημείο Ε μέσο της πλευράς ΑΒ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

1538-Λύση

Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΒ = 2ΑΔ και ΔΕ η διχοτόμος της $\widehat{\Delta}$.



α) Είναι $\widehat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΕ. $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{\Delta}_1$ (2), επειδή ΔΕ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$. Από (1), (2) έχουμε $\widehat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$. Άρα, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΔ, ΑΕ.

β) Επειδή ΑΕ = ΑΔ και από την υπόθεση ισχύει ότι ΑΔ= $\frac{AB}{2}$, άρα ΑΕ= $\frac{AB}{2}$. Επομένως το Ε είναι μέσο της ΑΒ.

1539

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο Ε του τμήματος ΑΟ και σημείο Ζ του τμήματος ΟΓ, ώστε ΟΕ=ΟΖ.

Να αποδείξετε ότι:

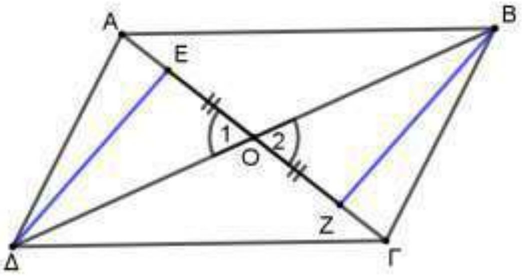
α) ΔΕ=ΒΖ (Μονάδες 12)

β) το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

1539-Λύση

Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο, ΑΓ και ΒΔ οι διαγώνιοί του που τέμνονται στο Ο και Ε, Ζ σημεία στις ΑΟ, ΟΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΟΕ = ΟΖ.

α)

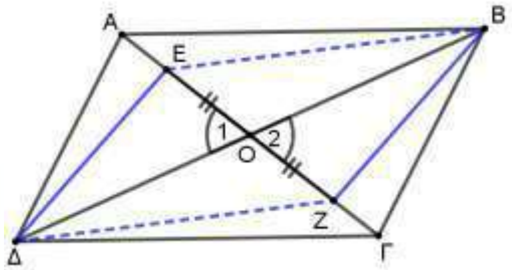


Τα τρίγωνα ΟΔΕ και ΟΒΖ έχουν:

- ΟΔ = ΟΒ (Ο κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ)
- ΟΕ=ΟΖ (υπόθεση)
- $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (κατακορυφήν γωνίες)

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΔΕ = ΒΖ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{O}_1$ και $\widehat{O}_2$ αντίστοιχα.

β)



Επειδή ΟΒ = ΟΔ και ΟΕ = ΟΖ οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΔΕΒΖ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

1540

ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90˚), η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε .

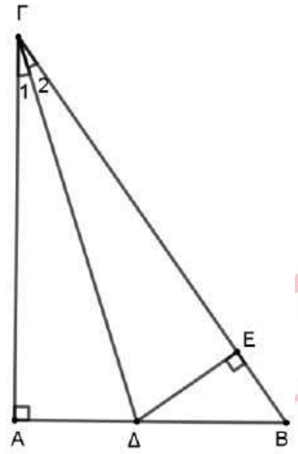
Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ=ΔΕ (Μονάδες 13)

β) ΑΔ<ΔΒ (Μονάδες 12)

1540-Λύση

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}}$ ορθή, ΓΔ η διχοτόμος της $\widehat{\Gamma}$ και τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΒΓ.



α) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΓΔΕ έχουν:

- $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{E}} = 90°$ (Υπόθεση και ΔΕ⊥ΒΓ)
- ΓΔ κοινή πλευρά
- $\widehat{\Gamma}_1$ = $\widehat{\Gamma}_2$, αφού ΓΔ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Gamma}$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε οι πλευρές ΑΔ και ΔΕ είναι ίσες γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Gamma}_1$ και $\widehat{\Gamma}_2$ αντίστοιχα.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΒ η ΔΒ είναι η υποτείνουσα, οπότε είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου. Άρα ΔΒ > ΔΕ. Επειδή ΑΔ = ΔΕ από το α) ερώτημα, προκύπτει ότι ΑΔ < ΔΒ.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

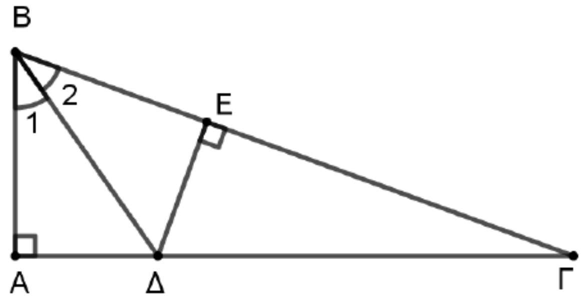
α) ΒΕ=ΑΒ. (Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον $B\hat{\Delta}A = 55°$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ. (Μονάδες 13)

1541-Λύση

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}$ ορθή, ΒΔ η διχοτόμος της $\widehat{B}$ και τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΒΓ.

α)

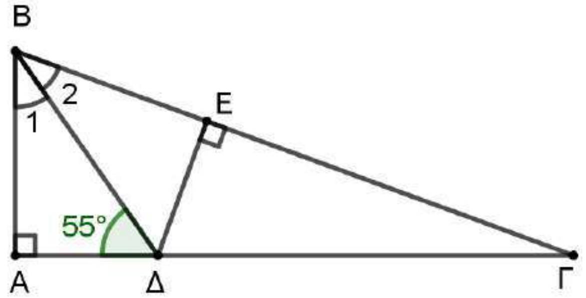


Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΕ έχουν:

- $\widehat{A} = \widehat{E} = 90°$ (Υπόθεση και ΔΕ⊥ΒΓ)
- ΒΔ κοινή πλευρά,
- $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, επειδή ΒΔ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε οι πλευρές ΒΕ και ΑΒ είναι ίσες γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}_2$ και $\widehat{B}_1$ αντίστοιχα.

β) Έστω ότι είναι Β$\widehat{\Delta}$Α = 55^0.



Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ ισχύει ότι $55^o + \widehat{B}_1 = 90^o$.

Άρα $\widehat{B}_1 = 35^o = \widehat{B}_2$ αφού ΒΔ διχοτόμος της $\widehat{B}$, οπότε $\widehat{B} = 70^o$.

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^o$.

Άρα $\widehat{\Gamma} = 20^o$.

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΓΔΕ ($\widehat{E} = 90^o$) ισχύει ότι

Γ$\widehat{\Delta}$Ε + $\widehat{\Gamma} = 90^0$.

Άρα Γ$\widehat{\Delta}$Ε = 70^o.

ΘΕΜΑ 2

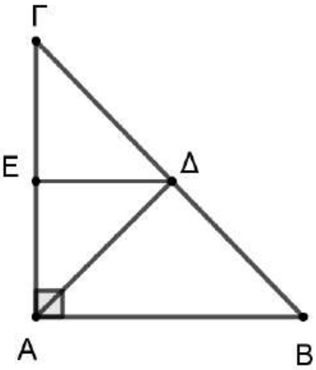
Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A}=90^\circ$) και ΑΔ η διάμεσός του. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) ΔΕ= $\frac{ΑΓ}{2}$ (Μονάδες 12)

1542-Λύση

Έστω ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}$ ορθή, ΑΔ η διάμεσός του και τμήμα ΔΕ παράλληλο στην ΑΒ.



α) Είναι ΑΒ//ΔΕ και ΑΓ$\perp$ΑΒ. Άρα η ΑΓ θα είναι κάθετη και στην παράλληλη της ΑΒ που είναι η ΔΕ, δηλαδή ΑΓ$\perp$ΔΕ. Οπότε το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο με $\Gamma\widehat{E}\Delta = 90°$.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το Δ είναι μέσο της ΒΓ και ΔΕ // ΑΒ, άρα και το Ε είναι μέσο της ΑΓ. Επειδή το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ του ΑΒΓ ισχύει ότι: ΔΕ = $\frac{AB}{2}$ ή ΔΕ = $\frac{A\Gamma}{2}$ αφού ΑΒ=ΑΓ στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ.

1544

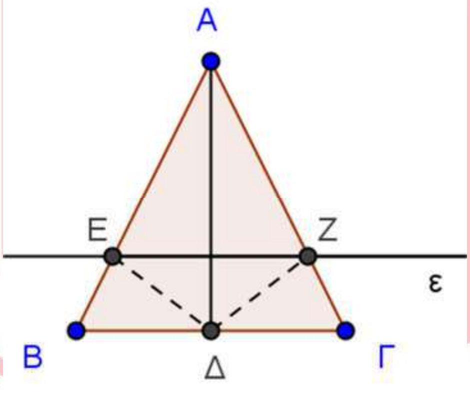
ΘΕΜΑ 2

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς την ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



1544-Λύση

α) $A\hat{E}Z = \hat{B}$ **(1)** ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΕΖ//ΒΓ που τις τέμνει η ΑΒ.

Επίσης $A\hat{Z}E = \hat{\Gamma}$ **(2)** ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΕΖ//ΒΓ που τις τέμνει η ΑΓ.

$\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ως γωνίες της βάσης ΒΓ στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ.

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $A\hat{E}Z = A\hat{Z}E$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές με βάση την ΕΖ.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ έχουν:

- ΑΔ κοινή πλευρά
- $E\hat{A}\Delta = Z\hat{A}\Delta$, διότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.
- ΑΕ = ΑΖ, διότι ΑΕΖ ισοσκελές τρίγωνο από το α) ερώτημα.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα.

1545

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ.

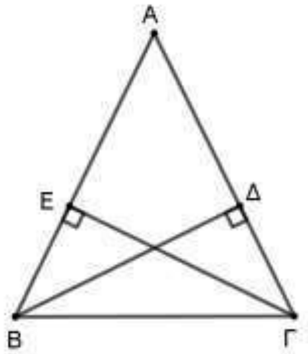
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) ΑΔ=ΑΕ (Μονάδες 10)

1545-Λύση

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ΒΔ, ΓΕ ύψη στις πλευρές ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα.



α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ έχουν:

- $\widehat{\Delta} = \widehat{\mathrm{E}} = 90°$ (ΒΔ$\perp$ΑΓ και ΓΕ$\perp$ΑΒ ως ύψη του τριγώνου)
- ΒΓ κοινή πλευρά
- $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$ γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΒΔΓ και ΓΕΒ θα ισχύει ότι οι πλευρές ΒΕ και ΓΔ είναι ίσες γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\mathrm{B}\widehat{\Gamma}\mathrm{E}$και $\Delta\widehat{\mathrm{B}\Gamma}$ αντίστοιχα.

Όμως είναι ΑΒ=ΑΓ, οπότε ΑΒ-ΒΕ =ΑΓ-ΓΔ, οπότε ΑΕ=ΑΔ ως διαφορές ίσων τμημάτων.

1546

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε τις αποστάσεις ΜΚ και ΜΛ του σημείου Μ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

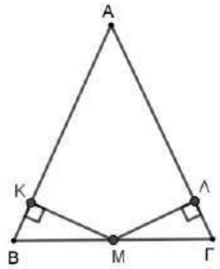
α) ΜΚ=ΜΛ. (Μονάδες 13)

β) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΚΜΛ. (Μονάδες 12)

1546-Λύση

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Μ το μέσο της βάσης ΒΓ. Φέρουμε τις αποστάσεις ΜΚ και ΜΛ του Μ από τις ίσες πλευρές του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α)

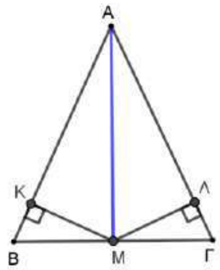


Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΜΛΓ έχουν:

- $\widehat{\mathrm{K}} = \widehat{\Lambda} = 90°$ (ΜΚ⊥ΑΒ και ΜΛ⊥ΑΓ)
- ΜΒ = ΜΓ, αφού Μ μέσο του ΒΓ
- $\widehat{\mathrm{B}}$ = $\widehat{\Gamma}$, γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε οι πλευρές ΜΚ και ΜΛ είναι ίσες αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\mathrm{B}}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

β)



Τα τρίγωνα ΑΚΜ και ΑΛΜ έχουν:

- $\widehat{\mathrm{K}} = \widehat{\Lambda} = 90°$ (όπως προηγουμένως)
- ΑΜ κοινή πλευρά
- ΜΚ = ΜΛ από το α) ερώτημα

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Οπότε, θα ισχύει ότι ΑΚ = ΑΛ και Α$\widehat{\mathrm{M}}$Κ = Α$\widehat{\mathrm{M}}$Λ ως απέναντι γωνίες των ΑΚ, ΑΛ αντίστοιχα. Άρα, η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ θα είναι διχοτόμος της Κ$\widehat{\mathrm{M}}$Λ.

1547

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι

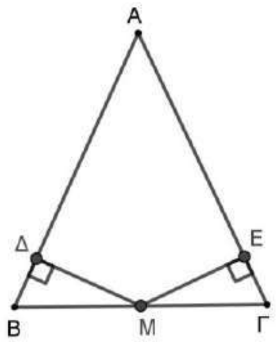
α) ΜΔ=ΜΕ (Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές (Μονάδες 13)

1547-Λύση

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ, Μ το μέσο της βάσης του ΒΓ και ΜΔ, ΜΕ κάθετα τμήματα στις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.

α)

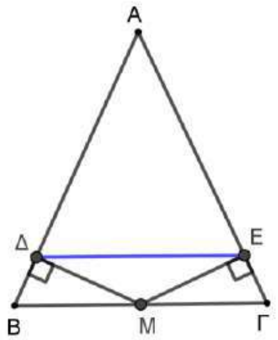


Τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ έχουν:

- $\widehat{\Delta} = \widehat{E} = 90°$ (ΜΔ ⊥ ΑΒ και ΜΕ ⊥ ΑΓ)
- ΜΒ = ΜΓ, αφού Μ μέσο του ΒΓ
- $\widehat{B}$ = $\widehat{\Gamma}$, αφού ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μια οξεία γωνία ίση. Οπότε έχουν και ΜΔ = ΜΕ, αφού οι πλευρές αυτές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

β)



Επειδή τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ είναι ίσα από το α) ερώτημα και τα υπόλοιπα στοιχεία τους θα είναι ίσα, επομένως ισχύει ΔΒ = ΕΓ.

Όμως ΑΒ = ΑΓ, οπότε ΑΔ=ΑΒ-ΔΒ και ΑΕ=ΑΓ-ΕΓ. Άρα τα τμήματα ΑΔ και ΑΕ είναι ίσα ως διαφορές ίσων τμημάτων. Κατά συνέπεια, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

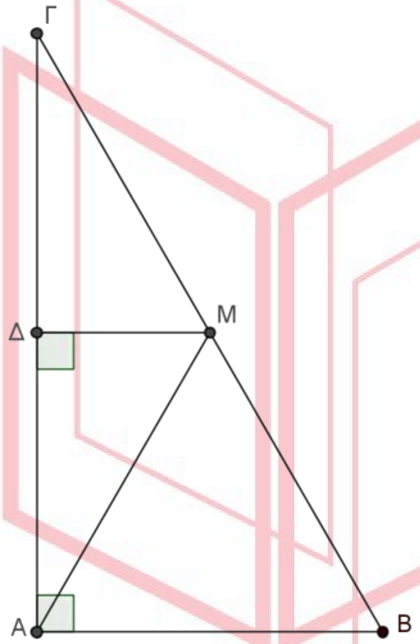
1548

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) με ΒΓ = 8. Έστω ΑΜ διάμεσος του τριγώνου και $ΜΔ \perp ΑΓ$. Αν η γωνία $Α\hat{Μ}Γ$ είναι ίση με 120^o, τότε:

α) Να δείξετε ότι ΑΒ = 4. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μήκος της ΜΔ. (Μονάδες 13)



1548-Λύση

α) Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ οπότε ισχύει ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ = ΜΓ. Οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, άρα είναι $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}M$ (1).

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΜΓ ισχύει:

$A\hat{M}\Gamma + M\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 120^o + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\Gamma} = 30^o$. Τότε η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από αυτή τη γωνία θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Δηλαδή, $AB = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

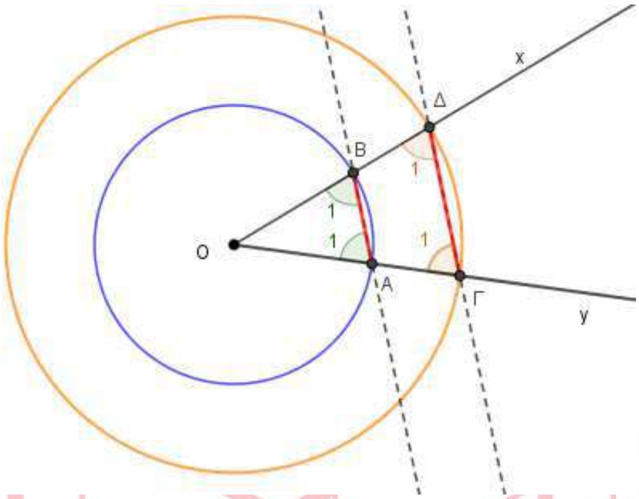
β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΓ, το τμήμα ΜΔ, ως κάθετο στην ΑΓ θα είναι ύψος που αντιστοιχεί στη βάση ΑΓ του τριγώνου. Άρα είναι και διάμεσός του. Συνεπώς το Δ είναι μέσο της ΑΓ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το τμήμα ΜΔ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του, των ΒΓ και ΑΓ, άρα $M\Delta = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

1552

ΘΕΜΑ 2

Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία $x\hat{O}y$. Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή Ο της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές Ox και Oy της γωνίας στα σημεία Α, Β αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε; (Μονάδες 25)

1552-Λύση



Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές διότι ΟΑ = ΟΒ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

Άρα $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ (1).

Για τις γωνίες του τριγώνου ΟΑΒ ισχύει ότι:

$\widehat{O} + \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 180^o$

$\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 180^o - \widehat{O}$

$2\widehat{B}_1 = 180^o - \widehat{O}$ [λόγω της (1)]

Άρα, $\widehat{B}_1 = \frac{180^o - \widehat{O}}{2}$ (2)

Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές διότι ΟΓ = ΟΔ, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου.

Άρα $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Delta}_1$ (3)

Για τις γωνίες του τριγώνου ΟΓΔ ισχύει ότι:

$\widehat{O} + \widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Delta}_1 = 180^o$

$\widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Delta}_1 = 180^o - \widehat{O}$

$2\widehat{\Delta}_1 = 180^o - \widehat{O}$ [σχέση (3)]

Άρα, $\widehat{\Delta}_1 = \frac{180^o - \widehat{O}}{2}$ (4)

Από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$.

Όμως, οι γωνίες $\widehat{B}_1$ και $\widehat{\Delta}_1$ βρίσκονται εκτός, εντός των ευθειών ΑΒ και ΓΔ και προς το ίδιο μέρος με την τέμνουσα Οx των ευθειών.

Οπότε οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ θα είναι παράλληλες γιατί τεμνόμενες από την Οx σχηματίζουν δυο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες. Άρα και οι χορδές ΑΒ και ΓΔ θα είναι παράλληλες ως τμήματα παράλληλων ευθειών.

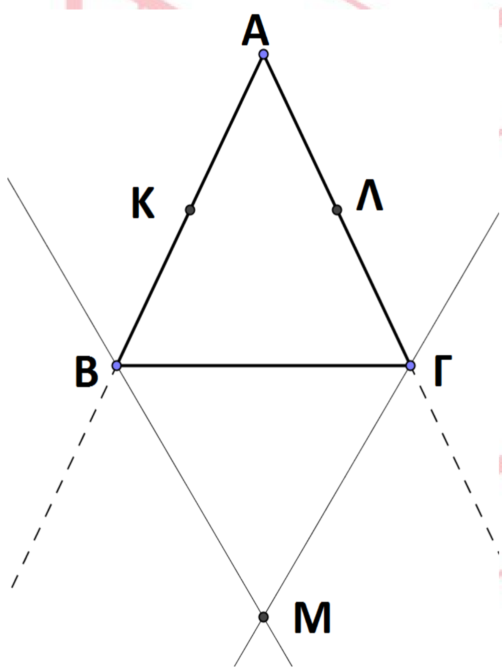
1553

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Μ και Κ, Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ.

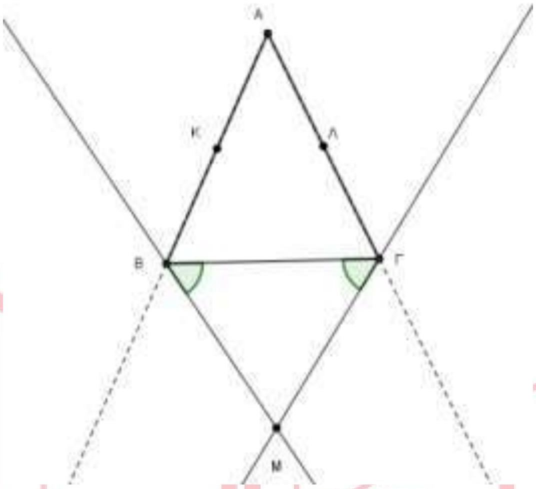
α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές με ΜΒ=ΜΓ. (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι ΜΚ=ΜΛ. (Μονάδες 13)



1553-Λύση

α)

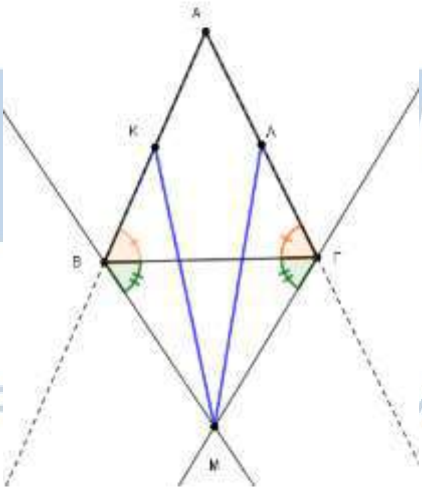


Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές άρα οι προσκείμενες στη βάση του ΒΓ γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{\text{B}} = \widehat{\Gamma}$.

Επειδή οι ΒΜ και ΓΜ είναι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\widehat{\text{B}}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα, έχουμε: $\text{M}\widehat{\text{B}}\Gamma = \dfrac{\widehat{\text{B}}_{\varepsilon\xi}}{2} = \dfrac{180^{\text{o}} - \widehat{\text{B}}}{2} = \dfrac{180^{\text{o}} - \widehat{\Gamma}}{2} = \dfrac{\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}}{2} = \text{M}\widehat{\Gamma}\text{B}$

Οπότε, το τρίγωνο ΜΓΒ έχει δύο γωνίες του που πρόσκεινται στην πλευρά ΒΓ ίσες. Άρα το τρίγωνο ΜΓΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ, οπότε ΜΒ = ΜΓ.

β)



Τα τρίγωνα ΚΒΜ και ΛΓΜ έχουν:

- ΚΒ = ΛΓ, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ
- $\text{K}\widehat{\text{B}}\text{M} = \widehat{\text{B}} + \text{M}\widehat{\text{B}}\Gamma = \widehat{\Gamma} + \text{M}\widehat{\Gamma}\text{B} = \Lambda\widehat{\Gamma}\text{M}$, αφού $\widehat{\text{B}} = \widehat{\Gamma}$ ως γωνίες παρά τη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τρίγωνου ΑΒΓ.
- ΜΒ = ΜΓ από α) ερώτημα

1553-Λύση

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΚΒΜ και ΛΓΜ είναι ίσα, οπότε θα είναι ΜΚ = ΜΛ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $K\hat{B}M$ και $\Lambda\hat{\Gamma}M$ των δύο ίσων τριγώνων.

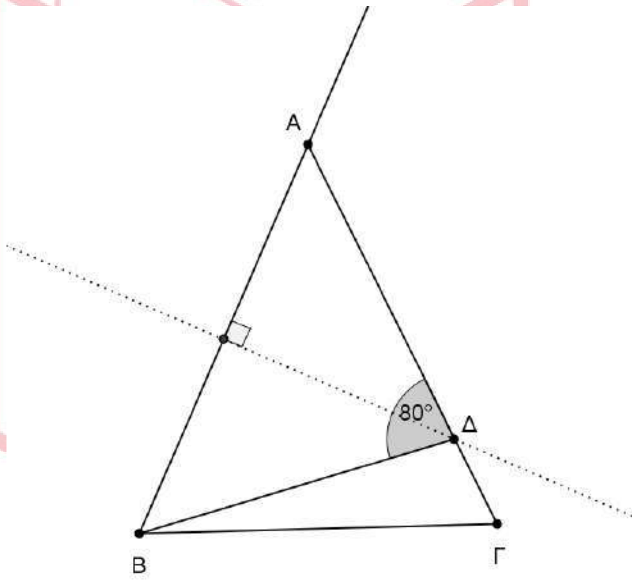
1554

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = 2A\hat{B}\Gamma$. Φέρουμε τη μεσοκάθετο της πλευράς ΑΒ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ και σχηματίζεται γωνία ΑΔΒ ίση με 80˚.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 15)

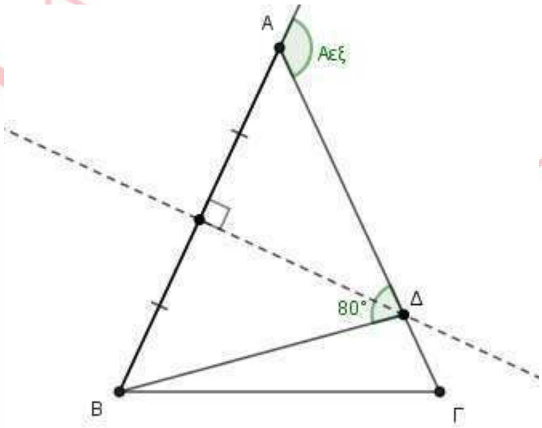


1554-Λύση

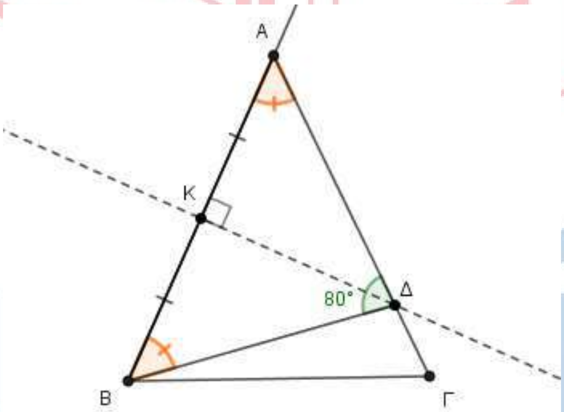
α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ η $\widehat{Α}_{εξ}$ θα είναι ίση με το άθροισμα των δυο απέναντι εσωτερικών γωνιών του, δηλαδή $\widehat{Α}_{εξ} = Α\widehat{Β}Γ + \widehat{Γ}$.

Επειδή από υπόθεση είναι $\widehat{Α}_{εξ} = 2Α\widehat{Β}Γ$, άρα $2Α\widehat{Β}Γ = Α\widehat{Β}Γ + \widehat{Γ}$, οπότε $Α\widehat{Β}Γ = \widehat{Γ}$.

Επομένως, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει τις γωνίες που πρόσκεινται στην πλευρά του ΒΓ ίσες, άρα θα είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, οπότε ΑΒ = ΑΓ.



β) Έστω Κ το σημείο τομής της μεσοκαθέτου της πλευράς ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ.



Επειδή στο τρίγωνο ΑΔΒ η ΔΚ είναι μεσοκάθετος στην πλευρά του ΑΒ, τότε θα είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο θα είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ. Άρα θα έχει ίσες και τις γωνίες του που πρόσκεινται στη βάση του, δηλαδή $\widehat{Α} = Α\widehat{Β}Δ$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΒ ισχύει ότι $Α\widehat{Δ}Β + \widehat{Α} + Α\widehat{Β}Δ = 180^o$

Αφού είναι $Α\widehat{Δ}Β = 80^0$ και $\widehat{Α} = Α\widehat{Β}Δ$, τότε έχουμε: $80^o + 2\widehat{Α} = 180^o$ ή $2\widehat{Α} = 100^o$,

άρα $\widehat{Α} = 50^o$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $\widehat{Α} + \widehat{Β} + \widehat{Γ} = 180^o$

Αφού είναι $\widehat{Α} = 50^o$ και $\widehat{Β} = \widehat{Γ}$, τότε έχουμε: $50^o + 2\widehat{Β} = 180^o$ ή $2\widehat{Β} = 130^o$, άρα $\widehat{Β} = 65^o$.

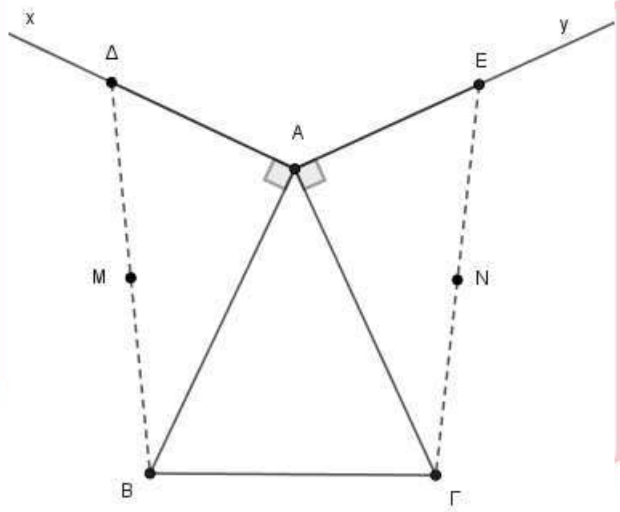
1555

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε Αx⊥ΑΒ και Αy⊥ΑΓ, όπως στο σχήμα που ακολουθεί. Στις Αx και Αy θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε ΑΔ=ΑΕ.

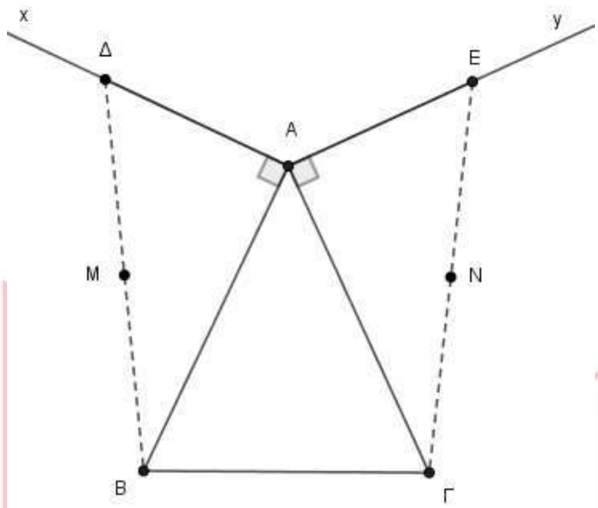
α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ. (Μονάδες 12)

β) Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των τμημάτων ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)



1555-Λύση

α)

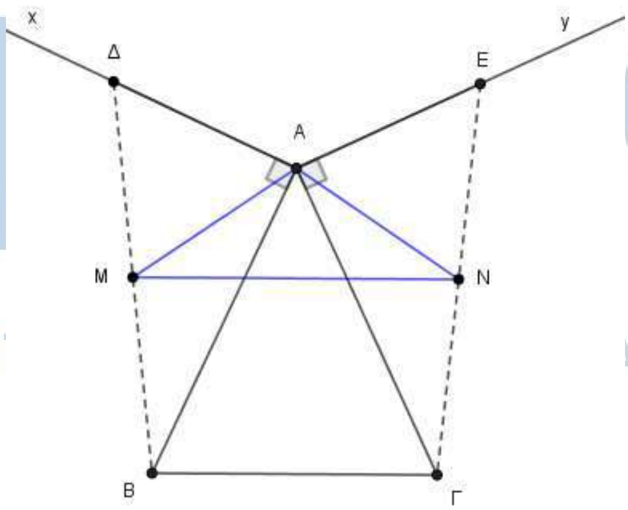


Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν:

- $B\widehat{A}\Delta = \Gamma\widehat{A}E = 90°$ γιατί Αx ⊥ ΑΒ και Αy ⊥ ΑΓ από υπόθεση.
- ΑΒ = ΑΓ, από υπόθεση.
- ΑΔ = ΑΕ, από υπόθεση

Άρα τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν δυο ομόλογες πλευρές τους (τις κάθετες) ίσες μία προς μία, οπότε ως ίσα θα έχουν ίσες και τις υποτείνουσές τους ΒΔ και ΓΕ, δηλαδή ΒΔ = ΓΕ.

β)



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ το τμήμα ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΔ άρα θα ισούται με το μισό της, δηλαδή είναι ΑΜ = $\frac{B\Delta}{2}$ (1)

1555-Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΑΓ το τμήμα ΑΝ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΕΓ άρα θα ισούται με το μισό της, δηλαδή είναι ΑΝ = $\frac{\Gamma E}{2}$ (2)

Επειδή ΒΔ = ΓΕ (από το ερώτημα α), τότε από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ΑΜ = ΑΝ, άρα το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές.

1556

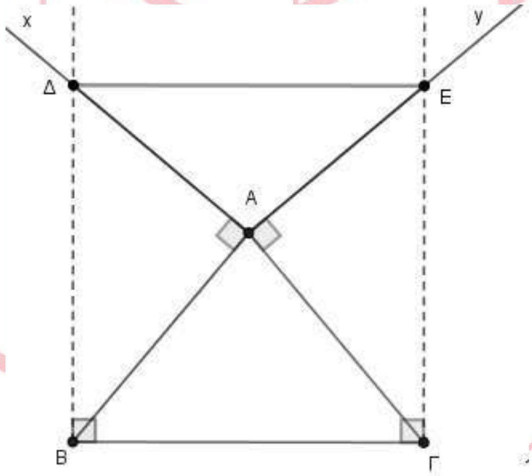
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε Αx⊥ΑΒ και Αy⊥ΑΓ, όπως στο σχήμα που ακολουθεί. Οι κάθετες στην πλευρά ΒΓ στα σημεία Β και Γ τέμνουν τις Αx και Αy στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ. (Μονάδες 12)

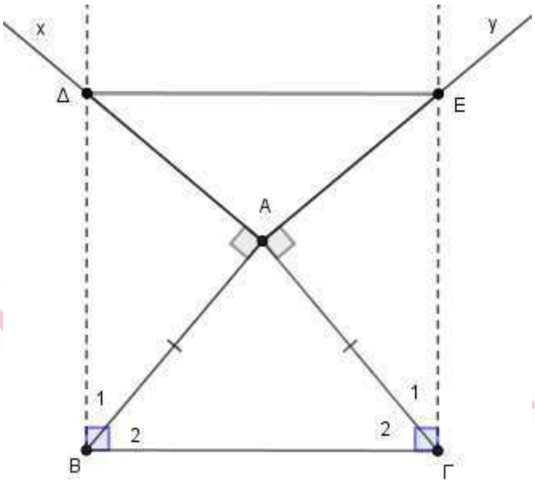
β) Αν η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με 80^o, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔΑΕ.

(Μονάδες 13)



1556-Λύση

α)



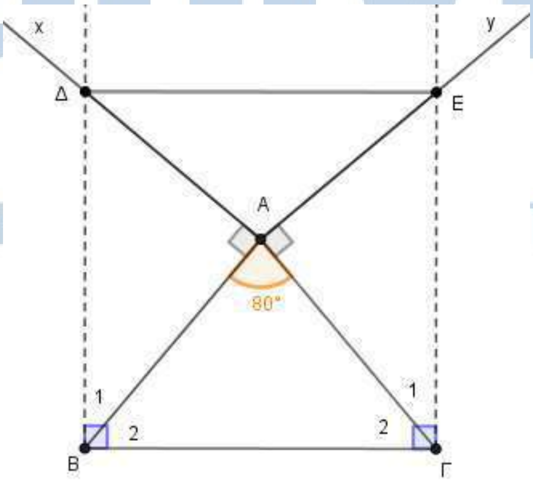
Αφού από υπόθεση είναι ΒΔ, ΓΕ κάθετες στη ΒΓ, τότε $\Delta\widehat{B}\Gamma = E\widehat{\Gamma}B = 90^\circ$.

Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν:

- $B\widehat{A}\Delta = \Gamma\widehat{A}E = 90^\circ$ γιατί Αx ⊥ ΑΒ και Αy ⊥ ΑΓ από υπόθεση
- ΑΒ = ΑΓ, από υπόθεση
- $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1$, ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{B}_2$, $\widehat{\Gamma}_2$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ της υπόθεσης

Άρα τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτήν την πλευρά οξεία γωνία ίσες μία προς μία. Οπότε έχουν και ΒΔ = ΓΕ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\widehat{A}\Delta$ και $\Gamma\widehat{A}E$ αντίστοιχα.

β)



Είναι $B\widehat{A}\Gamma + \Gamma\widehat{A}E + E\widehat{A}\Delta + \Delta\widehat{A}B = 360^o$, οπότε $80^o + 90^o + \Delta\widehat{A}E + 90^o = 360^o$.

Άρα $\Delta\widehat{A}E = 100^o$.

1556-Λύση

Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα θα ισχύει ότι ΑΔ = ΑΕ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες $\widehat{B}_1$ και $\widehat{\Gamma}_1$ αντίστοιχα.

Οπότε το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές με βάση ΔΕ άρα θα είναι $A\widehat{\Delta}E = A\widehat{E}\Delta$ ως γωνίες που πρόσκεινται στη βάση του ισοσκελούς.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΔΑΕ θα ισχύει $\Delta\widehat{A}E + A\widehat{\Delta}E + A\widehat{E}\Delta = 180^o$ και αφού

$A\widehat{\Delta}E = A\widehat{E}\Delta$ και $\Delta\widehat{A}E = 100^o$ τότε θα έχουμε $100^o + 2A\widehat{\Delta}E = 180^o$.

Άρα $A\widehat{\Delta}E = 40^o = A\widehat{E}\Delta$.

1557

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΒΓ και Ε το μέσο της πλευράς του ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

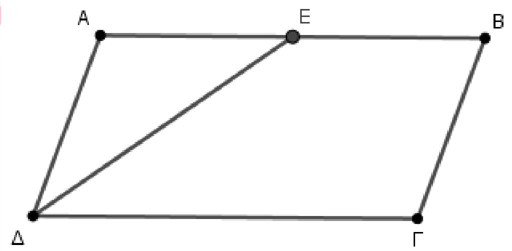
β) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$. (Μονάδες 15)

1557-Λύση

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ= 2 ΒΓ και Ε μέσο της πλευράς του ΑΒ.

α) Επειδή το Ε είναι μέσο της πλευράς ΑΒ, είναι ΑΕ = $\frac{\mathrm{AB}}{2}$ και αφού ΑΒ = 2ΒΓ από υπόθεση τότε ΑΕ = $\frac{2\mathrm{B\Gamma}}{2}$ άρα ΑΕ =ΒΓ. Οπότε θα είναι ΑΕ = ΒΓ = ΑΔ αφού ΒΓ =ΑΔ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Οπότε, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΔ και ΑΕ.

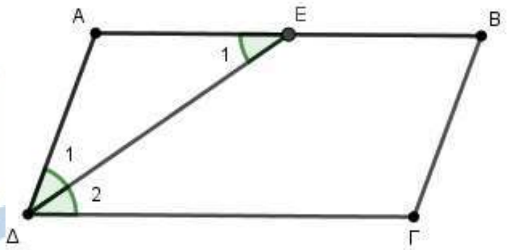


β) Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο τότε ΑΒ//ΔΓ.

Επειδή το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΕ, θα είναι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\mathrm{E}}_1$ (1) ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς.

Όμως $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{\mathrm{E}}_1$ (2) ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΔΕ.

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$, άρα η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$.



1558

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

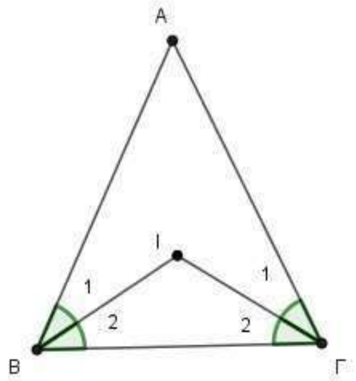
β) Οι γωνίες $A\hat{I}\Gamma$ και $A\hat{I}B$ είναι ίσες. (Μονάδες 10)

γ) Η ευθεία ΑΙ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. (Μονάδες 7)

1558-Λύση

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του Β και Γ.

α)



Αφού είναι ΒΙ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$ και ΓΙ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Gamma}$ τότε θα είναι

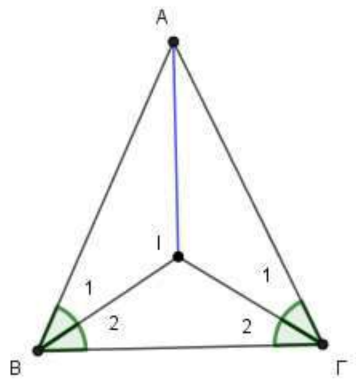
$\widehat{B}_2 = \frac{\widehat{B}}{2}$ (1) και $\widehat{\Gamma}_2 = \frac{\widehat{\Gamma}}{2}$ (2), αντίστοιχα.

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ οι προσκείμενες στη βάση του γωνίες είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ (3)

Λόγω των σχέσεων (1), (2) και (3) θα είναι: $\widehat{B}_2 = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = \widehat{\Gamma}_2$

Άρα, το τρίγωνο ΒΙΓ έχει δύο γωνίες που πρόσκεινται στην πλευρά του ΒΓ ίσες, τις $\widehat{B}_2$ και $\widehat{\Gamma}_2$, οπότε θα είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά του ΒΓ.

β) Φέρνουμε το τμήμα ΑΙ.



Τα τρίγωνα ΑΙΒ και ΑΙΓ έχουν:

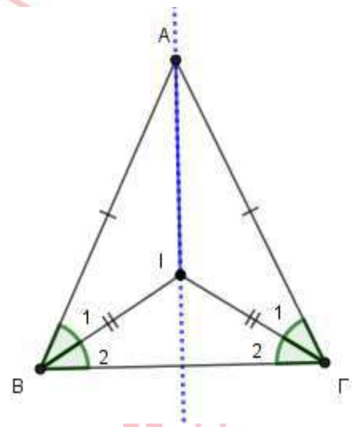
- ΑΒ = ΑΓ ως πλευρές του ισοσκελούς ΑΒΓ της υπόθεσης.
- ΒΙ = ΙΓ, ως ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΒΙΓ του α) ερωτήματος.

1558-Λύση

- $\widehat{\mathrm{B}}_1 = \frac{0\widehat{\mathrm{B}}0}{2} = \frac{0\widehat{\Gamma}0}{2} = \widehat{\Gamma}_1$ αφού ΒΙ και ΓΙ είναι διχοτόμοι των ίσων γωνιών της βάσης ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΒΙΓ του α) ερωτήματος.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΙΒ και ΑΙΓ θα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{I}}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{I}}\Gamma$ ως γωνίες απέναντι από ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

γ)



Επειδή ΑΒ = ΑΓ από υπόθεση και ΒΙ = ΙΓ από α) ερώτημα, τα σημεία Ι και Α ισαπέχουν από τα Β και Γ άρα είναι σημεία της μεσοκαθέτου του τμήματος ΒΓ.

Άρα η ΑΙ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ.

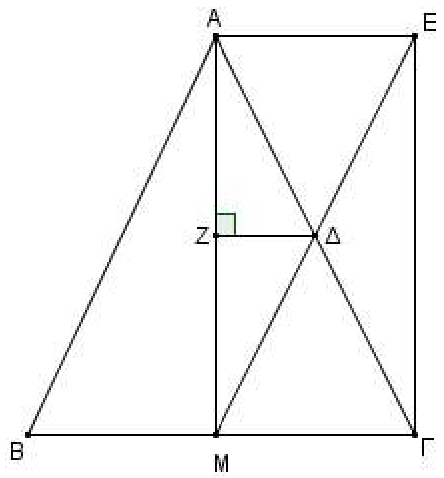
1560

ΘΕΜΑ 2

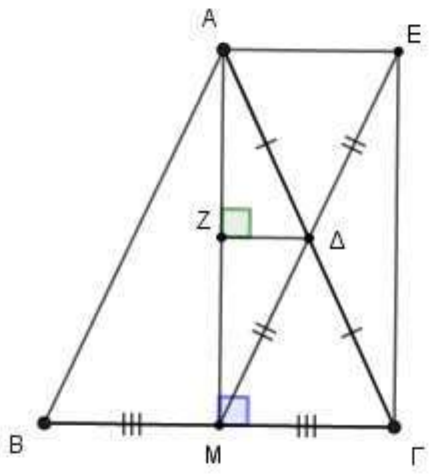
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και η διάμεσός του ΑΜ. Στο τρίγωνο ΑΜΓ θεωρούμε τη διάμεσο ΜΔ την οποία προεκτείνουμε προς το Δ κατά τμήμα ΔΕ=ΔΜ. Φέρουμε από το σημείο Δ τμήμα ΔΖ ⊥ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

β) $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$ (Μονάδες 13)



1560-Λύση



α) Στο τετράπλευρο ΑΜΓΕ τα ΑΓ, ΜΕ είναι διαγώνιοί του.

Επειδή είναι ΜΔ = ΔΕ (υπόθεση) και ΑΔ = ΔΓ αφού ΜΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΜΓ, έχουμε ότι οι διαγώνιοι ΜΕ και ΑΓ του τετραπλεύρου ΑΜΓΕ διχοτομούνται στο Δ. Οπότε, το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο με κέντρο το Δ.

Επειδή ΑΜ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, θα είναι και ύψος του τριγώνου οπότε ΑΜ $\perp$ΒΓ (1) και Α$\widehat{\text{Μ}}$Γ = 90^o.

Οπότε το παραλληλόγραμμο ΑΜΓΕ έχει μια γωνία του ορθή, άρα είναι ορθογώνιο.

β) Αφού ΔΖ $\perp$ ΑΜ και ΑΜ $\perp$ΒΓ (από σχέση (1)) άρα ΔΖ // ΜΓ ως κάθετες στην ίδια ευθεία ΑΜ.

Στο τρίγωνο ΑΜΓ το Δ είναι μέσο της ΑΓ και ΔΖ // ΜΓ, άρα το Ζ είναι μέσο της ΑΜ. Οπότε, το τμήμα ΔΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΜ του τριγώνου ΑΜΓ άρα θα είναι ίσο με το μισό της πλευράς του ΜΓ, δηλαδή ΔΖ = $\frac{\text{ΜΓ}}{2}$.

Επειδή ΜΓ=$\frac{\text{ΒΓ}}{2}$, αφού Μ μέσο ΒΓ, τότε θα είναι ΔΖ = $\frac{\frac{\text{ΒΓ}}{2}}{2}$, οπότε ΔΖ = $\frac{\text{ΒΓ}}{4}$.

1563

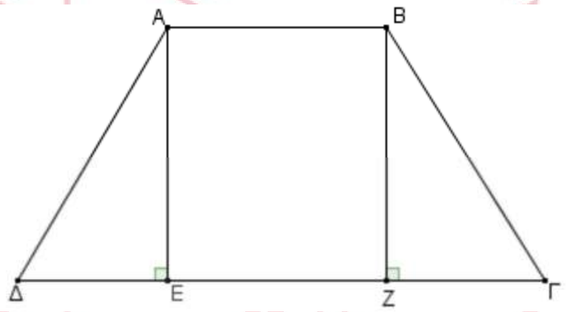
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ). Φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.

Να αποδείξετε ότι:

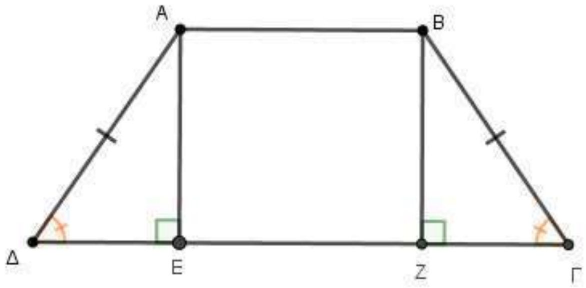
α) ΔΕ=ΓΖ. (Μονάδες 12)

β) ΑΖ=ΒΕ. (Μονάδες 13)



1563-Λύση

α)

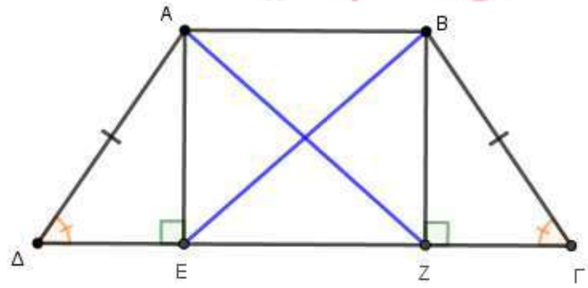


Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ έχουν:

- $Α\hat{Ε}Δ = Β\hat{Ζ}Γ = 90^0$, αφού τα ΑΕ και ΒΖ είναι ύψη του τραπεζίου ΑΒΓΔ
- ΑΔ = ΒΓ, ως οι ίσες μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ.
- $\hat{Γ} = \hat{Δ}$, ως γωνίες βάσης ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ.

Άρα, τα τρίγωνα είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν τις υποτείνουσές τους και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Επομένως, θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους $Δ\hat{Α}Ε$ και $Ζ\hat{Β}Γ$ ίσες, οπότε και οι απέναντί τους κάθετες πλευρές θα είναι ίσες, δηλαδή ΔΕ = ΓΖ.

β)



Αφού το ΑΕ είναι ύψος του τραπεζίου ΑΒΓΔ τότε θα είναι ΑΕ ⊥ ΑΒ οπότε θα είναι $Ε\hat{Α}Β = 90^o$. Άρα, το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ορθογώνιο γιατί έχει τρείς γωνίες ορθές ($Ε\hat{Α}Β = Α\hat{Ε}Ζ = Ε\hat{Ζ}Β = 90^0$). Επειδή οι ΑΖ και ΒΕ είναι διαγώνιοι του ορθογωνίου θα ισχύει ότι ΑΖ = ΒΕ.

1564

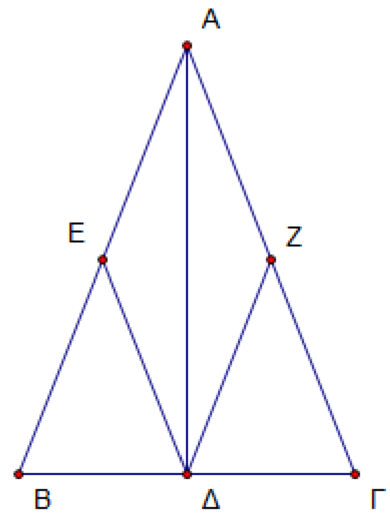
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), το ύψος του ΑΔ και τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξτε ότι:

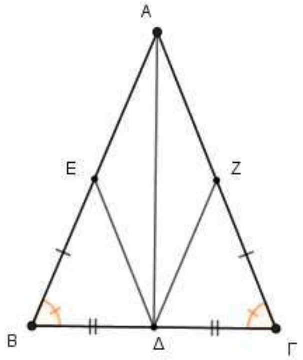
α) Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΖΔΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)



1564-Λύση

α)

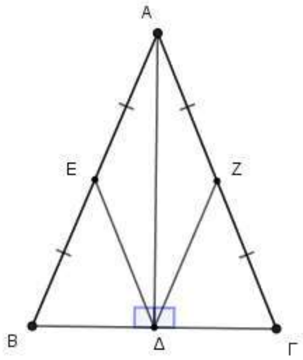


Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ έχουν:

- ΒΕ = ΓΖ, ως μισά τμήματα των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ.
- ΒΔ = ΓΔ, διότι το ΑΔ είναι ύψος οπότε είναι και διάμεσός του.
- $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΒΓ.

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ είναι ίσα.

β)



Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι ορθογώνια γιατί το ΑΔ είναι ύψος, άρα ΑΔ ⊥ ΒΓ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ, η ΔΕ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΑ, άρα ΔΕ = $\frac{\mathrm{AB}}{2}$ = ΑΕ (1) αφού το Ε είναι μέσο του ΑΒ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, η ΔΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΑΓ, άρα ΔΖ = $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$ = ΑΖ (2) αφού το Ζ είναι μέσο του ΑΓ.

Επειδή ΑΒ = ΑΓ, από τις σχέσεις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι ΔΕ = ΕΑ =ΑΖ = ΔΖ άρα το τετράπλευρο ΑΕΔΖ είναι ρόμβος γιατί οι πλευρές του είναι ίσες.

1565

ΘΕΜΑ 2

Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Α’Β’Γ’ (Α’Β’=Α’Γ’) .

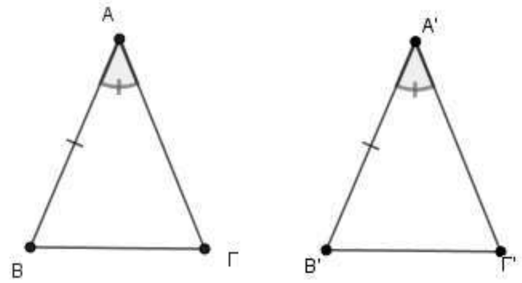
α) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$ και $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}}'$, τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α’Β’Γ’ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A'\Gamma'}$ και $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{B}}'$, τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α’Β’Γ’ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

1565-Λύση

Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Α'Β'Γ' με Α'Β'= Α΄Γ΄.

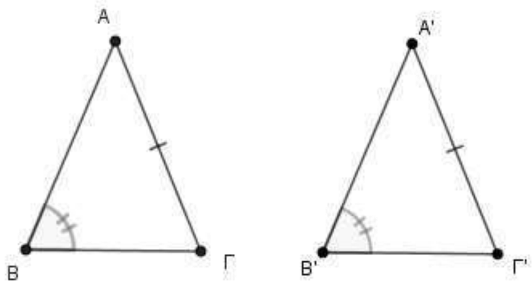
α) Έστω ότι τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν ΑΒ = Α΄Β΄ και $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{A}}'$.



Τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν το καθένα ένα ζεύγος ίσων πλευρών τις ΑΒ, ΑΓ και Α΄Β΄, Α΄Γ΄ αντίστοιχα. Αφού είναι ΑΒ = Α΄Β΄ (υπόθεση) θα είναι επίσης και ΑΓ = Α΄Γ΄. Οπότε τα τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ίσες (τις ίσες τους) και τις περιεχόμενες, στις πλευρές αυτές, γωνίες $\widehat{\mathrm{A}}$ και $\widehat{\mathrm{A}}'$ ίσες από την υπόθεση.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα με το κριτήριο Π-Γ-Π.

β) Έστω ότι τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν ΑΓ = Α΄Γ΄ και $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{B}}'$.



Τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν ένα ζεύγος ίσων πλευρών τις ΑΒ, ΑΓ και Α΄Β΄, Α΄Γ΄ αντίστοιχα. Αφού είναι ΑΓ = Α΄Γ΄ θα είναι επίσης και ΑΒ = Α΄Β΄.

Επίσης τα δυο τρίγωνα έχουν ένα ζεύγος ίσων γωνιών, $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$ και $\widehat{\mathrm{B}}' = \widehat{\Gamma}'$ αντίστοιχα ως γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου. Επειδή $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{B}}'$ από την υπόθεση, θα είναι και $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}'$. Έχοντας όμως τα τρίγωνα τις δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, θα είναι ίσες και οι τρίτες γωνίες τους, δηλαδή $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{A}}'$. Τελικά τα τρίγωνα έχουν:

- ΑΓ = Α΄Γ΄
- $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}'$
- $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{A}}'$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα με το κριτήριο Γ-Π-Γ.

1567

ΘΕΜΑ 2^{o}

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και γωνία $\hat{\Gamma} = 30^0$. Θεωρούμε το ύψος ΑΔ και το μέσο Ζ της πλευράς ΑΓ.

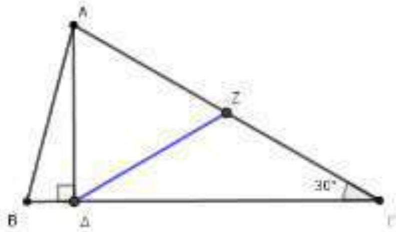
α) Να αποδείξετε ότι $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔΕ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

1567-Λύση

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ με $\hat{\Gamma}= 30^o$, ΑΔ ύψος και Ζ μέσο της ΑΓ.

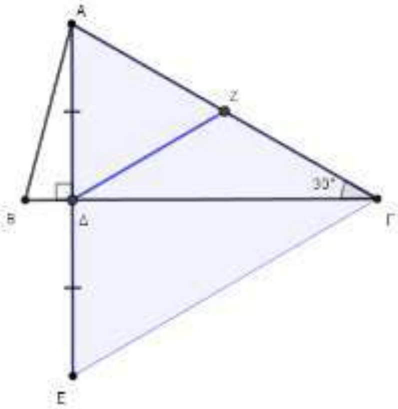
α)



Αφού το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ τότε το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο.

Το τμήμα ΔΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ, άρα ΔΖ = $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$

β)



Έστω ΔΕ η προέκταση του ύψους ΑΔ προς το Δ κατά ίσο τμήμα ΔΕ.

Στο τρίγωνο ΑΓΕ το ΓΔ είναι ύψος και διάμεσος στην πλευρά του ΑΕ, άρα το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές. Οπότε το ΓΔ θα είναι και διχοτόμος της $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{E}$ και θα ισχύει

$\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E} = \frac{\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{EO}}{2}$ και επειδή είναι $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta = 30^o$ θα είναι $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{E}=60^0$. Επομένως το ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΕ έχει γωνία κορυφής 60^0, άρα είναι ισόπλευρο.

1568

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.

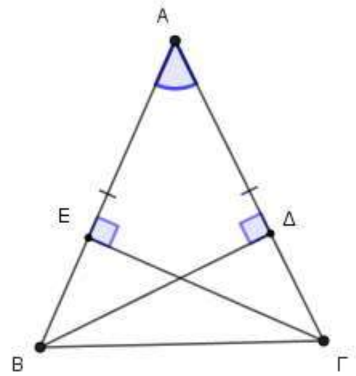
(Μονάδες 12)

β) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΓ=ΑΒ.

(Μονάδες 13)

1568-Λύση

α) Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ΒΔ, ΓΕ τα ύψη του στις πλευρές ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα.

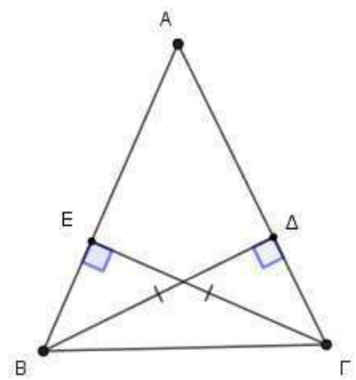


Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν:

- $A\widehat{\Delta}B = A\widehat{E}\Gamma = 90^0$, γιατί ΒΔ και ΓΕ ύψη του τριγώνου ΑΒΓ από υπόθεση.
- ΑΒ=ΑΓ ως πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.
- $\widehat{A}$ γωνία κοινή

Άρα τα τρίγωνα ΒΔΑ και ΓΕΑ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν τις υποτείνουσές τους ίσες και μια οξεία γωνία ίση. Οπότε θα έχουν και τις πλευρές ΒΔ και ΕΓ ίσες που βρίσκονται απέναντι από την κοινή τους γωνία $\widehat{A}O$

β) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΒΔ, ΓΕ ύψη του στις πλευρές ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα τα οποία είναι ίσα.



Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ έχουν:

- $B\widehat{E}\Gamma = B\widehat{\Delta}\Gamma = 90^0$, γιατί ΓΕ και ΒΔ ύψη του τριγώνου ΑΒΓ από υπόθεση.
- ΒΓ κοινή πλευρά
- ΒΔ = ΓΕ ως δεδομένο

Άρα τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ είναι ίσα, ως ορθογώνια που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Οπότε, έχουν και $\widehat{\Gamma} = \widehat{B}$ (1) ως απέναντι γωνίες των ίσων

1568-Λύση

πλευρών ΒΔ και ΓΕ, αντίστοιχα. Οπότε, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο γωνίες του ίσες, τις $\widehat{\mathrm{B}}$ και $\widehat{\Gamma}$, άρα είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ.

ΘΕΜΑ 2

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά ίσο τμήμα ΜΔ.

Να αποδείξετε ότι:

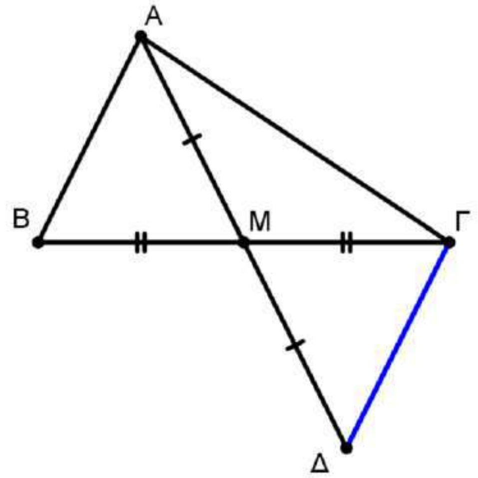
α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Τα σημεία Α και Δ ισαπέχουν από την πλευρά ΒΓ. (Μονάδες 13)

1569-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ έχουν:

- ΑΜ = ΜΔ, από υπόθεση
- ΒΜ = ΜΓ, αφού το Μ είναι μέσο της ΒΓ
- $A\hat{M}B = \Delta\hat{M}\Gamma$, ως κατακορυφήν

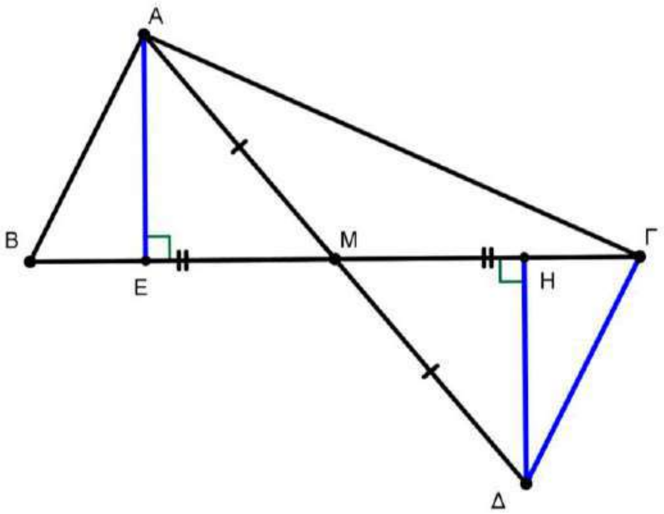


Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα.

β) Ονομάζουμε ΑΕ και ΔΗ τις αποστάσεις των σημείων Α, Δ από τη ΒΓ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΜ και ΜΔΗ, τα οποία είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΑΜ = ΜΔ, από υπόθεση
- $A\hat{M}B = \Delta\hat{M}\Gamma$ ως κατακορυφήν



Άρα τα τρίγωνα ΑΕΜ και ΜΔΗ είναι ίσα, οπότε ισχύει και ΑΕ = ΔΗ, εφόσον οι πλευρές αυτές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{M}B = \Delta\hat{M}\Gamma$.

1570

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε το ΑΔ (προς το Δ) κατά τμήμα ΔΕ=ΑΔ. Έστω Κ το συμμετρικό του Β ως προς το Δ.

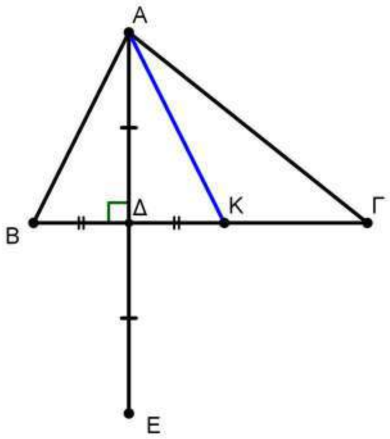
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΚ είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)

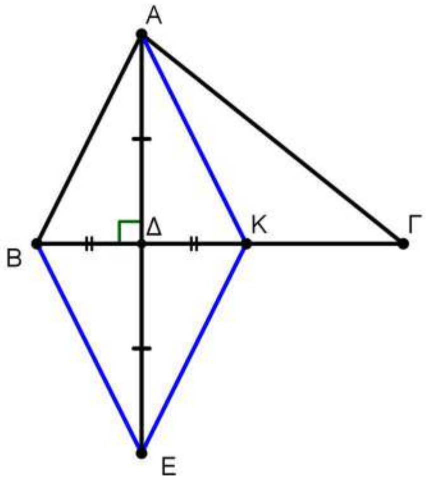
1570-Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΚ το ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος, άρα η ΑΔ είναι η μεσοκάθετος του ΒΚ. Οπότε το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές.



Μια άλλη πορεία λύσης είναι να συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΚΔ για να συμπεράνουμε ότι ΑΒ=ΑΚ.

β) Ισχύει ότι ΔΕ = ΑΔ , ΒΔ = ΔΚ και $ΑΕ \perp ΒΚ$. Άρα στο τετράπλευρο ΑΒΕΚ οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι κάθετες, επομένως είναι ρόμβος.



1571

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^0$) και ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$. Από το Δ φέρουμε $ΔΕ \perp ΒΓ$, και έστω Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ (προς το Α).

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ=ΒΕ (Μονάδες 13)

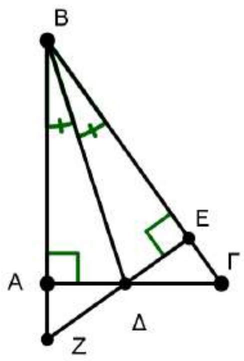
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

1571-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΕΔ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΒΔ κοινή πλευρά
- $A\hat{B}\Delta = E\hat{B}\Delta$, αφού ΒΔ διχοτόμος της $\hat{B}$

Επειδή τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσές τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, είναι ίσα. Άρα και οι αντίστοιχες πλευρές ΑΒ και ΒΕ θα είναι ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΒΕ.



β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ είναι ορθογώνια και έχουν:

- κοινή τη γωνία $\hat{B}$
- ΑΒ = ΒΕ, όπως αποδείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα

Επειδή τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ έχουν μία οξεία γωνία και μία κάθετη πλευρά ίσες μία προς μία, θα είναι ίσα.

1572

ΘΕΜΑ 2ο

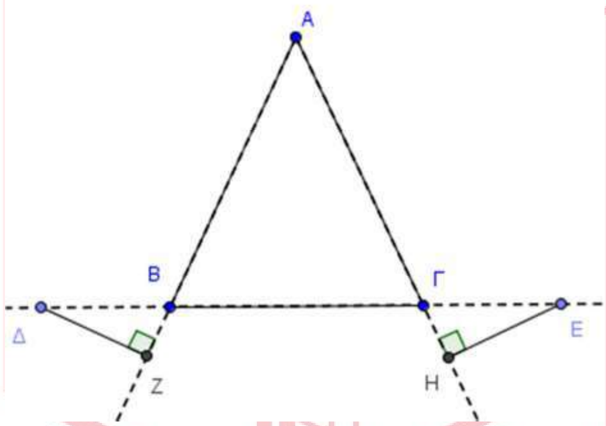
Θωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και σημεία Δ και Ε στην ευθεία ΒΓ τέτοια, ώστε ΒΔ=ΓΕ. Έστω ότι $ΔΖ \perp ΑΒ$ και $ΕΗ \perp ΑΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΒΖ=ΓΗ. (Μονάδες 10)

ii. Το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Αν $\hat{A} = 50^0$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΖΗ. (Μονάδες 8)

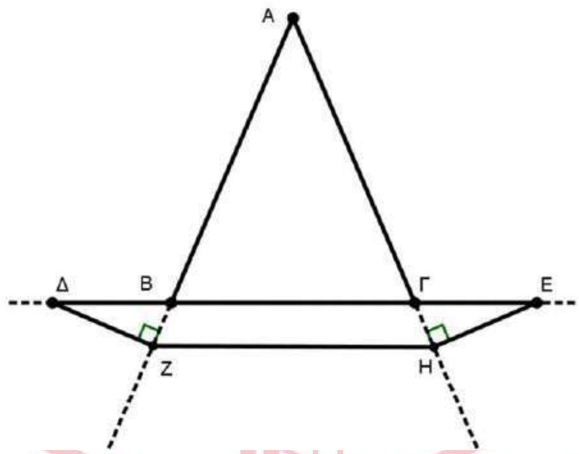


1572-Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ΔΒΖ και ΕΗΓ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΒΔ = ΓΕ, από υπόθεση
- $\Delta\widehat{B}Z = E\widehat{\Gamma}H$, ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ ($\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ).

Τα τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Οπότε έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές τους ΒΖ και ΓΗ ίσες, δηλ. ΒΖ = ΓΗ .



ii. Επειδή ΑΒ = ΑΓ και ΒΖ = ΓΗ, τότε ΑΒ + ΒΖ = ΑΓ + ΓΗ, οπότε ΑΖ = ΑΗ.

Άρα το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές με βάση τη ΖΗ, είναι $\widehat{Z} = \widehat{H}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΖΗ έχουμε:

$\widehat{A} + \widehat{Z} + \widehat{H} = 180^o$, ή $50^o + 2\widehat{Z} = 180^o$, ή $2\widehat{Z} = 130^o$, οπότε $\widehat{Z} = 65^o = \widehat{H}$

1573

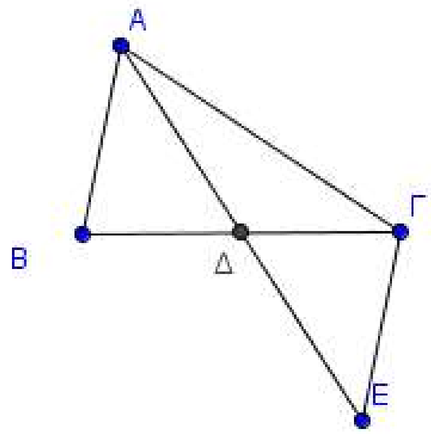
ΘΕΜΑ 2

Στο ακόλουθο σχήμα, η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και το Ε είναι σημείο στην προέκταση της ΑΔ , ώστε ΔΕ=ΑΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ = ΓΕ (Μονάδες 12)

β) ΑΕ < ΑΒ + ΑΓ (Μονάδες 13)

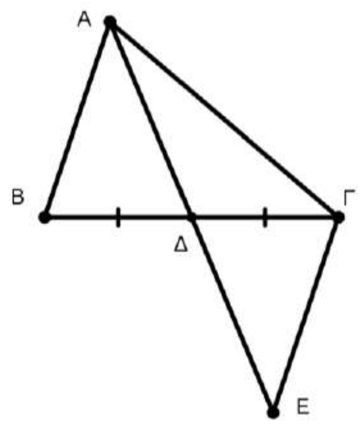


1573-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ έχουν:

- ΑΔ = ΔΕ
- ΒΔ = ΔΓ, διότι Δ μέσο της ΒΓ
- $A\widehat{\Delta}B = E\widehat{\Delta}\Gamma$ ως κατακορυφήν

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ είναι ίσα, οπότε και οι πλευρές ΑΒ και ΓΕ, που βρίσκονται απέναντι από τις $A\widehat{\Delta}B = E\widehat{\Delta}\Gamma$, θα είναι ίσες. Δηλ. ΑΒ = ΓΕ (1).



β) Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΓΕ, έχουμε ΑΕ < ΓΕ + ΑΓ και λόγω του (α) έχουμε ΑΕ < ΑΒ + ΑΓ.

1574

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και η διχοτόμος της γωνίας του $\widehat{\Gamma}$, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

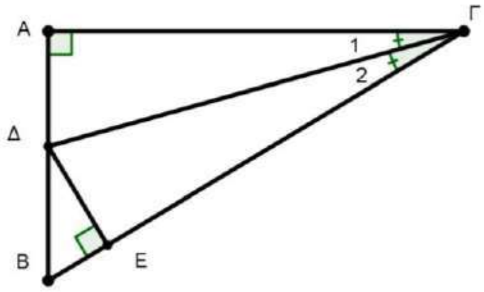
β) Το Γ ισαπέχει από τα σημεία Α και Ε και η ευθεία ΓΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΕ. (Μονάδες 12)

1574-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΓΔΕ είναι ορθογώνια και έχουν:

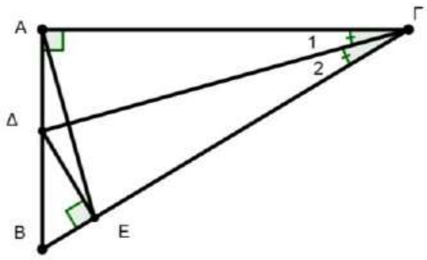
- ΓΔ κοινή πλευρά
- $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$, αφού ΓΔ διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$.

Αφού τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα κοινή και μία οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μία οξεία γωνία του άλλου, θα είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΓΔΕ είναι ίσα, έχουν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή ΓΑ = ΓΕ, οπότε, το Γ ισαπέχει από τα σημεία Α, Ε.

Επειδή ΔΑ = ΔΕ, το σημείο Δ ισαπέχει από τα Α, Ε. Άρα τα σημεία Γ, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΕ, δηλαδή η ΓΔ είναι η μεσοκάθετος του ΑΕ.



1575

ΘΕΜΑ 2

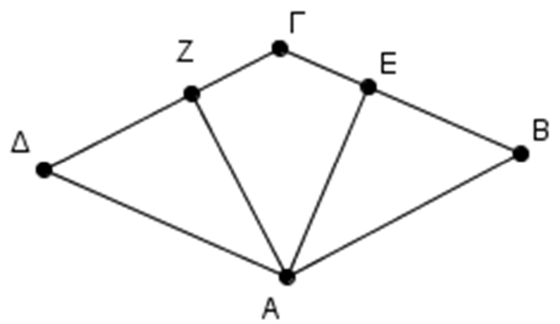
Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι $ΑΕ \perp ΒΓ$ και $ΑΖ \perp ΔΓ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε ΑΖ=ΑΕ. (Μονάδες 12)

β) Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει ΑΖ=ΑΕ, τότε αυτό είναι ρόμβος.

(Μονάδες 13)

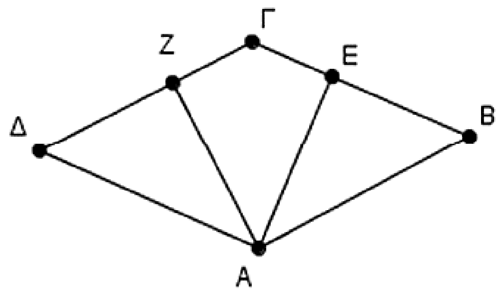


1575-Λύση

α) Έστω ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. Τότε τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΑΔ = ΑΒ ως πλευρές του ρόμβου
- $\widehat{\Delta} = \widehat{\mathrm{B}}$, ως απέναντι γωνίες του ρόμβου

Οπότε έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν ίσες και τις πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες οξείες γωνίες, δηλαδή ΑΖ = ΑΕ.



β) Έστω ότι στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει ΑΖ = ΑΕ.

Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΑΖ = ΑΕ από υπόθεση
- $\widehat{\Delta} = \widehat{\mathrm{B}}$, ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου

Επειδή τα τρίγωνα έχουν μία κάθετη πλευρά και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία, θα είναι ίσα. Οπότε θα έχουν και τις υποτείνουσες ίσες, δηλαδή ΑΔ = ΑΒ.

Επειδή στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες, είναι ρόμβος

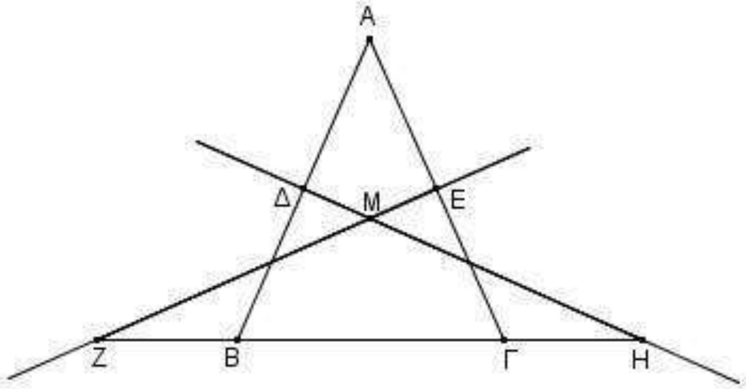
1578

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο Μ και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση ΒΓ στα Ζ και Η.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΖΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

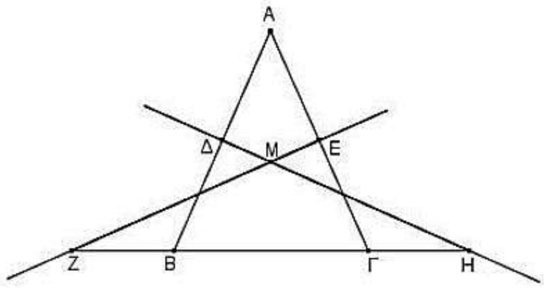


1578-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΔΒ = ΕΓ ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ
- $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$, ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Επομένως, τα τρίγωνα έχουν μία κάθετη πλευρά και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΓΖ είναι ίσα, όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους θα είναι ίσα, άρα και $\widehat{\mathrm{Z}} = \widehat{\mathrm{H}}$. Επειδή το τρίγωνο ΜΖΗ έχει δύο γωνίες ίσες, είναι ισοσκελές.

1579

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και ΑΒ<ΓΔ. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ πάνω στην ΑΒ έτσι ώστε ΑΕ=ΕΖ=ΖΒ και έστω Κ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΖ=ΓΕ (Μονάδες 13)

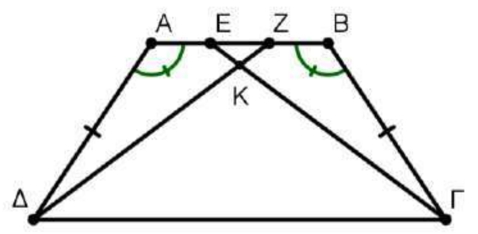
β) Τα τρίγωνα ΕΚΖ και ΔΚΓ είναι ισοσκελή (Μονάδες 12)

1579-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΕΒΓ έχουν:

- ΑΖ = ΒΕ, διότι ΑΖ = ΑΕ + ΕΖ = ΖΒ + ΕΖ = ΕΒ
- ΑΔ = ΒΓ, διότι ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο
- $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}}$, ως γωνίες βάσης ισοσκελούς τραπεζίου

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΕΒΓ είναι ίσα, οπότε έχουν ίσες και τις πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\mathrm{A}}$ και $\widehat{\mathrm{B}}$, δηλαδή ΔΖ = ΓΕ (1).



β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΖ και ΕΒΓ, έχουμε ότι και οι αντίστοιχες γωνίες τους $\mathrm{K}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$ και $\mathrm{K}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{E}$ θα είναι ίσες, δηλαδή $\mathrm{K}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = \mathrm{K}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{E}$.

Οπότε το τρίγωνο ΚΕΖ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι ΚΖ = ΚΕ (2).

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1), (2) και παίρνουμε:

ΔΖ – ΚΖ = ΓΕ – ΚΕ, δηλαδή ΚΔ = ΚΓ

Οπότε το τρίγωνο ΔΚΓ είναι ισοσκελές.

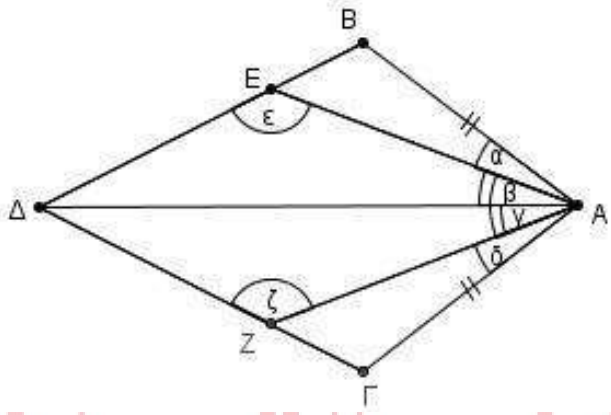
1582

ΘΕΜΑ 2

Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και ΑΒ=ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα. (12 Μονάδες)

β) Οι γωνίες ε και ζ είναι ίσες. (13 Μονάδες)

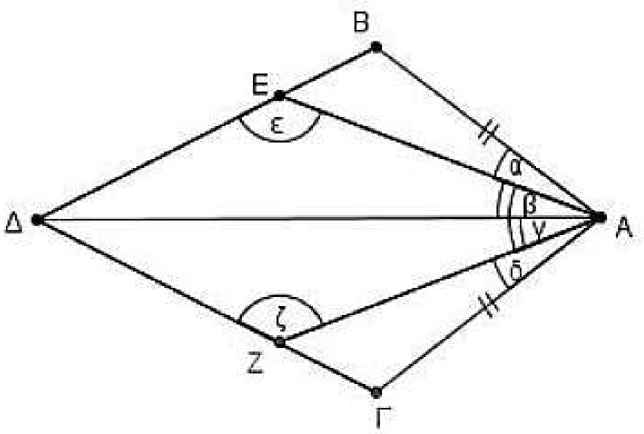


1582-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν:

- ΑΒ = ΑΓ, από υπόθεση
- ΑΔ κοινή πλευρά,
- $B\widehat{A}\Delta = \Gamma\widehat{A}\Delta$, ως άθροισμα των ίσων γωνιών $\widehat{\alpha} = \widehat{\delta}$ και $\widehat{\beta} = \widehat{\gamma}$.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.



β) Τα τρίγωνα ΕΔΑ και ΖΑΔ έχουν:

- $\widehat{\beta} = \widehat{\gamma}$, από υπόθεση
- ΑΔ κοινή πλευρά,
- $E\widehat{\Delta}A = Z\widehat{\Delta}A$, επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.

Από το κριτήριο Γ-Π-Γ τα τρίγωνα ΕΔΑ και ΖΑΔ είναι ίσα. Οπότε θα είναι ίσες και οι οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από την κοινή πλευρά ΑΔ, δηλαδή $\widehat{\varepsilon} = \widehat{\zeta}$.

1584

ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου Ο, έστω ΟΑ μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της ΟΑ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΟΒΑ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

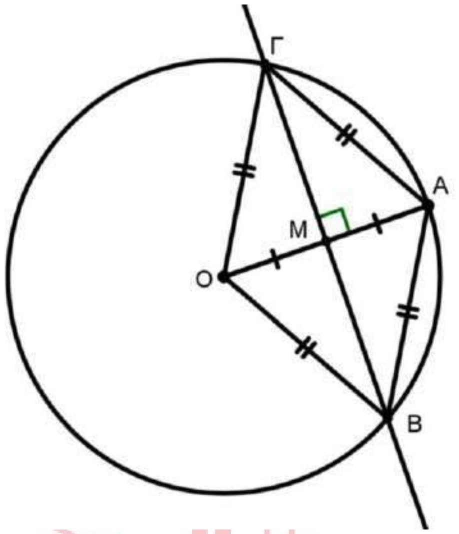
β) Το τετράπλευρο ΟΒΑΓ είναι ρόμβος. (Μονάδες 12)

1584-Λύση

α) Αν ρ η ακτίνα του κύκλου, τότε ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ρ.

Στο τρίγωνο ΑΒΟ το ΒΜ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οπότε ΑΒ = ΟΒ.

Στο τρίγωνο ΑΒΟ ισχύει ΑΒ = ΟΒ = ΟΑ = ρ, οπότε είναι ισόπλευρο.

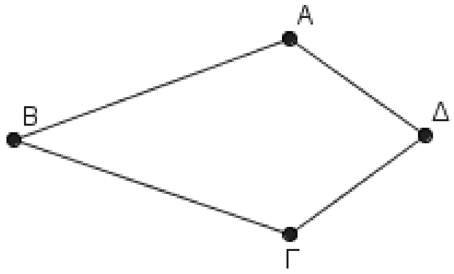


β) Στο τρίγωνο ΓΑΟ το ΓΜ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οπότε ΑΓ= ΟΓ = ρ. Τελικά, το τετράπλευρο ΟΒΑΓ έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες με την ακτίνα του κύκλου, οπότε είναι ρόμβος.

1585

ΘΕΜΑ 2

Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\mathrm{BA} = \mathrm{B\Gamma}$ και $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Gamma}$.



Να αποδείξτε ότι:

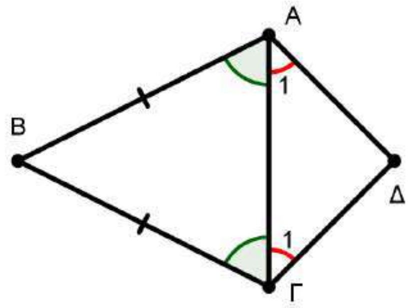
α) $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{B}\widehat{\Gamma}\mathrm{A}$. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 7)

1585-Λύση

α) Είναι ΒΑ = ΒΓ οπότε το τρίγωνο ΒΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ. Άρα $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$.

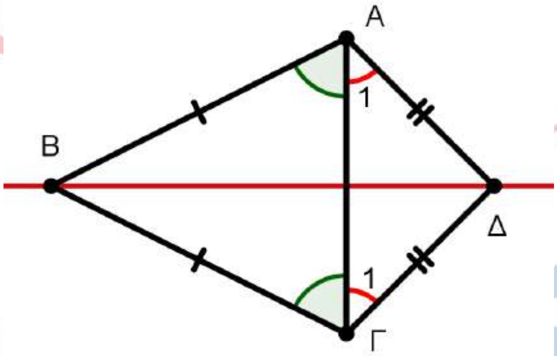


β) Επειδή $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Gamma}\Delta$ και $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$, είναι και

$B\hat{A}\Delta - B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Delta - B\hat{\Gamma}A$, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$.

Άρα το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ και είναι ΔΑ = ΔΓ (1).

γ) Επειδή ΒΑ = ΒΓ και ΔΑ = ΔΓ, τα σημεία Β, Δ ισαπέχουν από τα Α, Γ. Άρα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ.



1587

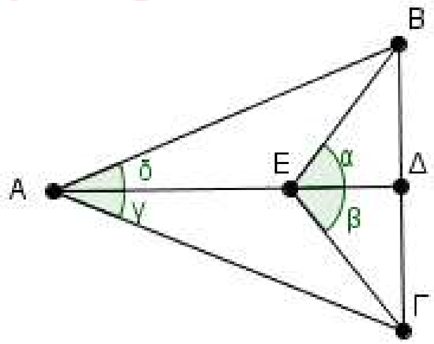
ΘΕΜΑ 2

Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. (Μονάδες 9)

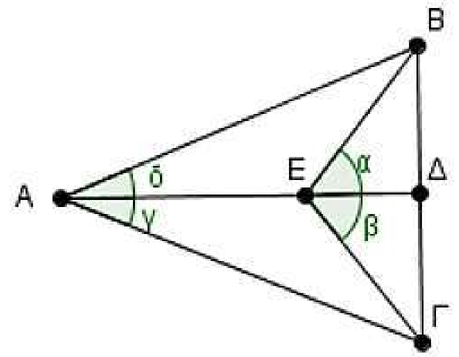


1587-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ έχουν:

- ΑΕ κοινή πλευρά,
- $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, από υπόθεση
- ΑΒ = ΑΓ, από υπόθεση.

Από το κριτήριο ΠΓΠ συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα, απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$ θα βρίσκονται ίσες πλευρές. Οπότε ΕΒ = ΕΓ και το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές.

γ) Είναι ΑΒ = ΑΓ, δηλαδή το Α ισαπέχει από τα Β και Γ οπότε βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΓ. Ισχύει ακόμη ΕΒ = ΕΓ, οπότε το Ε ισαπέχει από τα Β, Γ άρα βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΓ. Επειδή τα Α, Ε βρίσκονται στη μεσοκάθετο του ΒΓ, η ΑΔ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος αυτού.

1591

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε ΚΒ = ΚΓ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα.

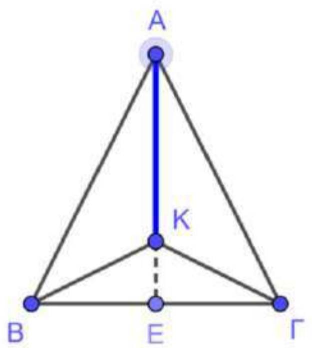
(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\widehat{A}\Gamma$.

(Μονάδες 6)

γ) Η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΒΓ στο Ε. Να δείξετε ότι η ΚΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΚΓ.

(Μονάδες 7)

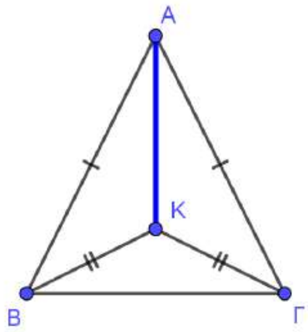


1591-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ έχουν:

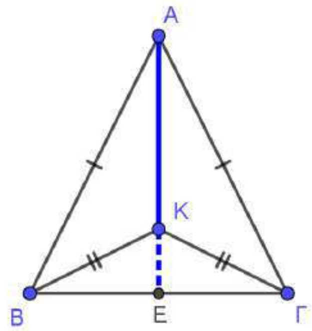
- ΑΚ κοινή πλευρά,
- ΑΒ = ΑΓ, από υπόθεση
- ΚΒ = ΚΓ, από υπόθεση

Από το κριτήριο Π – Π – Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα.



β) Τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα, οπότε και οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ΒΚ και ΚΓ είναι ίσες, δηλαδή ισχύει $B\widehat{A}K = K\widehat{A}\Gamma$. Άρα η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\widehat{A}\Gamma$.

γ) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές η διχοτόμος ΑΚ είναι και διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, άρα το Ε είναι μέσον του τμήματος ΒΓ. Τελικά η ΚΕ είναι διάμεσος του ΒΚΓ.



1592

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) . Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε ΒΔ= ΓΕ.

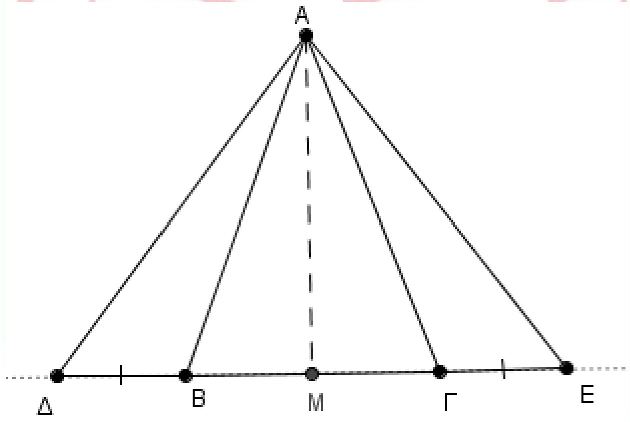
Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{B_{\varepsilon\xi}} = \widehat{\Gamma_{\varepsilon\xi}}$ (Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

γ) Η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ είναι και διάμεσος του τριγώνου ΑΔΕ.

(Μονάδες 7)



1592-Λύση

α) Είναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ επειδή ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο με βάση ΒΓ. Τότε:

$\widehat{B}_{\varepsilon\xi} = 180^o - \widehat{B} = 180^o - \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

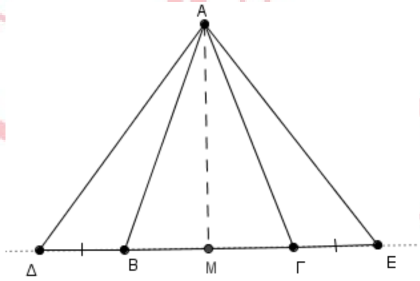
- ΑΒ = ΑΓ,
- ΒΔ = ΓΕ,
- $\widehat{B}_{\varepsilon\xi} = \widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$

Από το κριτήριο Π – Γ – Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.

γ) Είναι ΒΜ = ΜΓ, αφού Μ μέσο της ΒΓ και ΒΔ = ΓΕ, από υπόθεση. Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε:

ΒΜ + ΒΔ = ΜΓ + ΓΕ $\Leftrightarrow$ ΔΜ = ΜΕ

Επομένως το Μ είναι μέσο του ΔΕ, δηλαδή η ΑΜ είναι διάμεσος του ΑΔΕ.



1593

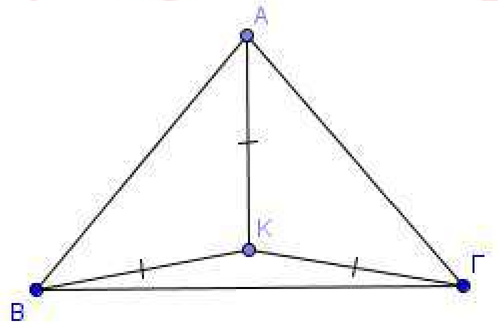
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $\hat{A} = 80^0$. Έστω Κ σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τέτοιο ώστε ΚΒ=ΚΑ=ΚΓ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{ABK}$ και $\widehat{A\Gamma K}$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{BK\Gamma}$. (Μονάδες 7)

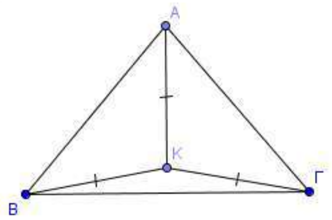


1593-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ έχουν:

- ΚΑ κοινή πλευρά
- ΒΚ = ΚΓ, από υπόθεση
- ΑΒ = ΑΓ, διότι ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο.

Από το κριτήριο Π – Π – Π τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ είναι ίσα.



β) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, ισχύει ότι $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$ (1)

Επειδή η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$, ισχύει ότι:

$\mathrm{B\widehat{A}K} = \mathrm{K\widehat{A}\Gamma} = \frac{80^o}{2} = 40^o$

Επειδή ΚΒ = ΚΑ, το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές. Όμοια, επειδή ΚΑ = ΚΓ και το τρίγωνο ΑΓΚ είναι ισοσκελές. Άρα

$\mathrm{A\widehat{B}K} = \mathrm{B\widehat{A}K} = 40^o$ και $\mathrm{K\widehat{\Gamma}A} = \mathrm{K\widehat{A}\Gamma} = 40^o$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΚ έχουμε:

$\mathrm{A\widehat{K}B} + \mathrm{A\widehat{B}K} + \mathrm{B\widehat{A}K} = 180^o \Leftrightarrow \mathrm{A\widehat{K}B} + 2 \cdot 40^o = 180^o \Leftrightarrow \mathrm{A\widehat{K}B} = 100^o$

Όμοια από το τρίγωνο ΑΓΚ βρίσκουμε ότι $\mathrm{A\widehat{K}\Gamma} = 100^o$.

γ) Είναι

$\mathrm{B\widehat{K}\Gamma} + \mathrm{A\widehat{K}B} + \mathrm{A\widehat{K}\Gamma} = 360^o \Leftrightarrow \mathrm{B\widehat{K}\Gamma} + 100^o + 100^o = 360^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{B\widehat{K}\Gamma} + 200^o = 360^o \Leftrightarrow \mathrm{B\widehat{K}\Gamma} = 160^o$

1594

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$). Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοιο ώστε, η διχοτόμος ΔΕ της γωνίας $A\widehat{\Delta}B$ να είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $E\widehat{\Delta}B = \Delta\widehat{B}\Gamma$ και $E\widehat{\Delta}A = \widehat{\Gamma}$

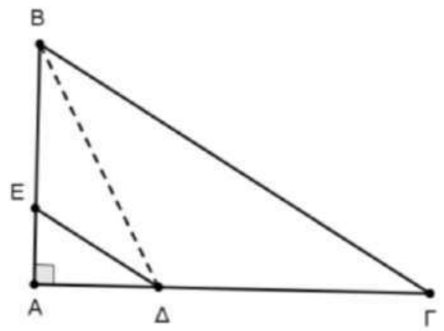
(Μονάδες 4 + 4)

ii) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

β) Αν $A\widehat{\Delta}B = 60^o$ να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Gamma}$.

(Μονάδες 9)



1594-Λύση

α) i) Ισχύει ότι:

- $E\widehat{\Delta}B = \Delta\widehat{B}\Gamma$ (1), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΒΔ
- $E\widehat{\Delta}A = \widehat{\Gamma}$ (2), ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ

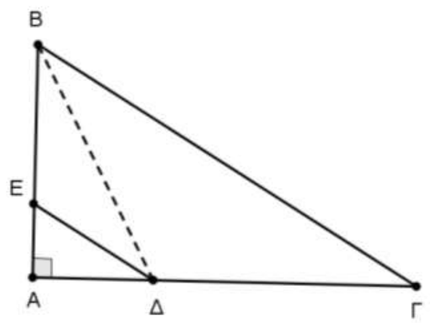
ii) Ισχύει ότι $E\widehat{\Delta}B = E\widehat{\Delta}A$ (3), διότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της $A\widehat{\Delta}B$.

Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\Delta\widehat{B}\Gamma = \widehat{\Gamma}$ (4)

Άρα το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές με ΔΒ = ΔΓ.

β) Η $A\widehat{\Delta}B$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΔΒΓ οπότε ισχύει $A\widehat{\Delta}B = \widehat{\Gamma} + \Delta\widehat{B}\Gamma$

Λόγω της (4) βρίσκουμε $60^o = \widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} \Leftrightarrow 60^o = 2\widehat{\Gamma} \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 30^o$



1595

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και το ύψος του ΑΜ. Φέρουμε ημιευθεία Γx, κάθετη στη $\mathrm{B\Gamma}$, προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα ΓΔ = ΑΒ.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\widehat{A}\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $\Gamma\widehat{\Delta}A$.

(Μονάδες 12)

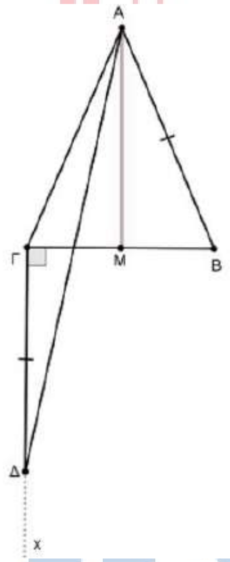
β) Να αποδείξετε ότι:

i) ΓΔ // ΑΜ

(Μονάδες 6)

ii) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{M\widehat{A}\Gamma}$.

(Μονάδες 7)



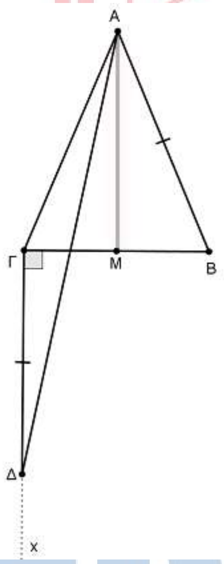
1595-Λύση

α) Είναι ΓΔ = ΑΒ από υπόθεση και ΑΒ = ΑΓ επειδή ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο, οπότε ΓΔ = ΑΓ.

Άρα το ΑΓΔ είναι ισοσκελές τρίγωνο με βάση την ΑΔ. Συνεπώς $\Delta\widehat{A}\Gamma = \Gamma\widehat{\Delta}A$.

β) i) Επειδή το ΑΜ είναι ύψος του τριγώνου ισχύει ότι ΑΜ⊥ΒΓ. Επίσης, από υπόθεση ΓΔ⊥ΒΓ, άρα ΓΔ//ΑΜ.

ii) Είναι $\Gamma\widehat{\Delta}A = M\widehat{A}\Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΓΔ, ΑΜ που τέμνονται από την ΑΔ. Ισχύει ακόμη από το ερώτημα (α) ότι $\Delta\widehat{A}\Gamma = \Gamma\widehat{\Delta}A$ οπότε είναι $\Delta\widehat{A}\Gamma = M\widehat{A}\Delta$. Τελικά η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\widehat{A}\Gamma$.



1597

ΘΕΜΑ 2

Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ (προς το Α) και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ=ΑΒ και ΑΕ=ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

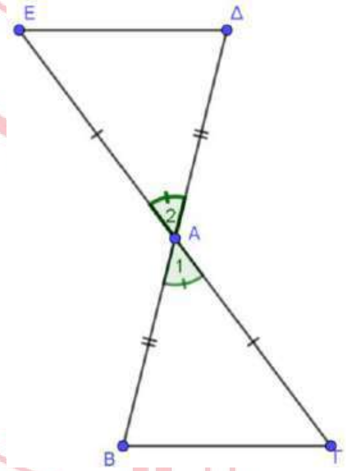
β) ΕΔ//ΒΓ (Μονάδες 13)

1597-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν:

- ΑΔ = ΑΒ από υπόθεση,
- ΑΕ = ΑΓ από υπόθεση,
- $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, ως κατακορυφήν

Από το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.



β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ προκύπτει ότι και οι αντίστοιχες γωνίες $\hat{E}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες, δηλαδή $\hat{E} = \hat{\Gamma}$.

Οι γωνίες αυτές είναι εντός εναλλάξ των ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΕΓ. Και αφού οι γωνίες αυτές είναι ίσες, οι ΔΕ, ΒΓ είναι παράλληλες.

1598

ΘΕΜΑ 2

Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΕΔ στο Ζ, να δείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα.

(Μονάδες 7)

ii. ΖΔ = $\frac{ΕΔ}{2}$

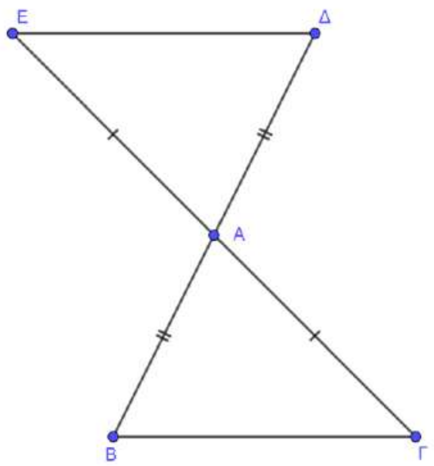
(Μονάδες 6)

1598-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν:

- ΑΔ = ΑΒ από υπόθεση,
- ΑΕ = ΑΓ από υπόθεση,
- $B\widehat{A}\Gamma = \Delta\widehat{A}E$ ως κατακορυφήν

Από το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.



β) i. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ έχουν:

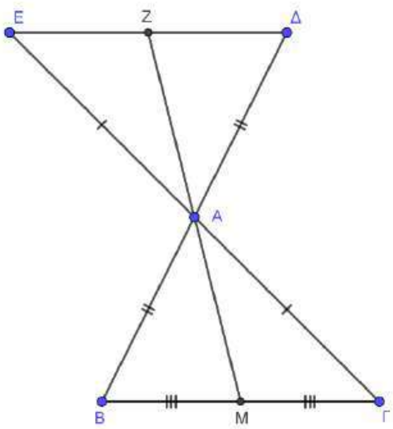
- ΑΔ = ΑΒ από υπόθεση,
- $B\widehat{A}M = \Delta\widehat{A}Z$ ως κατακορυφήν,
- $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$ από τα ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ.

Από το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα.

ii. Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι και οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\widehat{A}M$ και $\Delta\widehat{A}Z$ είναι ίσες, δηλαδή ΖΔ = ΒΜ. Τότε

ΖΔ = ΒΜ $\Leftrightarrow$ ΖΔ = $\frac{B\Gamma}{2} = \frac{E\Delta}{2}$ (1)

διότι ΒΓ = ΕΔ αφού τα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα τρίγωνα.



1599

ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) ΜΔ=ΜΓ. (Μονάδες 12)

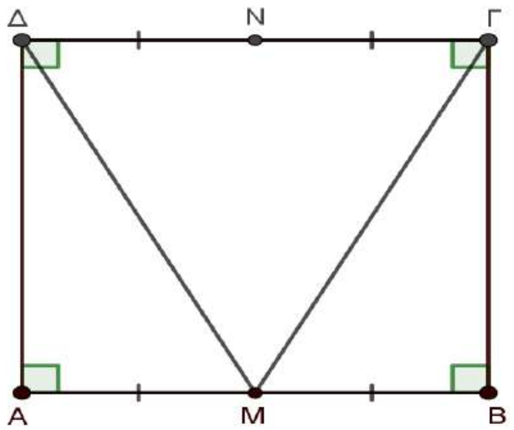
β) Η ευθεία ΜΝ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΓΔ. (Μονάδες 13)

1599-Λύση

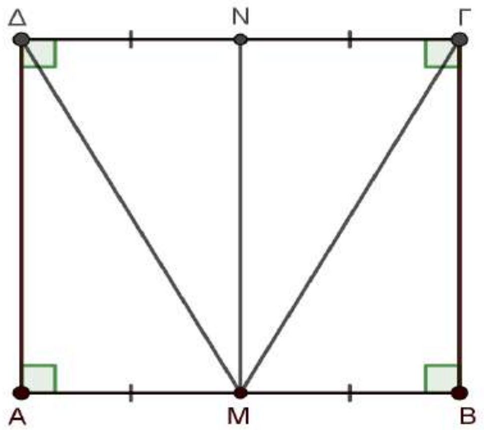
α) Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΜΒΓ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου
- ΑΜ = ΜΒ, διότι το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΜΒΓ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι ίσα. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι και οι υποτείνουσές τους είναι ίσες, δηλαδή ΜΔ = ΜΓ.



β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΓΔ το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ είναι διάμεσος, οπότε είναι και ύψος. Άρα το ΜΝ είναι μεσοκάθετος του ΓΔ.



1600

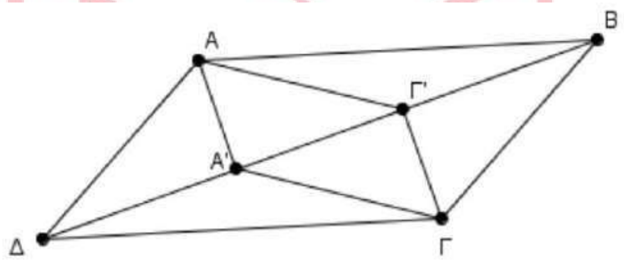
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Α΄, Γ΄ οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ. Αν τα σημεία Α΄ και Γ΄ δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

α) ΑΑ΄// ΓΓ΄ (Μονάδες 8)

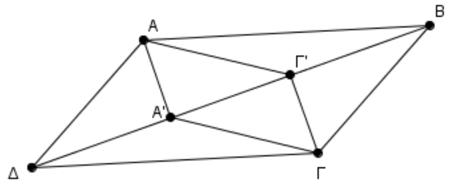
β) ΑΑ΄= ΓΓ΄ (Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο ΑΓ΄ΓΑ΄ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



1600-Λύση

α) Επειδή ΑΑ΄ ⊥ ΒΔ και ΓΓ΄ ⊥ ΒΔ, προκύπτει ότι ΑΑ΄ // ΓΓ΄



β) Τα τρίγωνα ΑΑ΄Δ και ΓΓ΄Β είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΑΔ = ΒΓ, διότι είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- $A\widehat{\Delta}A'$ = $\Gamma\widehat{B}\Gamma'$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΑ΄Δ και ΓΓ΄Β έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία οπότε είναι ίσα. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\widehat{\Delta}A'$ και $\Gamma\widehat{B}\Gamma'$ είναι ίσες, δηλαδή ΑΑ΄ = ΓΓ΄.

γ) Επειδή ΑΑ΄ // ΓΓ΄ και ΑΑ΄= ΓΓ΄,

το τετράπλευρο ΑΓ΄ΓΑ΄ είναι παραλληλόγραμμο.

1601

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε ΜΒ=ΜΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

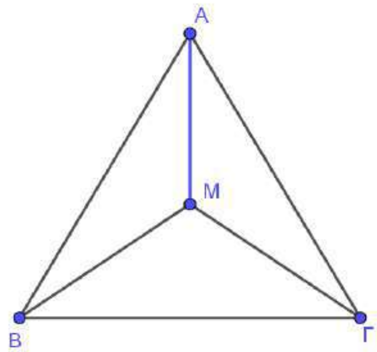
β) Η ευθεία ΑΜ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{ΒΜΓ}$. (Μονάδες 13)

1601-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΜΑΓ έχουν:

- ΑΜ κοινή πλευρά,
- ΑΒ = ΑΓ αφού ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο,
- ΜΒ = ΜΓ από υπόθεση.

Από το κριτήριο Π – Π – Π τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΜΑΓ είναι ίσα.

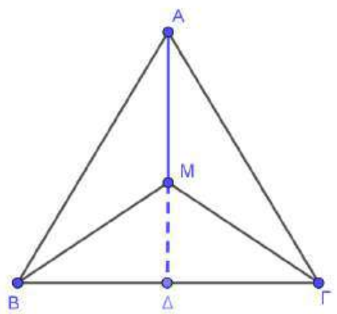


β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΜΑΓ είναι ίσα θα είναι ίσες και οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ, δηλαδή ισχύει $A\widehat{M}B = A\widehat{M}\Gamma$. Τότε είναι

$B\widehat{M}\Delta = \Delta\widehat{M}\Gamma$ (1)

ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\widehat{M}B$ και $A\widehat{M}\Gamma$.

Από την (1) συμπεραίνουμε ότι η ΑΜ διχοτομεί την $B\widehat{M}\Gamma$.



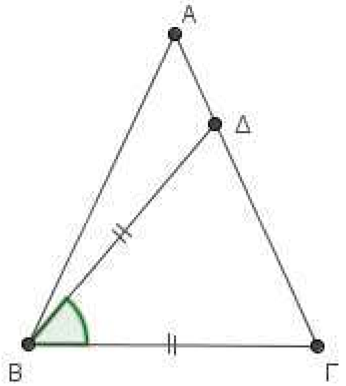
1602

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με γωνία $\hat{A} = 50^0$. Έστω Δ είναι σημείο της πλευράς ΑΓ, τέτοιο ώστε ΒΔ=ΒΓ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{\Delta B \Gamma}$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$. (Μονάδες 13)



1602-Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, ισχύει ότι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 50^o + 2\widehat{B} = 180^o \Leftrightarrow 2\widehat{B} = 130^o \Leftrightarrow \widehat{B} = 65^o$.

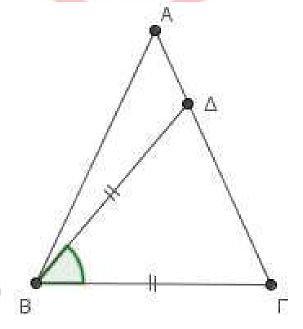
Άρα και $\widehat{\Gamma} = 65^o$.

β) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές διότι ΒΔ = ΒΓ. Τότε $B\widehat{\Delta}\Gamma = \widehat{\Gamma} = 65^o$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΒΓ έχουμε:

$\Delta\widehat{B}\Gamma + B\widehat{\Delta}\Gamma + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \Delta\widehat{B}\Gamma + 65^o + 65^o = 180^o \Leftrightarrow \Delta\widehat{B}\Gamma + 130^o = 180^o$

Άρα $\Delta\widehat{B}\Gamma = 50^o = \widehat{A}$



1604

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με γωνία κορυφής $\hat{A} = 40^0$. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) παίρνουμε τμήμα ΒΔ τέτοιο ώστε $B\Delta = AB$.

Να υπολογίσετε

α) τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 10)

β) τη γωνία $\widehat{\Delta A\Gamma}$. (Μονάδες 15)

1604-Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, ισχύει ότι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 40^o + 2\widehat{B} = 180^o \Leftrightarrow 2\widehat{B} = 140^o \Leftrightarrow \widehat{B} = 70^o$

Τότε και $\widehat{\Gamma} = 70^o$.

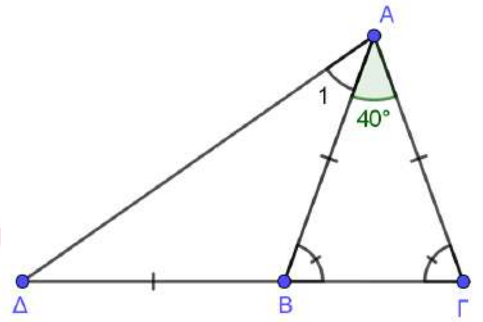
β) Επειδή ΒΔ = ΑΒ, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, άρα ισχύει $\widehat{\Delta} = \widehat{A}_1$.

Η γωνία $\widehat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΔ, οπότε ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών, δηλαδή

$\widehat{B} = \widehat{\Delta} + \widehat{A}_1 \Leftrightarrow 70^o = 2\widehat{\Delta} \Leftrightarrow \widehat{\Delta} = 35^o$ οπότε και $\widehat{A}_1 = 35^o$

Ισχύει ότι

$\Delta\widehat{A}\Gamma = \widehat{A} + \widehat{A}_1 = 40^o + 35^o = 75^o$



1606

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) με γωνία $\widehat{\mathrm{B}} = 2\widehat{\Gamma}$ και σημείο Μ μέσο της ΒΓ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

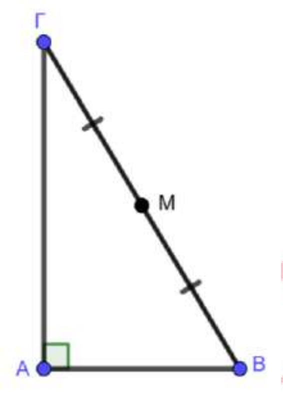
(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τη γωνία $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\Gamma$.

(Μονάδες 9)



1606-Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, βρίσκουμε:

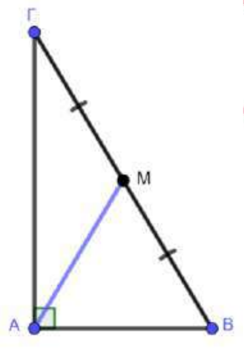
$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow 2\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow 3\widehat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 30^o$

Από υπόθεση ισχύει $\widehat{B} = 2\widehat{\Gamma}$ άρα $\widehat{B} = 2 \cdot 30^o = 60^o$

β) Η ΑΜ είναι διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας του τριγώνου ΑΒΓ οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή ισχύει

$AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$

Επομένως το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές.



γ) Επειδή το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές με ΜΑ = ΜΓ ισχύει ότι $M\widehat{A}\Gamma = \widehat{\Gamma} = 30^o$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΜΓ, βρίσκουμε

$A\widehat{M}\Gamma + M\widehat{A}\Gamma + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow A\widehat{M}\Gamma + 30^o + 30^o = 180^o \Leftrightarrow A\widehat{M}\Gamma = 120^o$

1607

ΘΕΜΑ 2

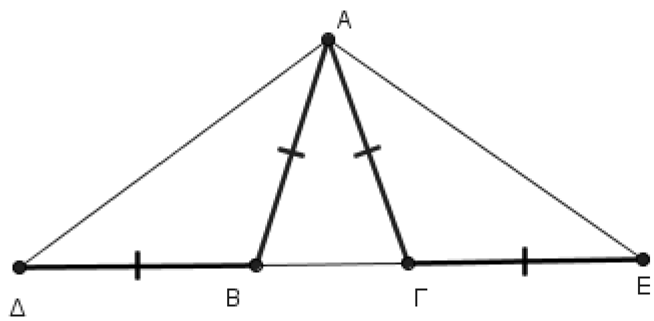
Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν ΔΒ=ΒΑ=ΑΓ=ΓΕ και $\widehat{BA\Gamma} = 40^0$.

Να αποδείξετε ότι

α) $\widehat{AB\Delta} = \widehat{A\Gamma E} = 110^0$. (Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)



1607-Λύση

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές διότι ΑΒ = ΑΓ. Άρα $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, βρίσκουμε:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 40^o + 2\widehat{B} = 180^o \Leftrightarrow 2\widehat{B} = 140^o \Leftrightarrow \widehat{B} = 70^o$

Οι γωνίες $A\widehat{B}\Delta$ και $A\widehat{\Gamma}E$ είναι παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$, οπότε

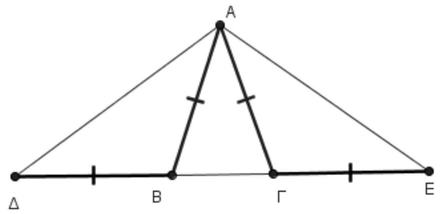
$A\widehat{B}\Delta = A\widehat{\Gamma}E = 180^o - 70^o = 110^o$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

- ΔΒ = ΓΕ, από υπόθεση
- ΒΑ = ΑΓ, από υπόθεση
- $A\widehat{B}\Delta = A\widehat{\Gamma}E = 110^o$

Από το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.

γ) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ συμπεραίνουμε ότι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\widehat{B}\Delta$ και $A\widehat{\Gamma}E$ είναι ίσες, δηλαδή ΑΔ = ΑΕ. Άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.



1608

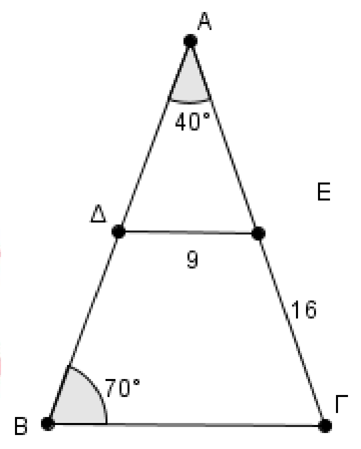
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 40^0$ και $\hat{B} = 70^0$. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ με $ΔΕ = 9$ και $ΕΓ = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι ΒΓ=18. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)



1608-Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ βρίσκουμε:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 40^o + 70^o + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 110^o + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 70^o$

Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, οπότε έχει ίσες πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ.

β) Επειδή τα Δ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι ίσο με το μισό της ΒΓ, δηλαδή

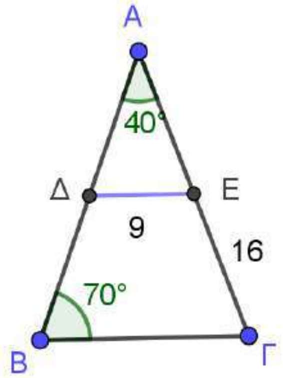
$\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 9 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 18$

γ) Είναι

$E\Gamma = 16 \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{2} = 16 \Leftrightarrow A\Gamma = 32$ οπότε και ΑΒ = 32.

Τότε η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

Π = ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ = 32 + 18 + 32 = 82



1609

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ . Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{\Delta}$ και $\hat{B}$ τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΓΖ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

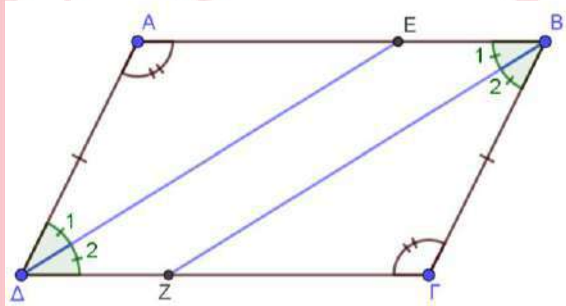
1609-Λύση

α) Οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Delta}$ είναι ίσες ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου.

Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΓΖ έχουν:

- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{B}_2$, ως μισά των ίσων γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Delta}$.
- $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Από την προηγούμενη ισότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΒΓΖ προκύπτει ότι:

- οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι ίσες, δηλαδή ΔΕ = ΒΖ (1) καθώς και
- οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Delta}_1$ και $\widehat{B}_2$ είναι ίσες, δηλαδή ΑΕ = ΓΖ.

Επειδή ΑΒ = ΓΔ και ΑΕ = ΓΖ, βρίσκουμε

ΑΒ – ΑΕ = ΓΔ – ΓΖ $\Leftrightarrow$ ΒΕ = ΔΖ (2)

Αφού (σύμφωνα με τις 1 και 2) το τετράπλευρο ΔΕΒΖ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, είναι παραλληλόγραμμο.

1610

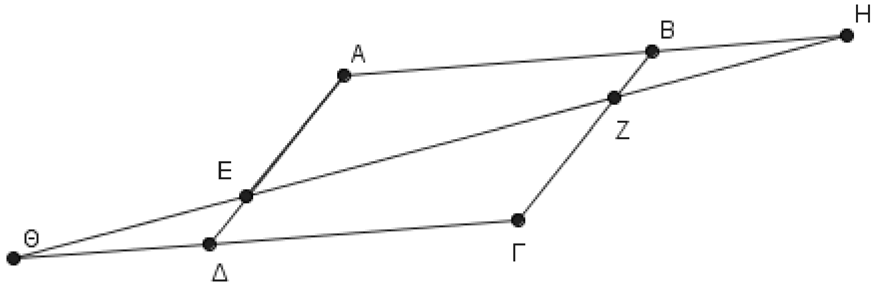
ΘΕΜΑ 2

Στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ, τέτοια ώστε ΑΕ=ΓΖ . Αν η ευθεία ΖΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Η και Θ, να αποδείξετε ότι:

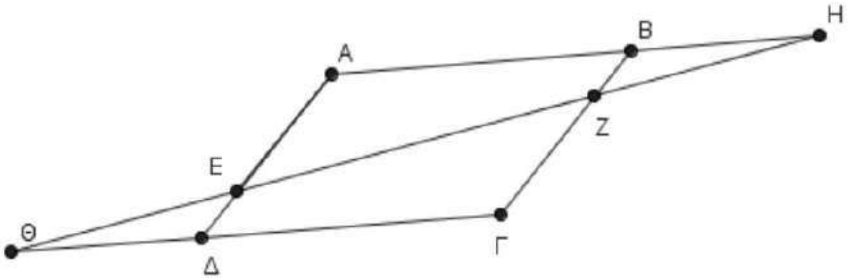
α) $H\hat{B}Z = E\hat{\Delta}\Theta$ (Μονάδες 8)

β) $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$ (Μονάδες 8)

γ) ΒΗ=ΘΔ (Μονάδες 9)



1610-Λύση



α) Είναι $A\widehat{B}\Gamma = A\widehat{\Delta}\Gamma$ διότι είναι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Τότε $H\widehat{B}Z = 180^o - A\widehat{B}\Gamma = 180^o - A\widehat{\Delta}\Gamma = E\widehat{\Delta}\Theta$.

β) Είναι $\Gamma\widehat{Z}E = A\widehat{E}Z$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΕΖ. Επίσης $B\widehat{Z}H = \Gamma\widehat{Z}E$ (2) ως κατακορυφήν και $\Delta\widehat{E}\Theta = A\widehat{E}Z$ (3) ως κατακορυφήν. Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $B\widehat{Z}H = \Delta\widehat{E}\Theta$.

γ) ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και ΑΕ = ΓΖ από την υπόθεση. Επομένως:

ΔΕ = ΑΔ – ΑΕ = ΒΓ – ΓΖ = ΒΖ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΕΘ και ΒΖΗ:

ΔΕ = ΒΖ (αποδείχθηκε παραπάνω)

$H\widehat{B}Z = E\widehat{\Delta}\Theta$, από το (α)

$B\widehat{Z}H = \Delta\widehat{E}\Theta$, από το (β)

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε είναι και ΒΗ = ΘΔ (γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\widehat{Z}H = \Delta\widehat{E}\Theta$, των τριγώνων).

1616

ΘΕΜΑ 2

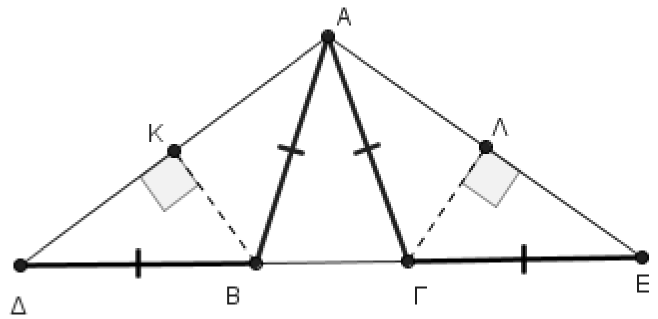
Θεωρούμε ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΔ με ΑΒ = ΑΔ= 5 και ΑΓΕ με ΑΓ = ΓΕ= 5 έτσι ώστε τα σημεία Δ, Β, Γ και Ε να είναι συνευθειακά. Θεωρούμε τα ύψη τους ΒΚ και ΓΛ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

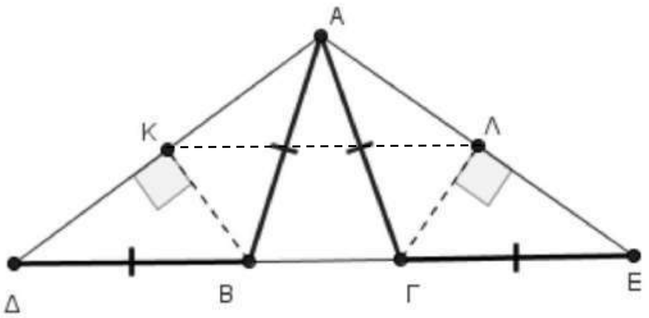
β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

γ) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα ΚΛ.

(Μονάδες 9)



1616-Λύση



α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ισοσκελή, γιατί είναι ΑΒ = ΒΔ και ΑΓ = ΓΕ, αντίστοιχα.

β) Το ΒΚ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΔ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και διάμεσος του τριγώνου, οπότε το Κ είναι μέσο του ΑΔ.

Όμοια, το ΓΛ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΓΕ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και διάμεσός του, συνεπώς το Λ είναι μέσο του ΑΕ.

γ) Είναι ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ = 12. Όμως ισχύει ΑΒ = ΒΔ = ΑΓ = ΓΕ, άρα ΒΔ + ΓΕ + ΒΓ = 12.

Το τμήμα ΚΛ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΔΕ, άρα

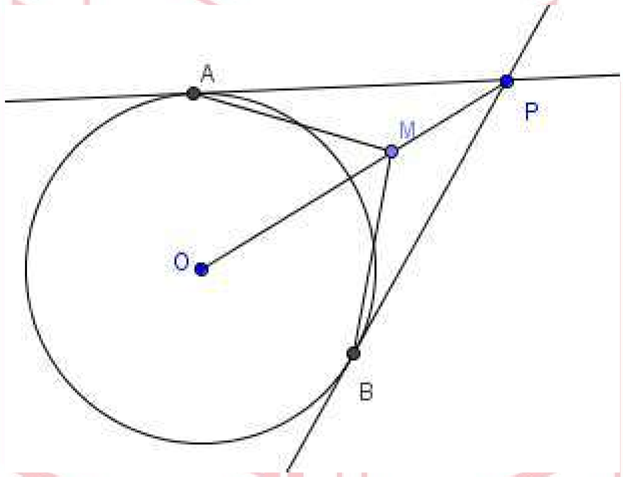
$$ΚΛ = \frac{ΔΕ}{2} = \frac{ΒΔ+ΓΕ+ΒΓ}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

ΘΕΜΑ 2

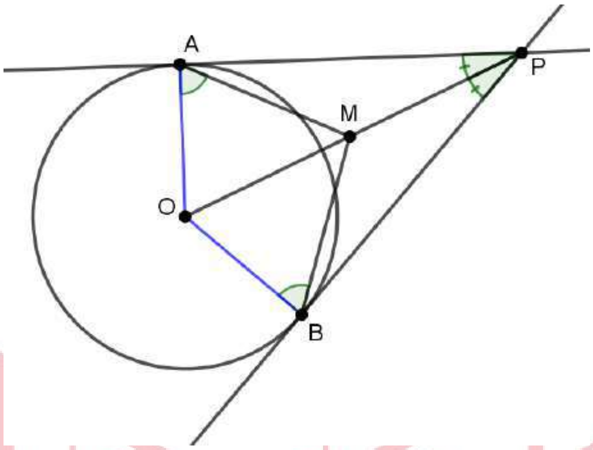
Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου (Ο,ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΡ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) οι γωνίες $\widehat{MAO}$ και $\widehat{MBO}$ είναι ίσες. (Μονάδες 13)



1617-Λύση



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα PAM και PMB. Έχουν:

- PM κοινή πλευρά
- PA = PB ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το P προς τον κύκλο
- $O\hat{P}A = O\hat{P}B$, διότι η διακεντρική ευθεία PO διχοτομεί την γωνία των εφαπτομένων.

Από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα.

β) Από την ισότητα των τριγώνων PAM και PMB προκύπτει ότι $P\hat{A}M = P\hat{B}M$, καθώς οι γωνίες βρίσκονται απέναντι από την PM και στα δύο τρίγωνα.

Επίσης $O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90^o$ διότι οι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις εφαπτόμενες ευθείες. Άρα $M\hat{A}O = O\hat{A}P - P\hat{A}M = O\hat{B}P - P\hat{B}M = M\hat{B}O$.

1618

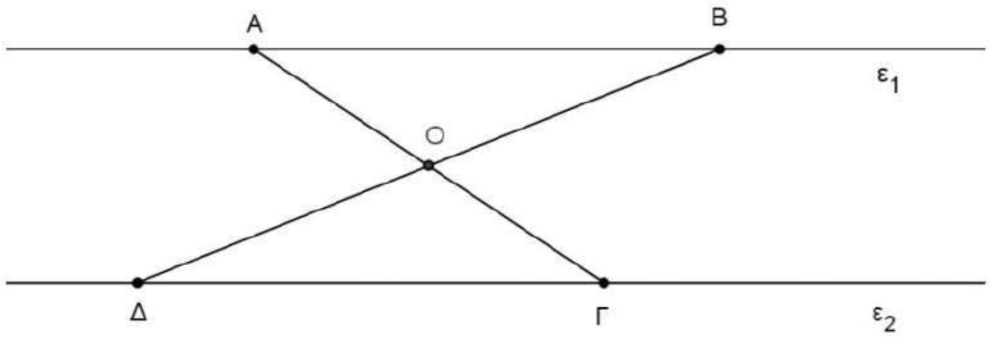
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 και τα σημεία Α, Β στην ε_1 και Δ και Γ στην ε_2 ώστε τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται στο μέσο Ο του ΒΔ.

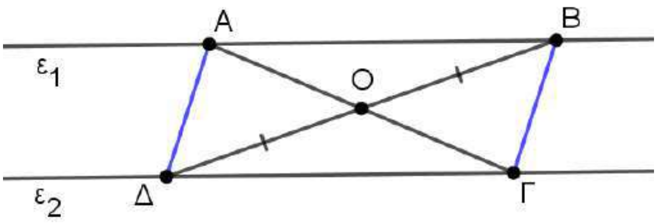
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



1618-Λύση



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ, τα οποία έχουν:

- ΒΟ = ΟΔ, αφού Ο μέσον του ΒΔ
- $A\widehat{O}B = \Gamma\widehat{O}\Delta$, ως κατακορυφήν
- $A\widehat{B}O = \Gamma\widehat{\Delta}O$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ε_1, ε_2 που τέμνονται από την ΒΔ.

Με βάση το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα είναι ίσα και έχουν:

- ΟΑ = ΟΓ, απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\widehat{B}O$ και $\Gamma\widehat{\Delta}O$
- ΑΒ = ΓΔ, απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\widehat{O}B$ και $\Gamma\widehat{O}\Delta$
- και $O\widehat{A}B = O\widehat{\Gamma}\Delta$.

β) Ισχύει ότι ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ, δηλαδή οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ διχοτομούνται και άρα είναι παραλληλόγραμμο.

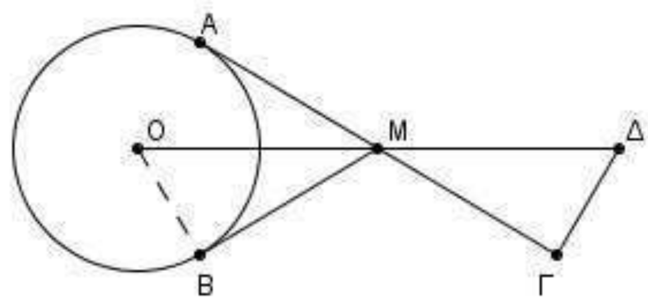
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O,R) και τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ. Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΓ=ΜΑ και την ΟΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΟΜ.

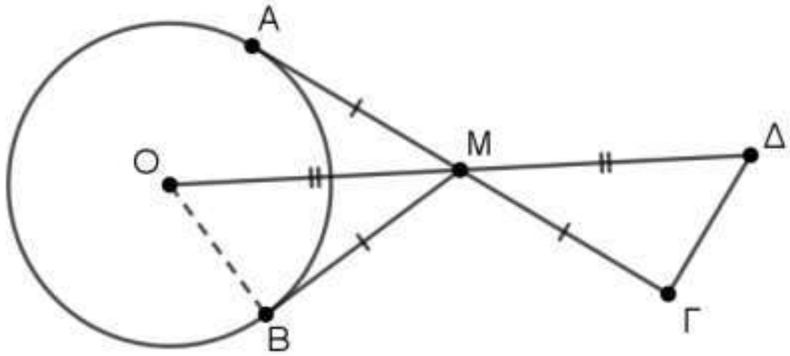
α) Να αποδείξετε ότι ΜΒ = ΜΓ. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ είναι ίσα.

. (Μονάδες 15)



1620-Λύση



α) Ισχύει ότι ΜΑ = ΜΒ ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου (το σημείο Μ). Επίσης, από υπόθεση ισχύει ότι ΜΓ = ΜΑ οπότε προκύπτει ΜΒ = ΜΓ (1).

β) Ακόμα ισχύει ότι και $A\widehat{M}O = B\widehat{M}O$ (2) γιατί η διακεντρική ευθεία ΟΜ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων, η οποία είναι η $A\widehat{M}B$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ, τα οποία έχουν:

- ΜΔ = ΟΜ, από την υπόθεση
- ΜΒ = ΜΓ, λόγω της (1)
- $B\widehat{M}O = \Gamma\widehat{M}\Delta$, διότι $A\widehat{M}O = \Gamma\widehat{M}\Delta$ (ως κατακορυφήν) και $A\widehat{M}O = B\widehat{M}O$ (λόγω της (2)).

Από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ είναι ίσα.

ΘΕΜΑ 2

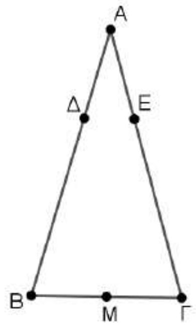
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και στις ίσες πλευρές ΑΒ,ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα ΑΔ=$\frac{1}{3}$ΑΒ και ΑΕ=$\frac{1}{3}$ ΑΓ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 5)

β) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

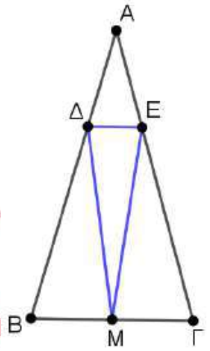
1621-Λύση



α) Επειδή ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ = ΑΕ, έχουμε ότι:

$$ΒΔ = ΑΒ – ΑΔ = ΑΓ – ΑΕ = ΓΕ$$

β) Φέρνουμε αρχικά τα ΔΜ και ΕΜ.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ, τα οποία έχουν:

- ΒΔ = ΓΕ, από το α)
- ΒΜ = ΜΓ, γιατί το Μ είναι μέσο της ΒΓ και
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Από το κριτήριο Π-Γ-Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα.

γ) Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα, από το β) και άρα ισχύει ΜΕ = ΜΔ (καθώς βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$). Συνεπώς, το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

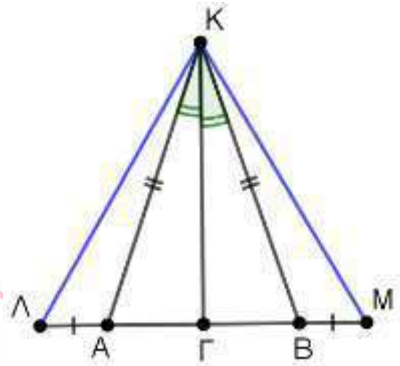
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΚΑΒ (ΚΑ=ΚΒ) και ΚΓ διχοτόμος της γωνίας $\hat{K}$. Στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) παίρνουμε σημείο Μ, έτσι ώστε ΑΛ=ΒΜ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές (Μονάδες 12)

β) η ΚΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΚΛΜ (Μονάδες 13)

1622-Λύση



Είναι $B\widehat{A}K = A\widehat{B}K$ ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΚΑΒ.

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΚΑΛ και ΚΒΜ, το οποία έχουν:

- ΚΑ = ΚΒ, από την υπόθεση
- $K\widehat{A}\Lambda = K\widehat{B}M$, γιατί $K\widehat{A}\Lambda = 180^o - B\widehat{A}K = 180^o - A\widehat{B}K = K\widehat{B}M$
- ΑΛ = ΒΜ, από υπόθεση.

Από το κριτήριο Π-Γ-Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΚΑΛ και ΚΒΜ είναι ίσα. Οπότε ισχύει ΚΛ = ΚΜ (είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $K\widehat{A}\Lambda$ και $K\widehat{B}M$). Άρα το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές.

β) Η ΚΓ είναι διχοτόμος του ισοσκελούς τριγώνου ΚΑΒ που αντιστοιχεί στη γωνία της κορυφής, οπότε είναι και διάμεσος του τριγώνου ΚΑΒ. Επομένως ΑΓ = ΒΓ.

Από την υπόθεση έχουμε ότι ΑΛ = ΒΜ.

Άρα, ΓΛ = ΑΛ + ΑΓ = ΒΜ + ΒΓ = ΓΜ.

Συνεπώς, το Γ είναι μέσο της ΛΜ και επομένως η ΚΓ είναι διάμεσος του ΚΛΜ.

1624

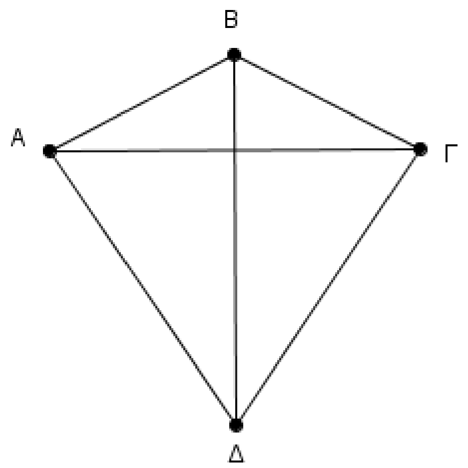
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΒΑ=ΒΓ και ΔΑ=ΔΓ. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετραπλεύρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.

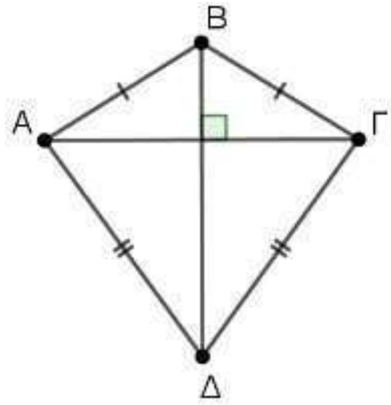
Να αποδείξετε ότι:

α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών Β και Δ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 12)

β) Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 13)



1624-Λύση



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ έχουν:

- ΒΑ = ΒΓ, από την υπόθεση • ΔΑ = ΔΓ, από την υπόθεση
- ΒΔ κοινή πλευρά.

Από το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα, οπότε έχουν $Α\hat{Β}Δ = Δ\hat{Β}Γ$ (απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΔΓ) και $Α\hat{Δ}Β = Β\hat{Δ}Γ$ (απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΒΓ). Άρα η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών $Α\hat{Β}Γ$ και $Α\hat{Δ}Γ$.

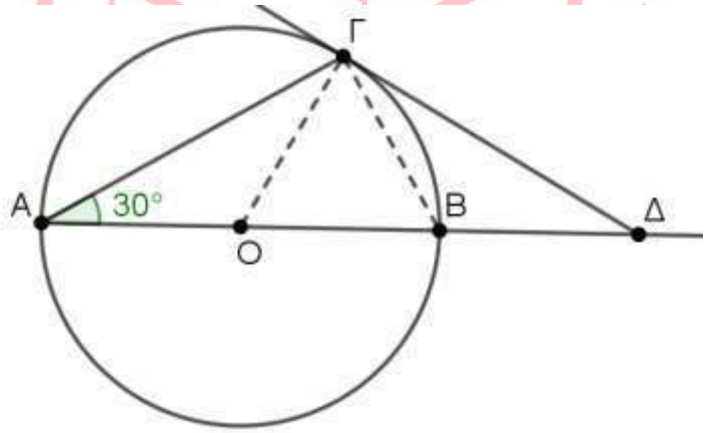
β) Είναι ΒΑ = ΒΓ, άρα το σημείο Β έχει την ίδια απόσταση από τα Α και Γ (δηλαδή τα άκρα του ΑΓ). Παρόμοια, ΔΑ = ΔΓ, άρα το σημείο Δ έχει την ίδια απόσταση από τα Α και Γ (δηλαδή τα άκρα του ΑΓ). Επομένως προκύπτει ότι τα Β και Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΓ. Οπότε η ΒΔ είναι η μεσοκάθετος του ΑΓ, εφόσον δύο σημεία ορίζουν μία ευθεία.

ΘΕΜΑ 2

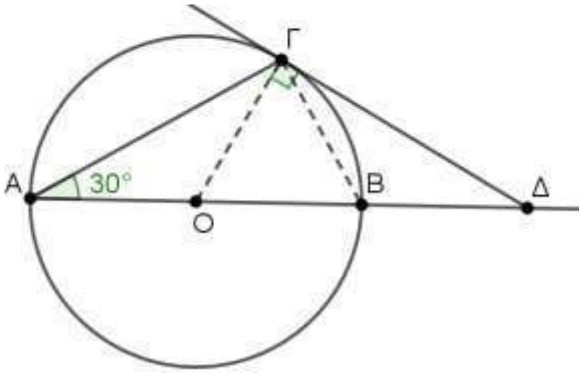
Δίνεται κύκλος (Ο, R) διαμέτρου ΑΒ, και χορδή ΑΓ τέτοια ώστε $B\hat{A}\Gamma = 30^o$. Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου ΑΒ (προς το Β) στο σημείο Δ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΟΓΔ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)



1626-Λύση



α) Η εφαπτομένη ΓΔ είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΓ, άρα $O\hat{\Gamma}\Delta = 90^o$. Η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{A}\Gamma$ και η επίκεντρη $B\hat{O}\Gamma$ βαίνουν στο ίδιο τόξο ΒΓ, άρα:

$$B\hat{A}\Gamma = \frac{B\hat{O}\Gamma}{2} \Leftrightarrow 30^o = \frac{B\hat{O}\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma = 60^o$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΟΓΔ έχουμε:

$$O\hat{\Gamma}\Delta + \Gamma\hat{O}\Delta + O\hat{\Delta}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow 90^o + 60^o + O\hat{\Delta}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow O\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$$

β) Η γωνία $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι γωνία μεταξύ χορδής ΒΓ και εφαπτομένης ΓΔ του κύκλου, άρα είναι ίση με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής ΒΓ του κύκλου, δηλαδή με την $\hat{A} = 30^o$. Άρα $B\hat{\Gamma}\Delta = 30^o$.

Επίσης, από το α) $O\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$, δηλαδή $B\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$. Άρα το τρίγωνο ΒΓΔ έχει δύο ίσες γωνίες, επομένως είναι ισοσκελές.

1627

ΘΕΜΑ 2

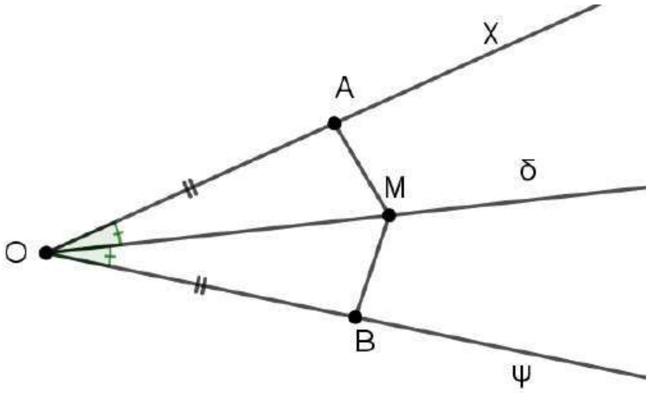
Δίνεται γωνία $x\widehat{O}y$ και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οx και Οy αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΟΑ=ΟΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΑ=ΜΒ. (Μονάδες 15)

β) Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{M}B$. (Μονάδες 10)

1627-Λύση



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΜΟ και ΑΜΟ, τα οποία έχουν:

- ΟΜ κοινή πλευρά
- ΟΑ = ΟΒ και
- $A\widehat{O}M = B\widehat{O}M$ γιατί η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\widehat{O}\psi$.

Από το κριτήριο Π-Γ-Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΒΜΟ και ΑΜΟ είναι ίσα οπότε, απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\widehat{O}M$ και $B\widehat{O}M$ βρίσκονται οι ίσες πλευρές ΜΑ = ΜΒ.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΜΟ και ΑΜΟ είναι ίσα, έχουν και $O\widehat{M}A = O\widehat{M}B$ (απέναντι από τις ίσες πλευρές ΟΑ και ΟΒ), άρα η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{M}B$.

1628

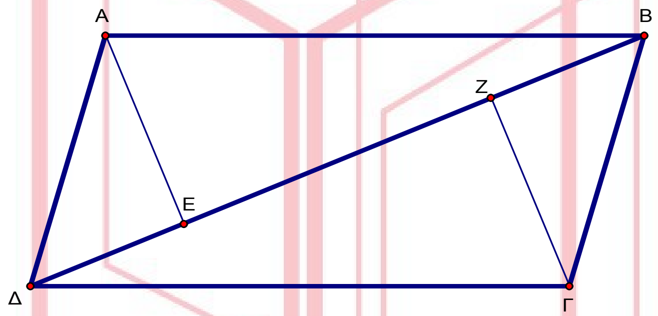
ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ > ΒΓ φέρουμε από τις κορυφές Α και Γ καθέτους στη διαγώνιο ΒΔ, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

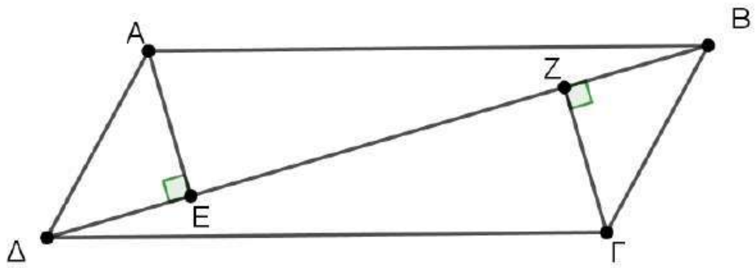
Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΕ=ΓΖ. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



1628-Λύση



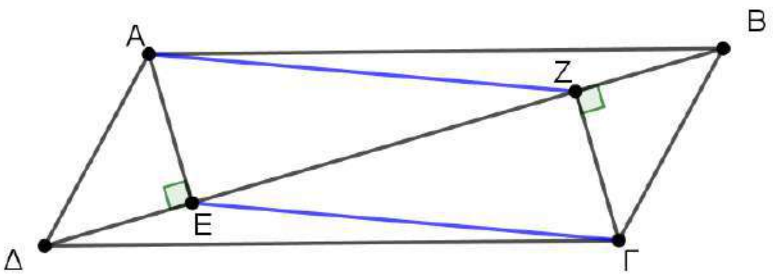
α) Συγκρίνουμε τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ:

- Είναι ορθογώνια
- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και
- $A\widehat{\Delta}E = \Gamma\widehat{B}Z$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ.

Άρα πρόκειται για ορθογώνια τρίγωνα με δύο οξείες γωνίες ίσες μία προς μία και τις υποτείνουσές τους ίσες, επομένως είναι ίσα.

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΓΒΖ προκύπτει ότι ΑΕ = ΓΖ (γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\widehat{\Delta}E$ και $\Gamma\widehat{B}Z$).

β) Φέρνουμε τις ΕΓ και ΑΖ.



Οι ΑΕ και ΓΖ είναι κάθετες στην ίδια ευθεία (ΑΕ ⊥ ΒΔ και ΓΖ ⊥ ΒΔ), άρα ΑΕ // ΓΖ.

Επίσης, στο α) έχουμε βρει ότι ΑΕ = ΓΖ.

Άρα το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τις ΑΕ και ΓΖ, παράλληλες και ίσες.

1629

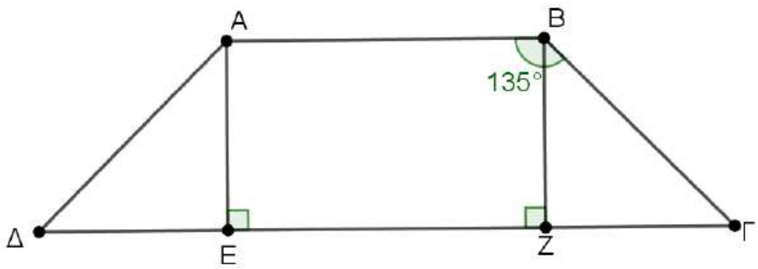
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ>ΑΒ και $\hat{B} = 135^o$. Από τις κορυφές Α και Β φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ΑΕ=ΕΔ=ΒΖ=ΓΖ (Μονάδες 15)

1629-Λύση



α) Το τραπέζιο είναι ισοσκελές, άρα οι γωνίες κάθε βάσης του είναι ίσες.

Επομένως $B\hat{A}\Delta = A\hat{B}\Gamma = 135^o$.

Οι $A\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, άρα είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

$$A\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o \Leftrightarrow 135^o + B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o \Leftrightarrow B\hat{\Gamma}\Delta = 45^o$$

Επιπλέον, $A\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Delta$ ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΓΔ του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ. Άρα $A\hat{\Delta}\Gamma = 45^o$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΓ είναι $\hat{\Gamma} = 45^o$ οπότε από το άθροισμα των γωνιών του βρίσκουμε:

$$Z\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow Z\hat{B}\Gamma + 45^o = 90^o \Leftrightarrow Z\hat{B}\Gamma = 45^o$$

Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ΒΖ = ΖΓ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΔ είναι $\hat{\Delta} = 45^o$ και από το άθροισμα των γωνιών του βρίσκουμε:

$$\Delta\hat{A}E + \hat{\Delta} = 90^o \Leftrightarrow \Delta\hat{A}E + 45^o = 90^o \Leftrightarrow \Delta\hat{A}E = 45^o$$

Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και έχει ΑΕ = ΕΔ (2).

Επίσης τα ύψη του τραπεζίου είναι ίσα, οπότε ΑΕ = ΒΖ (3).

Από (1), (2) και (3) έχουμε ΑΕ = ΕΔ = ΒΖ = ΓΖ.

1630

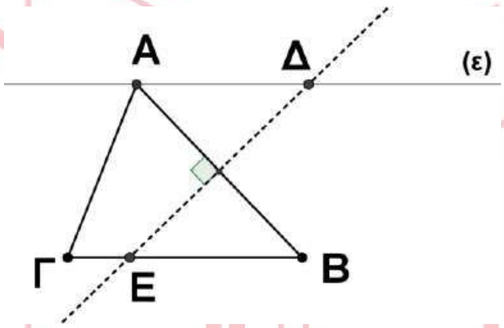
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΓΒ. Φέρουμε από τη κορυφή Α ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την (ε) στο Δ και την ΒΓ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι ΔΑ=ΔΒ και ΕΑ=ΕΒ. (Μονάδες 6)

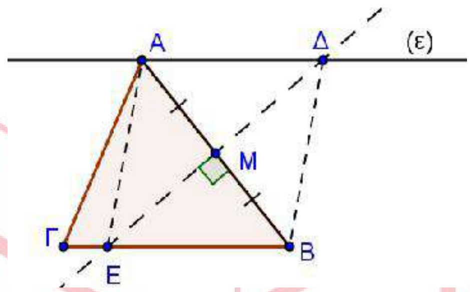
β) Αν Μ το μέσο του ΑΒ, να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)



1630-Λύση

α) Τα σημεία Ε, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ άρα ισαπέχουν από τα σημεία Α και Β, ισχύει δηλαδή ΔΑ = ΔΒ και ΕΑ = ΕΒ.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ έχουν:

ΑΜ = ΜΒ, διότι το Μ είναι μέσο του ΑΒ και

$M\widehat{A}\Delta = M\widehat{B}E$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων (ε), ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ.

Άρα τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ είναι ίσα επειδή έχουν τις υποτείνουσες ίσες και μια οξεία γωνία ίση μία προς μία.

γ) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΜΔ και ΜΕΒ, προκύπτει ότι ΜΔ = ΜΕ (απέναντι από τις ίσες γωνίες $M\widehat{A}\Delta$, $M\widehat{B}E$). Άρα, στο τετράπλευρο ΑΔΒΕ οι διαγώνιοί του διχοτομούνται κάθετα, οπότε είναι ρόμβος.

1632

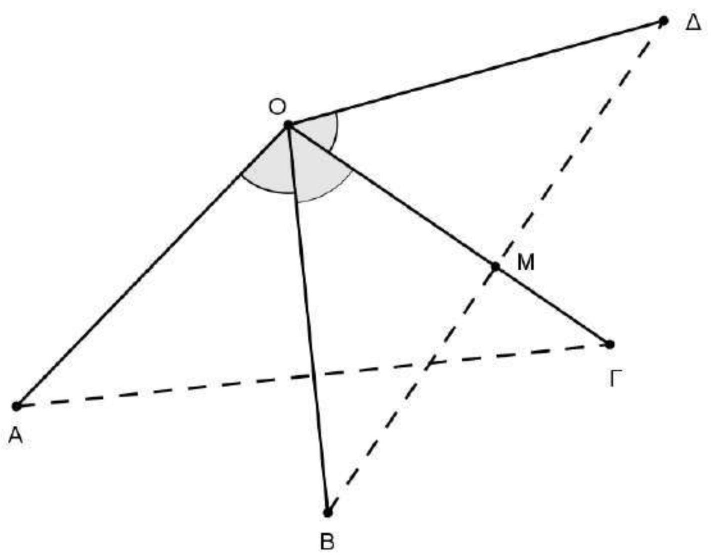
ΘΕΜΑ 2

Αν $A\hat{O}B=B\hat{O}\Gamma=\Gamma\hat{O}\Delta$ και ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ, να αποδείξετε ότι:

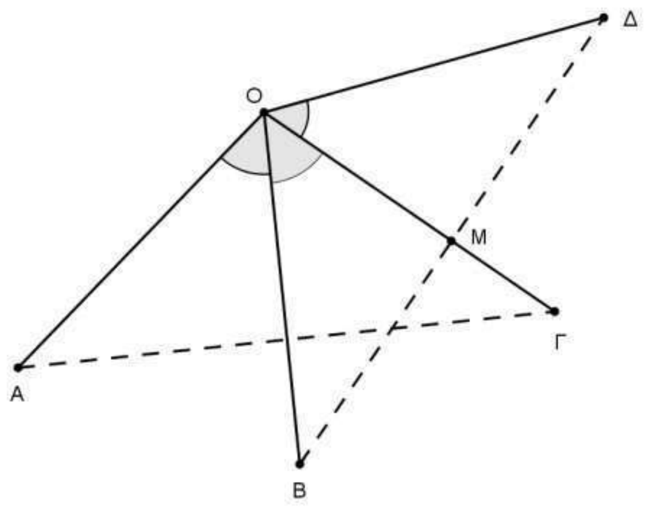
α) ΑΓ=ΒΔ . (Μονάδες 10)

β) Το Μ είναι μέσον της ΒΔ, όπου Μ το σημείο τομής των τμημάτων ΟΓ και ΒΔ.

(Μονάδες 15)



1632-Λύση



α) Έστω ότι $A\widehat{O}B = B\widehat{O}\Gamma = \Gamma\widehat{O}\Delta = \widehat{\omega}$.

Τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΒΟΔ έχουν:

ΟΑ = ΟΒ, από υπόθεση

ΟΓ = ΟΔ, από υπόθεση

$A\widehat{O}\Gamma = B\widehat{O}\Delta$, διότι $A\widehat{O}\Gamma = A\widehat{O}B + B\widehat{O}\Gamma = 2\widehat{\omega}$ και $B\widehat{O}\Delta = B\widehat{O}\Gamma + \Gamma\widehat{O}\Delta = 2\widehat{\omega}$

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΒΟΔ είναι ίσα οπότε έχουν και

ΑΓ = ΒΔ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες ΑΟΓ, ΒΟΔ.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΟΔ η ΟΜ είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του, άρα είναι και διάμεσος του ΒΟΔ. Επομένως το Μ είναι μέσο του ΒΔ.

1634

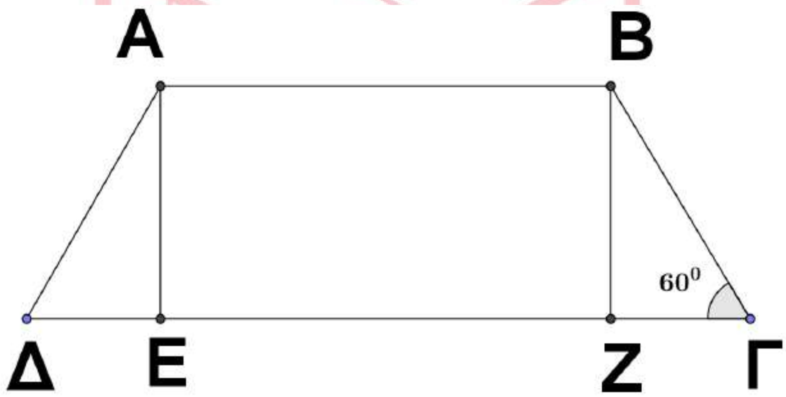
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) , με ΑΒ=6, ΒΓ=4 και $\hat{\Gamma} = 60^0$. Δίνονται επίσης τα ύψη ΑΕ και ΒΖ από τις κορυφές Α και Β αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε τα τρίγωνα ΑΕΔ, ΒΖΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 9)



1634-Λύση

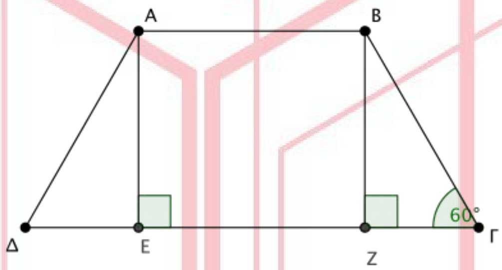
α) Οι γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι ίσες, άρα

$\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma} = 60^o$.

Οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, άρα είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \widehat{B} + 60^o = 180^o \Leftrightarrow \widehat{B} = 120^o$.

Άρα και $\widehat{A} = \widehat{B} = 120^o$ ως γωνίες στη βάση ΑΒ του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ έχουν:

ΑΔ = ΒΓ, διότι το τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) είναι ισοσκελές

$\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma} = 60^o$

Άρα τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα επειδή έχουν ίσες υποτείνουσες και προσκείμενες σ' αυτές οξείες γωνίες ίσες.

γ) Είναι $\widehat{B} = 120^o$ και $A\widehat{B}Z = 90^o$, άρα $Z\widehat{B}\Gamma = \widehat{B} - A\widehat{B}Z = 30^o$.

Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΓ ισχύει ότι: $Z\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Επειδή, τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα, έχουν και ΔΕ = ΖΓ = 2.

Το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο διότι οι γωνίες Ε και Ζ είναι ορθές και

$E\widehat{A}B = 90^0$ διότι οι γωνίες Ε και ΕΑΒ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που τέμνονται από την ΑΕ.

Επομένως ισχύει ότι ΕΖ = ΑΒ = 6.

Οπότε: ΔΓ = ΔΕ + ΕΖ + ΖΓ = 2 + 6 + 2 = 10.

Η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι:

Π = ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ = 6 + 4 + 10 + 4 = 24.

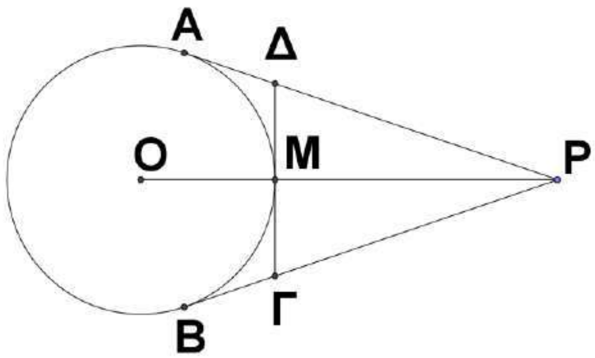
1636

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος κέντρου Ο, και από ένα σημείο Ρ εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Το τμήμα ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

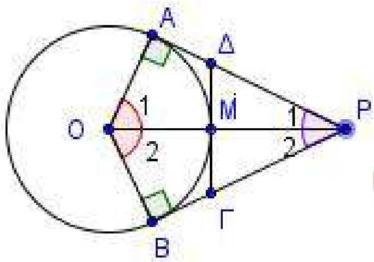
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία ΑΡΒ είναι 40^0 να υπολογίσετε τη γωνία ΑΟΒ. (Μονάδες 12)



1636-Λύση

α) Η ακτίνα ΟΜ έχει άκρο το σημείο επαφής Μ άρα είναι κάθετη στην εφαπτομένη ΔΓ. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων ΡΑ και ΡΒ, δηλαδή την $\text{Α}\widehat{\text{Ρ}}\text{Β}$. Οπότε στο τρίγωνο ΡΓΔ η ΡΜ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



β) Το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου ΟΑΡΒ είναι 360^0. Οπότε:

$\widehat{\text{ΑΟΒ}} + \widehat{\text{Α}} + \widehat{\text{Β}} + \widehat{\text{Ρ}} = 360^0 \Leftrightarrow \widehat{\text{ΑΟΒ}} + 90^0 + 90^0 + 40^0 = 360^0 \Leftrightarrow \widehat{\text{ΑΟΒ}} = 140^0$.

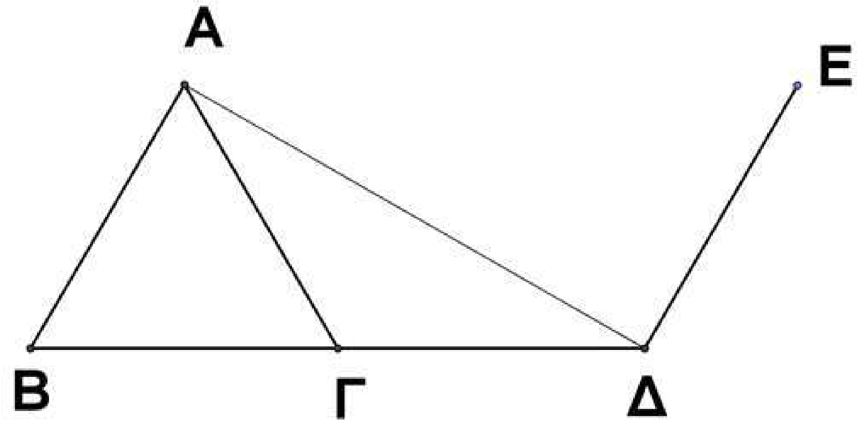
1637

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ . Στην προέκταση της ΒΓ (προς το μέρος του Γ) θεωρούμε τμήμα ΓΔ=ΒΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην ΑΔ στο σημείο της Δ , τέτοιο ώστε ΔΕ=ΒΓ. (Α και Ε στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ΒΔ).

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι ΑΒΔΕ παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



1637-Λύση

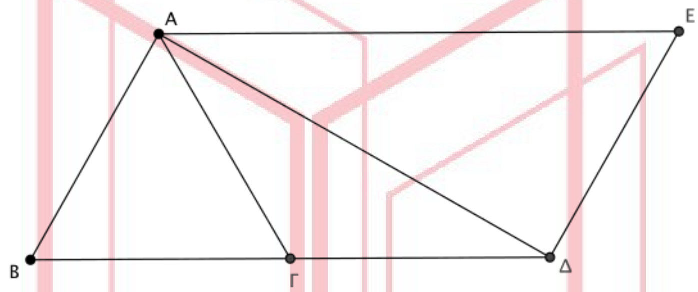
α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $B\widehat{A}\Gamma = A\widehat{B}\Gamma = A\widehat{\Gamma}B = 60^o$. Τότε $A\widehat{\Gamma}\Delta = 180^o - A\widehat{\Gamma}B = 120^o$.

Επειδή ΓΔ = ΒΓ = ΑΓ, το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές, άρα $\Gamma\widehat{A}\Delta = A\widehat{\Delta}\Gamma$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΓΔ έχουμε:

$\Gamma\widehat{A}\Delta + A\widehat{\Gamma}\Delta + A\widehat{\Delta}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow 2A\widehat{\Delta}\Gamma + 120^o = 180^o \Leftrightarrow 2A\widehat{\Delta}\Gamma = 60^o \Leftrightarrow A\widehat{\Delta}\Gamma = 30^o$

άρα και $\Gamma\widehat{A}\Delta = 30^o$. Τότε: $B\widehat{A}\Delta = B\widehat{A}\Gamma + \Gamma\widehat{A}\Delta = 60^o + 30^o = 90^o$.



β) Επειδή, $AB \perp A\Delta$ και $E\Delta \perp A\Delta$ είναι ΑΒ // ΕΔ.

Όμως ΑΒ = ΒΓ = ΕΔ και ΑΒ // ΕΔ, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΔΕ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΔΕ ίσες και παράλληλες και συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο.

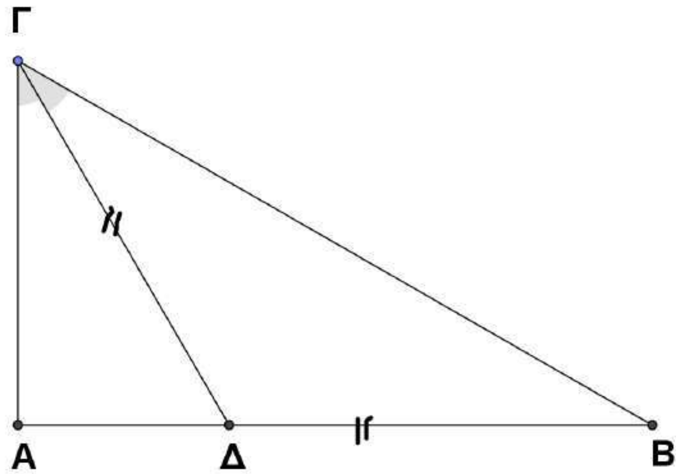
1638

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με $\hat{A} = 90^0$) και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΓΔ=ΔΒ=2cm. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = 30^0$. (Μονάδες 12)

β) ΑΒ=3cm (Μονάδες 13)



1638-Λύση

α) Επειδή ΓΔ = ΔΒ, το τρίγωνο ΓΔΒ είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{B} = \Delta\widehat{\Gamma}B = \frac{\widehat{\Gamma}}{2}$ (1).

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι:

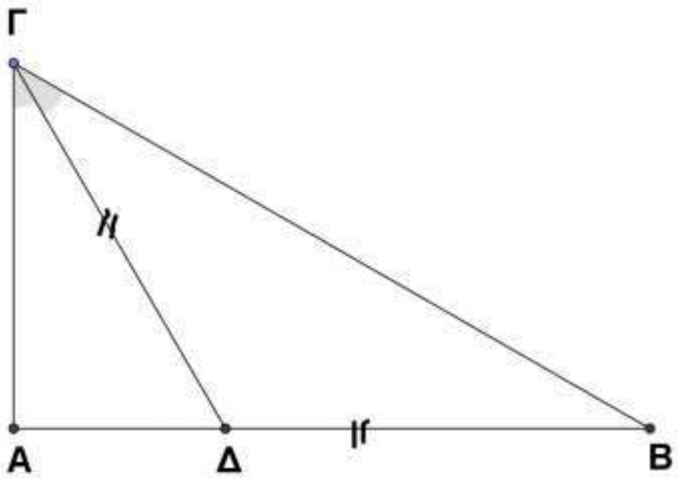
$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^o \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{\widehat{\Gamma}}{2} + \widehat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} + 2\widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 3\widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 60^o$.

Τότε από την (1) είναι $\widehat{B} = \frac{60^o}{2} = 30^o$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ είναι $\Delta\widehat{\Gamma}A = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = 30^o$. Άρα η πλευρά ΑΔ η οποία είναι απέναντι από τη γωνία ΔΓΑ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας ΓΔ, δηλαδή:

$A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{2}{2} = 1$ cm.

Τότε: ΑΒ = ΑΔ + ΔΒ = 1cm + 2cm = 3cm.



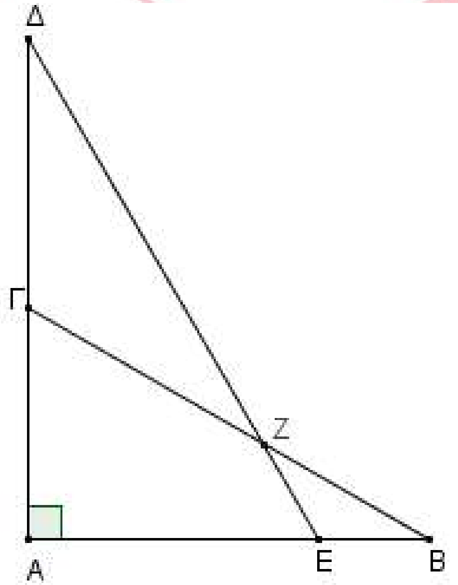
1639

ΘΕΜΑ 2

Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ (γωνία Α ορθή) του παρακάτω σχήματος ισχύει $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Delta} = 30^{\circ}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΕΖΓ. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΖΔ και ΕΒΖ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 12)



1639-Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 90^o + 30^o + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 60^o$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΕ, είναι:

$\widehat{A} + \widehat{\Delta} + A\hat{E}\Delta = 180^o \Leftrightarrow 90^o + 30^o + A\hat{E}\Delta = 180^o \Leftrightarrow A\hat{E}\Delta = 60^o$.

Η γωνία $A\hat{E}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΖΒ, οπότε ισχύει:

$A\hat{E}\Delta = E\hat{Z}B + \widehat{B} \Leftrightarrow 60^o = E\hat{Z}B + 30^o \Leftrightarrow E\hat{Z}B = 30^o$.

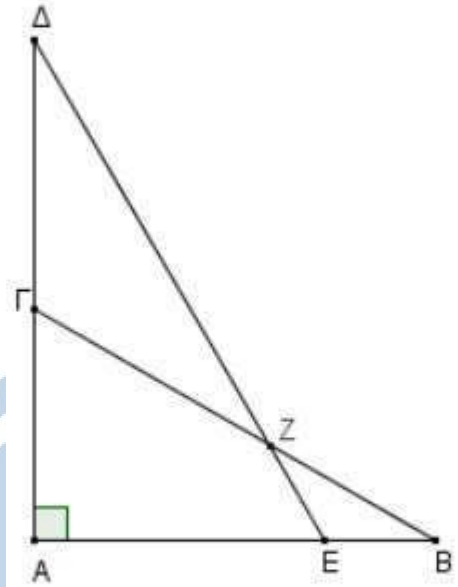
Οι γωνίες $\Gamma\hat{Z}E$ και $E\hat{Z}B$ είναι παραπληρωματικές οπότε ισχύει:

$\Gamma\hat{Z}E + E\hat{Z}B = 180^o \Leftrightarrow \Gamma\hat{Z}E + 30^o = 180^o \Leftrightarrow \Gamma\hat{Z}E = 150^o$.

β) Επειδή $E\hat{Z}B = \widehat{B} = 30^o$, το τρίγωνο ΕΒΖ είναι ισοσκελές.

Επειδή οι γωνίες $E\hat{Z}B$ και $\Gamma\hat{Z}\Delta$ είναι κατακορυφήν, ισχύει ότι $\Gamma\hat{Z}\Delta = E\hat{Z}B = 30^o$.

Άρα $\Gamma\hat{Z}\Delta = \widehat{\Delta}$, οπότε το τρίγωνο ΓΖΔ είναι ισοσκελές.



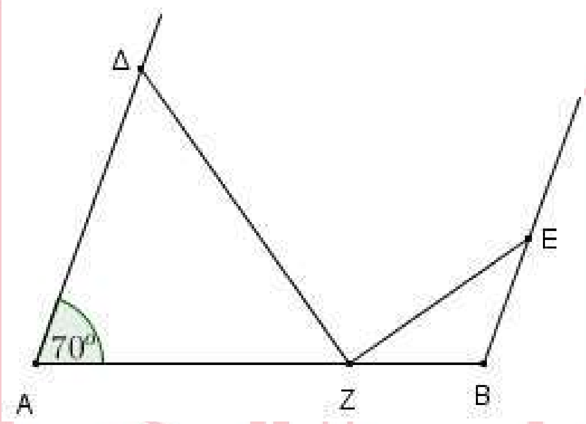
1640

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, οι ΑΔ και ΒΕ είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν ΑΔ=ΑΖ , ΒΕ=ΒΖ και $\hat{A} = 70^o$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΔΖ και ΒΖΕ. (Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{Z}E = 90^o$. (Μονάδες 9)



1640-Λύση

α) Επειδή ΑΔ = ΔΖ, το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές οπότε $\widehat{\Delta} = \Delta\widehat{Z}A$ (1).

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ, και τη σχέση (1) έχουμε:

$\widehat{A} + \widehat{\Delta} + \Delta\widehat{Z}A = 180^o \Leftrightarrow 70^o + 2\widehat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow 2\widehat{\Delta} = 110^o \Leftrightarrow \widehat{\Delta} = 55^o$. Οπότε $\Delta\widehat{Z}A = \widehat{\Delta} = 55^o$.

Οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΕ που τέμνονται από την ΑΒ, οπότε είναι παραπληρωματικές. Άρα:

$\widehat{A} + \widehat{B} = 180^o \Leftrightarrow 70^o + \widehat{B} = 180^o \Leftrightarrow \widehat{B} = 110^o$.

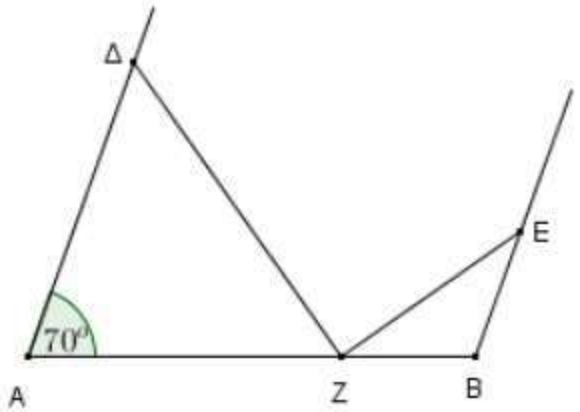
Επειδή, ΒΕ = ΒΖ, το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ισοσκελές, άρα $E\widehat{Z}B = \widehat{E}$ (2).

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΕΖ έχουμε:

$\widehat{B} + \widehat{E} + E\widehat{Z}B = 180^o \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 110^o + 2\widehat{E} = 180^o \Leftrightarrow 2\widehat{E} = 70^o \Leftrightarrow \widehat{E} = 35^o$.

Οπότε $E\widehat{Z}B = \widehat{E} = 35^o$.

β) Ισχύει ότι: $\Delta\widehat{Z}E = 180^o - \Delta\widehat{Z}A - E\widehat{Z}B = 180^o - 55^o - 35^o = 90^o$.



1641

ΘΕΜΑ 2

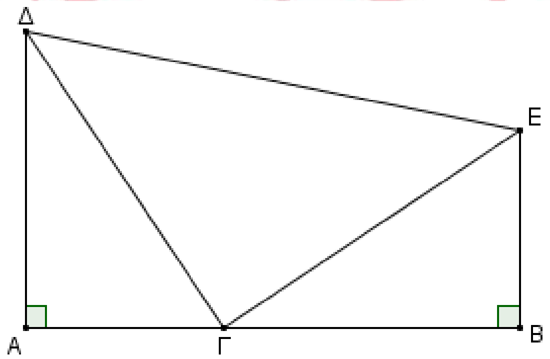
Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες $\hat{A}, \hat{B}$ είναι ορθές και επιπλέον ΑΔ=ΒΓ και ΑΓ=ΒΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία $E\hat{\Gamma}B = 40^o$ τότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(Μονάδες 12)



1641-Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ έχουν:

ΑΔ = ΒΓ, από υπόθεση

ΑΓ = ΒΕ , από υπόθεση

Οπότε τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα αφού έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες .

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΒΓΕ προκύπτει ότι ΔΓ = ΓΕ, οπότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ισοσκελές. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΒΓΕ είναι:

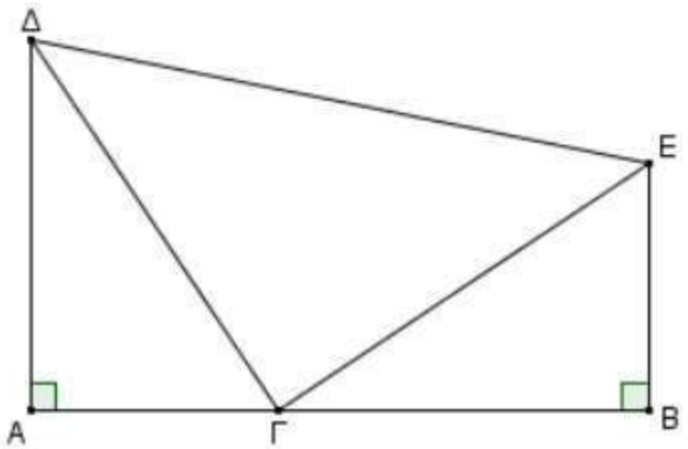
$E\hat{\Gamma}B + \hat{B} + B\hat{E}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow 40^o + 90^o + B\hat{E}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow B\hat{E}\Gamma = 50^o$.

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΒΓΕ προκύπτει ότι $\Delta\hat{\Gamma}A = B\hat{E}\Gamma$ (ως απέναντι των ίσων πλευρών ΑΔ και ΒΓ). Άρα $\Delta\hat{\Gamma}A = B\hat{E}\Gamma = 50^o$.

Ισχύει ότι:

$\Delta\hat{\Gamma}A + \Delta\hat{\Gamma}E + E\hat{\Gamma}B = 180^o \Leftrightarrow 50^o + \Delta\hat{\Gamma}E + 40^o = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{\Gamma}E = 90^o$.

Άρα το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



1643

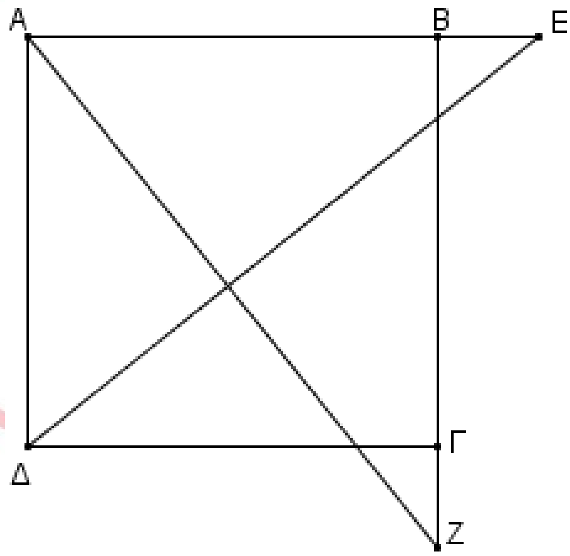
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των ΑΒ (προς το Β) και ΒΓ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε ΒΕ=ΓΖ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Οι γωνίες ΕΔΓ και ΑΖΒ είναι ίσες. (Μονάδες 13)



1643-Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ έχουν:

ΑΔ = ΑΒ, ως πλευρές του τετραγώνου

ΑΕ = ΒΖ , διότι ΑΒ = ΒΓ (πλευρές τετραγώνου) και ΒΕ = ΓΖ οπότε ΑΒ + ΒΕ = ΒΓ + ΓΖ $\Leftrightarrow$

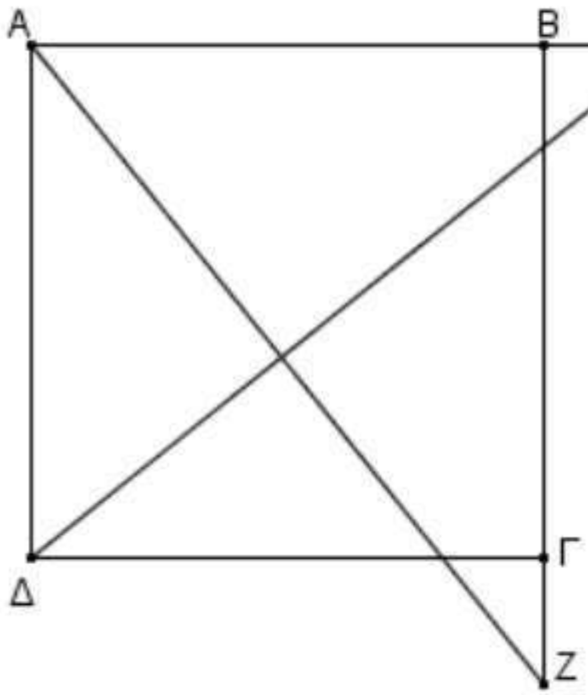
ΑΕ = ΒΖ.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ είναι ίσα αφού έχουν δυο ομόλογες πλευρές τους ίσες.

β) Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι $Α\hat{Ε}Δ = Α\hat{Ζ}Β$ (1) επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΑΒ. Ισχύει επίσης ότι:

$Α\hat{Ε}Δ = Ε\hat{Δ}Γ$ (2), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΕ.

Από (1), (2) προκύπτει ότι $Α\hat{Ζ}Β = Ε\hat{Δ}Γ$.



1646

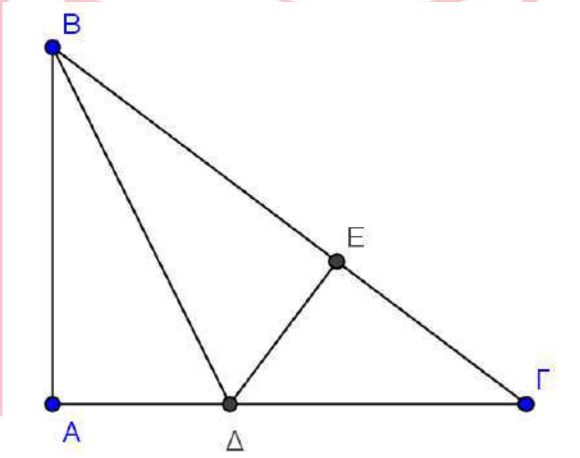
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α. Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, η ΔΕ είναι κάθετη στην ΒΓ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας Β. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ=ΔΕ (Μονάδες 8)

β) ΑΔ < ΔΓ (Μονάδες 9)

γ) ΑΓ>ΑΒ (Μονάδες 8)

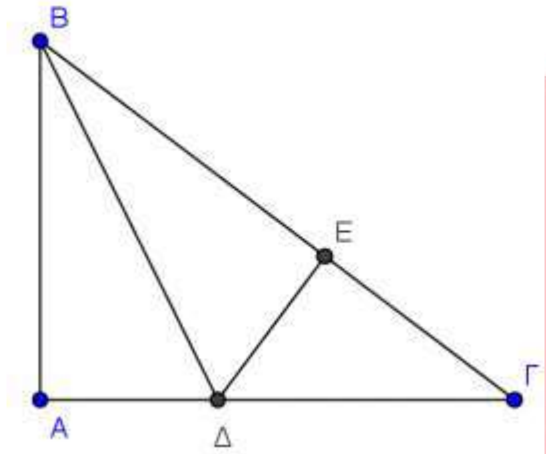


1646-Λύση

α) Το σημείο Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας Β άρα ισαπέχει από τις πλευρές ΒΑ, ΒΓ της γωνίας αυτής. Οπότε ΑΔ = ΔΕ αφού ΑΔ $\perp$ ΑΒ και ΔΕ $\perp$ ΒΓ.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ η ΔΓ είναι απέναντι από την ορθή γωνία Ε, άρα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου. Οπότε ΔΓ > ΔΕ. Επειδή ΑΔ = ΔΕ, προκύπτει ότι: ΑΔ < ΔΓ.

γ) Γνωρίζουμε ότι σ’ ένα τρίγωνο απέναντι από άνισες γωνίες βρίσκονται ομοίως άνισες πλευρές. Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\widehat{\Gamma} < \widehat{B}$ οπότε ΑΒ < ΑΓ.



1648

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το Α) θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΔ = ΑΕ.

Να αποδείξετε ότι:

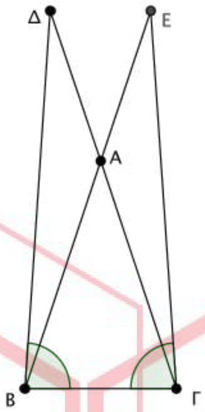
α) ΒΕ = ΓΔ (Μονάδες 6)

β) ΒΔ = ΓΕ (Μονάδες 10)

γ) $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$ (Μονάδες 9)

1648-Λύση

α) Επειδή ΑΒ = ΑΓ και ΑΕ = ΑΔ είναι ΑΒ + ΑΕ = ΑΓ + ΑΔ ⇔ ΒΕ = ΓΔ.



β) Τα τρίγωνα ΔΒΑ και ΕΑΓ έχουν:

ΑΒ = ΑΓ, από υπόθεση

ΑΔ = ΑΓ, από υπόθεση

$\Delta\widehat{A}B$ = $E\widehat{A}\Gamma$, ως κατακορυφήν.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΔΒΑ και ΕΑΓ είναι ίσα οπότε ΒΔ = ΓΕ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Delta\widehat{A}B$, $E\widehat{A}\Gamma$.

γ) Τα τρίγωνα ΔΒΑ και ΕΑΓ είναι ίσα οπότε: $\Delta\widehat{B}A = E\widehat{\Gamma}A$ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΑΕ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές συνεπώς: $\Gamma\widehat{B}A = B\widehat{\Gamma}A$.

Άρα $\Delta\widehat{B}A + \Gamma\widehat{B}A = E\widehat{\Gamma}A$+ $B\widehat{\Gamma}A$ ή $\Delta\widehat{B}\Gamma$ = $E\widehat{\Gamma}B$.

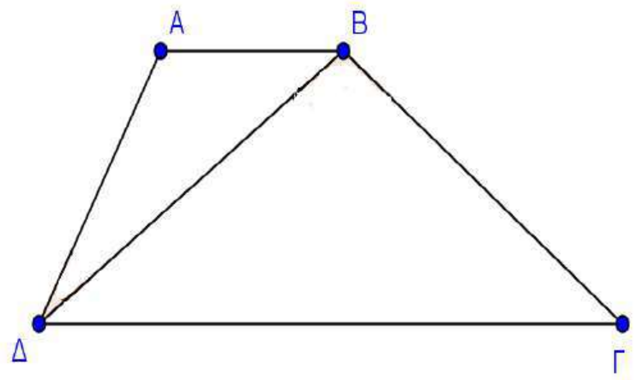
1650

ΘΕΜΑ 2

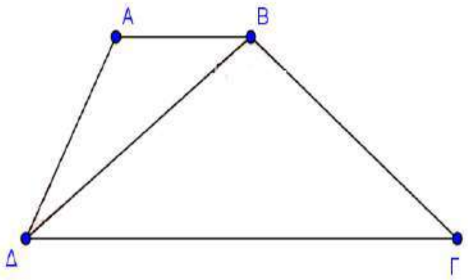
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΒΔ = ΒΓ. Αν $\Delta\hat{B}\Gamma = 110^o$ και $A\hat{\Delta}B = 25^o$ να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία Γ. (Μονάδες 11)

β) Τη γωνία Α. (Μονάδες 14)



1650-Λύση



α) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές με ΒΔ = ΒΓ, άρα $B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Gamma}$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΔΓ έχουμε:

$B\hat{\Delta}\Gamma + \hat{\Gamma} + \Delta\hat{B}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + 110^o = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 70^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 35^o$

β) Είναι $B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Gamma} = 35^o$ οπότε $A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{\Delta}B + B\hat{\Delta}\Gamma = 25^o + 35^o = 60^o$

Οι γωνίες $\hat{A}$ και $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ και είναι παραπληρωματικές, δηλαδή

$\hat{A} + A\hat{\Delta}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} + 60^o = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} = 120^o$

1651

ΘΕΜΑ 2

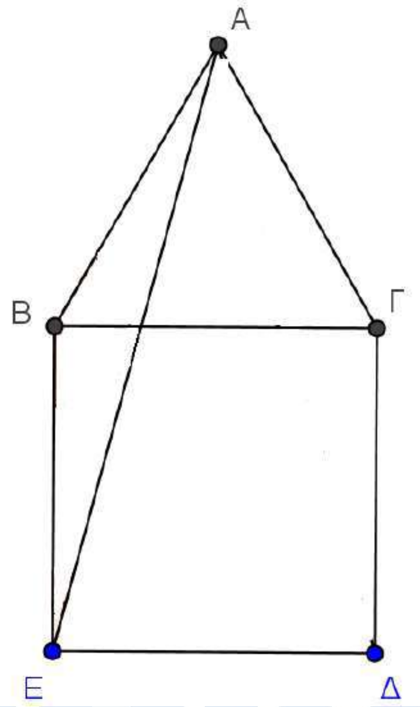
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες

i. $A\hat{B}E$ (Μονάδες 8)

ii. $B\hat{E}A$ (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)



1651-Λύση

α) i. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο είναι $A\hat{B}\Gamma = 60^o$.

Επίσης $E\hat{B}\Gamma = 90^o$ διότι το ΒΓΔΕ είναι τετράγωνο.

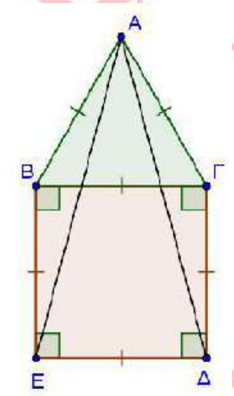
Τότε $A\hat{B}E = A\hat{B}\Gamma + E\hat{B}\Gamma = 60^o + 90^o = 150^o$

ii. Επειδή ΑΒ = ΒΓ=ΒΕ, το τρίγωνο ΒΕΑ είναι ισοσκελές

οπότε $B\hat{E}A = B\hat{A}E$ (1).

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΕΑ βρίσκουμε:

$B\hat{E}A + B\hat{A}E + A\hat{B}E = 180^o \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2B\hat{E}A + 150^o = 180^o \Leftrightarrow 2B\hat{E}A = 30^o \Leftrightarrow B\hat{E}A = 15^o$



β) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:

- ΑΒ = ΑΓ, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ
- ΒΕ = ΓΔ, ως πλευρές του τετραγώνου ΒΓΔΕ
- $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}B + B\hat{\Gamma}\Delta = 60^o + 90^o = 150^o = A\hat{B}E$

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΑΕ = ΑΔ, άρα το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

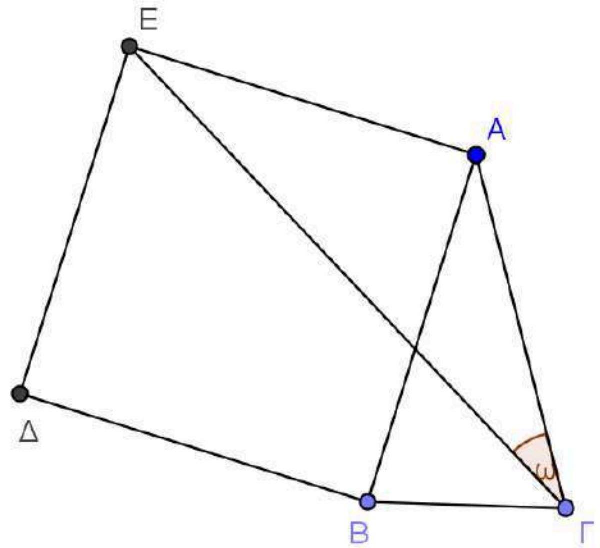
1652

ΘΕΜΑ 2

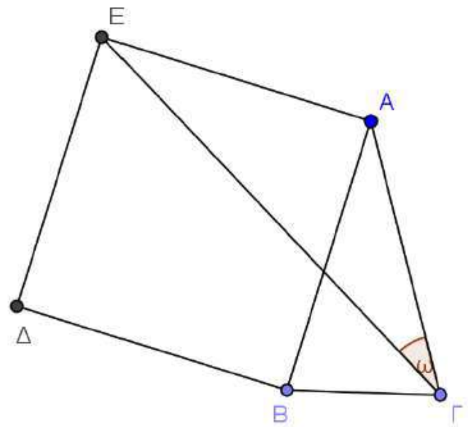
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΑΒΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) $2\cdot \mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = 90^o - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$. (Μονάδες 15)



1652-Λύση



α) Είναι ΑΒ = ΑΕ ως πλευρές τετραγώνου και ΑΒ = ΑΓ από υπόθεση. Άρα ΑΕ = ΑΓ, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές ισχύει ότι $A\hat{E}\Gamma = E\hat{\Gamma}A$ (1).

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΕΓ έχουμε:

$E\hat{A}\Gamma + A\hat{E}\Gamma + E\hat{\Gamma}A = 180^o \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2E\hat{\Gamma}A + E\hat{A}B + B\hat{A}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow 2E\hat{\Gamma}A + 90^o + B\hat{A}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow$

$2E\hat{\Gamma}A = 90^o - B\hat{A}\Gamma$

1653

ΘΕΜΑ 2

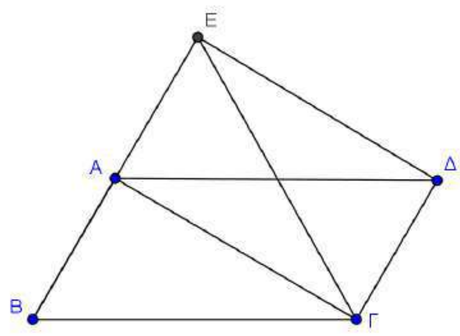
Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΑΓΔΕ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

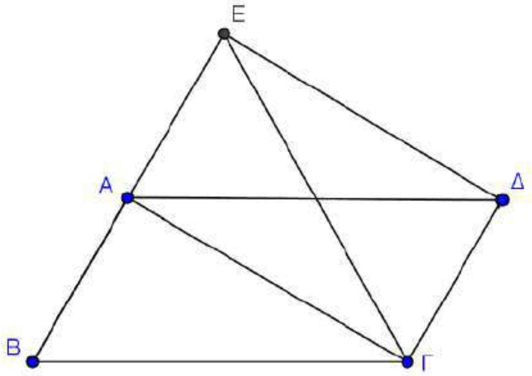
α) Το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$ (Μονάδες 8)



1653-Λύση



α) Είναι ΑΒ = ΓΔ (1) και ΑΒ // ΓΔ (2) ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Επίσης ΑΕ = ΓΔ (3) και ΑΕ // ΓΔ (4) ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΓΔΕ.

Άρα από (2), (4) προκύπτει ότι ΑΒ // ΑΕ άρα τα Β, Α και Ε είναι συνευθειακά και επειδή ΑΒ = ΑΕ, λόγω των (1), (3), το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ.

β) Είναι ΑΔ = ΒΓ (5) διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Επίσης ΑΔ = ΓΕ (6) διότι οι διαγώνιες του ορθογωνίου είναι ίσες. Άρα από (5), (6) βρίσκουμε ΒΓ = ΓΕ, οπότε το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές.

γ) Είναι $B\hat{\Gamma}A = \Gamma\hat{A}\Delta$ (7), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ και $A\hat{\Delta}E = \Gamma\hat{A}\Delta$ (8) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΓ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΔ. Άρα από (7), (8) ισχύει $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$.

1654

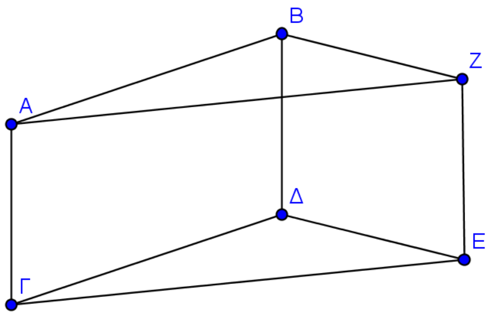
ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΓ και ΒΔΕΖ.

Να αποδείξετε ότι:

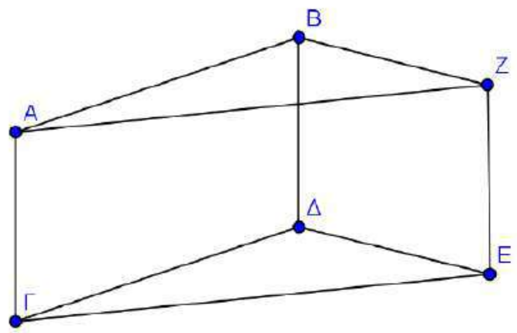
α) Το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) $A\hat{B}Z = \Gamma\hat{\Delta}E$. (Μονάδες 12)



1654-Λύση

α) Το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι απέναντι πλευρές του ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες και παράλληλες. Επίσης, το ΒΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι απέναντι πλευρές του ΒΔ και ΖΕ είναι ίσες και παράλληλες. Άρα οι ΑΓ και ΖΕ είναι ίσες και παράλληλες, συνεπώς και το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.



β) Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΓΔΕ έχουν:

- ΑΒ = ΓΔ, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΔΓ
- ΒΖ = ΔΕ, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΒΖΕΔ
- ΑΖ = ΓΕ, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΖΕΓ

Από το κριτήριο Π-Π Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΓΔΕ είναι ίσα, οπότε έχουν και $A\hat{B}Z = \Gamma\hat{\Delta}E$.

1655

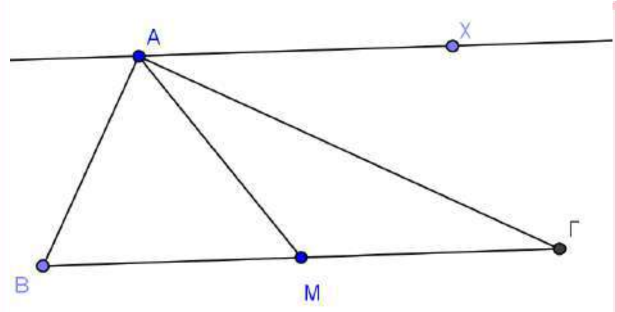
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε ημιευθεία Αx παράλληλη στη ΒΓ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΜ με το σημείο Γ).

Να αποδείξετε ότι:

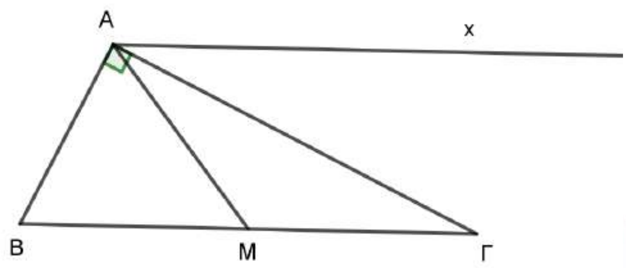
α) $M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$ (Μονάδες 12)

β) η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑx. (Μονάδες 13)



1655-Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα ισχύει ότι ΑΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$ = ΜΓ.



Επομένως το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές, οπότε άρα Μ$\widehat{Α}$Γ = Μ$\widehat{Γ}$Α (1).

β) Είναι Μ$\widehat{Γ}$Α = Γ$\widehat{Α}$x (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων Αx, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ. Από τις (1), (2) βρίσκουμε: Μ$\widehat{Α}$Γ = Γ$\widehat{Α}$x, άρα η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας Μ$\widehat{Α}$x.

1656

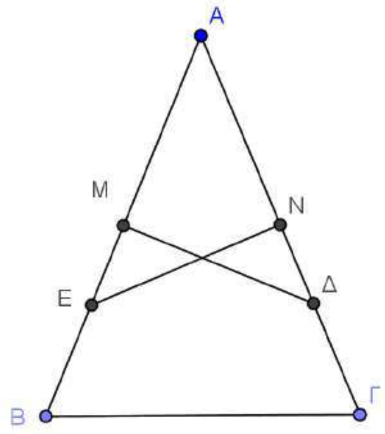
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΜΔ, ΝΕ οι μεσοκάθετοι των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.

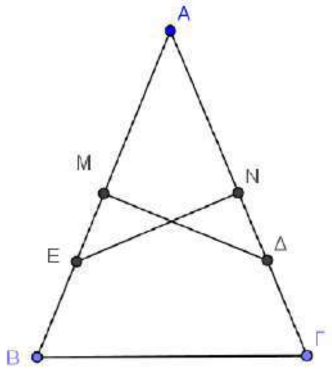
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν ΜΔ = ΝΕ τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Αν ΑΒ = ΑΓ τότε ΜΔ = ΝΕ (Μονάδες 13)



1656-Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΕΝ έχουν:

- ΜΔ = ΝΕ
- $\hat{A}$ κοινή γωνία

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και ισχύει ΑΜ = ΑΝ γιατί έχουν τις προσκείμενες γωνίες τους ίσες μία προς μία, άρα $\frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$ οπότε ΑΒ = ΑΓ

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΕΝ έχουν:

- ΑΜ = ΑΝ, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ
- $\hat{A}$ κοινή γωνία

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν ΜΔ= ΝΕ επειδή έχουν την απέναντι γωνία τους $\hat{A}$ κοινή.

1657

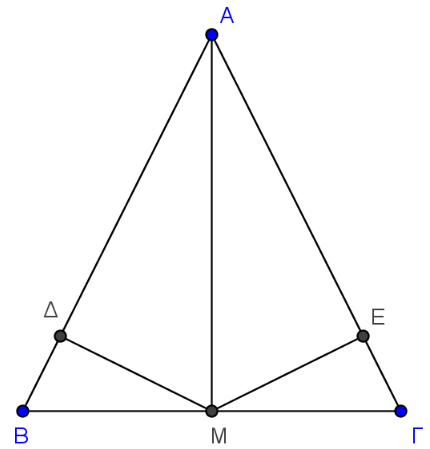
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

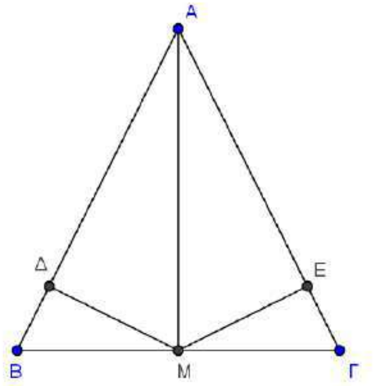
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν ΜΔ = ΜΕ, τότε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν ΑΒ = ΑΓ και Μ μέσο του ΒΓ, τότε ΜΔ = ΜΕ. (Μονάδες 12)



1657-Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ έχουν:

- ΜΑ κοινή πλευρά
- ΜΔ = ΜΕ

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή ΑΒ = ΑΓ, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ έχουν:

- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, ως γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου
- ΜΒ = ΜΓ, αφού Μ μέσο του ΒΓ

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν ΜΔ= ΜΕ, αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$.

1658

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

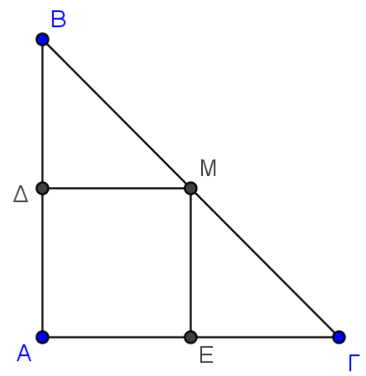
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν ΜΔ = ΜΕ τότε:

i. τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

ii. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) Αν ΑΒ = ΑΓ τότε ΜΔ = ΜΕ. (Μονάδες 8)

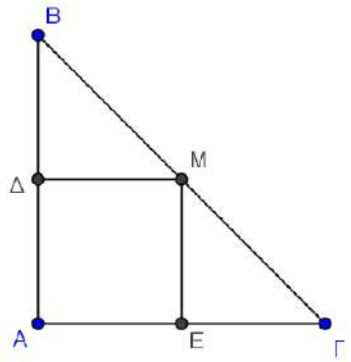


1658-Λύση

α) i.Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:

- ΜΔ = ΜΕ
- ΜΒ = ΜΓ, διότι Μ μέσο της ΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα.



ii. Από τα ίσα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ προκύπτει ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΜΔ και ΜΕ. Άρα ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:

ΜΒ = ΜΓ, διότι Μ μέσο της ΒΓ

$\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα, οπότε ισχύει ΜΔ = ΜΕ ως απέναντι πλευρές στις ίσες γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

1659

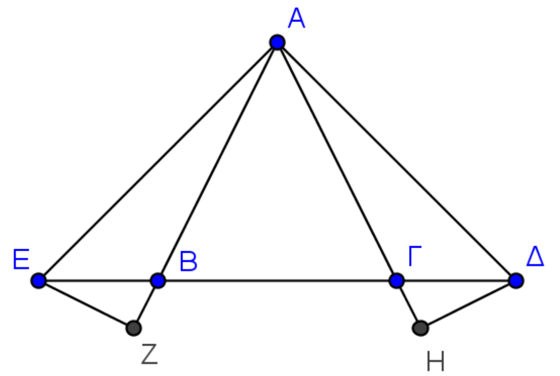
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΓΔ = ΒΕ. Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην ευθεία ΑΓ και από το Ε φέρουμε ΕΖ κάθετη στην ευθεία ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ = ΑΕ (Μονάδες 12)

β) ΕΖ = ΔΗ (Μονάδες 13)

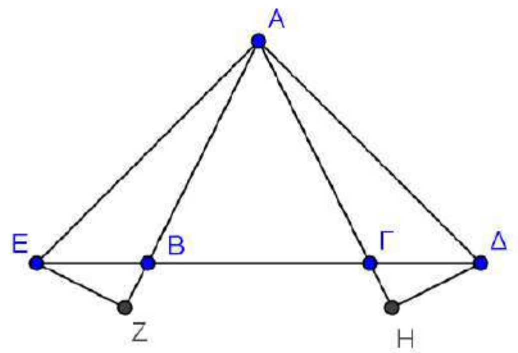


1659-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:

- ΑΒ = ΑΓ από την υπόθεση,
- ΓΔ = ΒΕ από την υπόθεση,
- Α$\hat{B}$Ε = Α$\hat{Γ}$Δ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα, οπότε έχουν και ΑΔ=ΑΕ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες Α$\hat{B}$Ε και Α$\hat{Γ}$Δ.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΒΖ και ΓΗΔ έχουν:

- ΓΔ = ΒΕ από την υπόθεση,
- Ε$\hat{B}$Ζ =Δ$\hat{Γ}$Η ως κατακορυφήν με τις ίσες γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα ΕΒΖ και ΓΗΔ είναι ίσα οπότε ΕΖ =ΔΗ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες Ε$\hat{B}$Ζ =Δ$\hat{Γ}$Η.

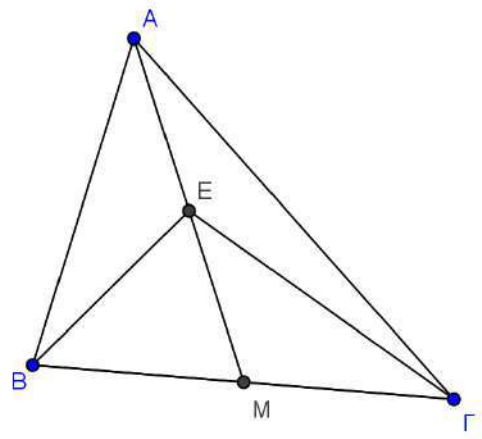
1660

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου του ΑΜ. Αν ΒΓ = 2 ΒΕ να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\Gamma$ (Μονάδες 12)

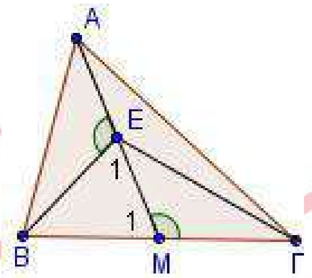
β) ΑΒ = ΕΓ . (Μονάδες 13)



1660-Λύση

α) Είναι ΒΜ = $\frac{\text{ΒΓ}}{2} = \frac{2\text{ΒΕ}}{2}$ = ΒΕ, άρα το τρίγωνο ΒΕΜ είναι ισοσκελές και έχει $\hat{\text{Ε}}_1 = \hat{\text{Μ}}_1$.

Όμως $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β} = 180^o - \hat{\text{Ε}}_1$ και $\text{Ε}\hat{\text{Μ}}\text{Γ} = 180^o - \hat{\text{Μ}}_1$, άρα $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β} = \text{Ε}\hat{\text{Μ}}\text{Γ}$.



β) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΕΜΓ έχουν:

- ΑΕ = ΕΜ, διότι Ε μέσο του ΑΜ
- ΒΕ = ΒΜ = ΜΓ
- $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β} = \text{Ε}\hat{\text{Μ}}\text{Γ}$
- Από το κριτήριο Π-Γ-Π συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΕΜΓ είναι ίσα, οπότε έχουν και ΑΒ = ΕΓ ως απέναντι πλευρές στις ίσες γωνίες $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β} = \text{Ε}\hat{\text{Μ}}\text{Γ}$.

1661

ΘΕΜΑ 2

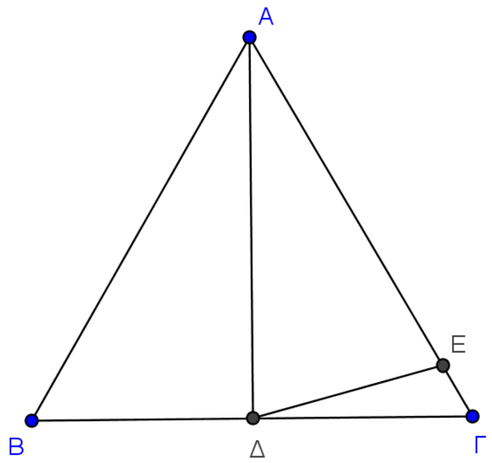
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και η διάμεσός του ΑΔ τέτοια ώστε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 30^o$.

Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΕ.

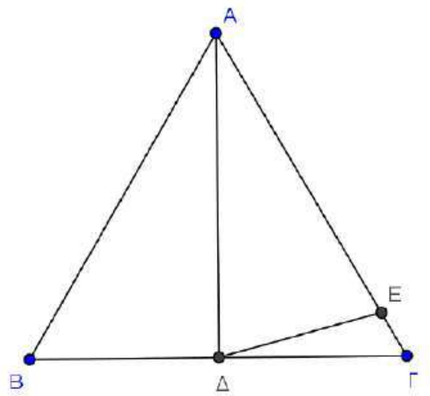
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ. (Μονάδες 8)



1661-Λύση



α) Επειδή ΑΒ =ΑΓ, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, άρα η διάμεσος ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου.

Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ, είναι $Δ\hat{Α}Γ = Β\hat{Α}Δ = 30^o$, οπότε $\hat{Α} = 60^o$.

Ισχύει ότι:

$\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow 60^o + \hat{Β} + \hat{Β} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{Β} = 120^o \Leftrightarrow \hat{Β} = 60^o$

Για το τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{Α} = \hat{Β} = \hat{Γ} = 60^o$, άρα είναι ισόπλευρο.

β) Επειδή ΑΔ=ΑΕ το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, οπότε $Α\hat{Δ}Ε = Α\hat{Ε}Δ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ, έχουμε:

$Δ\hat{Α}Γ + Α\hat{Δ}Ε + Α\hat{Ε}Δ = 180^o \Leftrightarrow 30^o + 2Α\hat{Δ}Ε = 180^o \Leftrightarrow Α\hat{Δ}Ε = 75^o = Α\hat{Ε}Δ$

γ) $Ε\hat{Δ}Γ = Α\hat{Δ}Γ - Α\hat{Δ}Ε = 90^o - 75^o = 15^o$

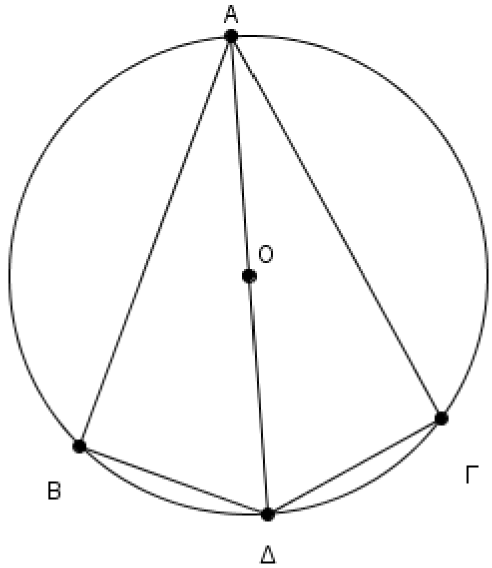
1663

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Αν η διάμετρος ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ, να αποδείξετε ότι:

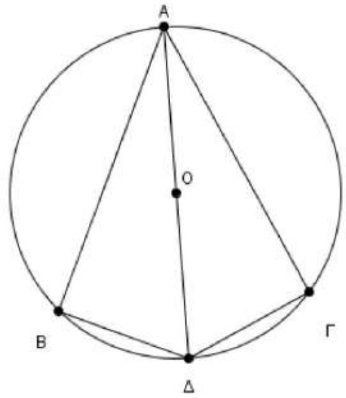
α) Τα τόξα ΒΔ και ΔΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



1663-Λύση

α) Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ είναι $B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$. Οι ίσες γωνίες $B\hat{A}\Delta$ και $\Delta\hat{A}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στα τόξα $\overset{\frown}{B\Delta}$ και $\overset{\frown}{\Delta\Gamma}$, οπότε και τα τόξα αυτά είναι ίσα.



β) Οι εγγεγραμμένες γωνίες $A\hat{B}\Delta$ και $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ορθές διότι βαίνουν σε ημικύκλιο.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν:

- ΑΔ κοινή πλευρά
- $B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$, διότι ΑΔ διχοτόμος της $B\hat{A}\Gamma$.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα

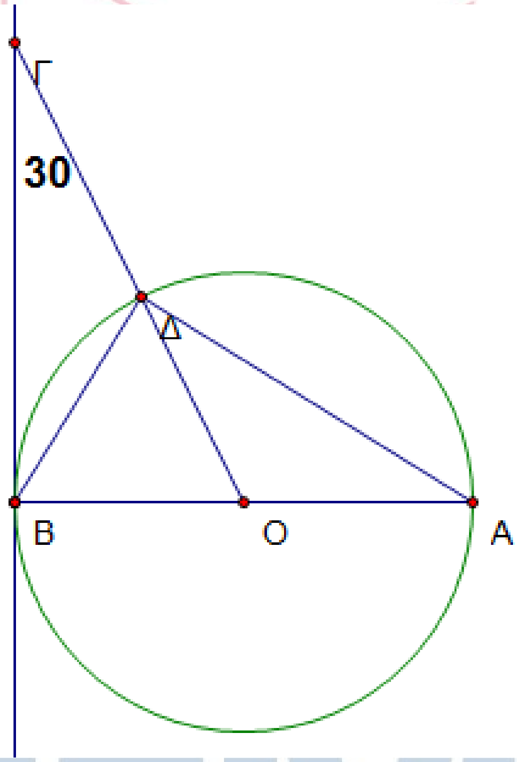
1665

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε κύκλο (Ο, ρ) και διάμετρό του ΑΒ. Στην εφαπτομένη του κύκλου στο Β θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε, η γωνία ΒΓΟ να είναι ίση με 30^{o}. Αν η ΟΓ τέμνει τον κύκλο στο Δ να αποδείξετε ότι:

α) $O\Gamma = 2OA$. (Μονάδες 12)

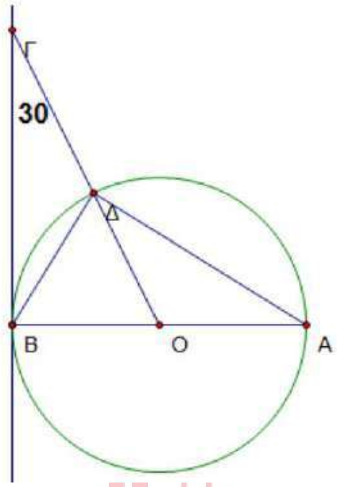
β) $B\Gamma = A\Delta$. (Μονάδες 13)



1665-Λύση

α) Η εφαπτομένη ΒΓ είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΒ στο σημείο επαφής, άρα $\Gamma\hat{B}O = 90^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΓ είναι $\hat{\Gamma} = 30^o$, άρα $OB = \frac{O\Gamma}{2} \Leftrightarrow O\Gamma = 2OB$ επειδή $OB = OA = \rho$ έχουμε $O\Gamma = 2OA$



β) Είναι $B\hat{\Delta}A = 90^o$ διότι είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΒΓ και ΑΒΔ έχουν:

- $O\Gamma = AB$, διότι $O\Gamma = 2OA = 2\rho$ και $AB = 2\rho$
- $B\hat{\Gamma}O = B\hat{A}\Delta = 30^o$

$\Delta\hat{O}B = 60^\circ$ η οποία είναι εξωτερική στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΟΑ (ΟΑ=ΟΔ) οπότε

$B\hat{A}\Delta = \frac{\Delta\hat{O}B}{2} = 30^\circ$

- Άρα τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΑΒΔ είναι ίσα οπότε ισχύει $B\Gamma = A\Delta$ επειδή έχουν τις προσκείμενες γωνίες τους ίσες μία προς μία.

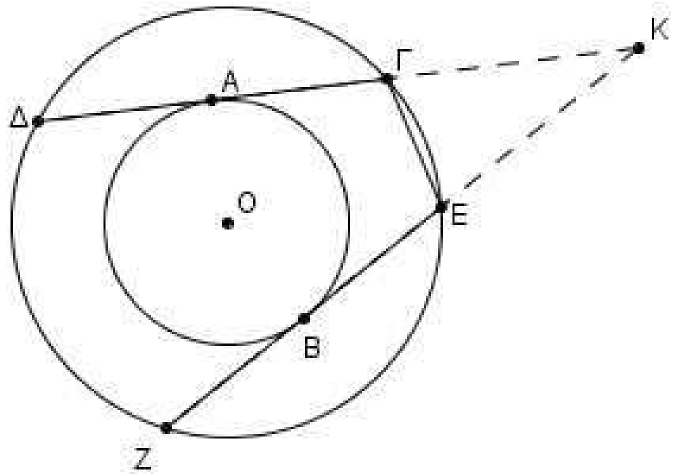
1667

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και ακτίνες ρ και R (ρ<R). Οι χορδές ΔΓ και ΖΕ του κύκλου (O,R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι ΔΓ=ΖΕ. (12 Μονάδες)

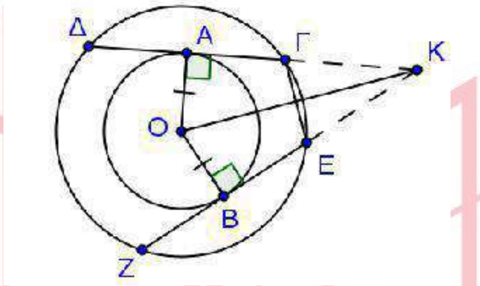
β) Αν οι ΔΓ και ΖΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΕΓ είναι ισοσκελές. (13 Μονάδες)



1667-Λύση

α) Οι ακτίνες ΟΑ και ΟΒ του κύκλου (Ο, ρ) καταλήγουν στα σημεία επαφής με τις εφαπτομένες. Τότε ΟΑ ⊥ ΓΔ και ΟΒ ⊥ ΕΖ.

Τα ΟΑ, ΟΒ είναι αποστήματα των χορδών ΓΔ και ΕΖ στον κύκλο (O,R) και είναι ίσα αφού ΟΑ = ΟΒ = ρ. Άρα και οι χορδές ΓΔ και ΕΖ είναι ίσες



β) Είναι ΚΑ = ΚΒ (1) ως εφαπτόμενα τμήματα από το Κ προς τον κύκλο (Ο, ρ). Επειδή τα ΟΑ, ΟΒ είναι αποστήματα των χορδών ΓΔ και ΕΖ, τα σημεία Α και Β είναι μέσα των χορδών και επειδή οι χορδές είναι ίσες, είναι και ΑΓ = ΒΕ (2).

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1), (2) και βρίσκουμε: ΚΑ – ΑΓ= ΚΒ – ΒΕ οπότε ΚΓ= ΚΕ.

Άρα το τρίγωνο ΚΓΕ είναι ισοσκελές.

1668

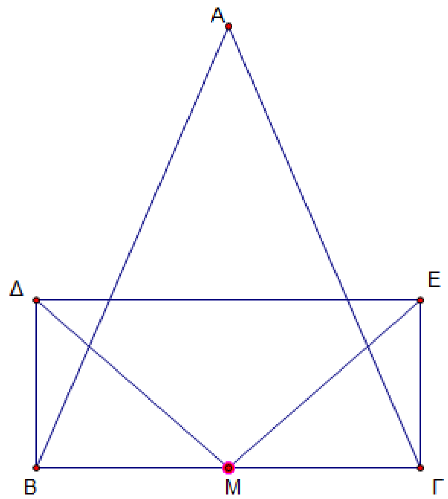
ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Στα σημεία Β και Γ φέρουμε κάθετες στη ΒΓ προς το ίδιο μέρος, και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, τέτοια ώστε $M\Delta = ME$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

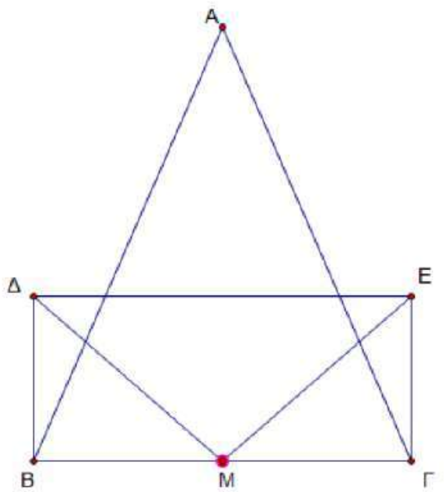


1668-Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΓΕ έχουν:

- ΜΒ = ΜΓ, διότι το Μ είναι μέσο του ΒΓ
- ΜΔ = ΜΕ, από υπόθεση.

Άρα τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΓΕ είναι ίσα. Επομένως ΒΔ = ΓΕ αφού οι άλλες δύο πλευρές των ίσων τριγώνων είναι ίσες μία προς μία.



β)Είναι ΒΔ $\perp$ ΒΓ και ΓΕ $\perp$ ΒΓ άρα ΒΔ // ΓΕ. Ισχύει ακόμη ΒΔ = ΓΕ, διότι τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΓΕ είναι ίσα. Άρα στο τετράπλευρο ΒΔΕΓ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $\Delta\hat{B}\Gamma = 90^o$, τότε το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ορθογώνιο.

1669

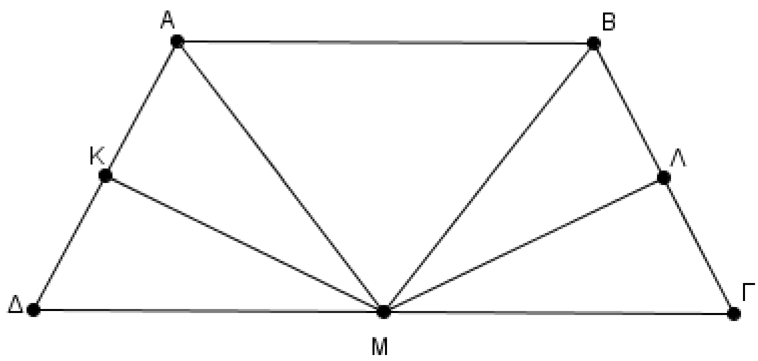
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΔΓ και τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

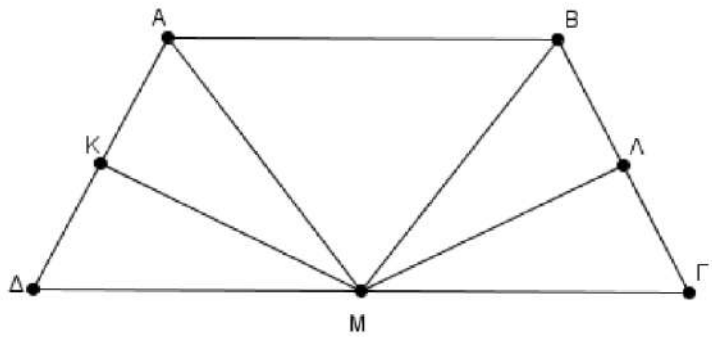
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΚΜ και ΛΜ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Τα τμήματα ΑΜ και ΒΜ είναι ίσα. (Μονάδες 13)



1669-Λύση



α) Τα τρίγωνα ΚΔΜ και ΛΜΓ έχουν:

- ΔΜ = ΜΓ διότι Μ μέσο της ΓΔ
- ΚΔ = ΛΓ ως μισά των ίσων πλευρών ΑΔ και ΒΓ
- $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma}$ ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τραπεζίου.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΚΜ = ΛΜ ως απέναντι πλευρές από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Delta}$ και $\widehat{\Gamma}$.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΜΒΓ έχουν:

- ΜΔ = ΜΓ
- $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma}$
- ΑΔ = ΒΓ

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΜΒΓ είναι ίσα, οπότε ισχύει ΑΜ = ΒΜ ως απέναντι πλευρές από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Delta}$ και $\widehat{\Gamma}$.

1670

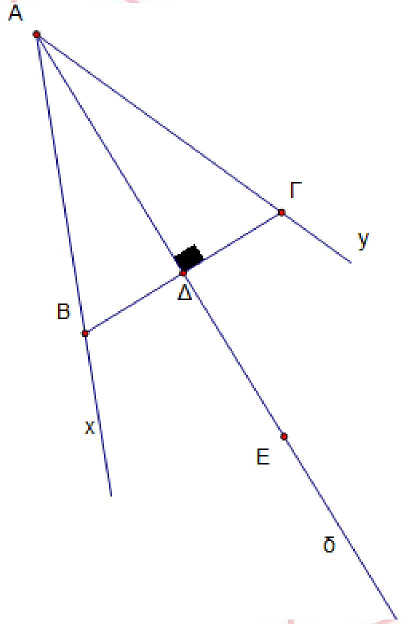
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της Αδ. Από τυχαίο σημείο Β της Αx φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την Αδ στο Δ και την Αy στο Γ.

Να αποδείξετε ότι :

α) Τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

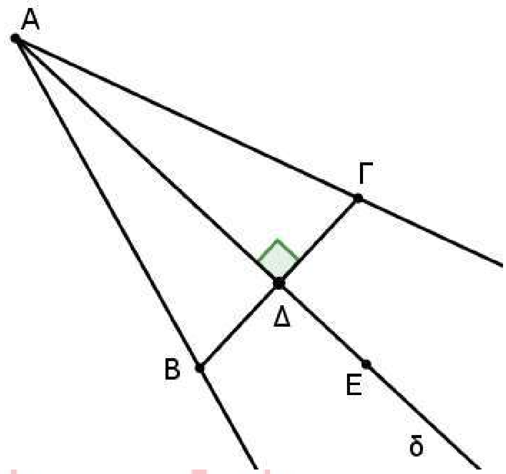
β) Το τυχαίο σημείο Ε της Αδ ισαπέχει από τα Β και Γ. (Μονάδες 13)



1670-Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ. Άρα ΑΒ = ΑΓ

β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές οπότε η ΑΔ, εκτός από διχοτόμος και ύψος, είναι και διάμεσος, δηλαδή η ΑΔ είναι μεσοκάθετη της ΒΓ. Το σημείο Ε ανήκει στη μεσοκάθετη του ΒΓ άρα ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ.



1675

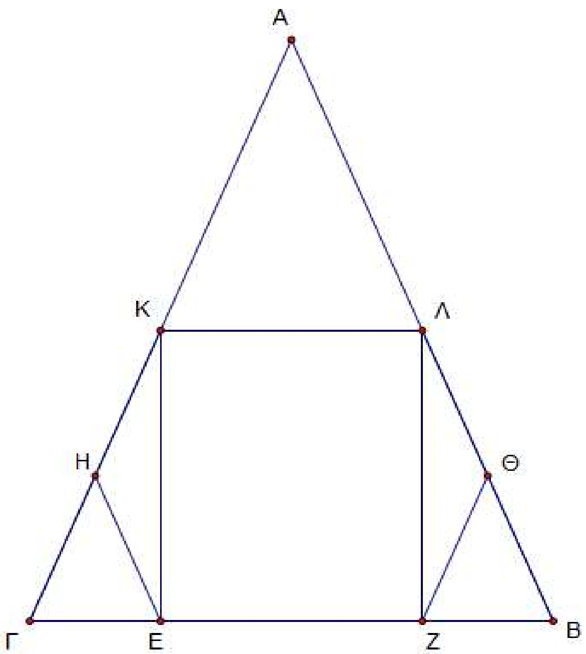
ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Από τα μέσα Κ και Λ των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΚΕ και ΛΖ στην πλευρά ΒΓ.

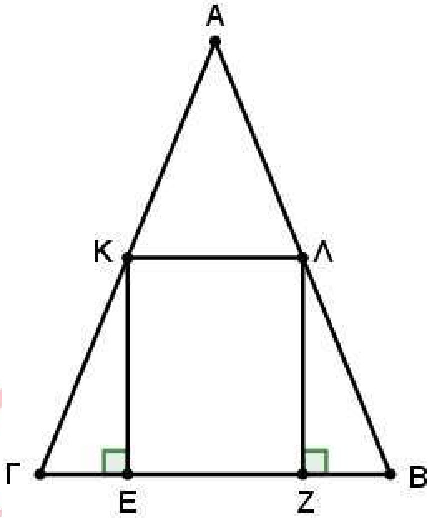
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{KE\Gamma}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{\Lambda ZB}}$ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) ΕΗ=ΖΘ, όπου Η , Θ τα μέσα των τμημάτων ΚΓ, ΛΒ αντίστοιχα. (Μονάδες 10)



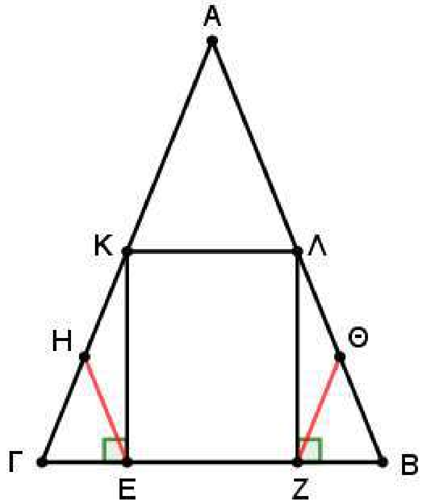
1675-Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΕΓ και ΛΖΒ έχουν:

- ΚΓ = ΚΒ, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα ΚΕΓ και ΛΖΒ είναι ίσα.



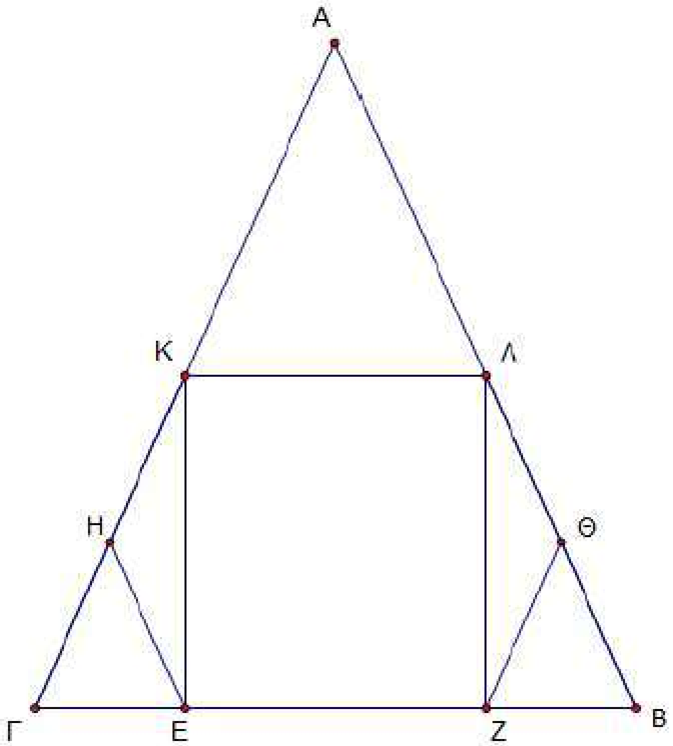
β) Η ΕΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΚΕΓ, οπότε ισχύει: $\text{ΕΗ} = \frac{\text{ΚΓ}}{2}$

Η ΖΘ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΛΖΒ, άρα

$\text{ΖΘ} = \frac{\text{ΛΒ}}{2}$

Επειδή ΚΓ=ΛΒ, είναι και ΕΗ =ΖΘ.

1675-Λύση



1676

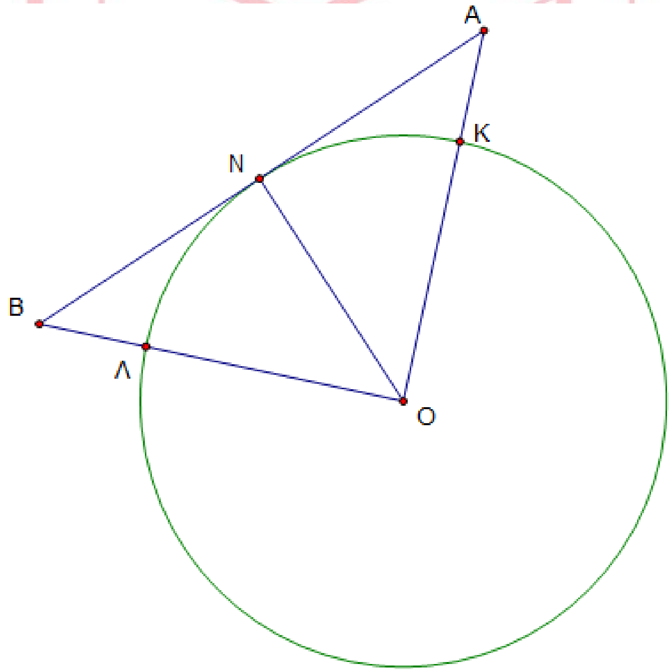
ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Ν του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του Ν θεωρούμε σημεία Α και Β, τέτοια ώστε ΝΑ=ΝΒ. Οι ΟΑ και ΟΒ τέμνουν τον κύκλο στα Κ και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{AOB}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Το σημείο Ν είναι μέσο του τόξου ΚΛ. (Μονάδες 12)

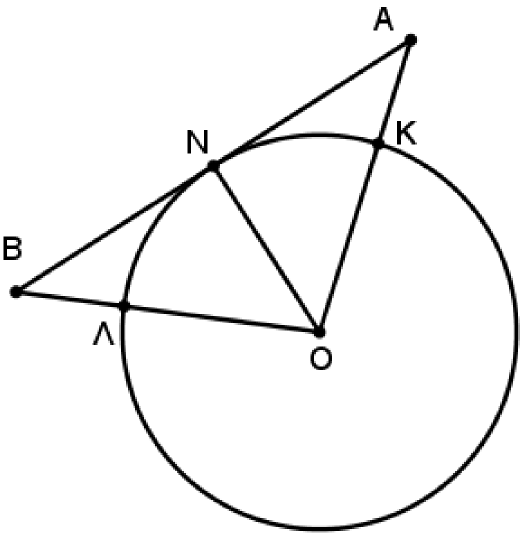


1676-Λύση

α) Στο τρίγωνο ΟΑΒ η ΟΝ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ η διάμεσος ΟΝ είναι και διχοτόμος της γωνίας $\hat{O}$. Άρα $K\hat{O}N = N\hat{O}\Lambda$. Επειδή οι επίκεντρες γωνίες είναι ίσες, θα είναι και τα αντίστοιχα τόξα τους ίσα.

Δηλαδή $\overset{\frown}{KN} = \overset{\frown}{N\Lambda}$. Άρα το Ν είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{K\Lambda}$.



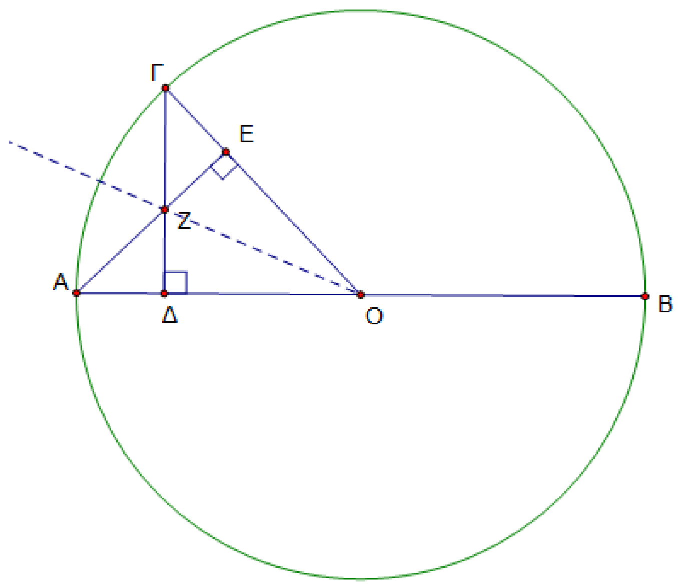
1677

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν ΑΕ κάθετο στην ΟΓ και ΓΔ κάθετο στην ΑΟ να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\Delta O E}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}\Gamma$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ. (Μονάδες 12)



1677-Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΟ και ΓΔΟ έχουν:

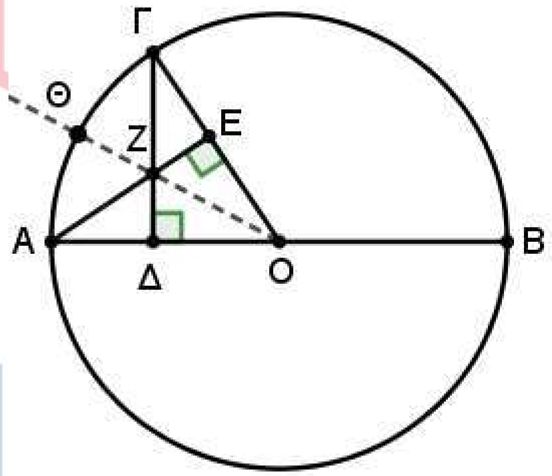
- ΟΑ = ΟΓ ως ακτίνες κύκλου
- $\hat{O}$ κοινή γωνία,

Άρα τα τρίγωνα ΑΕΟ και ΓΔΟ είναι ίσα, οπότε έχουν και ΟΔ = ΟΕ γιατί έχουν τις προσκείμενες γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΔΟ και ΖΕΟ έχουν:

- ΟΔ=ΟΕ, από το ερώτημα (α)
- ΟΖ κοινή πλευρά,

Άρα τα τρίγωνα ΖΔΟ και ΖΕΟ είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta\hat{O}Z = Z\hat{O}E$ αφού έχουν τις προσκείμενες πλευρές τους ίσες μία προς μία, δηλαδή η ΟΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{O}\Gamma$. Οι γωνίες $A\hat{O}\Theta$ και $\Theta\hat{O}\Gamma$ είναι επίκεντρες και ίσες, οπότε και τα αντίστοιχα τόξα $\overset{\frown}{A\Theta}$ και $\overset{\frown}{\Theta\Gamma}$ είναι ίσα, άρα το Θ είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$.



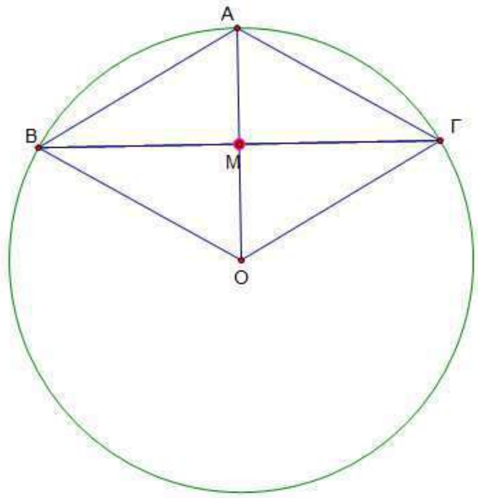
1679

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε την ακτίνα ΟΑ και τη χορδή ΒΓ κάθετη στην ΟΑ στο μέσο της Μ.

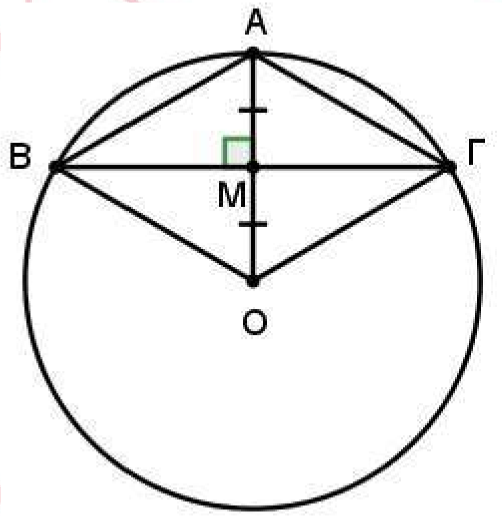
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΟΒ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΟΒ. (Μονάδες 15)



1679-Λύση

α) Επειδή ΟΜ ⊥ ΒΓ, το ΟΜ είναι απόστημα της χορδής ΒΓ, οπότε το Μ είναι μέσο της. Από υπόθεση το Μ είναι μέσο και της ΟΑ. Άρα τα τμήματα ΟΑ και ΒΓ του ΑΓΟΒ διχοτομούνται. Αυτό σημαίνει ότι το ΑΓΟΒ είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον ΟΑ⊥ ΒΓ**,** δηλαδή οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΑΓΟΒ είναι κάθετες. Άρα το ΑΓΟΒ είναι ρόμβος.



β) Στο τρίγωνο ΒΟΑ η ΒΜ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οπότε ΒΟ = ΒΑ. Τότε ΟΑ = ΒΟ = ΒΑ = ρ, οπότε το τρίγωνο ΒΟΑ είναι ισόπλευρο και επομένως ισχύει $B\hat{O}A = B\hat{A}O = O\hat{B}A = 60^o$.

Όμοια, το ΓΜ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου ΟΓΑ, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με ΟΑ = ΟΓ= ρ. Τότε ΟΑ = ΟΓ = ΓΑ = ρ, οπότε το τρίγωνο ΓΟΑ είναι ισόπλευρο και επομένως ισχύει $\Gamma\hat{O}A = \Gamma\hat{A}O = O\hat{\Gamma}A = 60^o$.

Είναι $B\hat{O}\Gamma = 60^o + 60^o = 120^o = B\hat{A}\Gamma$.

1680

ΘΕΜΑ 2

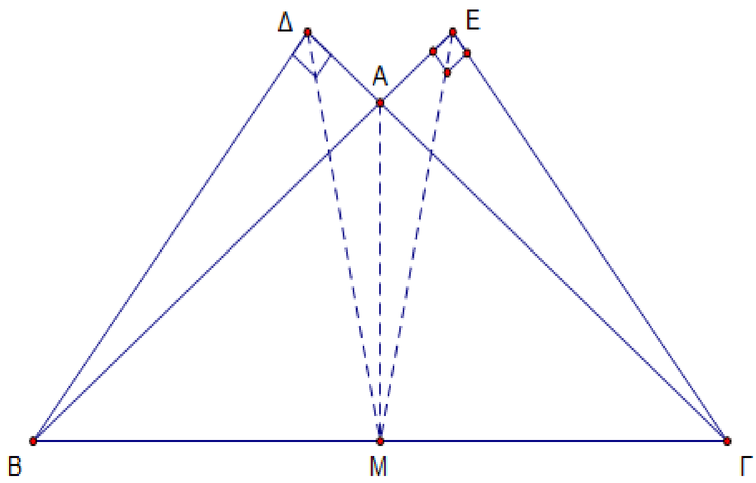
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ ($\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$) με $\widehat{\mathrm{A}} > 90^{o}$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το Α φέρνουμε τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{\Gamma E}$. (Μονάδες 10)

β) Αν Μ το μέσο της ΒΓ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{M\Delta} = \mathrm{ME}$. (Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία $\overset{\wedge}{\mathrm{\Delta ME}}$ (Μονάδες 7)

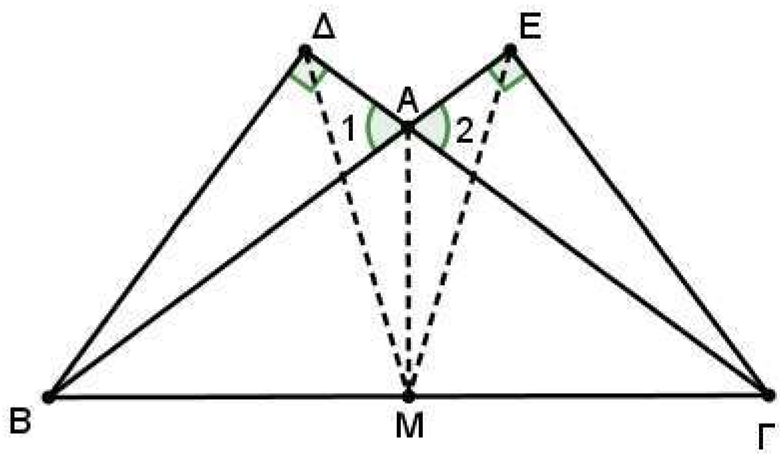


1680-Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ έχουν:

- ΑΒ=ΑΓ κοινή πλευρά
- $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, ως κατακορυφήν.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ είναι ίσα, οπότε έχουν και ΒΔ = ΓΕ ως πλευρές που έχουν τις απέναντι γωνίες $\widehat{A_1}$ και $\widehat{A_2}$ ίσες .



β) Το ΔΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΔΒΓ, άρα ΔΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$ (1).

Το ΕΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΕΒΓ, άρα ΕΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΜΔ = ΜΕ.

Τα τρίγωνα ΔΒΑ και ΕΑΓ είναι ίσα από το (α) ερώτημα οπότε έχουν ΑΔ = ΑΕ.

Επειδή ΜΔ=ΜΕ και ΑΔ=ΑΕ , τα Μ και Α ισαπέχουν από τα Δ και Ε, άρα η ΜΑ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΔΕ, η ΜΑ είναι μεσοκάθετος της βάσης ΔΕ , άρα είναι και διχοτόμος της γωνίας $Δ\widehat{Μ}Ε$.

1681

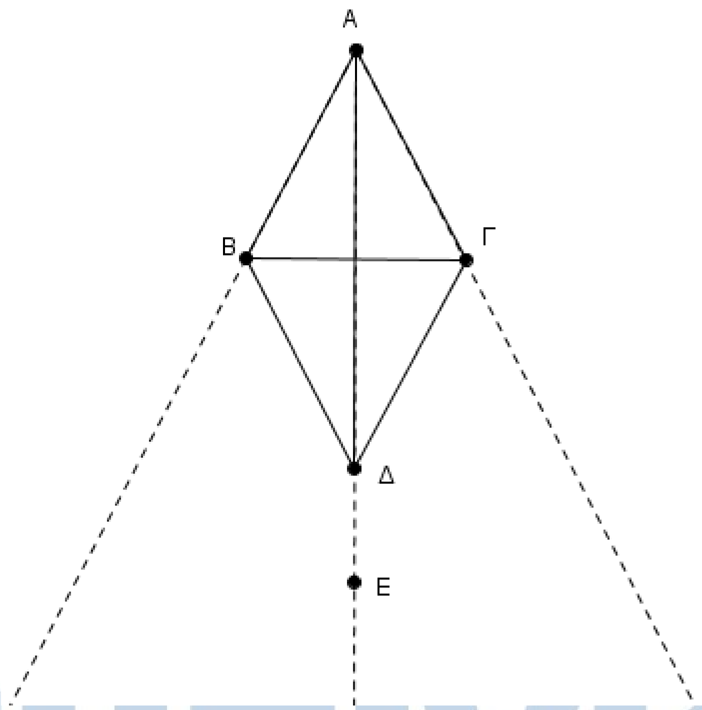
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ρόμβος ΑΒΔΓ. Στην προέκταση της διαγωνίου ΑΔ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

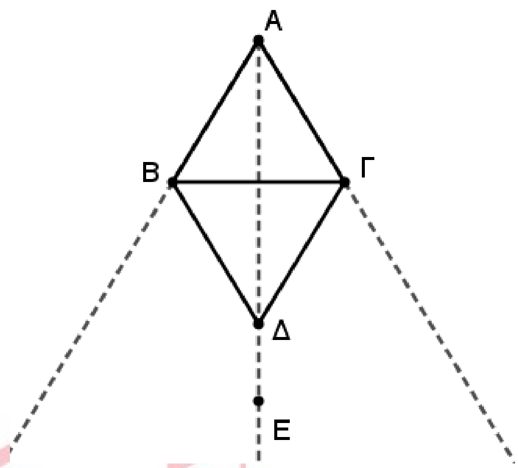
α) Το σημείο Ε ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ (προς το μέρος των Β και Γ αντίστοιχα). (Μονάδες 10)

β) Το σημείο Ε ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ. (Μονάδες 15)

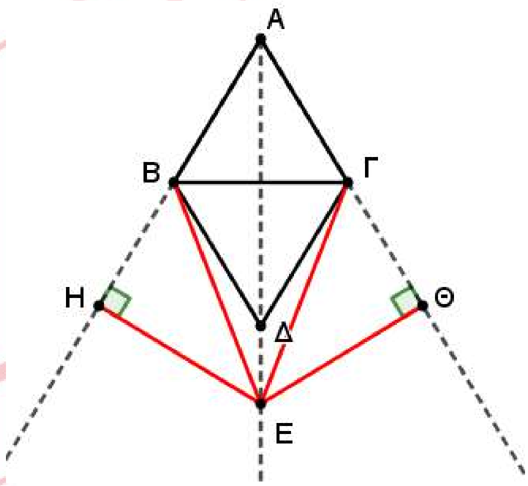


1681-Λύση

α) Οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του οπότε η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$. Επειδή το Ε είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας Α, ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας, δηλαδή ισαπέχει από τις ΑΒ και ΑΓ.



β) Οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούνται κάθετα, άρα η ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΒΓ. Επειδή το Ε ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ, ισαπέχει από τα Β και Γ.



1683

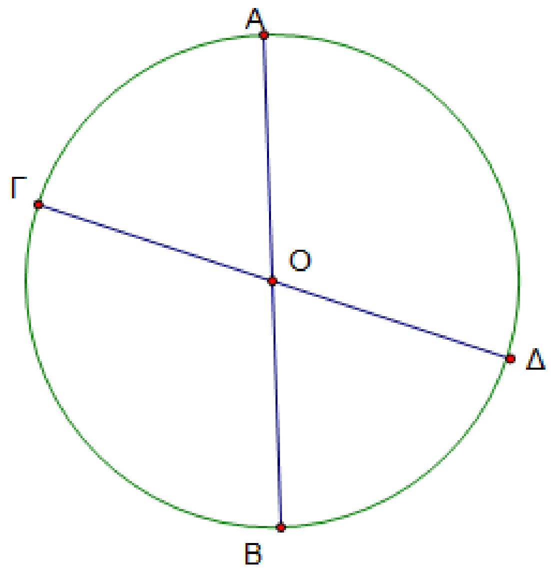
ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε δυο διαμέτρους του ΑΒ και ΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

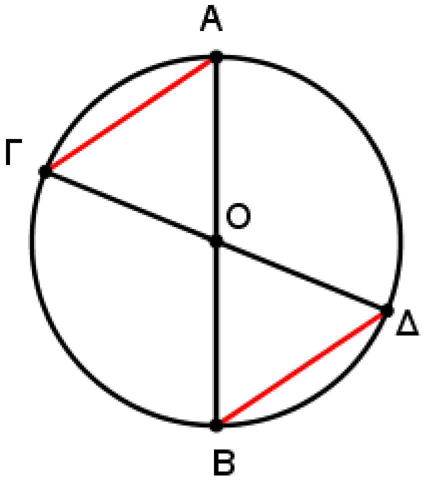
α) Οι χορδές ΑΓ και ΒΔ του κύκλου είναι ίσες. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)



1683-Λύση

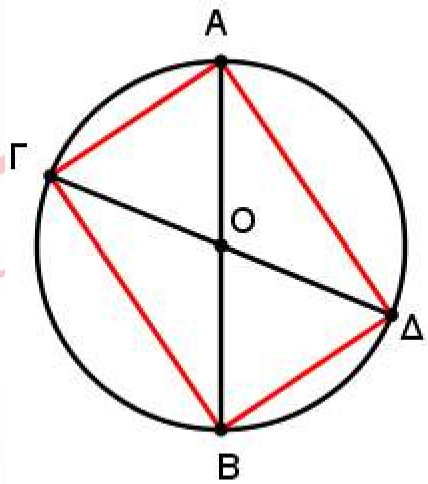
α) Έστω ρ η ακτίνα του κύκλου. Τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ έχουν:



- ΟΑ = ΟΒ = ρ
- ΟΓ= ΟΔ= ρ
- $A\widehat{O}\Gamma = B\widehat{O}\Delta$ ως κατακορυφήν.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΑΓ= ΒΔ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\widehat{O}\Gamma$ και $B\widehat{O}\Delta$.

β) Επειδή ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ= ΟΔ = ρ, οι διαγώνιες ΑΒ, ΓΔ του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.



1684

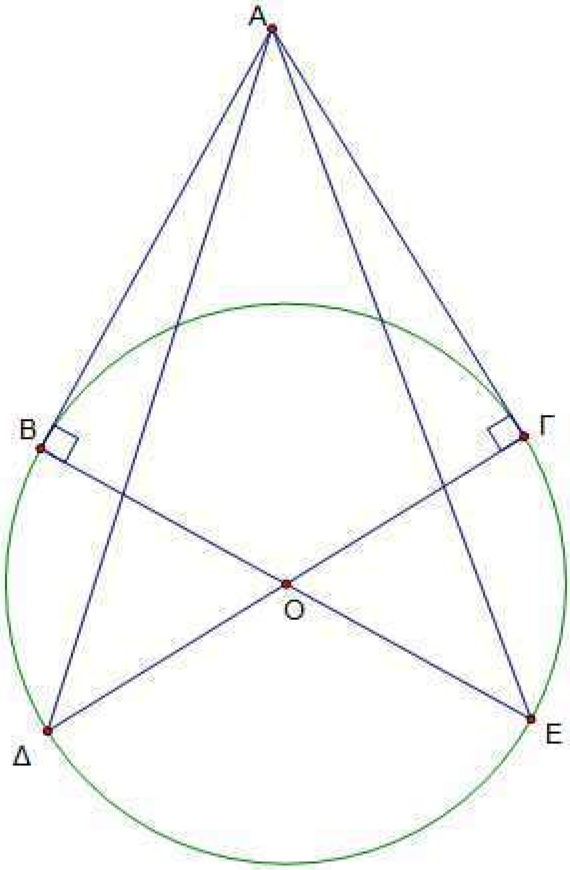
ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Από σημείο Α εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Τα σημεία Ε και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των Β και Γ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



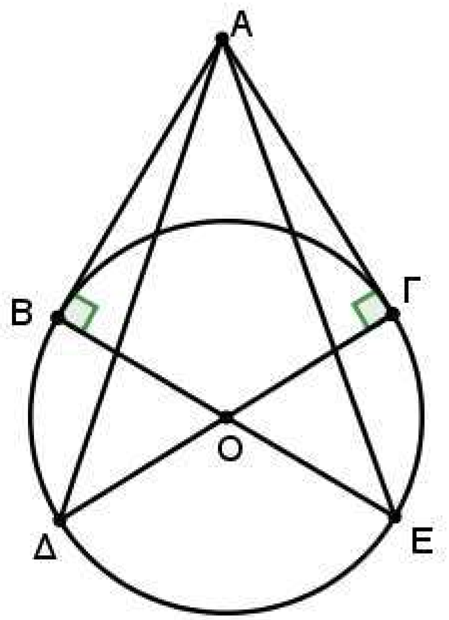
1684-Λύση

α) Είναι $A\hat{B}E = A\hat{\Gamma}\Delta = 90^o$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:

- ΑΒ = ΑΓ, ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν
- ΒΕ = ΓΔ = 2ρ

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα.

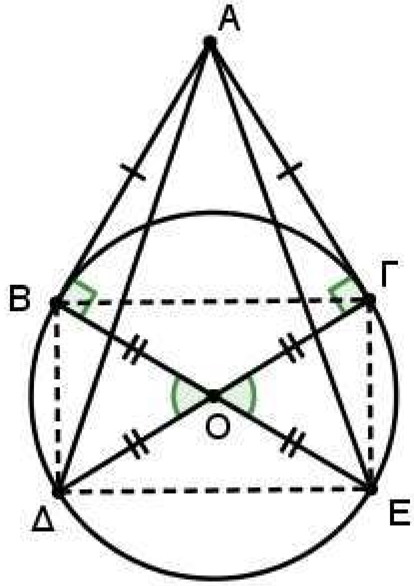


β) $B\hat{O}\Delta = \Gamma\hat{O}E$ ως κατακορυφήν γωνίες, άρα $\overset{\frown}{\Delta B}=\overset{\frown}{E\Gamma} \Leftrightarrow$ ΔΒ=ΕΓ.

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

- ΑΒ=ΑΓ
- ΑΔ=ΑΕ, αφού τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα ως υποτείνουσες των ίσων τριγώνων,
- ΒΔ=ΓΕ

Από το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



1687

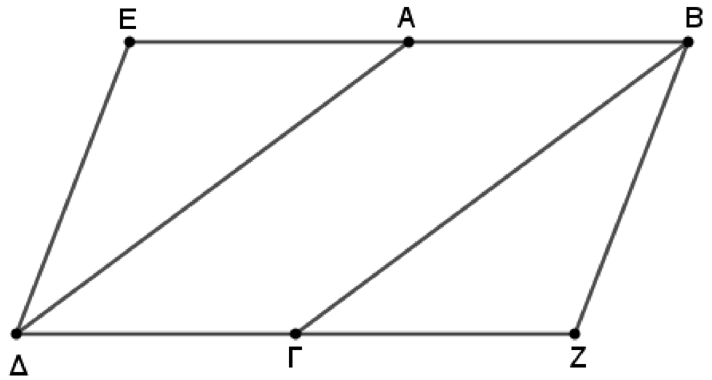
ΘΕΜΑ 2

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ (προς το Α) και την πλευρά ΔΓ (προς το Γ) κατά τμήματα $\mathrm{AE}=\mathrm{AB}$ και $\Gamma\mathrm{Z}=\Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

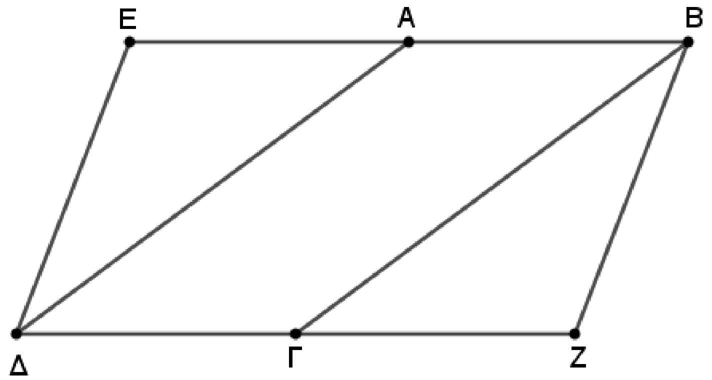


1687-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ έχουν:

- ΑΔ = ΒΓ, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου
- ΑΕ = ΑΒ = ΓΔ = ΓΖ, διότι τα ΑΒ, ΓΔ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- $B\hat{\Gamma}Z = E\hat{A}\Delta$, διότι είναι παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{A}$, $\hat{\Gamma}$.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.



β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΒΓΖ ισχύει ότι ΒΖ = ΕΔ ως απέναντι πλευρές στις ίσες γωνίες $B\hat{\Gamma}Z$ και $E\hat{A}\Delta$.

Ισχύει ότι ΒΖ = ΕΔ και ΕΒ = 2ΑΒ = 2ΓΔ=ΔΖ. Οπότε το τετράπλευρο ΕΒΖΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το χάρτη μίας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Αx και Αy παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία Β και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.

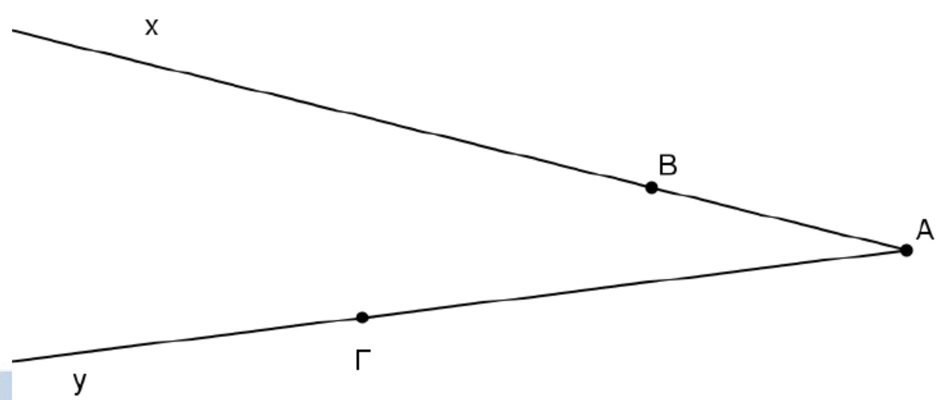
Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

α) ισαπέχει από τα δύο πλατάνια. (Μονάδες 9)

β) ισαπέχει από τα δύο ποτάμια. (Μονάδες 9)

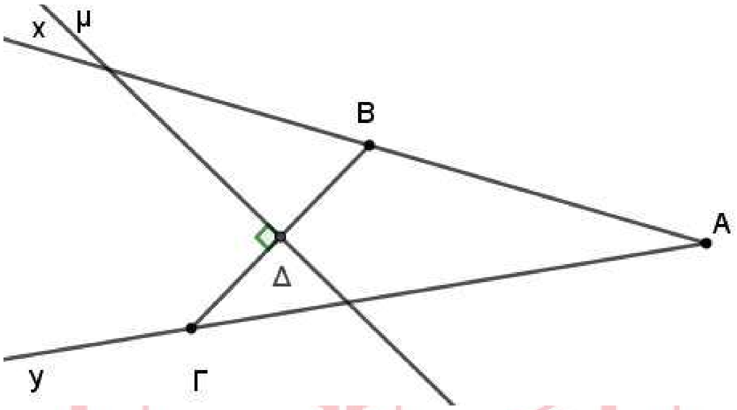
γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια. (Μονάδες 7)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

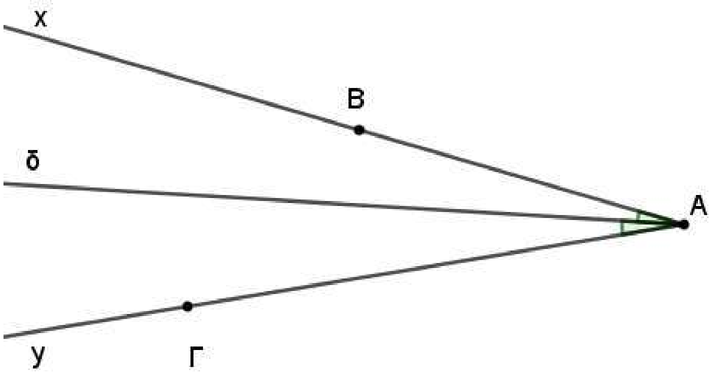


1688-Λύση

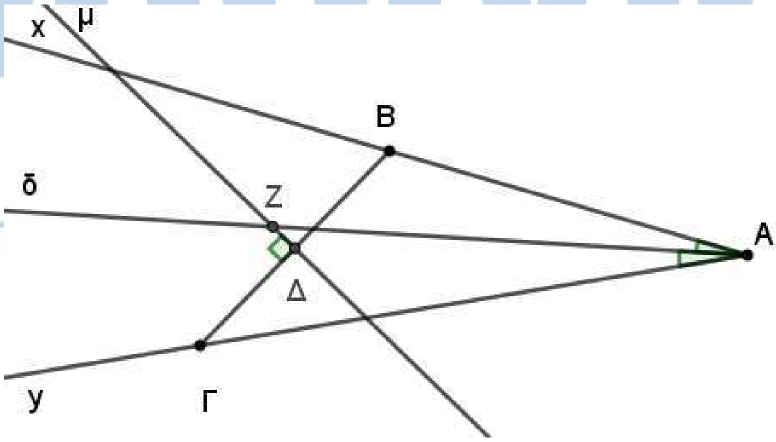
α) Τα σημεία που ισαπέχουν από δύο σημεία Β και Γ, βρίσκονται στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ. Άρα ο θησαυρός βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο μ του ΒΓ.



β) Ο θησαυρός ισαπέχει από τις πλευρές Αx και Αy της γωνίας $x\widehat{A}y$, άρα θα βρίσκεται στη διχοτόμο Αδ.



γ) Ο θησαυρός ισαπέχει από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια. Άρα ανήκει και στη μεσοκάθετο του ΒΓ και στη διχοτόμο Αδ της γωνίας $x\widehat{A}y$, έτσι ο θησαυρός βρίσκεται στο σημείο τομής Ζ των Αδ και μ.



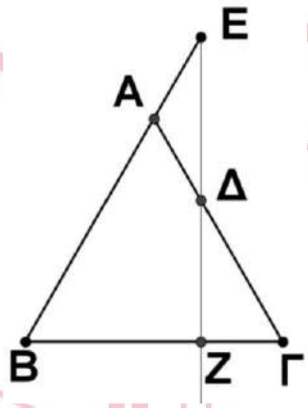
1689

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε σημείο Ε στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς ΑΓ, ώστε ΑΕ=ΑΔ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 10)

β) Αν Ζ είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ΕΔ (προς το Δ) με την ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΕΖ είναι κάθετη στην ΒΓ. (Μονάδες 15)



1689-Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, είναι $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^o$.
Τότε $\Delta\hat{A}E = 180^o - \hat{A} = 180^o - 60^o = 120^o$.

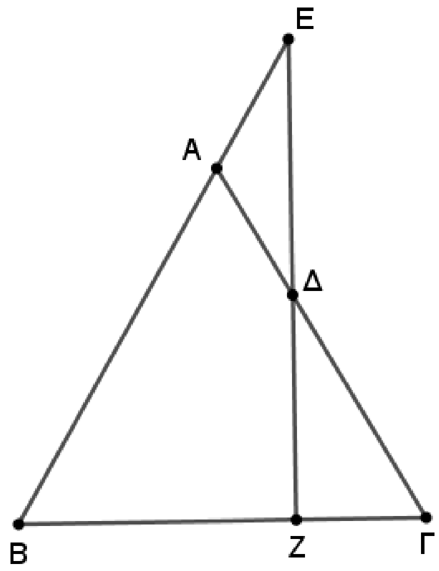
Επειδή το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι

$A\hat{\Delta}E = \hat{E}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ έχουμε:

$A\hat{\Delta}E + \hat{E} + \Delta\hat{A}E = 180^o \Leftrightarrow 2A\hat{\Delta}E + 120^o = 180^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2A\hat{\Delta}E = 60^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E = 30^o = \hat{E}$



β) Είναι $A\hat{\Delta}E = Z\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$ ως κατακορυφήν και $\hat{\Gamma} = 60^o$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΖΓ προκύπτει

ότι:

$Z\hat{\Delta}\Gamma + \Delta\hat{Z}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 30^o + \Delta\hat{Z}\Gamma + 60^o = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{Z}\Gamma = 90^o$, άρα $EZ \perp B\Gamma$.

1690

ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του ΑΔ και την διάμεσο ΑΜ στην πλευρά ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

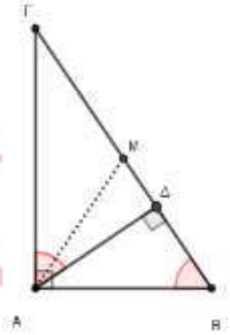
α) οι γωνίες $\hat{B}$ και $\Gamma\hat{A}\Delta$ είναι ίσες, (Μονάδες 12)

β) $A\hat{M}\Delta = 2\cdot\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 13)

1690-Λύση

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^o$ και $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$, ΑΔ το ύψος του προς στην ΒΓ και ΑΜ διάμεσός του στην πλευρά ΒΓ.

α)



Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$) ισχύει ότι:

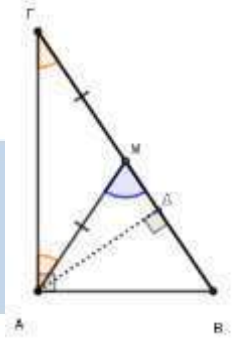
$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^o$ ή $\widehat{B} = 90^o - \widehat{\Gamma}$ (1)

Αφού ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ τότε $A\widehat{\Delta}\Gamma = 90^0$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο.

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ ισχύει ότι:

$\Gamma\widehat{A}\Delta + \widehat{\Gamma} = 90^o$ ή $\Gamma\widehat{A}\Delta = 90^o - \widehat{\Gamma}$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $\widehat{B} = \Gamma\widehat{A}\Delta$.

β)



Αφού η ΑΜ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, τότε θα είναι $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$, αφού Μ μέσο της ΒΓ.

Αφού ΑΜ=ΜΓ τότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές γιατί έχει δυο πλευρές του ίσες, οπότε $\widehat{\Gamma} = M\widehat{A}\Gamma$ (3) ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του ΑΓ.

Στο τρίγωνο ΑΜΔ η γωνία $A\widehat{M}\Delta$ είναι εξωτερική της γωνίας $A\widehat{M}\Gamma$ του τριγώνου ΑΜΓ, οπότε θα είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου, δηλαδή $A\widehat{M}\Delta = M\widehat{A}\Gamma + \widehat{\Gamma}$ και αφού είναι $\widehat{\Gamma} = M\widehat{A}\Gamma$ (σχέση (3)), τότε θα είναι

$A\widehat{M}\Delta = \widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma}$ ή $A\widehat{M}\Delta = 2\widehat{\Gamma}$.

1691

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = 60^{o}$. Φέρουμε τα ύψη ΑΕ και ΒΖ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία ΔΓ.

Να αποδείξετε ότι:

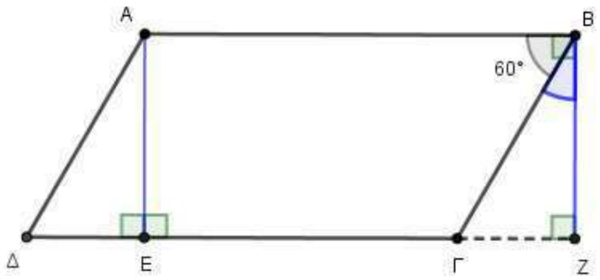
α) $ΓΖ = \frac{ΑΔ}{2}$, (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ίσο με το τρίγωνο ΒΓΖ, (Μονάδες 9)

γ) το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

1691-Λύση

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\widehat{B} = 60^0$ και ΑΕ, ΒΖ ύψη του από τις κορυφές Α και Β αντίστοιχα προς την ευθεία ΔΓ.



α) Οι ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και το ΒΖ είναι ύψος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, άρα θα είναι κάθετο στις παράλληλες ΑΒ και ΔΓ και θα είναι $Α\widehat{Β}Ζ = \widehat{Ζ} = 90^0$ (1). Οπότε $Γ\widehat{Β}Ζ = Α\widehat{Β}Ζ - Α\widehat{Β}Γ = 90^o - 60^o = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΖΒ ($\widehat{Ζ} = 90^0$) είναι $Γ\widehat{Β}Ζ = 30^0$, οπότε η απέναντι κάθετη των 30^0 θα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Δηλαδή $ΓΖ = \frac{ΒΓ}{2}$ και αφού είναι ΒΓ=ΑΔ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, τότε $ΓΖ = \frac{ΑΔ}{2}$.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ έχουν:

- $\widehat{Ε} = \widehat{Ζ} = 90^0$, γιατί τα τμήματα ΑΕ και ΒΖ είναι κάθετα στη ΒΓ ως ύψη του παραλληλογράμμου.
- ΑΔ = ΒΓ, διότι είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
- $\widehat{Δ} = Β\widehat{Γ}Ζ$, ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη που σχηματίζονται από τις παράλληλες ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΔΓ.

Άρα τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν την υποτείνουσα και την προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μια προς μία.

γ) Το τετράπλευρο ΑΒΖΕ έχει τρείς γωνίες ορθές, την $Α\widehat{Β}Ζ$ από σχέση (1), την $Α\widehat{Ε}Ζ$ και την $Ε\widehat{Ζ}Β$ αφού τα ΑΕ και ΒΖ είναι ύψη, οπότε είναι ορθογώνιο.

1692

ΘΕΜΑ 2

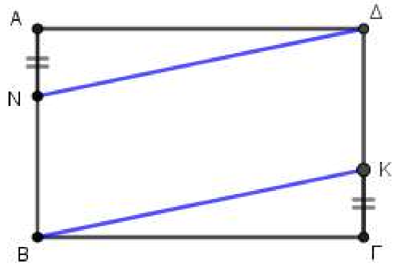
Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ν και Κ των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΝ = ΚΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα , (Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

1692-Λύση

Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημεία Ν και Κ πάνω στις ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΝ = ΓΚ.



α) Τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ έχουν:

- $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = 90^0$,αφού το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
- ΑΝ = ΚΓ, από υπόθεση
- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ

Άρα, τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

β) Ισχύει ΑΒ = ΔΓ (1) γιατί είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και επίσης ΑΝ = ΚΓ (2) από υπόθεση. Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις ισότητας (1) και (2) βρίσκουμε: ΑΒ – ΑΝ = ΔΓ – ΚΓ, δηλαδή ΒΝ = ΚΔ (3).

ΔΝ=ΒΚ (4) ως υποτείνουσες των ίσων τριγώνων ΑΝΔ και ΒΓΚ (από το προηγούμενο ερώτημα). Από (3) και (4) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

1694

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ=8 και ΔΓ=12. Αν ΑΗ και ΒΘ τα ύψη του τραπεζίου,

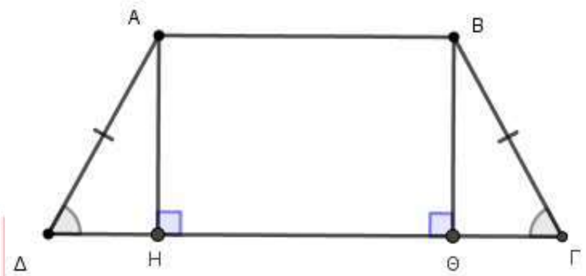
α) να αποδείξετε ότι ΔΗ = ΘΓ. (Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπεζίου. (Μονάδες 13)

1694-Λύση

Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και ΑΗ, ΒΘ τα ύψη του.

α)



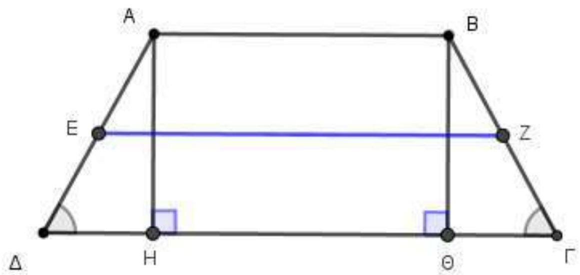
Επειδή ΑΗ και ΒΘ είναι ύψη τραπεζίου είναι $ΑΗ \perp ΔΓ$ και $ΒΘ \perp ΔΓ$.

Οπότε, τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΒΘΓ είναι ορθογώνια με $Α\widehat{Η}Δ = Β\widehat{Θ}Γ = 90^0$ και έχουν:

- $ΑΔ = ΒΓ$, ως πλευρές (μη παράλληλες) του ισοσκελούς τραπεζίου.
- $\hat{Γ} = \hat{Δ}$, ως γωνίες προσκείμενες σε βάση ισοσκελούς τραπεζίου.

Άρα, τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΔ και ΒΘΓ είναι ίσα γιατί έχουν την υποτείνουσα και την προσκείμενη σε αυτήν γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, οπότε και ΔΗ = ΘΓ.

β)



Έστω ΕΖ η διάμεσος του τραπεζίου, τότε η ΕΖ θα ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων του τραπεζίου, δηλαδή $ΕΖ = \frac{ΑΒ+ΓΔ}{2}$.

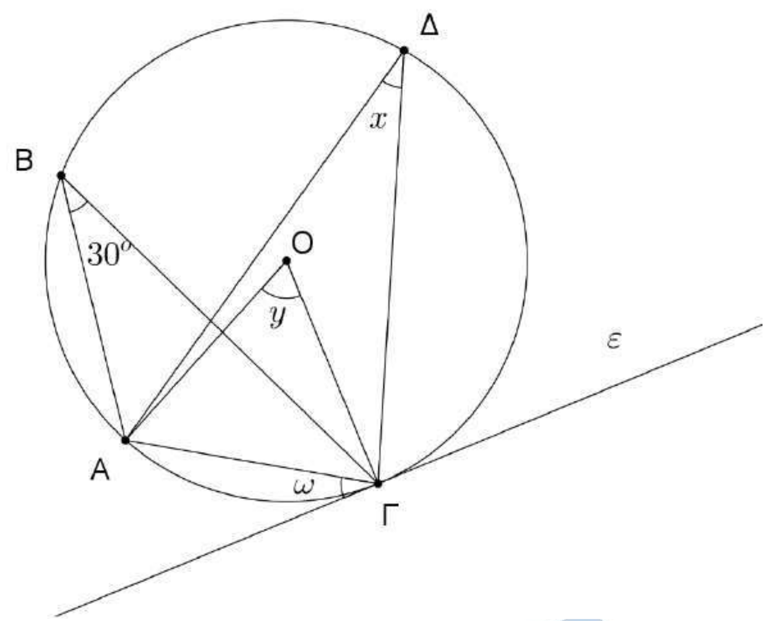
Οπότε, $ΕΖ = \frac{8+12}{2} = \frac{20}{2} = 10$.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (Ο,ρ) στο σημείο Γ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες x,y και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΟΑΓ ως προς τις πλευρές. (Μονάδες 10)



1695-Λύση

α) Οι γωνιές $A\hat{\Delta}\Gamma$ και $A\hat{B}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένες του κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$, οπότε θα είναι ίσες. Δηλαδή $A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{B}\Gamma$, άρα $\hat{x} = 30^o$.

Η γωνία $A\hat{O}\Gamma$ είναι επίκεντρη γωνία του κύκλου και βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$. Στο ίδιο τόξο βαίνει και η εγγεγραμμένη $A\hat{B}\Gamma$. Οπότε, γνωρίζοντας ότι κάθε εγγεγραμμένη ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτήν θα είναι $A\hat{B}\Gamma = \frac{A\hat{O}\Gamma 0}{2}$.

Δηλαδή, $A\hat{O}\Gamma = 2A\hat{B}\Gamma$, άρα $\hat{y} = 60^o$ (1)

Η γωνία $\hat{\omega}$ σχηματίζεται από τη χορδή ΑΓ και την εφαπτομένη ευθεία ε στο άκρο Γ της χορδής οπότε θα ισούται με κάθε εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$ της χορδής. Δηλαδή, είναι $\hat{\omega} = A\hat{B}\Gamma$, άρα $\hat{\omega} = 30^o$.

β) Το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισοσκελές αφού ΟΑ = ΟΓ ως ακτίνες του κύκλου, και έχει τη γωνία της κορυφής του $A\hat{O}\Gamma = y = 60^0$. Άρα, θα είναι ισόπλευρο.

1696

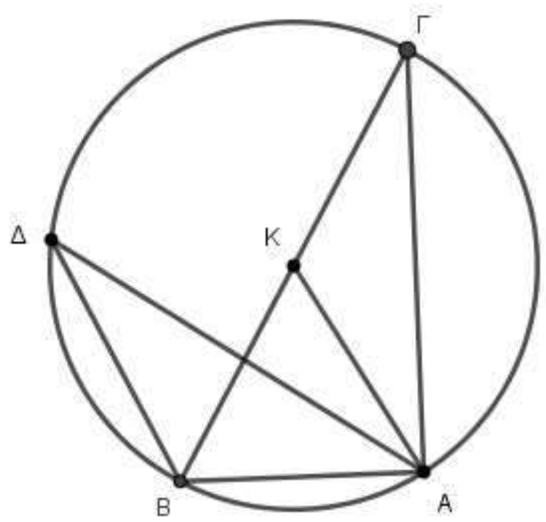
ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος (Κ,ρ), μια διάμετρός του ΒΓ και χορδή του ΒΑ=ρ. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των Β και Γ, όπως στο σχήμα που ακολουθεί,

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

β) να υπολογίσετε την γωνία $B\widehat{\Delta}A$. (Μονάδες 9)

γ) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)



1696-Λύση

α) Είναι ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ ως ακτίνες κύκλου και ΚΓ = ΒΑ από τα δεδομένα.

Άρα ΚΑ = ΚΒ = ΑΒ, οπότε το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισόπλευρο γιατί έχει τις τρεις πλευρές του ίσες.

β) Η εγγεγραμμένη γωνία $B\widehat{\Delta}A$ και η επίκεντρη $B\widehat{K}A$ βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ του κύκλου. Η γωνία $B\widehat{K}A$, ως γωνία ισοπλεύρου τριγώνου, θα είναι ίση με 60^0.

Γνωρίζοντας ότι κάθε εγγεγραμμένη ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτήν, θα είναι $B\widehat{\Delta}A = \frac{B\widehat{K}A}{2}$. Οπότε, $B\widehat{\Delta}A = \frac{60^o}{2}$, άρα $B\widehat{\Delta}A = 30^o$.

γ) Οι γωνίες $B\widehat{\Delta}A$ και $B\widehat{\Gamma}A$ είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ του κύκλου, οπότε θα είναι ίσες και αφού $B\widehat{\Delta}A = 30^o$ άρα και $B\widehat{\Gamma}A = 30^0$.

Η ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου, επομένως το τόξο $\overset{\frown}{B\Delta\Gamma}$ είναι ημικύκλιο. Άρα, η γωνία $B\widehat{A}\Gamma$ που βαίνει στο ημικύκλιο είναι ορθή, δηλαδή $B\widehat{A}\Gamma = 90^o$.

Η $\Gamma\widehat{B}A = 60^0$ γιατί είναι και γωνία του ισοπλεύρου τριγώνου ΒΚΑ.

Επομένως, οι γωνίες του τριγώνου ΒΑΓ είναι $B\widehat{\Gamma}A = 30^o$, $B\widehat{A}\Gamma = 90^o$ και $\Gamma\widehat{B}A = 60^0$.

1697

ΘΕΜΑ 2

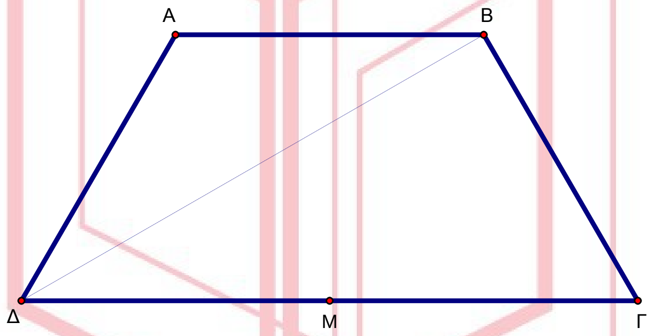
Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος έχουμε ΑΒ=ΑΔ=$\frac{ΓΔ}{2}$, $\hat{Δ} = 60^\circ$ και Μ το μέσο της πλευράς ΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Δ}$, (Μονάδες 9)

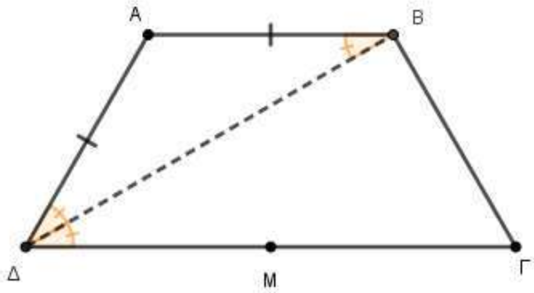
β) η ΒΜ χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

(Μονάδες 16)



1697-Λύση

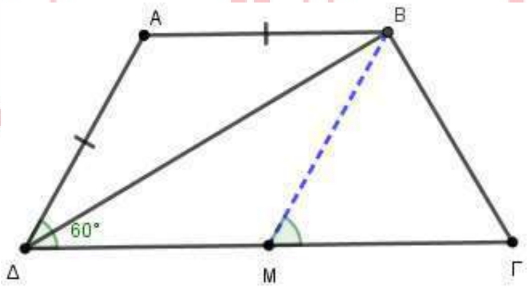
α)



Είναι $\Gamma\widehat{\Delta}\text{B} = \text{A}\widehat{\text{B}}\Delta$ (1) ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ με τέμνουσα την ΒΔ. Επειδή είναι ΑΒ = ΑΔ, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΔ, άρα $\text{A}\widehat{\Delta}\text{B} = \text{A}\widehat{\text{B}}\Delta$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $\text{A}\widehat{\Delta}\text{B} = \Gamma\widehat{\Delta}\text{B}$, άρα η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$.

β)



Φέρνουμε το τμήμα ΒΜ. Επειδή ΑΒ // ΔΓ ως βάσεις του τραπεζίου ΑΒΓΔ, άρα ΑΒ // ΔΜ. Αφού είναι ΑΒ = $\frac{\Gamma\Delta}{2}$ και το Μ είναι μέσο του ΔΓ από την υπόθεση, άρα ΑΒ =ΔΜ. Οπότε, το τετράπλευρο ΑΔΜΒ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΒ και ΔΜ παράλληλες και ίσες άρα είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή είναι ΑΒ = ΑΔ από την υπόθεση άρα το παραλληλόγραμμο ΑΔΜΒ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος. Επειδή το ΑΔΜΒ είναι ρόμβος, ισχύει ότι ΒΜ = ΔΜ. Και αφού ΔΜ = ΜΓ γιατί Μ είναι μέσο του ΔΒ, τότε θα είναι ΒΜ = ΜΓ. Οπότε το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές.

Αφού $\widehat{\Delta} = 60^o$ τότε και $\text{B}\widehat{\text{M}}\Gamma = \widehat{\Delta} = 60^o$ ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ και ΒΜ με τέμνουσα την ΔΓ.

Επειδή το ισοσκελές τρίγωνο ΒΜΓ έχει τη γωνία της κορυφής του ίση με 60^o θα είναι ισόπλευρο.

1698

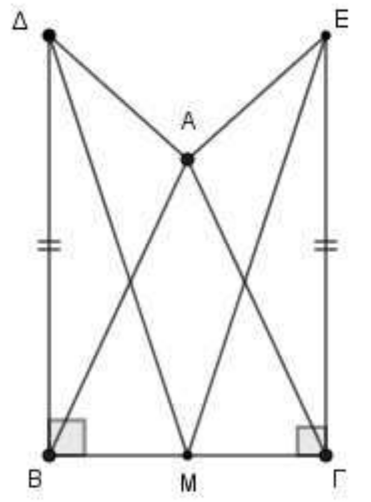
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Στα σημεία Β και Γ της ΒΓ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της ΒΓ όπως στο σχήμα, τα τμήματα ΒΔ ⊥ ΒΓ και ΓΕ ⊥ ΒΓ τέτοια ώστε ΒΔ=ΓΕ.

Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

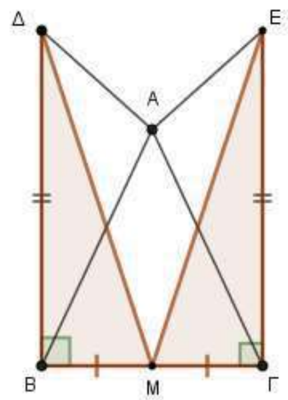
α) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) ΑΔ=ΑΕ. (Μονάδες 13)



1698-Λύση

α)



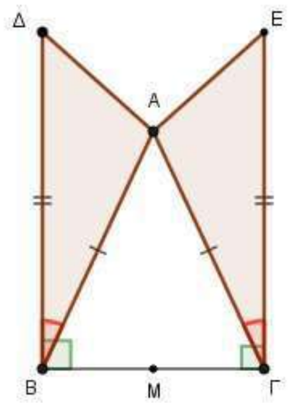
Εφόσον τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι κάθετα στη ΒΓ, άρα

$M\widehat{B}\Delta = M\widehat{\Gamma}E = 90^0$ οπότε τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΒΔ = ΓΕ από υπόθεση
- ΒΜ = ΜΓ, αφού Μ μέσο της ΒΓ

Άρα, τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα, γιατί έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

β)



Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν:

- ΒΔ = ΓΕ από υπόθεση
- ΑΒ = ΑΓ ως ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με βάση ΒΓ
- $A\widehat{B}\Delta = A\widehat{\Gamma}E$ ως συμπληρωματικές γωνίες των ίσων γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΑΔ = ΑΕ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\widehat{B}\Delta$ και $A\widehat{\Gamma}E$ αντίστοιχα.

1699

ΘΕΜΑ 2

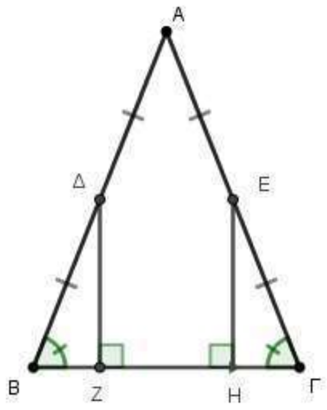
Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) .

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ. (Μονάδες 13)

β) Αν $\hat{A} = 75^\circ + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

1699-Λύση

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ.



α) Έστω Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΔΖ, ΕΗ οι αποστάσεις των Ε, Ζ από τη βάση ΒΓ.

Τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΕΗΓ έχουν:

- $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\Delta = \Gamma\hat{\mathrm{H}}\mathrm{E} = 90^0$ αφού ΔΖ και ΕΗ ως αποστάσεις, από την υπόθεση, είναι κάθετες στη ΒΓ.
- ΔΒ = ΕΓ ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ
- $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$ ως προσκείμενες γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

Άρα τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΕΗΓ είναι ορθογώνια που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα.

Οπότε έχουν και ΔΖ = ΕΗ ως πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

Δηλαδή, τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ.

β) Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 75^o + \hat{\mathrm{B}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\mathrm{B}}=180^o \Leftrightarrow 3\hat{\mathrm{B}} = 105^o$. Άρα $\hat{\mathrm{B}} = 35^o$.

Οπότε $\hat{\mathrm{A}} = 75^o + 35^o = 110^o$.

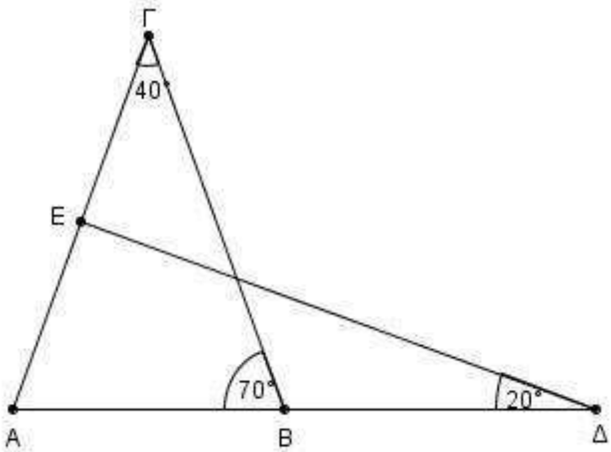
1700

ΘΕΜΑ 2

Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 12)

β) η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή. (Μονάδες 13)



1700-Λύση

α) Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o$ (1) και αφού $\widehat{B} = 70^0$ και $\widehat{\Gamma} = 40^o$ τότε από τη σχέση (1) βρίσκουμε ότι $\widehat{A} = 70^o$.

Επειδή είναι $\widehat{A} = 70^o = \widehat{B}$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΓΑ και ΓΒ.

β) Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΔ έχουμε:

$A\widehat{E}\Delta + \widehat{A} + \widehat{\Delta} = 180^o$ (2) και αφού $\widehat{\Delta} = 20^0$ ως δεδομένο και $\widehat{A} = 70^o$ από α) ερώτημα, τότε από τη σχέση (2) βρίσκουμε ότι $A\widehat{E}\Delta = 90^o$.

1702

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε $\mathrm{A\Gamma} < \mathrm{AB}$. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{A\Gamma}$ και στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\mathrm{AE} = \mathrm{A\Gamma}$.

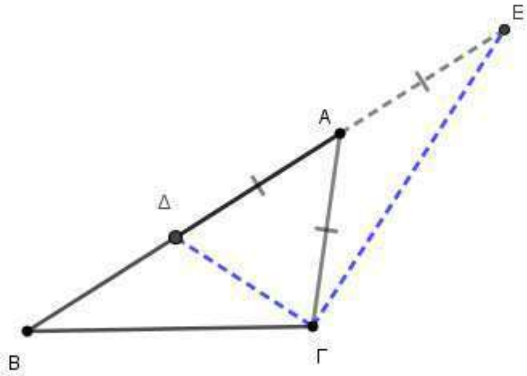
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\Gamma \perp \mathrm{E}\Gamma$, (Μονάδες 12)

β) η γωνία ΕΑΓ είναι διπλάσια της γωνίας ΑΔΓ. (Μονάδες 13)

1702-Λύση

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ<ΑΒ, σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΔ=ΑΓ και σημείο Ε στην προέκταση της ΒΑ τέτοιο ώστε ΑΕ=ΑΓ.



α) Φέρνουμε τα τμήματα ΔΓ και ΓΕ. Αφού από υπόθεση είναι ΑΔ = ΑΓ και ΑΕ = ΑΓ τότε ΑΔ = ΑΓ = ΑΕ. Οπότε στο τρίγωνο ΔΓΕ το τμήμα ΑΓ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΔΕ και είναι ίσο με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί, δηλαδή είναι ΑΓ= $\frac{ΔΕ}{2}$.

Επομένως, το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά ΔΕ και με ορθή τη γωνία $Ε\hat{Γ}Δ$, άρα ΔΓ $\perp$ ΕΓ.

β) Επειδή είναι ΑΓ = ΑΔ, το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές, άρα $Α\hat{Γ}Δ = Α\hat{Δ}Γ$ (1).

Η $Ε\hat{Α}Γ$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΔΓ, οπότε είναι $Ε\hat{Α}Γ = Α\hat{Γ}Δ + Α\hat{Δ}Γ$ και αφού είναι $Α\hat{Γ}Δ = Α\hat{Δ}Γ$ λόγω της σχέσης (1), άρα $Ε\hat{Α}Γ = Α\hat{Δ}Γ + Α\hat{Δ}Γ = 2Α\hat{Δ}Γ$.

1706

ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και μ_β, μ_γ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$, τότε οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση ***Π***, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

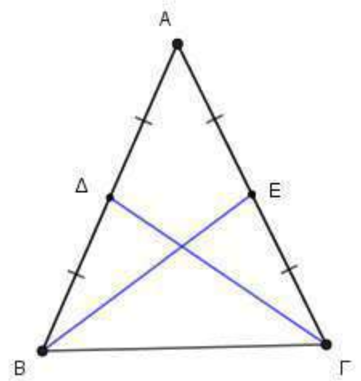
β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της ***Π*** και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η ***Π*** και η ***αντίστροφή της*** ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

1706-Λύση

α) Έστω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και ΒΕ, ΓΔ οι διάμεσοι μ_β , μ_γ αντίστοιχα. Θα εξετάσουμε αν είναι $\mu_\beta = \mu_\gamma$.



Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

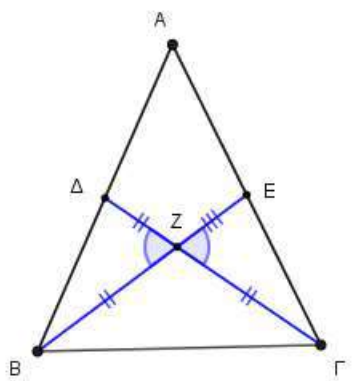
- ΒΔ = ΕΓ, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ
- ΒΓ κοινή πλευρά
- $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους ίσα, άρα και ΒΕ = ΔΓ, δηλαδή $\mu_\beta = \mu_\gamma$.

β) Η αντίστροφη πρόταση της Π διατυπώνεται ως εξής:

«Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ οι διάμεσοι του μ_β, μ_γ είναι ίσες, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με β = γ».

Έστω ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ οι διάμεσοί του μ_β, μ_γ , δηλαδή οι ΒΕ , ΓΔ αντίστοιχα, είναι ίσες. Θα εξετάσουμε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με β = γ, δηλαδή ΑΒ = ΑΓ.



Έστω Ζ το σημείο τομής των διαμέσων ΒΕ και ΓΔ. Άρα το Ζ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ και συνεπώς θα ισχύουν:

ΔΖ = $\frac{1}{3}$ΓΔ (1) και ΖΕ = $\frac{1}{3}$ΒΕ (2) αλλά και ΓΖ = $\frac{2}{3}$ΓΔ (3) και ΒΖ=$\frac{2}{3}$ΒΕ (4).

1706-Λύση

Αφού είναι ΓΔ = ΒΕ (από την υπόθεση), από τις (1) και (2) θα είναι ΔΖ = ΖΕ (5) και από τις σχέσεις (3) και (4) θα είναι ΓΖ=ΒΖ (6).

Τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΕΖΓ έχουν:

- ΔΖ = ΖΕ , λόγω της σχέσης (5)
- ΒΖ = ΓΖ , λόγω της σχέσης (6)
- $\Delta\hat{Z}B = E\hat{Z}\Gamma$, ως γωνίες κατακορυφήν

Επομένως, σύμφωνα με το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΕΖΓ θα είναι ίσα οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους ίσα. Άρα θα είναι ΔΒ = ΕΓ οπότε και 2ΔΒ = 2ΕΓ δηλαδή ΑΒ = ΑΓ.

Επομένως, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Συνεπώς, η πρόταση «Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ οι διάμεσοι του μ_β, μ_γ είναι ίσες, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με β = γ» είναι αληθής.

γ) Εφόσον, από τα ερωτήματα α) και β) η πρόταση Π και η αντίστροφή της είναι αληθής μπορούμε να τις διατυπώσουμε ως την ενιαία πρόταση: «Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με β = γ αν και μόνο αν οι διάμεσοί του μ_β, μ_γ είναι ίσες».

1707

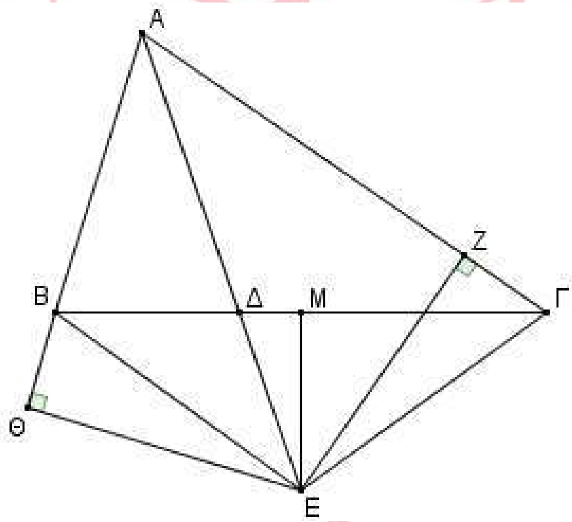
ΘΕΜΑ 4

Στο τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ<ΑΓ) του παρακάτω σχήματος, η κάθετη στο μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε. Αν Θ, Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ, ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

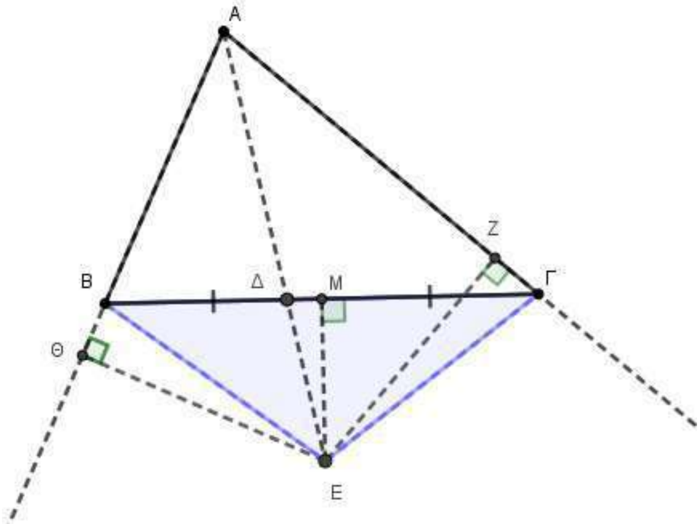
α) Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) $\mathrm{A\hat{\Gamma}E} + \mathrm{A\hat{B}E} = 180^{\circ}$ (Μονάδες 12)



1707-Λύση



α) Στο τρίγωνο ΒΕΓ το τμήμα ΕΜ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές.

β) Αφού Θ, Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα τότε τα ΕΘ, ΕΖ θα είναι κάθετα τμήματα στις ΑΒ, ΑΓ οπότε $E\hat{\Theta}B = E\hat{Z}\Gamma = 90^0$.

Τα τρίγωνα ΕΘΒ και ΕΖΓ έχουν:

- $E\hat{\Theta}B = E\hat{Z}\Gamma = 90^0$
- ΕΒ = ΕΓ , ως πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΕΒΓ από α) ερώτημα.
- ΕΘ = ΕΖ , γιατί το Ε είναι σημείο της διχοτόμου ΑΕ οπότε ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$.

Άρα, τα τρίγωνα ΕΘΒ και ΕΖΓ είναι ίσα ως ορθογώνια που έχουν δυο ομόλογες πλευρές τους (υποτείνουσα - κάθετη πλευρά) ίσες μία προς μία.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΕΘΒ και ΕΖΓ είναι ίσα θα ισχύει και $\Theta\hat{B}E = Z\hat{\Gamma}E$ ή διαφορετικά $\Theta\hat{B}E = A\hat{\Gamma}E$ (1)

Ισχύει ότι $\Theta\hat{B}E + A\hat{B}E = 180^o$ και αφού $\Theta\hat{B}E = A\hat{\Gamma}E$ τότε θα είναι $A\hat{\Gamma}E + A\hat{B}E = 180^o$.

ΘΕΜΑ 4

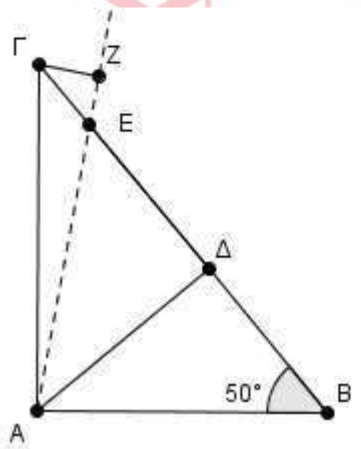
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^0$) με $\widehat{B} = 50^o$, το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην ΔΓ ώστε ΔΕ=ΒΔ. Το σημείο Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

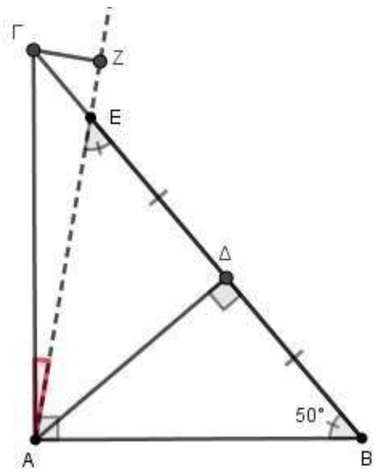
ii. $\Gamma\widehat{A}E = 10^o$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΓΕ. (Μονάδες 9)



1708-Λύση

α)



i. Αφού για το σημείο Ε ισχύει ΔΕ = ΒΔ (υπόθεση), άρα το Δ είναι μέσο του τμήματος ΒΕ. Στο τρίγωνο ΒΑΕ το ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος. Οπότε το τρίγωνο ΕΑΒ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΒ και ΑΕ.

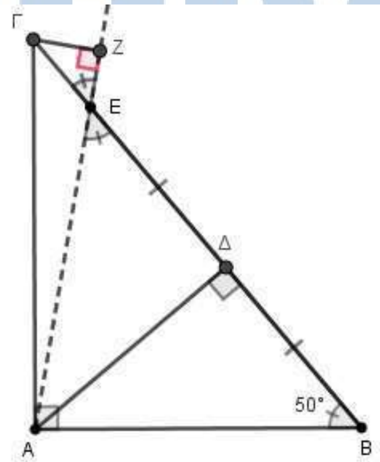
ii. Επειδή το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές με βάση το ΒΕ οπότε οι γωνίες της βάσης θα είναι ίσες, δηλαδή $A\hat{E}B = \hat{B} = 50^o$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΕ ισχύει $E\hat{A}B + A\hat{E}B + \hat{B} = 180^o$ και αφού $A\hat{E}B = \hat{B} = 50^o$ άρα και $E\hat{A}B + 2\cdot 50^o = 180^o$, οπότε $E\hat{A}B = 180^o - 100^o = 80^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$\Gamma\hat{A}E + E\hat{A}B = 90^o$ και αφού $E\hat{A}B = 80^o$ τότε θα ισχύει $\Gamma\hat{A}E + 80^o = 90^o$, άρα $\Gamma\hat{A}E = 10^o$.

β)



Ισχύει ότι $\Gamma\hat{E}Z = A\hat{E}B = 50^o$ ως κατακορυφήν γωνίες. Επειδή $\Gamma\hat{Z}E = 90^o$, γιατί $\Gamma Z \perp AZ$ λόγω της προβολής του σημείου Γ στην ΑΕ, το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ορθογώνιο οπότε οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές, δηλαδή

$\Gamma\hat{E}Z + E\hat{\Gamma}Z = 90^o \Leftrightarrow 50^o + E\hat{\Gamma}Z = 90^o$ οπότε $E\hat{\Gamma}Z = 40^o$.

1709

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο η εξωτερική του γωνία $\hat{Γ}$ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας $\hat{Α}$. Από την κορυφή Α διέρχεται ημιευθεία Αx // ΒΓ στο ημιεπίπεδο (ΑΒ, Γ). Στην ημιευθεία Αx θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΔ=ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

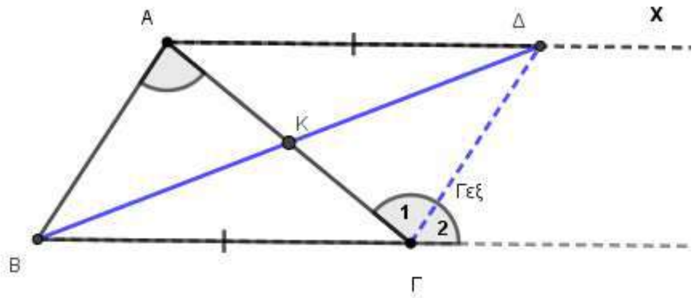
α) Η ΒΔ διέρχεται από το μέσο του τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 7)

β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της $\hat{Γ}_{εξ}$. (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

1709-Λύση

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε η $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 2\widehat{\mathrm{A}}$, ημιευθεία Αx παράλληλη στη ΒΓ και σημείο της Δ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΒΓ.



α) Αφού τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ είναι ίσα και παράλληλα, τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται έστω στο σημείο Κ. Άρα η ΒΔ διέρχεται από το μέσο Κ του τμήματος ΑΓ.

β) Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι πλευρές του ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες.

Είναι $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\mathrm{A}}$ (1) ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τις τέμνει η ΑΓ.

Όμως είναι $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 2\widehat{\mathrm{A}}$ και $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma}_2$ οπότε θα είναι $2\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\Gamma}_2$. Άρα $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Gamma}_2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$, οπότε η ΓΔ είναι διχοτόμος της $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$.

γ) Γνωρίζουμε ότι η εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι δυο εσωτερικών γωνιών του, άρα $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}}$. Με δεδομένο ότι $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 2\widehat{\mathrm{A}}$ θα είναι $2\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}}$ άρα $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}}$. Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

1710

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ ώστε να ισχύει ΑΓ= ΓΔ= ΔΒ. Επίσης θεωρούμε σημείο Ο εκτός του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ έτσι ώστε να ισχύουν ΟΓ=ΑΓ και ΟΔ=ΔΒ.

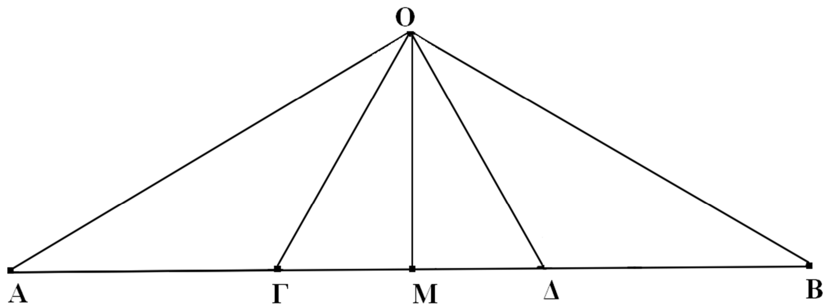
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η γωνία $\hat{ΓΟΔ}$ είναι 60^0 (Μονάδες 9)

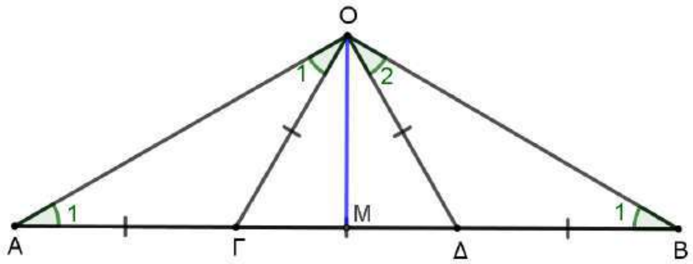
ii. οι γωνίες $\hat{ΟΑΓ}$, $\hat{ΟΒΔ}$ είναι ίσες και κάθε μια ίση με 30^0. (Μονάδες 9)

β) Αν Μ το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, να αποδείξετε ότι 2ΟΜ=ΟΑ.

(Μονάδες 7)



1710-Λύση



α) i. Είναι ΑΓ = ΟΓ = ΓΔ και ΓΔ = ΔΒ = ΟΔ, οπότε ΟΓ = ΓΔ = ΟΔ. Άρα το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισόπλευρο και οι γωνίες του είναι ίσες με 60^o. Άρα $Γ\widehat{Ο}Δ = 60^o$.

ii. Επειδή ΟΓ = ΑΓ, το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισοσκελές οπότε $\widehat{Α}_1 = \widehat{Ο}_1$.

Η γωνία $Ο\widehat{Γ}Δ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΟΓΑ, οπότε:

$Ο\widehat{Γ}Δ = \widehat{Α}_1 + \widehat{Ο}_1 \Leftrightarrow 60^o = 2\,\widehat{Α}_1 \Leftrightarrow \widehat{Α}_1 = 30^o$.

Η γωνία ΟΔΒ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΟΓΑ, άρα:

$Ο\widehat{Δ}Β = \widehat{Ο}_2 + \widehat{Β}_1 \Leftrightarrow 60^o = 2\,\widehat{Β}_1 \Leftrightarrow \widehat{Β}_1 = 30^o$.

β) Είναι $\widehat{Α}_1 = \widehat{Β}_1 = 30^o$, άρα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές. Η διάμεσος ΟΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΟΑΒ είναι και ύψος του, δηλαδή $ΟΜ \perp ΑΒ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΑ, είναι $\widehat{Α}_1 = 30^o$. Άρα για την απέναντι κάθετη πλευρά ΟΜ ισχύει: $ΟΜ = \frac{ΟΑ}{2} \Leftrightarrow 2ΟΜ = ΟΑ$.

1712

ΘΕΜΑ 4

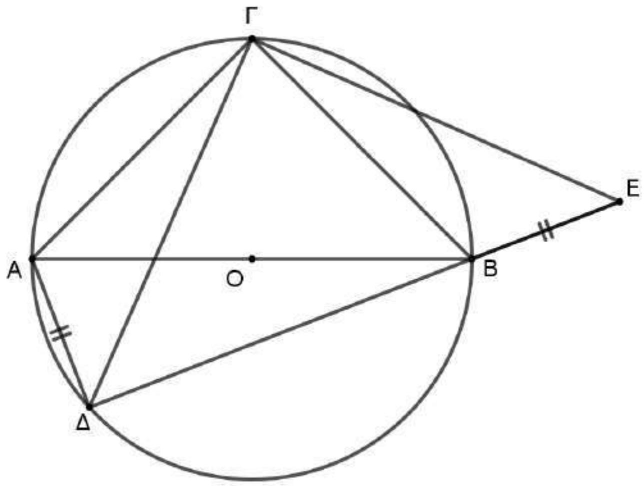
Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο, και έστω ΑΒ μια διάμετρος του, Γ το μέσο του ενός ημικυκλίου του και Δ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της ΔΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε ώστε ΒΕ=ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

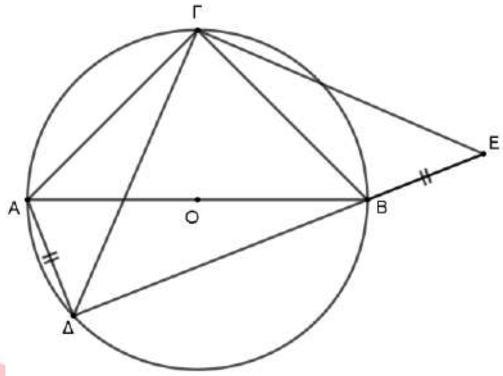
i. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

ii. Η ΓΔ είναι κάθετη στην ΓΕ. (Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι το αντιδιαμετρικό του Γ, η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου. (Μονάδες 9)



1712-Λύση



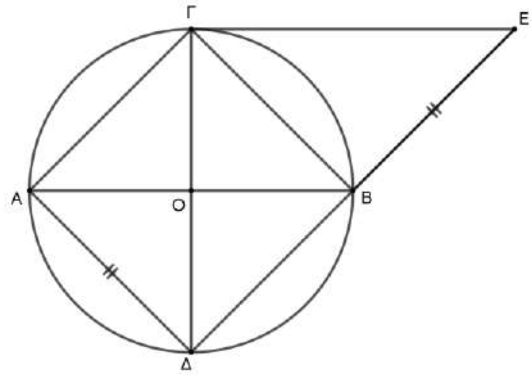
α) i. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

- ΑΔ = ΒΕ, από υπόθεση
- ΑΓ = ΓΒ ως ίσες χορδές των ίσων τόξων ΑΓ και ΓΒ αφού το Γ είναι μέσο του τόξου ΑΒ.
- $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}E$, διότι το τετράπλευρο ΑΔΒΓ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο κέντρου Ο και κάθε εξωτερική γωνία του ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

ii. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα, προκύπτει ότι $A\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{\Gamma}E$ γιατί είναι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΕ αντίστοιχα. Τότε:
$\Delta\hat{\Gamma}E = \Delta\hat{\Gamma}B + B\hat{\Gamma}E = \Delta\hat{\Gamma}B + A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}B$. Όμως $A\hat{\Gamma}B = 90^o$, γιατί είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα $\Gamma\Delta \perp \Gamma E$.

β)



Όταν το Δ είναι αντιδιαμετρικό του Γ, τότε από το **α)ii.** ερώτημα είδαμε ότι $\Gamma\Delta\perp\Gamma E$ ή $O\Gamma\perp\Gamma E$ αφού ΓΔ διάμετρος και ΟΓ ακτίνα του κύκλου. Δηλαδή για την ακτίνα ΟΓ ισχύει ότι είναι κάθετη στο τμήμα ΓΕ, οπότε η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

1713

ΘΕΜΑ 4

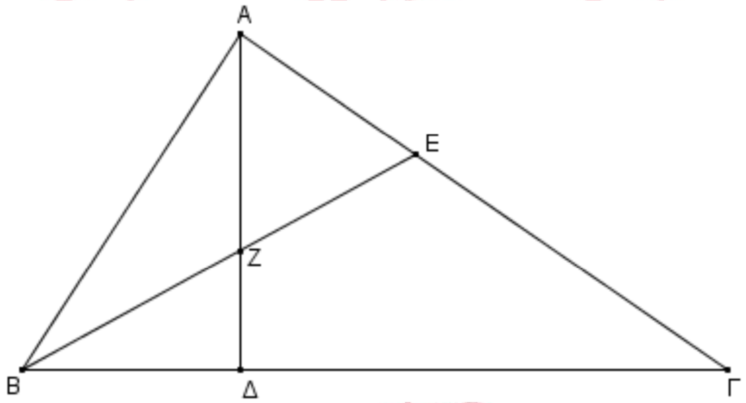
Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A}+\hat{\Gamma}=2\hat{B}$ και έστω ΑΔ ύψος και ΒΕ διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B}=60^o$ και ΑΖ=ΒΖ. (Μονάδες 10)

ii. $A\Delta=\frac{3}{2}BZ$ (Μονάδες 8)

β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)



1713-Λύση

α) i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \widehat{B} + 2\widehat{B} = 180^o \Leftrightarrow 3\widehat{B} = 180^o \Leftrightarrow \widehat{B} = 60^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ (ΑΔ ύψος, άρα ΑΔ⊥ΒΓ) για τις οξείες γωνίες του ισχύει:

$B\widehat{A}\Delta + A\widehat{B}\Delta = 90^o \Leftrightarrow B\widehat{A}\Delta = 30^o$.

Επειδή η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$, ισχύει ότι: $A\widehat{B}Z = \frac{A\widehat{B}\Delta}{2} = \frac{60^o}{2} = 30^o$.

Επειδή $B\widehat{A}\Delta = A\widehat{B}Z = 30^o$ συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, οπότε ΑΖ = ΒΖ.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΖ είναι $Z\widehat{B}\Delta = 30^o$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά του ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $\Delta Z = \frac{BZ}{2}$. Τότε:

ΑΔ = ΑΖ + ΖΔ

ΑΖ=ΒΖ από το i. Ερώτημα

Άρα $A\Delta = BZ + \frac{BZ}{2} = \frac{3}{2}BZ$.

β) Αν το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $Z\widehat{A}E = 60^o$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ για τις οξείες γωνίες του ισχύει: $\Delta\widehat{A}\Gamma + \widehat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 30^o$. Επίσης από το ερώτημα α) i. είναι $\widehat{B} = 60^o$ οπότε $B\widehat{A}\Gamma + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow B\widehat{A}\Gamma + 60^o + 30^o = 180^o \Leftrightarrow B\widehat{A}\Gamma = 90^o$.

1714

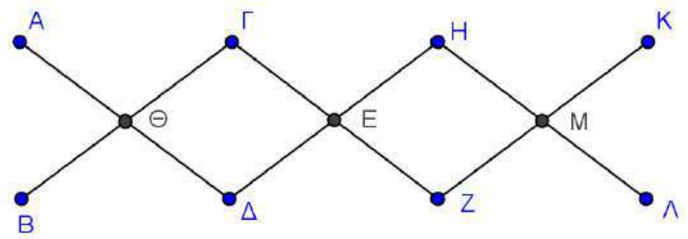
ΘΕΜΑ 4

Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι **ίσα** ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου (ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ). Αν το σημείο Θ, είναι **μέσο** των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι **μέσο** των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)

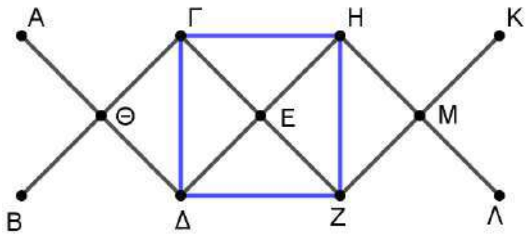
β) Τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



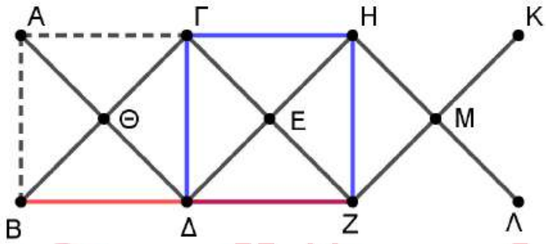
1714-Λύση

α)



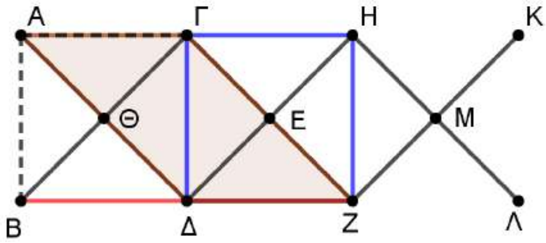
Επειδή ΓΕ = ΕΖ και ΕΗ = ΔΕ, αφού Ε μέσο των ΓΖ και ΔΗ, στο τετράπλευρο ΓΗΖΔ οι διαγώνιες του διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο.

β)



Επειδή ΘΑ = ΘΔ και ΘΓ = ΘΒ, αφού Θ μέσο των ΑΔ και ΒΓ, στο τετράπλευρο ΑΒΔΓ οι διαγώνιες του διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο, οπότε $B\widehat{\Delta}\Gamma = 90^o$. Επίσης το ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο από το α) ερώτημα, οπότε $\Gamma\widehat{\Delta}Z = 90^o$. Τότε $B\widehat{\Delta}Z = B\widehat{\Delta}\Gamma + \Gamma\widehat{\Delta}Z = 180^o$, οπότε τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά.

γ)



Από το ορθογώνιο ΑΓΔΒ συμπεραίνουμε ότι ΑΓ//ΒΔ οπότε και ΑΓ//ΔΖ αφού Β, Δ, Ζ συνευθειακά σημεία (**β)** ερώτημα). Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΓΔΖ έχουν:

- $A\widehat{\Gamma}\Delta = \Gamma\widehat{\Delta}Z = 90°$ (ΑΒΔΓ και ΓΗΖΔ ορθογώνια παραλληλόγραμμα)
- ΓΔ κοινή πλευρά,
- ΑΔ = ΓΖ, από υπόθεση

Άρα τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΓΔΖ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Οπότε και οι άλλες κάθετες πλευρές τους θα είναι ίσες, δηλαδή ΑΓ = ΔΖ. Τελικά, το ΑΓΖΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΓ και ΔΖ ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

1715

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ευθεία (ε) και δυο σημεία Α, Β εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Φέρουμε ΑΔ, ΒΓ κάθετες στην (ε) και Μ, Ν μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

α) Αν τα Α, Β είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε)

i) να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

1) ΑΔ < ΒΓ (Μονάδες 4)

2) ΑΔ = ΒΓ. (Μονάδες 4)

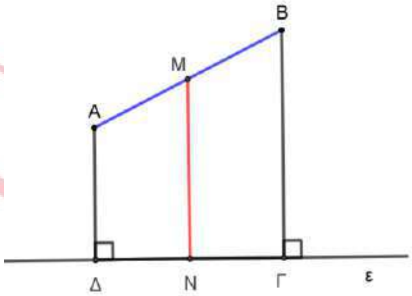
ii) να εκφράσετε το τμήμα ΜΝ σε σχέση με τα τμήματα ΑΔ, ΒΓ στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις. (Μονάδες 6)

β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει το τμήμα ΑΒ στο μέσο του Μ να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα Μ, Ν ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9+2)

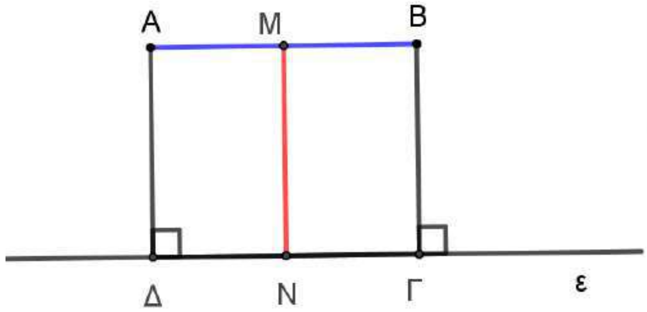
1715-Λύση

α) Επειδή ΑΔ $\perp$ ε και ΒΓ $\perp$ ε, τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ είναι κάθετα στην ίδια ευθεία οπότε είναι μεταξύ τους παράλληλα. Δηλαδή ΑΔ // ΒΓ .

i) 1) Αν ΑΔ < ΒΓ, τότε ΑΔ $\neq$ ΒΓ άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ δεν είναι παραλληλόγραμμο οπότε έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες και είναι τραπέζιο.



2) Αν ΑΔ = ΒΓ, τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $\widehat{\Delta} = 90^{o}$ (ΑΔ$\perp$ε), είναι τελικά ορθογώνιο.

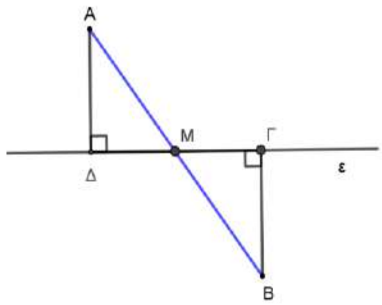


ii) 1) Όταν το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο, τότε το ΜΝ είναι διάμεσός του, άρα

ΜΝ = $\dfrac{ΑΔ+ΒΓ}{2}$.

2) Όταν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, τότε και τα ΑΜΝΔ, ΜΝΓΒ είναι ορθογώνια. Γιατί ΑΜ=ΔΝ ίσα και παράλληλα ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΔΓ. Ομοίως ΜΒ=//ΝΓ και τότε ΜΝ = ΑΔ = ΒΓ.

β) Αν η (ε) τέμνει το ΑΒ στο μέσο του Μ, τότε:



Τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΜΒΓ έχουν:

- $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma} = 90°$

1715-Λύση

- AM = MB, διότι M μέσο της AB
- $A\widehat{M}\Delta$ = $B\widehat{M}\Gamma$, ως κατακορυφήν.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε θα έχουν ίσες και τις άλλες κάθετες πλευρές τους, δηλαδή ΑΔ=ΒΓ. Τότε το τετράπλευρο ΑΓΒΔ θα είναι παραλληλόγραμμο αφού δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

Επειδή ΑΜ > ΜΔ

και ΜΒ > ΜΓ θα είναι

ΑΜ+ΜΒ>ΜΔ+ΜΓ $\Leftrightarrow$ ΑΒ > ΓΔ. Άρα το ΑΓΒΔ δεν έχει ίσες διαγώνιες οπότε δεν είναι ορθογώνιο. Επειδή οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται, τα μέσα Μ και Ν των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα ταυτίζονται.

1719

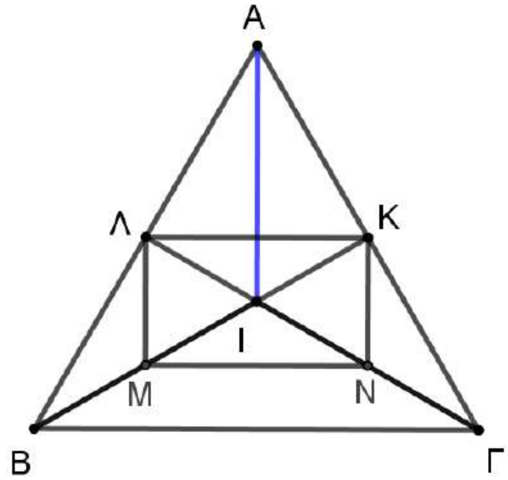
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΚ και ΓΛ, τα οποία τέμνονται στο Ι.

Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΙΒ και ΙΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε:

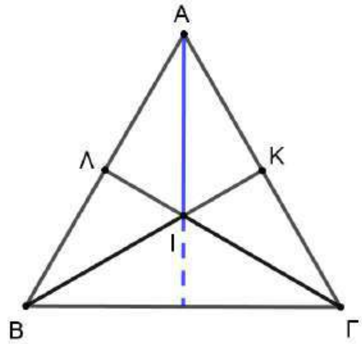
α) Το ΑΙ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (Μονάδες 15)



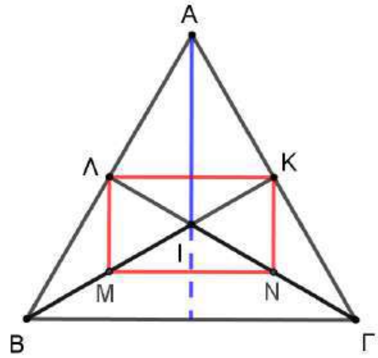
1719-Λύση

α)



Επειδή στο σημείο Ι τέμνονται τα ύψη ΒΚ και ΛΓ του τριγώνου ΑΒΓ, το Ι είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου οπότε το ΑΙ θα βρίσκεται στο φορέα του 3^{ου} ύψους και επειδή το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, κάθε ύψος είναι και διάμεσος, άρα η προέκταση του ΑΙ θα διχοτομεί την πλευρά ΒΓ.

β)



Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Λ, Κ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ οπότε ΛΚ // = $\frac{\mathrm{Β\Gamma}}{2}$ (1). Στο τρίγωνο ΙΒΓ τα Μ, Ν είναι τα μέσα των ΙΒ και ΙΓ οπότε ΜΝ // = $\frac{\mathrm{Β\Gamma}}{2}$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι ΛΚ=//ΜΝ, άρα το ΜΛΚΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Στο τρίγωνο ΑΒΙ το ευθύγραμμο τμήμα ΛΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΙ οπότε ΛΜ//ΑΙ.

Το ΑΙ βρίσκεται στο φορέα του 3^{ου} ύψους (α) ερώτημα) άρα ΑΙ$\perp$ΒΓ και επειδή ΒΓ//ΛΚ από τη σχέση (1), θα είναι ΑΙ$\perp$ΛΚ.

Άρα το τμήμα ΛΜ θα είναι κάθετο στο τμήμα ΛΚ. Επομένως $\mathrm{Μ\widehat{Λ}Κ}$=90° οπότε το παραλληλόγραμμο ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο γιατί έχει 1 γωνία ορθή.

1720

ΘΕΜΑ 4

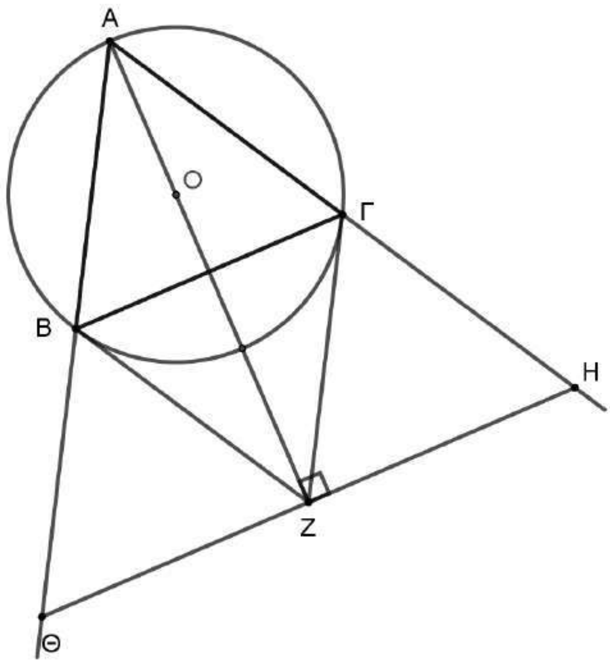
Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Τα τμήματα ΓΖ και ΒΖ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και Β αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΘΗ είναι κάθετο στο τμήμα ΑΖ στο Ζ , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

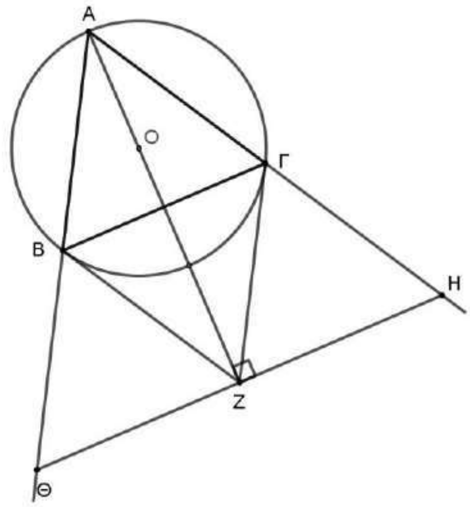
β) Το τετράπλευρο ΑΓΖΒ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΒΓΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)



1720-Λύση



α) Είναι ΖΒ = ΖΓ ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ζ προς τον κύκλο. Άρα το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισοσκελές. Οι γωνίες του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στα τόξα ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ και αφού είναι γωνίες 60^o, τότε τα αντίστοιχα τόξα τους θα είναι τόξα 120^o το καθένα.

Η γωνία $B\widehat{\Gamma}Z = \widehat{A} = 60^o$ (γωνία από τη χορδή ΒΓ και την εφαπτομένη ΓΖ ίση με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής). Οπότε, το ισοσκελές τρίγωνο ΒΓΖ έχει μία γωνία ίση με 60^o, άρα είναι ισόπλευρο.

β) Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΖ έχουμε: ΓΒ = ΓΖ = ΖΒ (1).

Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ βρίσκουμε: ΑΓ = ΑΒ = ΓΒ (2).

Από (1), (2) προκύπτει: ΑΓ = ΑΒ = ΓΖ = ΖΒ, δηλαδή το τετράπλευρο ΑΓΖΒ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

γ) Ισχύει ότι:

- $\Theta H \perp AZ$, από υπόθεση και
- $B\Gamma \perp AZ$, γιατί είναι διαγώνιοι του ρόμβου ΑΓΖΒ και τέμνονται κάθετα.

Άρα ΒΓ // ΘΗ αφού είναι κάθετες στην ίδια ευθεία ΑΖ. Επομένως το τετράπλευρο ΒΓΗΘ είναι τραπέζιο αφού ΒΓ // ΘΗ και οι ΘΒ, ΗΓ δεν είναι παράλληλες γιατί τέμνονται στο Α. Επίσης:

- $\widehat{\Theta} = \widehat{B} = 60^o$ και $\widehat{H} = \widehat{\Gamma} = 60^o$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΒΓ//ΘΗ τεμνομένων από ΑΘ και ΑΗ αντίστοιχα.

Άρα το τραπέζιο ΒΓΗΘ είναι ισοσκελές γιατί οι γωνίες της βάσης του ΒΗ είναι ίσες.

1721

ΘΕΜΑ 4

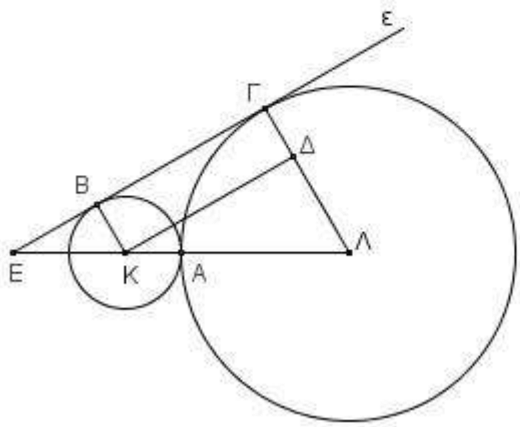
Οι κύκλοι (Κ, ρ) και (Λ, 3ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Μία ευθεία ε εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Ε. Φέρουμε από το σημείο Κ παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα ΛΓ στο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΚΛ είναι 30°. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τμήμα ΕΛ=6ρ, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου (Κ, ρ).

(Μονάδες 8)



1721-Λύση

α) Οι ακτίνες ΚΒ και ΛΓ είναι κάθετες στην εφαπτομένη ε, άρα ΚΒ//ΛΓ. Επίσης ΚΔ // ΒΓ από υπόθεση οπότε το ΒΓΔΚ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $K\widehat{B}\Gamma = 90^o$, τελικά το ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο.

β) Από το ορθογώνιο ΒΓΔΚ έχουμε ότι ΒΚ=ΓΔ=ρ. Επίσης ΔΛ = ΓΛ – ΓΔ = 3ρ-ρ = 2ρ και ΚΛ = ΚΑ + ΑΛ = ρ + 3ρ = 4ρ (διάκεντρος κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΔΛ η κάθετη πλευρά ΔΛ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας ΚΛ, οπότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από αυτή την πλευρά είναι γωνία 30^o . Δηλαδή $\Delta\widehat{K}\Lambda = 30^o$.

γ) Είναι $\widehat{E} = \Delta\widehat{K}\Lambda = 30^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΚΔ // ΕΓ που τέμνονται από την ΕΛ. Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΓΛ ισχύει ότι: $\Gamma\Lambda = \frac{E\Lambda}{2} \Leftrightarrow$ ΕΛ = 2ΓΛ = 2 · 3ρ = 6ρ.

1722

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $ΔΕ \perp ΒΓ$ και ονομάζουμε Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β)Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

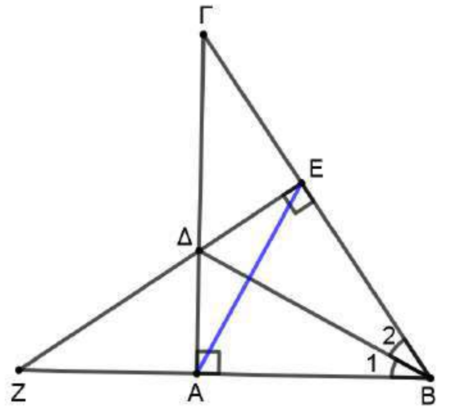
γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων ΑΕ και ΖΓ. (Μονάδες 6)

δ)Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

1722-Λύση

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}} = 90°$, ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$ και ΔΕ το κάθετο τμήμα στη ΒΓ που τέμνει την προέκταση της ΒΑ στο Ζ.

α)



Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΔ έχουν:

- $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{E}} = 90°$ (Υπόθεση και ΔΕ⊥ΒΓ)
- ΒΔ κοινή πλευρά
- $\widehat{\mathrm{B}}_1$ = $\widehat{\mathrm{B}}_2$ γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της $\widehat{\mathrm{B}}$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε θα είναι ίσες και οι κάθετες πλευρές ΑΒ και ΒΕ στις οποίες είναι προσκείμενες οι ίσες γωνίες $\widehat{\mathrm{B}}_1$ και $\widehat{\mathrm{B}}_2$ αντίστοιχα. Άρα το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

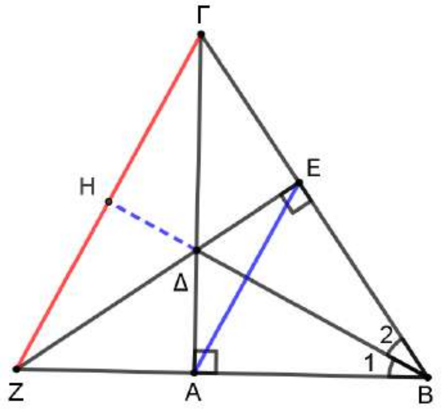
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ έχουν:

- $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{E}} = 90°$
- ΑΒ=ΒΕ (ΑΒΕ ισοσκελές – α) ερώτημα)
- $\widehat{\mathrm{B}}$ κοινή γωνία

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίση μία κάθετη πλευρά τους και την προσκείμενη οξεία γωνία ίση.

1722-Λύση

γ)



Ισχύει ότι:

- ΒΑ = ΒΕ (ΑΒΕ ισοσκελές) (1)
- ΔΑ = ΔΕ (τριγ ΑΔΒ = τριγ ΒΔΕ από α) ερώτημα)

Άρα τα σημεία Β και Δ ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος ΑΕ, οπότε η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι ίσα, από το β) ερώτημα, θα έχουν ίσες υποτείνουσες, δηλαδή ΒΓ = ΒΖ (2). Άρα το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές. Η διχοτόμος ΒΔ της γωνίας $\widehat{B}$ στο τρίγωνο ΒΖΓ τέμνει την πλευρά ΓΖ στο σημείο Η και επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την ΓΖ, το τμήμα ΒΗ είναι ύψος και διάμεσός της πλευράς ΓΖ. Δηλαδή η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΓΖ.

δ) Επειδή ΑΕ $\perp$ ΒΔ και ΖΓ $\perp$ ΒΔ, είναι ΑΕ // ΖΓ. Επίσης οι ΖΑ και ΓΕ δεν είναι παράλληλες αφού τέμνονται στο Β. Άρα το ΑΕΓΖ είναι τραπέζιο. Ισχύει ότι: ΕΓ = ΒΓ – ΒΕ = ΒΖ – ΑΒ = ΑΖ (από τις ισότητες (1) και (2)). Συνεπώς το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1723

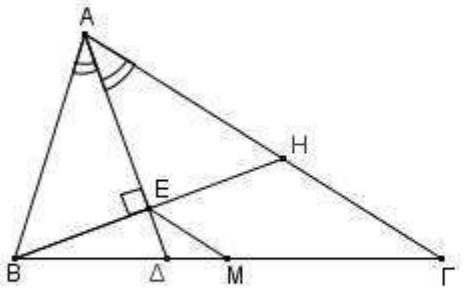
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) και η διχοτόμος του ΑΔ. Φέρουμε από το Β κάθετη στην ΑΔ που τέμνει την ΑΔ στο Ε και την πλευρά ΑΓ στο Η. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) ΕΜ//ΗΓ (Μονάδες 8)

γ) ΕΜ=(ΑΓ-ΑΒ)/2 (Μονάδες 8)



1723-Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΗ, το ΑΕ είναι ύψος (αφού ΒΕ⊥ΑΔ) και διχοτόμος. Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΒ, ΑΗ.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΗ, το τμήμα ΑΕ θα είναι και διάμεσός του. Δηλαδή το Ε είναι μέσο του τμήματος ΒΗ. Στο τρίγωνο ΒΗΓ τα Ε, Μ είναι μέσα των πλευρών ΒΗ και ΒΓ, άρα ΕΜ // ΗΓ.

γ) Για το τμήμα ΕΜ που ενώνει τα μέσα των ΒΗ και ΒΓ ισχύει επίσης ότι: ΕΜ = $\frac{\mathrm{Η\Gamma}}{2} = \frac{\mathrm{Α\Gamma} - \mathrm{ΑΗ}}{2} = \frac{\mathrm{Α\Gamma} - \mathrm{ΑΒ}}{2}$, αφού ΑΒ=ΑΗ από α) ερώτημα.

1724

ΘΕΜΑ 4

Έστω ΑΒΓ τρίγωνο και τα ύψη του BE $και$ $ΓΔ$ που αντιστοιχούν στις πλευρές $ΑΓ$ και AB αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ, τότε τα ύψη BE $και$ $ΓΔ$ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση ***Π*** αιτιολογώντας την απάντησή σας

(Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την ***αντίστροφη*** πρόταση της ***Π*** και να αποδείξετε ότι ισχύει.

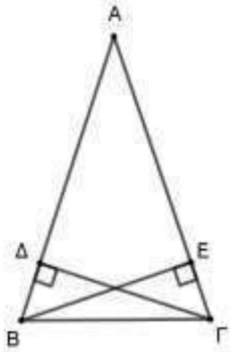
(Μονάδες 10)

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση ***Π*** και την ***αντίστροφή της*** ως ενιαία πρόταση.

(Μονάδες 5)

1724-Λύση

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.



α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.

Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

- $\widehat{\Delta} = \widehat{\mathrm{E}} = 90°$ αφού ΓΔ, ΒΕ ύψη
- ΒΓ κοινή πλευρά
- Δ$\widehat{\mathrm{B}}$Γ = Ε$\widehat{\Gamma}$Β, γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Επομένως θα είναι ίσες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες Δ$\widehat{\mathrm{B}}$Γ και Ε$\widehat{\Gamma}$Β αντίστοιχα. Δηλαδή ΒΕ = ΓΔ.

β) Αντίστροφη πρόταση:

Αν δύο ύψη ενός τριγώνου είναι ίσα, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ίσες τις πλευρές στις οποίες αντιστοιχούν τα ύψη αυτά.

Απόδειξη

Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

- $\widehat{\Delta} = \widehat{\mathrm{E}} = 90°$ αφού ΓΔ, ΒΕ ύψη
- ΒΓ κοινή πλευρά
- ΒΕ = ΓΔ (υπόθεση)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Οπότε θα έχουν ίσες και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ και ΓΔ αντίστοιχα. Δηλαδή Δ$\widehat{\mathrm{B}}$Γ = Ε$\widehat{\Gamma}$Β ή $\widehat{\mathrm{B}}$=$\widehat{\Gamma}$. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο γωνίες ίσες, είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ.

γ) Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

1725

ΘΕΜΑ 4

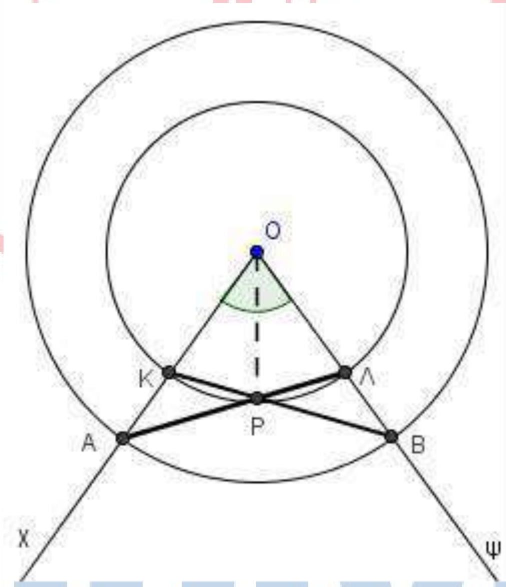
Δίνεται οξεία γωνία $x\hat{O}y$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (Ο, ρ_1) και (Ο, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Οχ στα σημεία Κ, Α και την Οψ στα Λ, Β αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΛ = ΒΚ. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ και ΒΚ. (Μονάδες 8)

γ) Η ΟΡ διχοτομεί την $x\hat{O}y$. (Μονάδες 9)



1725-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΟΛ και ΒΟΚ έχουν:

- ΟΑ = ΟΒ = ρ_2
- ΟΚ = ΟΛ = ρ_1
- $\widehat{O}$ κοινή γωνία

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΟΛ και ΒΟΚ είναι ίσα. Άρα θα έχουν ίσες και τις τρίτες πλευρές τους, δηλαδή ΑΛ = ΒΚ.

β) Επειδή ΟΑ = ΟΒ , το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, οπότε $O\widehat{A}B = O\widehat{B}A$ γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου (1).

Επίσης $O\widehat{A}Λ = O\widehat{B}K$ (από την ισότητα των τριγώνων ΑΟΛ και ΒΟΚ) (2).

$O\widehat{A}B - O\widehat{A}Λ = O\widehat{B}A - O\widehat{B}K \Rightarrow P\widehat{A}B = P\widehat{B}A$ (ίσες ως διαφορές ίσων γωνιών). Άρα το τρίγωνο ΡΑΒ έχει δύο γωνίες ίσες οπότε είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ και ίσες πλευρές τις ΡΑ και ΡΒ.

γ) Τα τρίγωνα ΟΡΑ και ΟΡΒ έχουν:

- ΟΑ = ΟΒ= ρ_2
- ΟΡ κοινή πλευρά
- ΡΑ = ΡΒ (ΑΡΒ ισοσκελές τρίγωνο, β) ερώτημα)

Από το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα ΟΡΑ και ΟΡΒ είναι ίσα. Άρα θα έχουν ίσες και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΡΑ και ΡΒ αντίστοιχα. Δηλαδή $A\widehat{O}P = B\widehat{O}P$, επομένως η ΟΡ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\widehat{O}y$.

1726

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

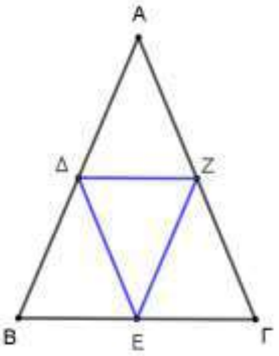
β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

i. ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 8)

ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο. (Μονάδες 9)

1726-Λύση

α)



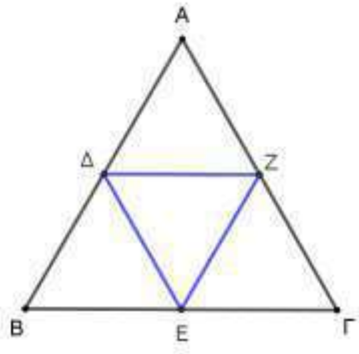
Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα.

Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα ΔΕ = $\frac{\mathrm{ΑΓ}}{2}$ (1)

Το ΕΖ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα ΕΖ = $\frac{\mathrm{ΑΒ}}{2}$ (2)

Επειδή ΑΒ=ΑΓ από (1) και (2) προκύπτει ότι ΔΕ=ΕΖ, δηλαδή το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισοσκελές.

β) i. Πρόταση: «Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ισόπλευρου τριγώνου είναι ισόπλευρο».

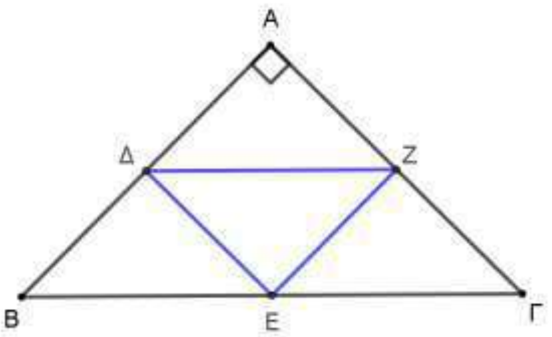


Επειδή το ΔΖ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει ότι ΔΖ = $\frac{\mathrm{ΒΓ}}{2}$ (3)

Επειδή ΑΒ=ΒΓ=ΑΓ από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΔΕ=ΕΖ=ΖΔ, οπότε το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

1726-Λύση

ii. Πρόταση: «Το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου είναι ορθογώνιο και ισοσκελές».



Έστω ότι $\widehat{A} = 90^o$, και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Επειδή ΔΕ//ΑΓ, ΖΕ//ΑΒ (ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα μέσα 2 πλευρών ενός τριγώνου) και ΑΒ ⊥ ΑΓ θα είναι και ΔΕ ⊥ ΖΕ, άρα το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ορθογώνιο με $\hat{E} = 90^o$. Επειδή ΖΕ = $\frac{AB}{2}$, ΔΕ = $\frac{B\Gamma}{2}$ και ΑΒ=ΑΓ θα είναι και ΖΕ=ΔΕ. Άρα το τρίγωνο ΔΕΖ είναι και ισοσκελές.

1727

ΘΕΜΑ 4

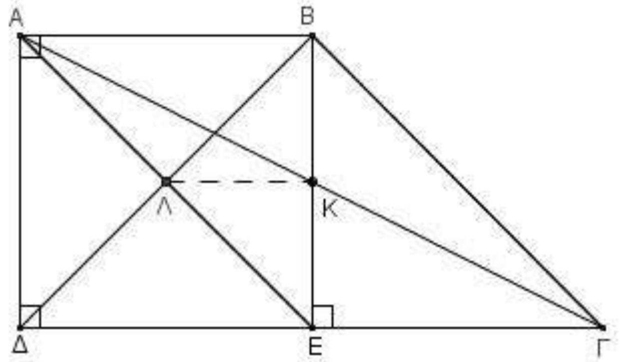
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A}=\hat{\Delta}=90°$, ΔΓ=2ΑΒ και $\hat{B}=3\hat{\Gamma}$. Από το Β φέρνουμε κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΓΔ στο Ε. Επίσης φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Λ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma}=45°$ (Μονάδες 8)

β) ΒΔ=ΑΕ (Μονάδες 9)

γ) ΚΛ=$\frac{1}{4}$ΔΓ. (Μονάδες 8)



1727-Λύση

α) Οι γωνίες $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, άρα είναι παραπληρωματικές. Οπότε

$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 4\hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 45^o$

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχει τρείς γωνίες ορθές, τις $\hat{A}$, $\hat{\Delta}$ από την υπόθεση και την $\Delta\hat{E}B$ αφού η ΒΕ είναι κάθετη στην ΓΔ από κατασκευή, επομένως είναι ορθογώνιο. Οι ΑΕ, ΒΔ είναι διαγώνιοι του ορθογωνίου, οπότε είναι ίσες.

γ) Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΒΕΓ ισχύει:

$E\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma + 45^o = 90^o \Leftrightarrow E\hat{B}\Gamma = 45^o$. Επομένως το τρίγωνο ΒΕΓ έχει δύο γωνίες ίσες, τις $\hat{\Gamma}$ και $E\hat{B}\Gamma$, άρα είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΒΕ και ΕΓ.

Επίσης από το ορθογώνιο ΑΒΕΔ έχουμε ότι ΑΒ = ΔΕ και επειδή από τα δεδομένα έχουμε ότι 2ΑΒ=ΓΔ, συμπεραίνουμε ότι ΔΕ = $\frac{1}{2}$ΓΔ. Δηλαδή το σημείο Ε είναι μέσο της πλευράς ΓΔ. Οπότε ΑΒ=ΔΕ=ΕΓ. Τότε όμως το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο αφού ΑΒ=//ΕΓ και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Στο τρίγωνο ΑΕΓ το ΛΚ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΕ και ΑΓ, άρα $K\Lambda = \frac{1}{2}E\Gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\Gamma\Delta\right) = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$.

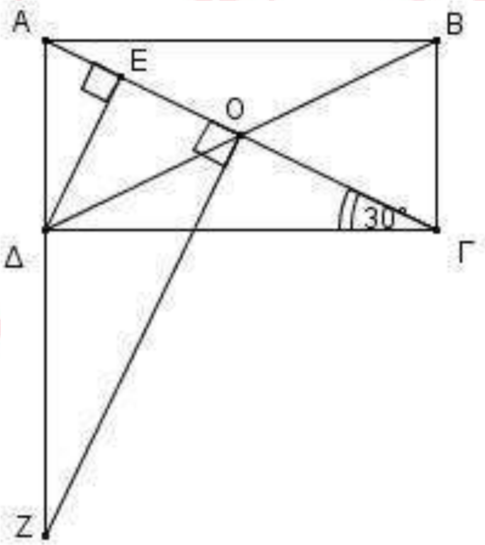
1729

ΘΕΜΑ 4

Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{\Delta\Gamma A} = 30°$ και Ο το κέντρο του. Φέρουμε ΔΕ $\perp$ ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{\Delta}\Gamma$ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρεις ίσες γωνίες. (Μονάδες 13)

β) Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Ο η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ζ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



1729-Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ οι οξείες γωνίες του $\Delta\widehat{A}\Gamma$ και $\Delta\widehat{\Gamma}A$ είναι συμπληρωματικές, οπότε αφού $\Delta\widehat{\Gamma}A = 30^o$, τότε $\Delta\widehat{A}\Gamma = 60^o$ (1). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΕ οι οξείες γωνίες του $\Delta\widehat{A}\Gamma$ και $A\widehat{\Delta}E$ είναι συμπληρωματικές, οπότε αφού $\Delta\widehat{A}\Gamma = 60^o$, τότε $A\widehat{\Delta}E = 30^o$ (2).

Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ίσες και διχοτομούνται, άρα

$O\Gamma = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} = O\Delta$.

Επομένως το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΔΓ, οπότε $O\widehat{\Delta}\Gamma = O\widehat{\Gamma}\Delta = 30^o$ (3).

Ισχύει ακόμη ότι: $A\widehat{\Delta}E + E\widehat{\Delta}O + O\widehat{\Delta}\Gamma = 90^o$. Δηλαδή $30^o + E\widehat{\Delta}O + 30^o = 90^o$.

Άρα $E\widehat{\Delta}O = 30^o$ (4).

Από τις (2), (3) και (4) έχουμε ότι $A\widehat{\Delta}E = E\widehat{\Delta}O = O\widehat{\Delta}\Gamma = 30^o$.

Άρα η γωνία $A\widehat{\Delta}\Gamma$ χωρίζεται από τις ΔΕ και ΔΒ σε τρείς ίσες γωνίες.

β) Το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισοσκελές με ΟΑ=ΟΔ ως μισά των ίσων διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. Αφού $\Delta\widehat{A}\Gamma = 60^o$ από(1) θα είναι $\Delta\widehat{A}E = 60^o$. Άρα το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισόπλευρο με ΟΑ = ΟΔ = ΑΔ. Όμως ΑΔ=ΒΓ ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου. Άρα τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ έχουν:

- $\widehat{O} = \widehat{B} = 90°$ ($ZO \perp A\Gamma$ στο σημείο Ο)
- ΟΑ = ΒΓ
- $A\widehat{\Gamma}B = 90° - 30° = 60^o = Z\widehat{A}O$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με μία κάθετη πλευρά ίση και την προσκείμενη οξεία γωνία ίση.

1730

ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύει ΑΒ>ΑΔ, να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: $\widehat{\mathrm{A E \Delta}} = \widehat{\mathrm{B Z \Gamma}}$.

Ισχυρισμός 3: Οι ΔΕ και ΒΖ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\widehat{\Delta}$και$\widehat{\mathrm{B}}$.

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

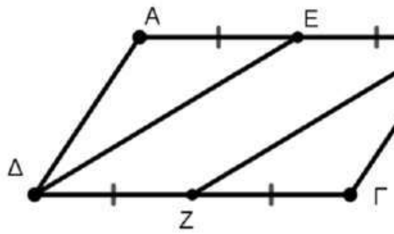
β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, ναβρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

1730-Λύση

α) Απόδειξη ισχυρισμού 1

Είναι ΔΖ = $\frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AB}{2}$ = ΕΒ και ΔΖ // ΕΒ (ως τμήματα των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ).

Δηλαδή το τετράπλευρο ΔΕΒΖ έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.



Απόδειξη ισχυρισμού 2

Επειδή το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ότι $\Delta\hat{E}B = B\hat{Z}\Delta$. Οπότε, και οι παραπληρωματικές τους $A\hat{E}\Delta$ και $B\hat{Z}\Gamma$ θα είναι ίσες, δηλαδή $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$.

Ο ισχυρισμός 3 δεν είναι αληθής και στο β ερώτημα γίνεται μία αιτιολόγηση.

β) Ισχυρισμός 3

Έστω ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$. Τότε $A\hat{\Delta}E = E\hat{\Delta}Z$ (1). Ισχύει επιπλέον ότι $A\hat{E}\Delta = E\hat{\Delta}Z$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΕΔ. Από (1), (2) βρίσκουμε $A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta$. Οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, με ΑΕ = ΑΔ. Τότε ΑΔ = ΑΕ = $\frac{AB}{2} \Leftrightarrow$ ΑΒ = 2ΑΔ. Αν λοιπόν η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$, τότε η μία πλευρά του παραλληλογράμμου είναι διπλάσια της άλλης. Και αντιστρόφως, αν ΑΒ = 2ΑΔ, τότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, οπότε $A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta$. Και αφού είναι και $A\hat{E}\Delta = E\hat{\Delta}Z$, θα έχουμε ότι $A\hat{\Delta}E = E\hat{\Delta}Z$, δηλαδή ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$.

1731

ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύουν ΑΒ>ΑΔ και γωνία Α αμβλεία , να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.
Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.
Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ισοσκελή.

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

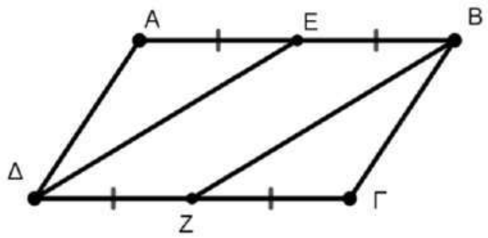
(Μονάδες 9)

1731-Λύση

α) Απόδειξη ισχυρισμού 1

ΔΖ = $\frac{ΔΓ}{2} = \frac{ΑΒ}{2}$ = ΕΒ και ΔΖ // ΕΒ (ως τμήματα των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ).

Άρα το τετράπλευρο ΔΕΒΖ έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.



Απόδειξη ισχυρισμού 2

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ έχουν:

- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- ΑΕ = $\frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΔΓ}{2}$ = ΖΓ
- $\widehat{Α}$ = $\widehat{Γ}$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Ισχυρισμός 3

Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ είναι ισοσκελή. Τότε θα ισχύει ΑΔ = ΑΕ = $\frac{ΑΒ}{2} \Leftrightarrow$ ΑΒ = 2ΑΔ. Και αντιστρόφως, αν ΑΒ=2ΑΔ, τότε ΑΔ=ΑΕ, οπότε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ θα είναι ισοσκελή. Άρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ είναι ισοσκελή αν και μόνο αν η μία πλευρά του παραλληλογράμμου είναι διπλάσια της άλλης.

1733

ΘΕΜΑ 4

Έστω ε_1, ε_2 δυο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο Ο και τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

α) Αν M_1 είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την ε_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2, να αποδείξετε ότι:

I. $OM = OM_1$ (Μονάδες 6)

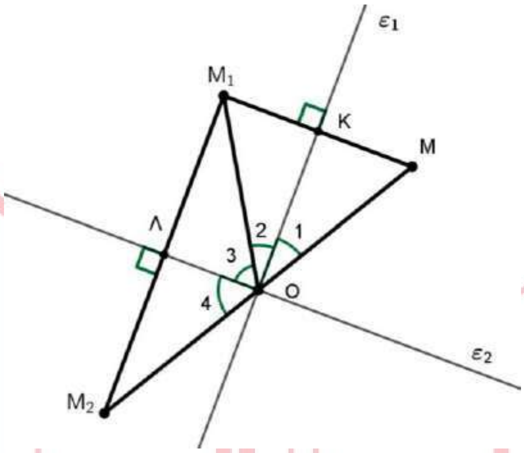
II. Τα σημεία Μ, Ο και M_2 είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

III. Το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

Β) Αν M_3 είναι το συμμετρικό σημείο του M_2 ως προς την ε_1, τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

1733-Λύση

α) i. Επειδή το σημείο $Μ_1$ είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την $ε_1$, η $ε_1$ είναι μεσοκάθετος του $ΜΜ_1$. Το Ο ανήκει στη μεσοκάθετο του $ΜΜ_1$, οπότε ισαπέχει από τα Μ και $Μ_1$, δηλαδή $ΟΜ = ΟΜ_1$.



ii. Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΟΜΜ_1$ η διάμεσος ΟΚ είναι και διχοτόμος, άρα $Μ\widehat{Ο}Μ_1 = 2\widehat{Ο}_2$.

Επειδή στο τρίγωνο $Μ_1ΟΜ_2$ η ΟΛ είναι διάμεσος και ύψος το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα η ΟΛ είναι και διχοτόμος και ισχύει $Μ_1\widehat{Ο}Μ_2 = 2\widehat{Ο}_3$.

Τότε: $Μ\widehat{Ο}Μ_2 = Μ\widehat{Ο}Μ_1 + Μ_1\widehat{Ο}Μ_2 = 2\widehat{Ο}_2 + 2\widehat{Ο}_3 = 2(\widehat{Ο}_2 + \widehat{Ο}_3) = 2 \cdot 90^ο = 180^ο$.

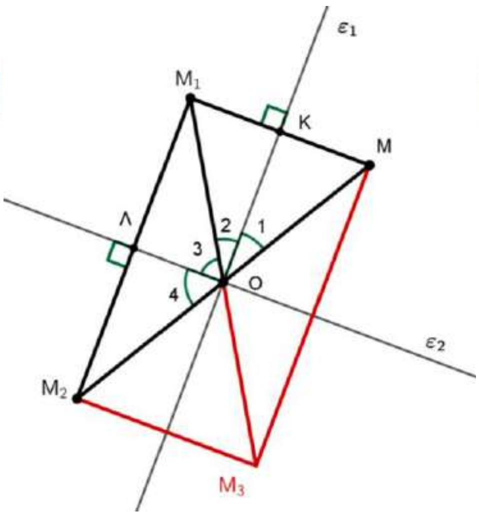
Αφού η γωνία $Μ\widehat{Ο}Μ_2$ είναι ευθεία γωνία, τα σημεία Μ, Ο και $Μ_2$ είναι συνευθειακά.

iii. Το τετράπλευρο $ΚΜ_1ΛΟ$ έχει 3 γωνίες ορθές, άρα είναι ορθογώνιο. Συνεπώς $Κ\widehat{Μ}_1Λ = 90^ο$. Άρα το τρίγωνο $ΜΜ_1Μ_2$ είναι ορθογώνιο με $Μ\widehat{Μ}_1Μ_2=90^\circ$.

β) Όμοια με το ερώτημα (α) βρίσκουμε:

$ΟΜ_3 = ΟΜ_2$ οπότε $ΟΜ_3 = ΟΜ_1 = ΟΜ_2 = ΟΜ$ και τα σημεία $Μ_1$, Ο, $Μ_3$ είναι συνευθειακά.

Τελικά στο $ΜΜ_1Μ_2Μ_3$ οι διαγώνιοι $ΜΜ_2$ και $Μ_1Μ_3$ τέμνονται στο Ο, είναι ίσες και διχοτομούνται, οπότε το $ΜΜ_1Μ_2Μ_3$ είναι ορθογώνιο.



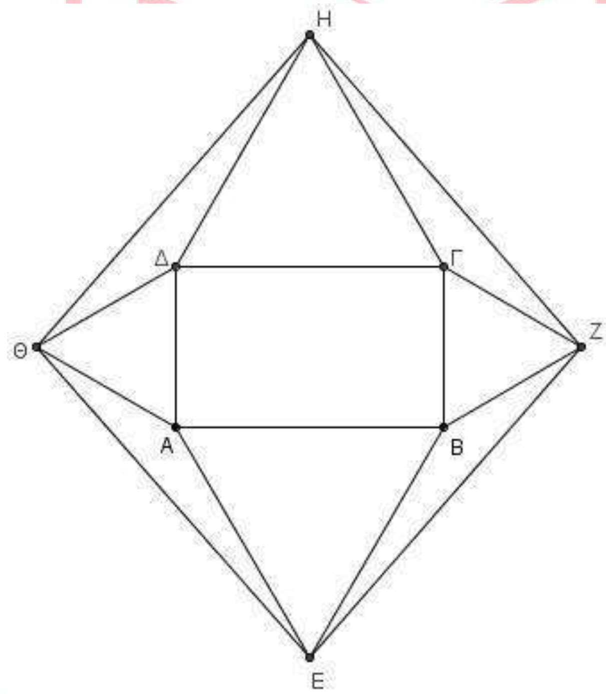
1734

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος. (Μονάδες 15)

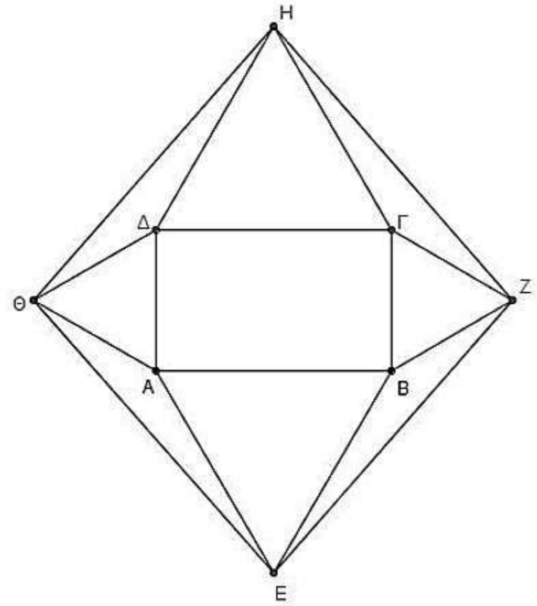
β) Αν το αρχικό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε το ΕΖΗΘ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)



1734-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΗΔΘ, ΘΑΕ, ΕΒΖ και ΗΓΖ έχουν:

- ΗΔ = ΑΕ = ΒΕ = ΓΗ, ως ίσες πλευρές των ίσων ισόπλευρων τριγώνων ΗΔΓ και ΕΑΒ (τα τρίγωνα ΗΔΓ και ΕΑΒ είναι ίσα επειδή έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες με τις πλευρές ΑΔ και ΒΓ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ)
- ΘΔ = ΘΑ = ΒΖ = ΓΖ ως ίσες πλευρές των ίσων ισόπλευρων τριγώνων ΘΔΑ και ΒΓΖ (όπως πριν, τα ΘΔΑ και ΒΓΖ είναι ίσα αφού έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες με τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ του ΑΒΓΔ)
- $H\widehat{\Delta}\Theta = \Theta\widehat{A}E = E\widehat{B}Z = Z\widehat{\Gamma}H = 360^o - 90^o - 2 \cdot 60^o = 150^o$



Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν ίσες και τις πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις γωνίες των 150°, δηλ. ΗΘ = ΘΕ = ΕΖ = ΖΗ.

Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ έχει όλες του τις πλευρές ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

β) Αν ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο τότε ισχύει ΑΒ = ΑΔ. Στα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΘ και ΑΕΒ είναι ΑΘ = ΑΔ και ΑΕ = ΑΒ, οπότε ΑΘ = ΑΕ. Δηλαδή, το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές και οι γωνίες του $A\widehat{\Theta}E$ και $A\widehat{E}\Theta$ είναι ίσες. Οπότε ισχύει ότι: $A\widehat{\Theta}E + A\widehat{E}\Theta + \Theta\widehat{A}E = 180^o$ $\Leftrightarrow 2A\widehat{\Theta}E + 150^o = 180^o \Leftrightarrow A\widehat{\Theta}E = 15^o$. Όμοια, στο τρίγωνο ΔΘΗ, βρίσκουμε $H\widehat{\Theta}\Delta = 15^o$.

Τότε: $E\widehat{\Theta}H = \Delta\widehat{\Theta}H + E\widehat{\Theta}A + A\widehat{\Theta}\Delta = 15^o + 60^o + 15^o = 90^o$

Επομένως ο ρόμβος έχει και μια γωνία ορθή, οπότε είναι τετράγωνο.

1735

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ευθεία (ε) και δυο σημεία Α και Β εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Έστω Α΄ και Β΄ τα συμμετρικά σημεία των Α και Β αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε).

α) Να αποδείξετε ότι ΑΑ' // ΒΒ'. (Μονάδες 6)

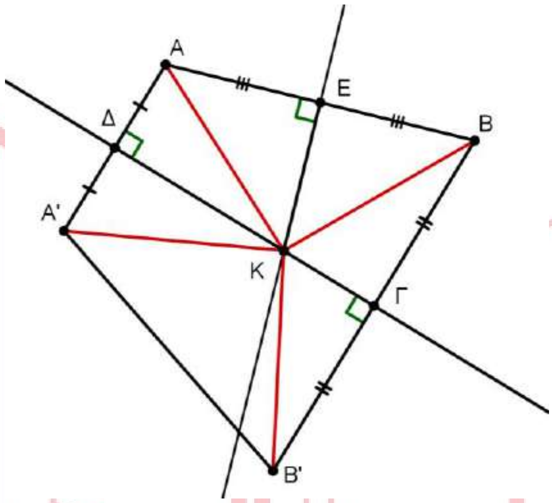
β) Αν η μεσοκάθετος του ΑΒ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Κ , να αποδείξετε ότι το Κ ανήκει και στη μεσοκάθετο του Α΄Β΄. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη σχέση της ευθείας ΑΒ με την ευθεία (ε) ώστε το τετράπλευρο ΑΒΒ’Α’ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

1735-Λύση

α) Επειδή ΑΑ΄ $\perp$ ε και ΒΒ΄ $\perp$ ε, είναι ΑΑ΄ // ΒΒ΄.

β) Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ ισαπέχει από τα Α και Β. Αφού λοιπόν το σημείο Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ, ισχύει ότι ΚΑ = ΚΒ (1).



Επειδή το Α΄ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την (ε), η (ε) είναι μεσοκάθετος του ΑΑ΄, άρα ΚΑ = ΚΑ΄ (2).

Επειδή το Β΄ είναι το συμμετρικό του Β ως προς την (ε), η (ε) είναι μεσοκάθετος του ΒΒ΄, άρα ΚΒ = ΚΒ΄ (3).

Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι ΚΑ΄= ΚΒ΄, δηλαδή ότι το Κ ισαπέχει από τα άκρα του Α'Β', άρα το Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του Α΄Β΄.

γ) Αν το ΑΒΒ΄Α΄ είναι ορθογώνιο, τότε οι γωνίες του είναι ορθές. Τότε είναι ΑΒ$\perp$ΑΑ΄ και ε $\perp$ ΑΑ΄, άρα ΑΒ // ε. Δηλαδή, αν το ΑΒΒ΄Α΄ είναι ορθογώνιο, τότε οι ΑΒ και ε είναι παράλληλες.

Αντίστροφα, αν ΑΒ // ε, αφού ε $\perp$ ΑΑ΄, θα είναι και ΑΒ$\perp$ΑΑ΄ και ομοίως Α΄Β΄$\perp$ΑΑ΄ , άρα το ΑΒΒ΄Α΄ είναι ορθογώνιο.

1737

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$) και το ύψος του ΑΗ. Ονομάζουμε Δ και Ε τα συμμετρικά σημεία του Η ως προς τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν Μ είναι το σημείο τομής του τμήματος ΗΔ με την πλευρά ΑΒ και Ν είναι το σημείο τομής του ΗΕ με την πλευρά ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) ΑΗ=ΑΔ=ΑΕ. (Μονάδες 10)

β) Η γωνία ΕΗΔ είναι ορθή. (Μονάδες 8)

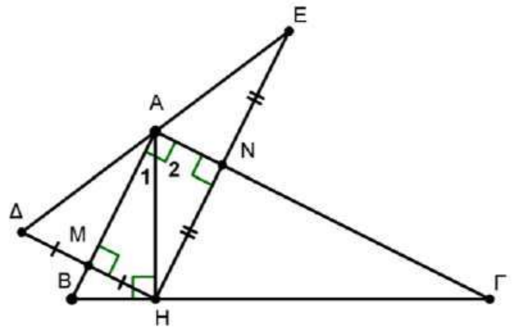
γ) Τα σημεία Α, Ε και Δ είναι συνευθειακά και ΜΝ = $\frac{\Delta E}{2}$. (Μονάδες 7)

1737-Λύση

α) Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΔΗ οπότε το Α ισαπέχει από τα Δ και Η, δηλαδή ΑΔ = ΑΗ (1)

Ομοίως, η ΑΝ είναι μεσοκάθετος του ΗΕ, άρα ΑΕ = ΑΗ (2).

Από (1), (2) προκύπτει ότι ΑΗ = ΑΔ = ΑΕ.



β) Το τετράπλευρο ΑΜΗΝ έχει 3 γωνίες ορθές ($H\widehat{M}A = M\widehat{A}N = A\widehat{N}H = 90°$), οπότε είναι ορθογώνιο. Άρα $E\widehat{H}\Delta = 90^o$.

γ) Στο ισοσκελές ΔΑΗ, η ΑΜ είναι διάμεσος, άρα και διχοτόμος, οπότε $\Delta\widehat{A}H = 2\widehat{A}_1$ (3)

Ομοίως, στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΕΗ είναι $H\widehat{A}E = 2\widehat{A}_2$ (4).

Τότε: $\Delta\widehat{A}E = \Delta\widehat{A}H + H\widehat{A}E = 2\widehat{A}_1 + 2\widehat{A}_2 = 2(\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2)$

Και αφού $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = B\widehat{A}\Gamma = 90^o$, θα είναι $\Delta\widehat{A}E = 180^o$.

Αφού η γωνία $\Delta\widehat{A}E$ είναι ευθεία γωνία, τα σημεία Ε, Α και Δ είναι συνευθειακά.

Στο τρίγωνο ΔΕΗ το ΜΝ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του, άρα είναι ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς, δηλαδή $MN = \frac{\Delta E}{2}$.

1738

ΘΕΜΑ 4

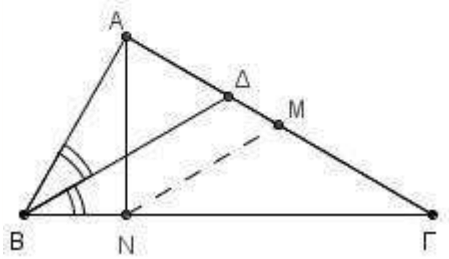
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$, και η διχοτόμος ΒΔ της γωνίας $\hat{B}$. Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο ΒΔ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ν.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

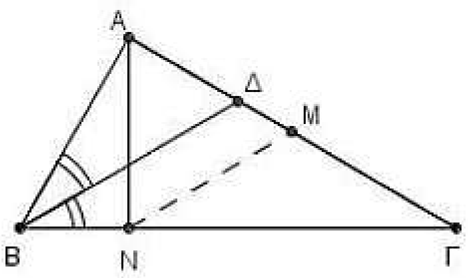
β) Το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

γ) $AN \perp B\Gamma$ (Μονάδες 10)



1738-Λύση

α) Είναι $\Delta\widehat{B}\Gamma = \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{2\widehat{\Gamma}}{2} = \widehat{\Gamma}$. Οπότε το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισοσκελές.



β) Είναι $M\widehat{N}\Gamma = \Delta\widehat{B}\Gamma$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΒΔ, ΜΝ που τέμνονται από την ΒΓ. Επειδή $\Delta\widehat{B}\Gamma = \widehat{\Gamma}$ είναι και $M\widehat{N}\Gamma = \widehat{\Gamma}$.

Άρα, το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές.

γ) Επειδή το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΝΓ, είναι $MN = M\Gamma = MA = \frac{A\Gamma}{2}$. Επομένως, στο τρίγωνο ΑΝΓ η διάμεσός του ΝΜ είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί. Άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $A\widehat{N}\Gamma = 90^o$, δηλαδή $AN \perp B\Gamma$.

ΘΕΜΑ 4

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε τα ίσα τόξα ΑΒ και ΑΓ, το καθένα ίσο με 120°. Έστω Δ και Ε τα μέσα των τόξων ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

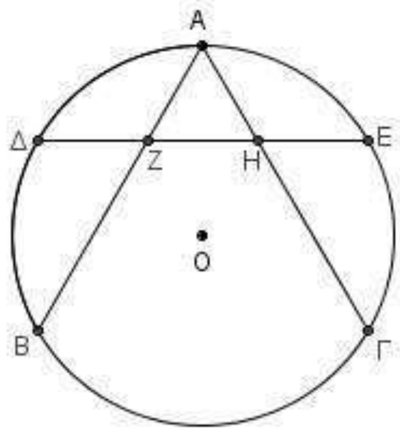
α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΕ είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους.

(Μονάδες 10)

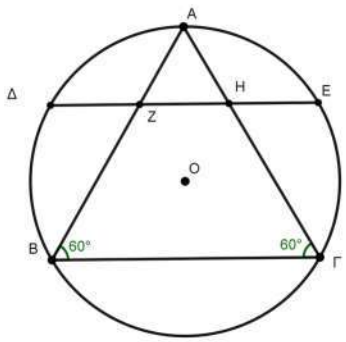
γ) Η χορδή ΔΕ τριχοτομείται από τις χορδές ΑΒ και ΑΓ.

(Μονάδες 7)



1739-Λύση

α) Είναι $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A\Gamma} = 120^\circ$, οπότε οι γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ, που είναι εγγεγραμμένες σε αυτά τα τόξα, θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο γωνίες 60°, θα είναι και η τρίτη 60°. Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.



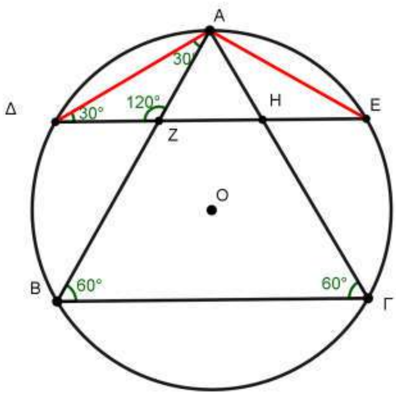
β) Επειδή τα Δ, Ε είναι μέσα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{A\Gamma}$ αντίστοιχα, ισχύει ότι: $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{\Delta B} = \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB} = 60^\circ$. Τότε: $\Delta\hat{A}Z = A\hat{\Delta}Z = H\hat{A}E = H\hat{E}A = 30^o$ διότι είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν σε τόξα των 60^o. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΖΔ, έχουμε:

$A\hat{Z}\Delta + Z\hat{\Delta}A + \Delta\hat{A}Z = 180^o \Leftrightarrow A\hat{Z}\Delta + 30^o + 30^o = 180^o \Leftrightarrow A\hat{Z}\Delta = 120^o$

Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΕ έχουν:

- ΑΔ = ΑΕ, διότι τα αντίστοιχα τόξα τους είναι ίσα
- $\Delta\hat{A}Z = E\hat{A}H = 30^o$
- $A\hat{\Delta}Z = A\hat{E}H = 30^o$

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα είναι ίσα.



γ) Το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισόπλευρο αφού $A\hat{Z}H = A\hat{H}Z = 60^o$ (εφόσον είναι παραπληρωματικές των $A\hat{Z}\Delta = A\hat{H}E = 120^o$) και έχει ΑΖ = ΖΗ = ΑΗ. Επίσης ΑΖ = ΖΔ και ΑΗ = ΗΕ αφού τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΕ είναι ισοσκελή. Τελικά ΔΖ = ΖΗ = ΗΕ, δηλαδή η χορδή ΔΕ τριχοτομείται από τις χορδές ΑΒ και ΑΓ.

1740

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

Π2: Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 20)

β) Στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

1740-Λύση

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τις αποστάσεις των απέναντι πλευρών του ΒΕ, ΒΖ (δηλ. ΒΕ⊥ΑΔ και ΒΖ⊥ΓΔ).

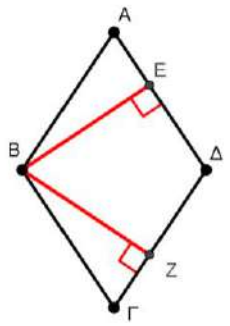
α) Απόδειξη πρότασης Π1:

Υποθέτουμε ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΒΓΖ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΑΒ = ΒΓ, ως πλευρές του ρόμβου
- $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Gamma}$, ως απέναντι γωνίες του ρόμβου.

Άρα τα τρίγωνα έχουνς την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Οπότε οι αντίστοιχες πλευρές τους ΒΕ και ΒΖ θα είναι ίσες (ΒΕ = ΒΖ). Δηλαδή οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του ρόμβου είναι ίσες.



Απόδειξη πρότασης Π2:

Υποθέτουμε ότι οι αποστάσεις ΒΕ, ΒΖ είναι ίσες.

Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΒΓΖ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΒΕ = ΒΖ, από υπόθεση
- $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Gamma}$, ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (μία κάθετη και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία). Οπότε θα είναι και οι υποτείνουσές τους ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΒΓ.

Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

β) Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν, οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

1742

ΘΕΜΑ 4

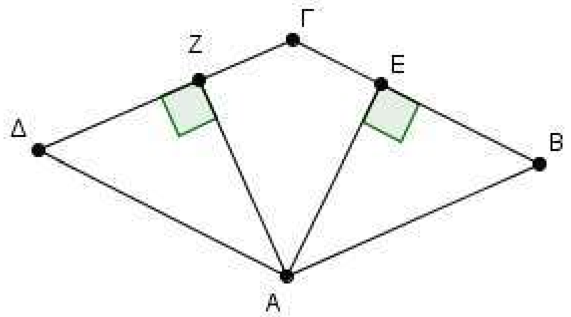
Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος είναι ρόμβος. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Η ευθεία ΑΓ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΖΕ. (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΜΝ//ΖΕ και ΖΜ=ΕΝ. (Μονάδες 10)

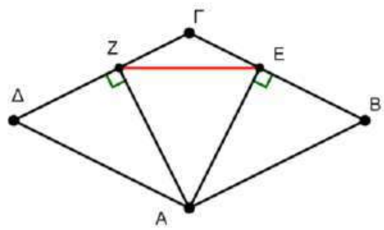


1742-Λύση

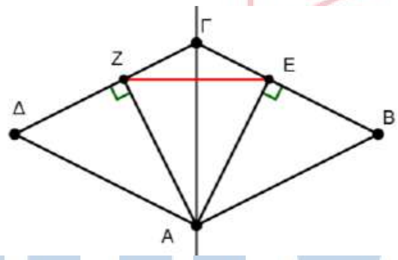
α) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΑΒ = ΑΔ, διότι είναι πλευρές του ρόμβου
- $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$, ως απέναντι γωνίες του ρόμβου.

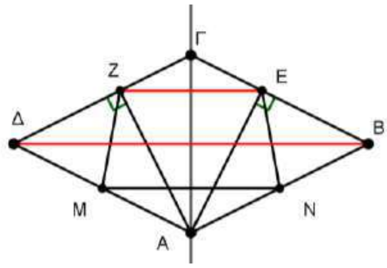
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία). Οπότε και οι αντίστοιχες πλευρές τους ΑΖ και ΑΕ θα είναι ίσες, δηλ. ΑΖ = ΑΕ. Επομένως, το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές.



β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΕΒ είναι ίσα, έχουμε ΖΔ=ΒΕ. Και αφού ΓΔ=ΓΒ (πλευρές ρόμβου), θα έχουμε και ΓΔ–ΖΔ=ΓΒ–ΒΕ, δηλαδή ΓΖ=ΓΕ.
Οπότε, το Γ ισαπέχει από τα άκρα του ΖΕ. Ομοίως, από το προηγούμενο ερώτημα, το Α ισαπέχει από τα άκρα του ΖΕ. Οπότε, τα Α και Γ θα ανήκουν στη μεσκάθετο του ΖΕ. Άρα, η ΑΓ είναι η μεσοκάθετος του ΖΕ



γ) Το ΜΝ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΔΒ, άρα ΜΝ // ΒΔ (3).



Επίσης:

- ΑΓ $\perp$ ΒΔ, ως διαγώνιες του ρόμβου
- ΖΕ $\perp$ ΑΓ, από το ερώτημα β

Επομένως ΖΕ // ΔΒ (4).

1742-Λύση

Από (3), (4) βρίσκουμε ΖΕ // ΜΝ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΖ η ΖΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα,

άρα ΖΜ = $\frac{ΑΔ}{2}$ (5). Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ ισχύει ότι ΕΝ = $\frac{ΑΒ}{2}$ (6)

Επειδή ΑΔ = ΑΒ, αφού ΑΒΓΔ ρόμβος, από τις (5), (6) προκύπτει ΖΜ = ΕΝ.

1744

ΘΕΜΑ 4

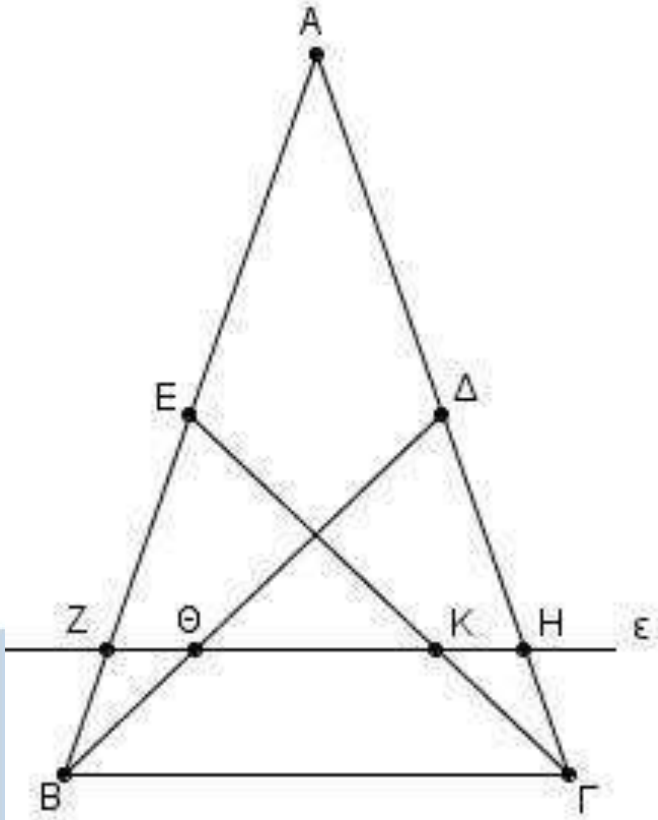
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ. Μία ευθεία ε παράλληλη στη βάση ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα και τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ στα σημεία Θ και Κ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΖ=ΓΗ. (Μονάδες 8)

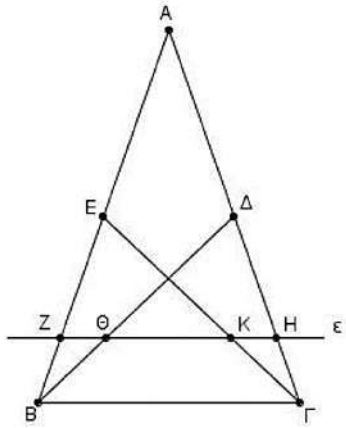
β) τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) ΖΚ=ΗΘ . (Μονάδες 8)



1744-Λύση

α) Είναι $A\hat{Z}H = A\hat{B}\Gamma$ (1), ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ε, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Όμοια $A\hat{H}Z = A\hat{\Gamma}B$ (2). Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ισχύει ότι $A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Gamma$ (3). Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $A\hat{Z}H = A\hat{H}Z$ οπότε και το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές. Επομένως ΑΖ = ΑΗ. Επειδή ΑΒ = ΑΓ και ΑΖ = ΑΗ, αφαιρούμε κατά μέλη και βρίσκουμε ΑΒ – ΑΖ = ΑΓ – ΑΗ ⇔ ΒΖ = ΓΗ.



β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

- ΑΒ = ΑΓ, διότι ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο
- ΑΔ = ΑΕ, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ
- $\hat{A}$ κοινή γωνία

Από το κριτήριο ΠΓΠ, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα οπότε και οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ = ΑΕ, θα είναι ίσες, άρα ισχύει $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$ (4).

Τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ έχουν:

- ΒΖ = ΓΗ, όπως αποδείξαμε στο ερώτημα (α)
- $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$, λόγω της (4)
- $B\hat{Z}\Theta = K\hat{H}\Gamma$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\hat{H}Z$ και $A\hat{Z}H$.

Από το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ είναι ίσα.

γ) Από το (β), επειδή τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ είναι ίσα, θα έχουν και όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα και ΖΘ = ΗΚ.

Οπότε θα είναι και ΖΘ + ΘΚ = ΗΚ + ΘΚ, δηλαδή ΖΚ = ΗΘ.

1745

ΘΕΜΑ 4

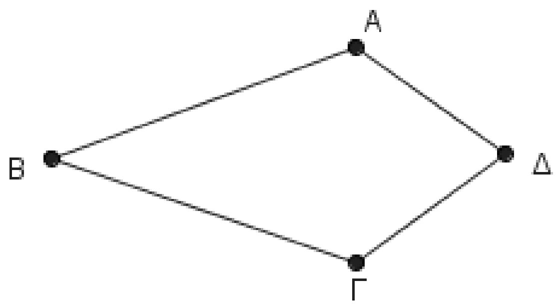
Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

Να αποδείξτε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

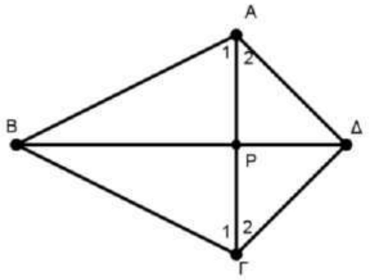
β) Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα. (Μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)



1745-Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ΒΑ = ΒΓ οπότε είναι ισοσκελές. Άρα $\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}_1$. Από υπόθεση είναι $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$, οπότε θα είναι και $\widehat{A}_2 = \widehat{\Gamma}_2$ ως διαφορά ίσων γωνιών. Συνεπώς το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.

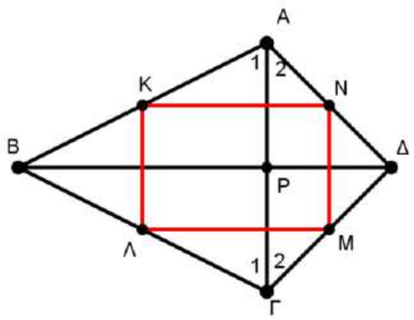


β) Ονομάζουμε Ρ το σημείο τομής των ΑΓ και ΒΔ.

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ έχουν:

- ΑΔ = ΔΓ, από το ερώτημα α
- ΒΔ, κοινή πλευρά
- ΑΒ = ΒΓ, από υπόθεση

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Π – Π τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ είναι ίσα οπότε έχουν ίσες και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ΑΔ = ΔΓ , δηλαδή θα είναι $A\widehat{B}\Delta = \Gamma\widehat{B}\Delta$. Άρα στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΒΡ είναι διχοτόμος, οπότε είναι και ύψος. Ισχύει δηλαδή $A\widehat{O}B = 90^o$, οπότε $B\Delta \perp A\Gamma$.



γ) Ονομάζουμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντιστοίχως.

Στο τρίγωνο ΑΒΔ το ΚΝ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Άρα ΚΝ // $= \frac{B\Delta}{2}$ (1).

Όμοια, στο τρίγωνο ΓΒΔ είναι ΛΜ // $= \frac{B\Delta}{2}$ (2).

Από (1), (2) συμπεραίνουμε ότι ΚΝ // = ΛΜ, οπότε το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΚΛ ενώνει τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ άρα ΚΛ // ΑΓ (3)

1745-Λύση

Επειδή ΑΓ $\perp$ ΒΔ, από τις (1), (3) συμπεραίνουμε ότι ΚΛ $\perp$ ΚΝ, δηλαδή $N\widehat{K}\Lambda = 90^o$. Άρα το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ έχει μία ορθή γωνία, άρα είναι ορθογώνιο.

1747

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο ΑΒ και δυο ευθείες $ε_1$, $ε_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του Ε και τέμνει τις $ε_1$ και $ε_2$ στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Αν το σημείο Ε δεν είναι το μέσο του τόξου ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

ii. ΓΔ= ΑΔ+ΒΓ. (Μονάδες 8)

β) Αν το σημείο Ε βρίσκεται στο μέσον του τόξου ΑΒ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΒ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΔΓΒ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

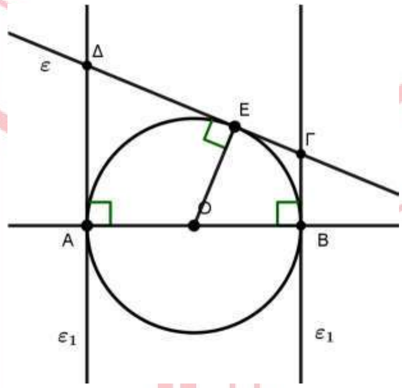
(Μονάδες 9)

1747-Λύση

α) i. Οι ε_1, ε_2 είναι κάθετες στην ΑΒ (εφπτόμενες που είναι κάθετες στις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ), άρα είναι μεταξύ τους παράλληλες. Οπότε ΔΑ // ΓΒ.

Το Ε δεν είναι μέσο του τόξου ΑΒ οπότε $B\widehat{O}E \neq 90^o$. Επειδή $\widehat{E} = 90^o$, οι ΔΓ και ΑΒ δεν είναι παράλληλες.

Άρα το ΑΒΓΔ έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες, άρα είναι τραπέζιο.



ii. Τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν, είναι μεταξύ τους ίσα, άρα ΔΑ = ΔΕ και ΓΕ = ΓΒ. Τότε ΓΔ = ΓΕ + ΕΔ = ΒΓ + ΑΔ

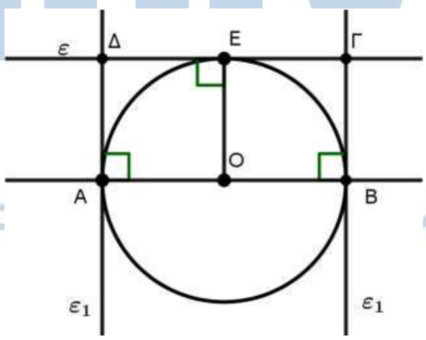
β) Εφόσον το Ε είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$, για το μέτρο της γωνίας $B\hat{O}E$ ισχύει ότι

$$B\hat{O}E = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Επιπλέον $\widehat{E} = 90^o$ (η ακτίνα είναι κάθετη στην αντίστοιχη εφαπτομένη).

Οπότε οι ΓΔ και ΑΒ είναι παράλληλες (εφόσον είναι κάθετες στην ΟΕ).

Αφού είναι και ΑΔ//ΒΓ, το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Και αφού έχει μια ορθή γωνία (πχ. $\widehat{B} = 90^o$) θα είναι ορθογώνιο.



Το ΟΒΓΕ είναι τετράγωνο (έχει τρεις ορθές γωνίες και ΟΒ=ΟΕ), οπότε ισχύει ότι ΟΒ = ΓΒ = R.

Οπότε και ΑΔ=ΒΓ=R και ΓΔ=ΑΒ=2R (απέναντι πλευρές του ΑΒΓΔ). Έτσι, η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι: ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΑΔ = 2R + R + 2R + R = 6R

1748

ΘΕΜΑ 4

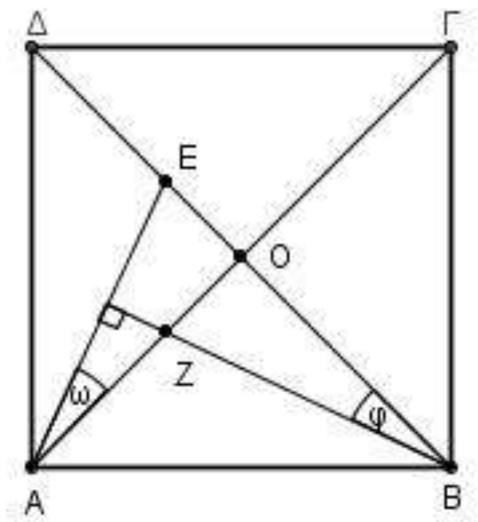
Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Ο το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο Ε του τμήματος ΟΔ. Φέρνουμε την κάθετη από το Β στην ΑΕ, που τέμνει το τμήμα ΑΟ στο Ζ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ω και φ του παρακάτω σχήματος είναι ίσες. (Μονάδες 6)

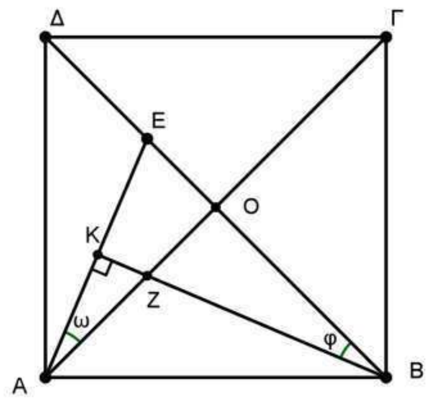
β) ΒΖ=ΑΕ και ΓΖ=ΒΕ (Μονάδες 12)

γ) Το τμήμα ΕΖ είναι κάθετο στο ΑΒ. (Μονάδες 7)



1748-Λύση

α) Οι διαγώνιοι του τετραγώνου είναι κάθετες, οπότε το τρίγωνο ΟΑΕ είναι ορθογώνιο. Στο τρίγωνο αυτό, είναι $\widehat{\omega}$ = 180° – 90° – $O\hat{E}A$ = 90° - $O\hat{E}A$. Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΕ είναι $\widehat{\varphi}$ = 90° - $O\hat{E}A$. Οπότε είναι $\widehat{\omega}$ = $\widehat{\varphi}$.



β) Τα τρίγωνα ΑΟΕ και ΒΟΖ έχουν:

- ΟΑ = ΟΒ, ως μισά των ίσων διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ του τετραγώνου
- $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{E}$ = $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{Z}$ = 90°
- $\widehat{\omega}$ = $\widehat{\varphi}$, από το ερώτημα α

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (κριτήριο ΓΠΓ), οπότε έχουν τις υποτείνουσες ίσες, δηλαδή ΒΖ = ΑΕ και τις τρίτες πλευρές ίσες, δηλαδή ΟΖ = ΟΕ (1).

Επιπλέον, εφόσον ΟΓ=ΟΒ και ΟΖ=ΟΕ, θα είναι και ΟΓ+ΟΖ=ΟΒ+ΟΕ δηλαδή τελικά ΓΖ=ΒΕ.

γ) Στο τρίγωνο ΕΑΒ τα ΒΖ και ΑΟ είναι τα ύψη του, οπότε το Ζ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Άρα το ΕΖ είναι η ευθεία του τρίτου ύψους του τριγώνου, δηλαδή ΕΖ ⊥ ΑΒ.

1749

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε δυο σημεία Α και Β τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία (ε), τέτοια ώστε η ευθεία ΑΒ δεν είναι κάθετη στην (ε) . Έστω Α΄ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία (ε).

α) Αν η Α΄Β τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Ο, να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία (ε) διχοτομεί τη γωνία $\widehat{AOA'}$. **(**Μονάδες 6)

ii. Οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία (ε) (Μονάδες 6)

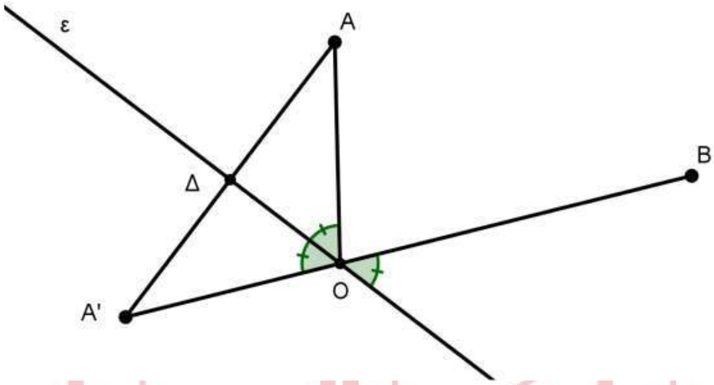
β) Αν Κ είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία (ε), να αποδείξετε ότι:

i. $KA = KA'$ (Μονάδες 6)

ii. $KA + KB > AO + OB$ (Μονάδες 7)

1749-Λύση

α) i. Στο τρίγωνο ΟΑΑ΄ το ΟΔ είναι ύψος και διάμεσος, η ΟΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΑ΄, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και η ΟΔ είναι και διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{O}A'$.

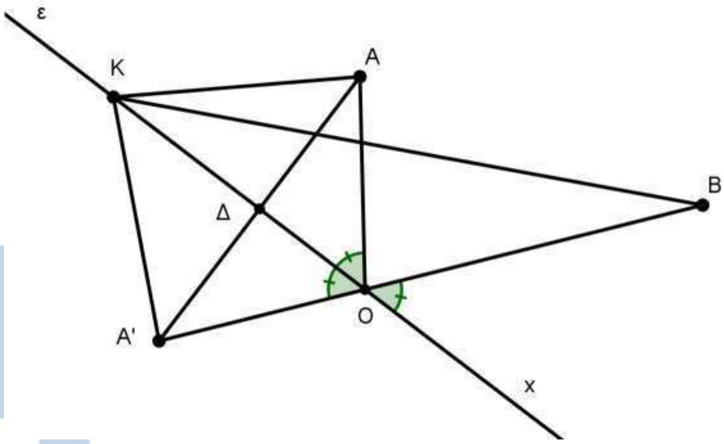


ii. Το τρίγωνο ΑΔΟ είναι ορθογώνιο οπότε η γωνία $A\widehat{O}\Delta$ είναι οξεία.

Είναι $A\widehat{O}\Delta = \Delta\widehat{O}A'$ (από το α.i) και $\Delta\widehat{O}A' = B\widehat{O}x$ ως κατακορυφήν. Επίσης, $\Delta\widehat{O}A' < 90^o$ άρα και $B\widehat{O}x < 90^o$.

Άρα οι $A\widehat{O}\Delta$ και $B\widehat{O}Z$ είναι οξείες γωνίες και ίσες.

β) i. Επειδή το Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΑ΄ ισχύει ότι ΚΑ = ΚΑ΄.



ii. Εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΚΒΑ΄ και βρίσκουμε:

ΚΑ΄ + ΚΒ > ΒΑ΄ και επειδή ΚΑ΄=ΚΑ και ΒΑ΄ = ΟΑ΄ + ΟΒ, προκύπτει ότι

ΚΑ + ΚΒ > ΟΑ΄ + ΟΒ $\Leftrightarrow$ ΚΑ + ΚΒ > ΟΑ + ΟΒ

1750

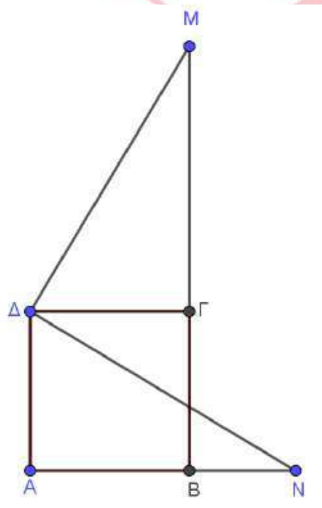
ΘΕΜΑ 4

Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΝ και την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα ΓΜ = ΑΝ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΝ = ΔΜ (Μονάδες 12)

β) ΔΝ $\perp$ ΔΜ (Μονάδες 13)



1750-Λύση

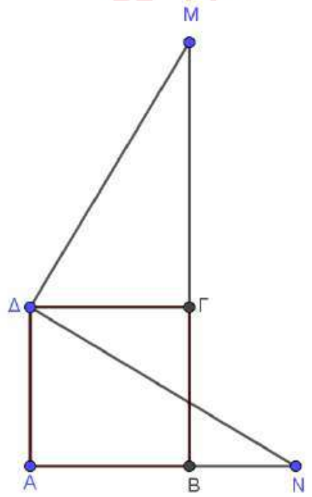
α) Τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΔΓΜ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΑΔ = ΔΓ, ως πλευρές του τετραγώνου
- ΓΜ = ΑΝ, από υπόθεση

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΝ και ΔΓΜ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι ίσα. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι και οι αντίστοιχες πλευρές τους ΔΝ και ΔΜ είναι ίσες, δηλαδή ΔΝ = ΔΜ.

β) Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι οι γωνίες που είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΓΜ και ΑΝ είναι ίσες, δηλαδή $M\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{\Delta}N$. Τότε:

$M\hat{\Delta}N = M\hat{\Delta}\Gamma + \Gamma\hat{\Delta}N = A\hat{\Delta}N + \Gamma\hat{\Delta}N = A\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$.



1751

ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι ο κύκλος (Ο, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου ΡΓΕ στα σημεία Α, Δ και Β.

α) Να αποδείξετε ότι:

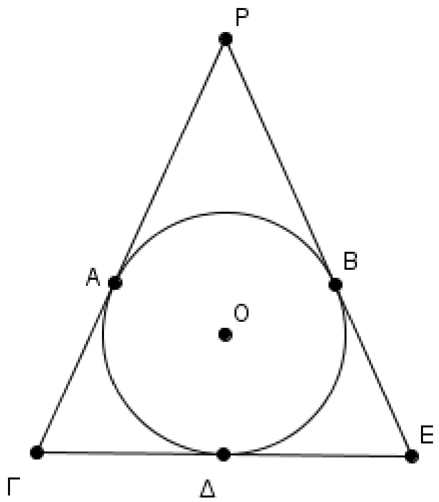
I. $ΡΓ = ΓΔ + ΑΡ$ (Μονάδες 6)

II. $ΡΓ - ΓΔ = ΡΕ - ΔΕ$ (Μονάδες 8)

β) Αν ΑΓ=ΒΕ, να αποδείξετε ότι

I. Το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

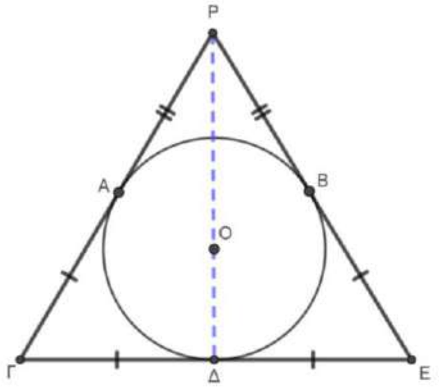
II. Τα σημεία Ρ, Ο και Δ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 5)



1751-Λύση

α) i. Τα ΓΑ, ΓΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Γ προς τον κύκλο, οπότε ΓΑ = ΓΔ. Τότε:

ΡΓ = ΡΑ + ΑΓ ή ΡΓ = ΡΑ + ΓΔ.



ii. Τα ΕΒ, ΕΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ε προς τον κύκλο, οπότε ΕΒ = ΕΔ.

Επίσης τα ΡΑ, ΡΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ρ προς τον κύκλο και ισχύει ΡΑ = ΡΒ.

Όμως ΡΓ = ΓΔ + ΡΑ ή ΡΑ = ΡΓ – ΓΔ (1) και ΡΒ = ΡΕ – ΒΕ = ΡΕ – ΔΕ (2).

Οπότε, από (1), (2) βρίσκουμε ΡΓ – ΓΔ = ΡΕ – ΔΕ

β) i. Αν ΑΓ = ΒΕ, τότε ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΒΕ.

Είναι ΡΓ = ΓΔ + ΡΑ, ΡΕ = ΡΒ + ΔΕ, οπότε ΡΓ = ΡΕ. Άρα το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές.

ii. ΟΔ $\perp$ ΓΔ διότι ΟΔ ακτίνα κύκλου. Επίσης ΡΔ $\perp$ ΓΔ, διότι ΡΔ διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΡΓΕ οπότε και ύψος. Άρα ΟΔ και ΡΔ ταυτίζονται επομένως Ρ, Ο και Δ συνευθειακά.

1752

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και εξωτερικό σημείο του Ρ . Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα ΡΑ και ΡΒ. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ. Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) ΓΑ= ΔΒ. (Μονάδες 8)

γ) η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι ίση με ΡΑ + ΡΒ. (Μονάδες 7)

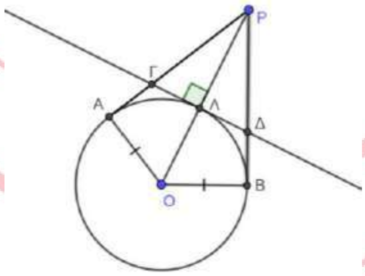
1752-Λύση

α) Επειδή τα ΡΑ και ΡΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα η ΡΟ είναι διχοτόμος της $A\hat{P}B$.

Επίσης $ΓΔ \perp ΟΛ$, οπότε είναι $ΡΟ \perp ΓΔ$.

Άρα στο τρίγωνο ΡΓΔ το ΡΛ είναι ύψος και διχοτόμος οπότε είναι ισοσκελές με

ΡΓ = ΡΔ.



β) Επειδή τα ΡΑ και ΡΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα ισχύει ότι:

$ΡΑ = ΡΒ \Leftrightarrow ΡΓ + ΓΑ = ΡΔ + ΔΒ$

Οπότε λόγω του ερωτήματος (α) προκύπτει ΓΑ = ΔΒ

γ) Είναι ΓΛ = ΓΑ (1) και ΔΛ = ΔΒ (2) ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από τα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Τότε η περίμετρος Π του τριγώνου ΡΓΔ είναι:

$Π = ΡΓ + ΓΔ + ΡΔ = ΡΓ + ΓΛ + ΛΔ + ΡΔ$

Οπότε λόγω των σχέσεων (1), (2) βρίσκουμε $Π = ΡΓ + ΓΑ + ΔΒ + ΡΔ = ΡΑ + ΡΒ$

1754

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ . Στο ΑΔ θεωρούμε σημείο Η τέτοιο ώστε ΗΑ=ΗΒ. Έστω ότι Ε είναι το σημείο τομής της ΒΗ με την ΑΓ. Φέρνουμε την ΑΖ κάθετη στην ΒΕ, η οποία τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Θ.

α) Να αποδείξετε ότι:

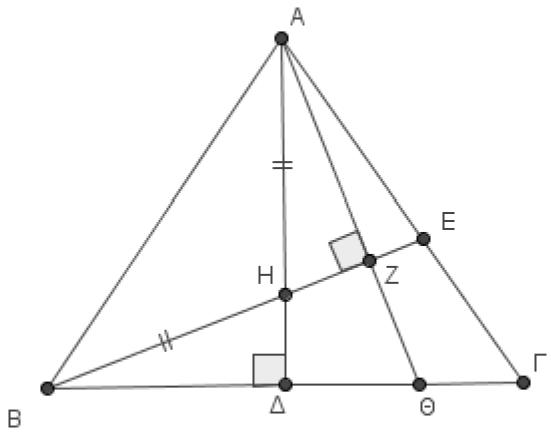
i. Τα τρίγωνα ΗΔΒ και ΗΖΑ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

ii. ΔΘ=ΘΖ. (Μονάδες 6)

iii. Η ευθεία ΘΗ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 6)

β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΗΒ ;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



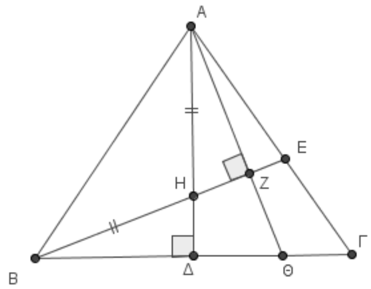
1754-Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ΗΒΔ και ΗΑΖ είναι ορθογώνια και έχουν:

• ΗΑ = ΗΒ, από υπόθεση

• $B\widehat{H}\Delta = A\widehat{H}Z$, ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα ΗΒΔ και ΗΑΖ έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία οπότε είναι ίσα. Τότε και οι αντίστοιχες πλευρές τους ΔΗ και ΗΖ είναι ίσες, δηλαδή ΔΗ = ΗΖ (1).

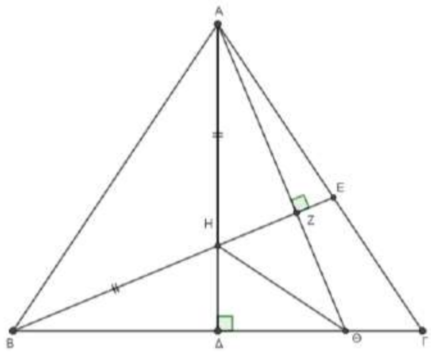


ii. Τα τρίγωνα ΖΗΘ και ΔΗΘ είναι ορθογώνια και έχουν:

• ΘΗ, κοινή πλευρά

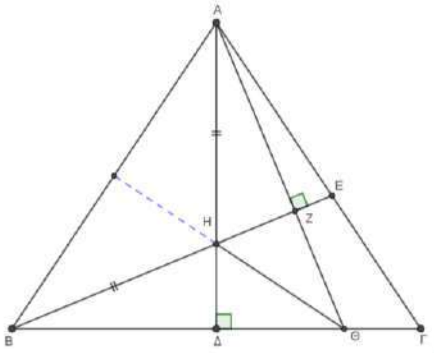
• ΔΗ = ΗΖ, λόγω της (1)

Άρα τα τρίγωνα ΖΗΘ και ΔΗΘ έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία οπότε είναι ίσα. Τότε έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές τους ΔΘ και ΘΖ ίσες, δηλαδή ΔΘ = ΘΖ.



iii. Ισχύει ότι ΗΔ = ΗΖ από το ερώτημα (α.i) και ΘΔ = ΘΖ από το ερώτημα (α.ii). Άρα τα Η και Θ ισαπέχουν από τα Δ και Ζ που είναι άκρα του ΖΔ οπότε η ευθεία ΘΗ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

1754-Λύση



β) Τα τμήματα ΑΖ και ΒΔ είναι ύψη του τριγώνου ΑΗΒ που τέμνονται στο Θ. Άρα το Θ είναι το ορθόκεντρο του ΑΗΒ.

1758

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και ευθείες ε_1, ε_2 εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB. Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Ε, η οποία τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ

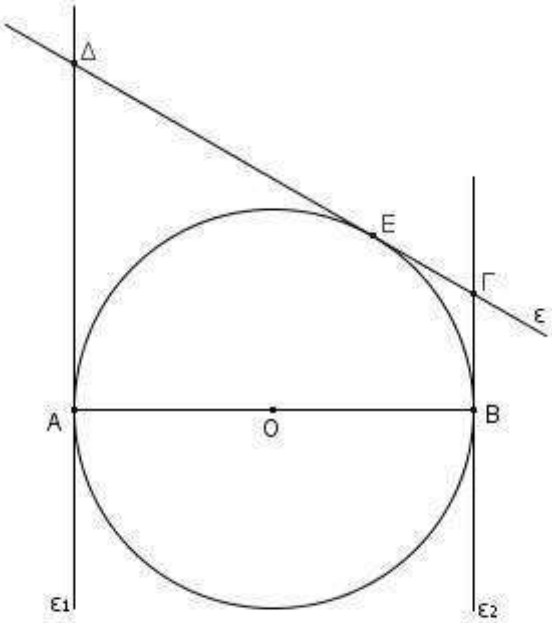
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

γ) Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ανάλογα με τη θέση του σημείου Ε στο ημικύκλιο ΑΒ.

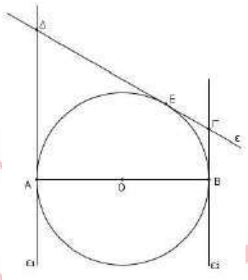
(Μονάδες 7)



1758-Λύση

α) Ισχύει ΓΕ = ΒΓ (2) ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το σημείο Γ προς τον κύκλο. Όμοια, ισχύει ότι ΕΔ = ΑΔ (3). Τότε ΓΔ = ΓΕ + ΕΔ

οπότε λόγω των (2), (3) βρίσκουμε ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ.



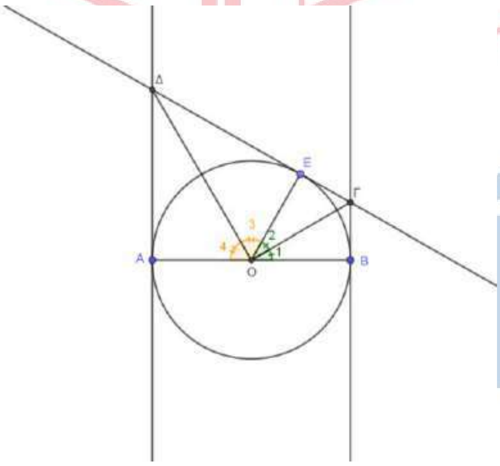
β) Τα ΓΕ, ΓΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα οπότε το Γ ισαπέχει από τα σημεία Ε και Β, άρα η ΓΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\widehat{O}B$. Όμοια, η ΔΟ διχοτομεί τη γωνία $A\widehat{O}E$. Άρα

$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = ω$ και $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4 = φ$

Είναι

$\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4 = 180^o \Leftrightarrow 2ω + 2φ = 180^o \Leftrightarrow ω + φ = 90^o$

Άρα $Γ\widehat{O}Δ = ω + φ = 90^o$ οπότε το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο στο Ο.



γ) Επειδή τα ΑΔ, ΒΓ είναι εφαπτόμενες του κύκλου, ισχύει ότι ΑΔ ⊥ ΑΒ και ΒΓ ⊥ ΑΒ

Άρα ΑΔ // ΒΓ.

- Αν το σημείο Ε δεν είναι μέσο του ημικυκλίου ΑΒ τότε οι ΓΔ και ΑΒ δεν είναι παράλληλες οπότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.
- Αν το Ε είναι μέσο του ημικυκλίου ΑΒ, τότε $B\widehat{O}E = 90^o$ (επίκεντρη γωνία που βαίνει σε τεταρτοκύκλιο) και ΕΓ ⊥ ΟΕ, άρα ΕΓ//ΑΒ. Οπότε ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και αφού έχει μια ορθή γωνία, είναι ορθογώνιο.

1759

ΘΕΜΑ 4

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία Α αμβλεία, ισχύει ότι ΑΒ=2ΑΔ. Τα σημεία Ε και Ζ, είναι μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Από το Δ φέρουμε τη ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Το τμήμα ΗΕ, είναι διχοτόμος της γωνίας $Ζ\hat{Η}Γ$. (Μονάδες 8)

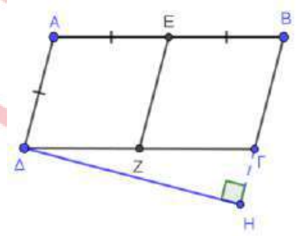
1759-Λύση

α) Είναι ΑΕ // ΔΖ και ΑΕ = $\frac{AB}{2} = \frac{ΓΔ}{2}$ = ΔΖ. Άρα ΑΕ // = ΔΖ.

Οπότε το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχύει ακόμη ότι ΑΕ = $\frac{AB}{2}$ = ΑΔ.

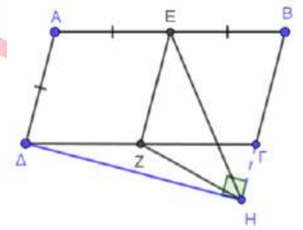
Δηλαδή, το παραλληλόγραμμο ΑΔΖΕ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες οπότε είναι ρόμβος.



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΓΔ, η ΗΖ είναι διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή

ΗΖ = $\frac{ΓΔ}{2}$ = $\frac{AB}{2}$ = ΑΔ = ΕΖ

Επομένως το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισοσκελές.



γ) Επειδή το τρίγωνο ΕΗΖ είναι ισοσκελές με βάση την ΕΗ, ισχύει ότι $Z\hat{E}H = Z\hat{H}E$ (1).

Όμως $Z\hat{E}H = E\hat{H}Γ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ, ΒΗ που τέμνονται από την ΕΗ. Από (1), (2) έχουμε: $Z\hat{H}E = E\hat{H}Γ$

Άρα η ΕΗ διχοτομεί τη γωνία $Z\hat{H}Γ$.

1760

ΘΕΜΑ 4

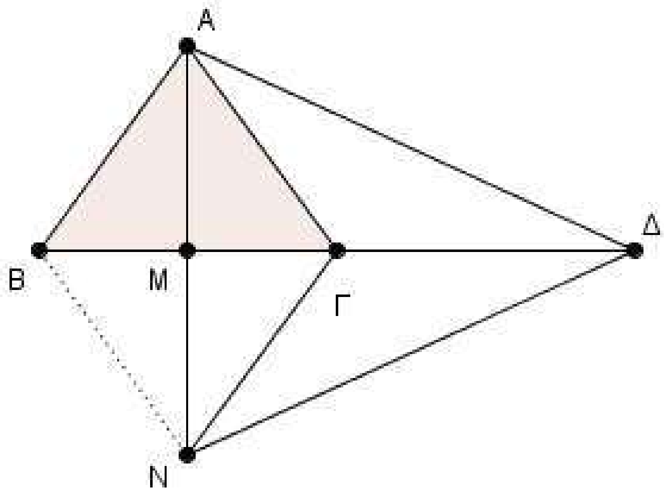
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΑΜ το ύψος του στην πλευρά ΒΓ. Στην προέκταση του ΑΜ θεωρούμε τμήμα ΜΝ=ΑΜ . Στην προέκταση του ΒΓ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα ΓΔ =ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΝΓ ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΔΝ. (Μονάδες 9)



1760-Λύση

α) Το ΑΜ είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, άρα είναι και διάμεσος. Οι ΑΝ, ΒΓ είναι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΒΝΓ και διχοτομούνται κάθετα, άρα είναι ρόμβος.

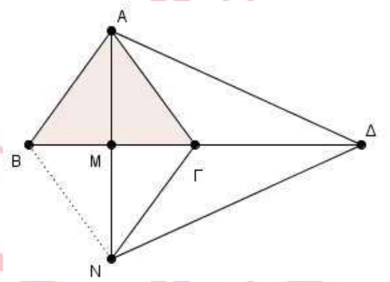
β) Στο τρίγωνο ΑΔΝ το ΔΜ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές.

γ) Ισχύει ότι ΒΓ = 2ΓΜ διότι ΑΒΝΓ ρόμβος. Τότε

ΔΜ = ΔΓ + ΓΜ = ΒΓ + ΓΜ = 3ΓΜ,

δηλαδή ΓΜ = $\frac{1}{3}$ΔΜ, άρα ΔΓ = $\frac{2}{3}$ΔΜ,

οπότε Γ βαρύκεντρο του τριγώνου.



1761

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Α ίση με 120° και γωνία Β είναι ίση με 45° . Στην προέκταση της ΒΑ προς το Α, παίρνουμε τμήμα ΑΔ = 2ΑΒ. Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην ΑΓ που την τέμνει στο σημείο Κ.

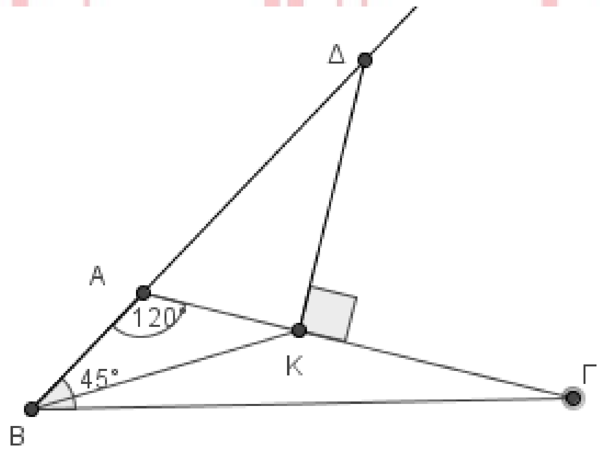
Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΑΔΚ είναι ίση με 30°. (Μονάδες 6)

β) Το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

γ) Αν Ζ το μέσο της ΔΑ, τότε $Z\hat{K}B$=90°. (Μονάδες 6)

δ) Το σημείο Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΔ. (Μονάδες 7)



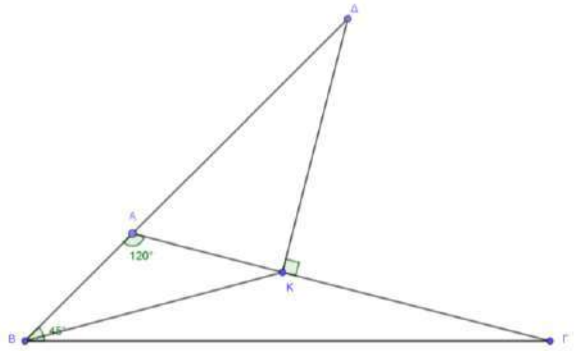
1761-Λύση

α) Είναι:

$K\widehat{A}\Delta + \Gamma\widehat{A}B = 180^o \Leftrightarrow K\widehat{A}\Delta + 120^o = 180^o \Leftrightarrow K\widehat{A}\Delta = 60^o$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΑΔ ισχύει ότι:

$K\widehat{A}\Delta + A\widehat{\Delta}K = 90^o \Leftrightarrow 60^o + A\widehat{\Delta}K = 90^o \Leftrightarrow A\widehat{\Delta}K = 30^o$



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΚ είναι $A\widehat{\Delta}K = 30^o$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά του θα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή

$AK = \frac{A\Delta}{2} = \frac{2AB}{2} = AB$

Άρα το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΑΔ, η ΚΖ είναι διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, ισχύει δηλαδή

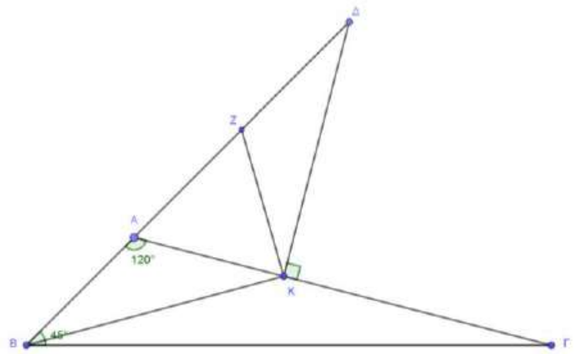
$KZ = \frac{A\Delta}{2} = ZA$

Άρα το τρίγωνο ΖΑΚ είναι ισοσκελές και επειδή $Z\widehat{A}K = 60^o$, το τρίγωνο ΖΑΚ είναι ισόπλευρο. Τότε $Z\widehat{K}A = 60^o$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΚΑΒ βρίσκουμε:

$B\widehat{A}K + A\widehat{B}K + A\widehat{K}B = 180^o \Leftrightarrow 120^o + 2A\widehat{K}B = 180^o \Leftrightarrow A\widehat{K}B = 30^o$

Επομένως είναι $Z\widehat{K}B = A\widehat{K}B + Z\widehat{K}A = 30^o + 60^o = 90^o$.



1761-Λύση

δ) Επειδή $A\widehat{B}K = A\widehat{\Delta}K = 30^o$, το τρίγωνο ΚΒΔ είναι ισοσκελές, άρα ΚΒ = ΚΔ. Επειδή το Κ ισαπέχει από τα Β, Δ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΔ.

ΘΕΜΑ 4

1766

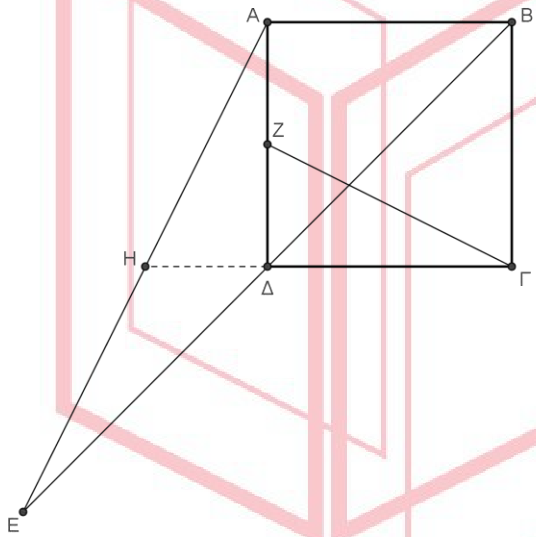
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Έστω Ε το συμμετρικό σημείο του Β ως προς το Δ και Ζ είναι το μέσο της ΑΔ. Η προέκταση της ΓΔ τέμνει την ΑΕ στο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΗ = \frac{ΑΒ}{2}$ (Μονάδες 8)

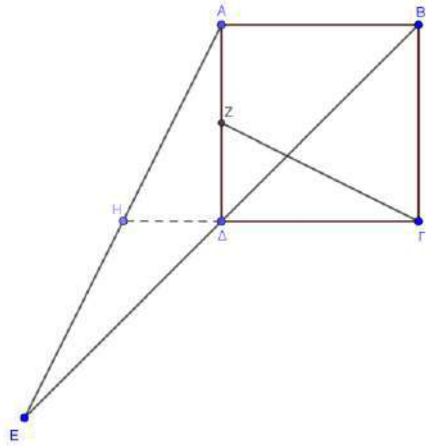
β) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) Η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ. (Μονάδες 8)



1766-Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΕ ισχύει ότι το Δ είναι μέσο του ΒΕ και ΔΗ // ΑΒ, άρα το Η είναι μέσο της πλευράς ΑΕ οπότε ισχύει ότι ΔΗ = $\frac{ΑΒ}{2}$.



β) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ είναι ορθογώνια και έχουν:

• ΔΗ = ΔΖ, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα

• ΑΔ = ΔΓ, ως πλευρές του τετραγώνου.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι ίσα.

γ) Έστω ότι η προέκταση της ΓΖ τέμνει την ΑΗ στο Κ. Είναι

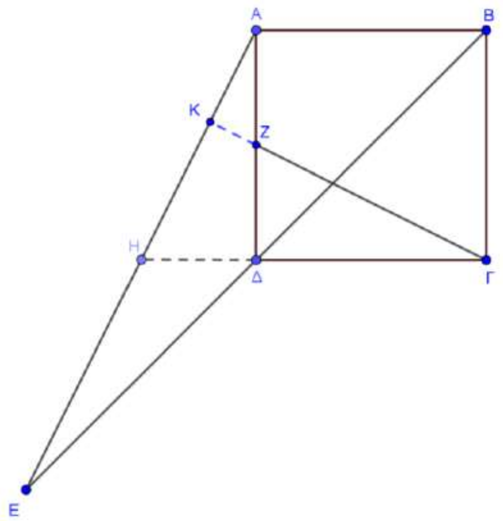
$Κ\hat{Ζ}Α = Δ\hat{Ζ}Γ$ ως κατακορυφήν και

$Κ\hat{Α}Ζ = Δ\hat{Γ}Ζ$, από τα ίσα τρίγωνα ΑΗΔ και ΔΖΒ.

Στο τρίγωνο ΑΚΖ έχουμε:

$Κ\hat{Ζ}Α + Κ\hat{Α}Ζ = Δ\hat{Ζ}Γ + Δ\hat{Γ}Ζ = 90^o$

Άρα το τρίγωνο ΑΚΖ είναι ορθογώνιο στο Κ, δηλαδή ΓΖ $\perp$ ΑΕ.



1768

ΘΕΜΑ 4

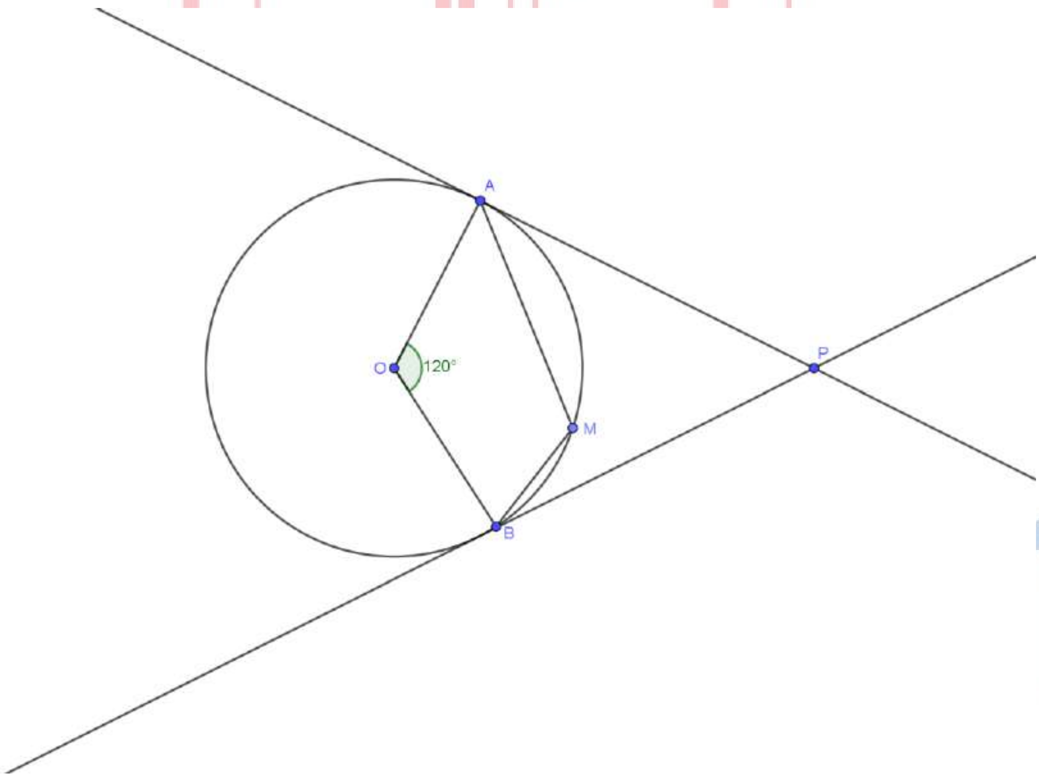
Δίνεται κύκλος (O, R) και μια επίκεντρη γωνία του $A\widehat{O}B$ ίση με 120^0 . Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B τέμνονται στο σημείο P. Θεωρούμε σημείο M του τόξου AB και φέρουμε τις χορδές AM και BM.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο APB είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)

β) $M\hat{A}B + M\hat{B}A = 60^o$. (Μονάδες 11)

γ) Για ποια θέση του M είναι $AM \perp BP$; (Μονάδες 5)



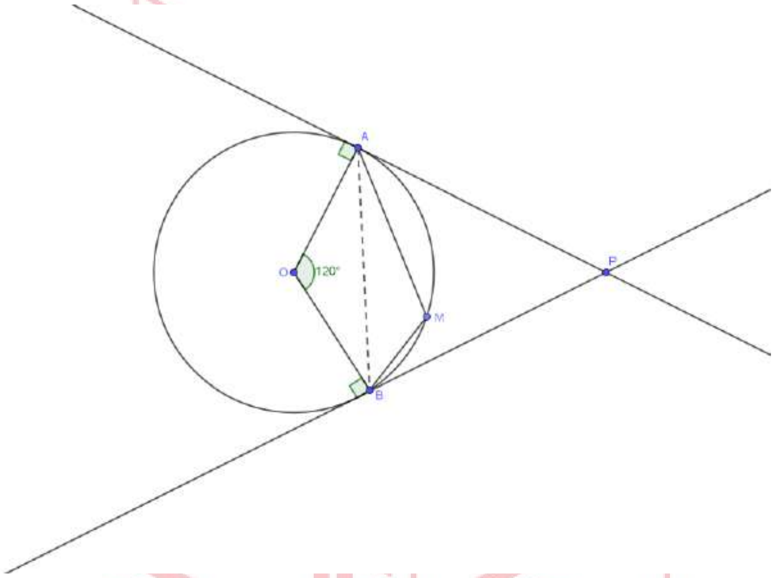
1768-Λύση

α) Είναι ΡΑ = ΡΒ ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν, άρα το τρίγωνο ΡΑΒ είναι ισοσκελές.

Από το άθροισμα γωνιών του τετραπλεύρου ΑΟΒΡ έχουμε:

$\widehat{P} + 120^o + 90^o + 90^o = 360^o \Leftrightarrow \widehat{P} = 60^o$

Επειδή το τρίγωνο ΡΑΒ είναι ισοσκελές με μία γωνία του ίση με 60^o, είναι ισόπλευρο.



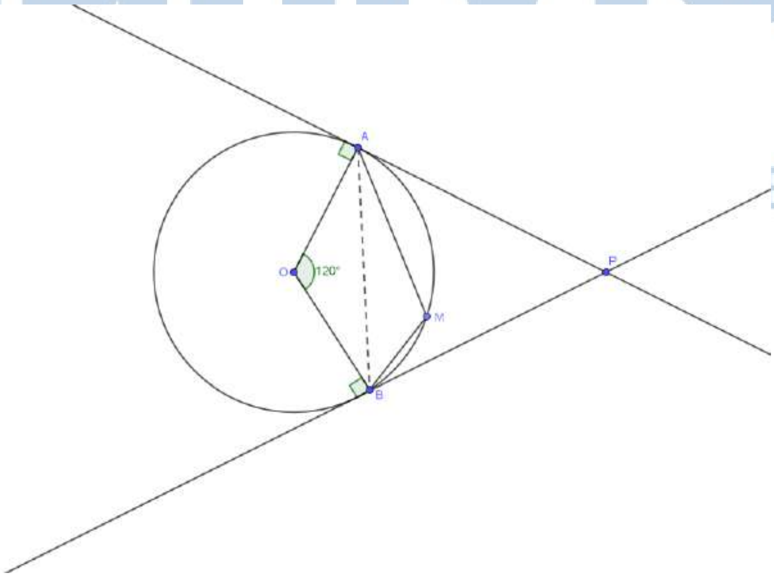
β) Είναι $A\widehat{O}B = 120^o$ ή $\overset{\frown}{AMB} = 120^o$. Άρα το μη κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ είναι ίσο με 240^o.

Η γωνία $A\widehat{M}B$ είναι εγγεγραμμένη στο μη κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Τότε:

$A\widehat{M}B = \frac{240^o}{2} = 120^o$.

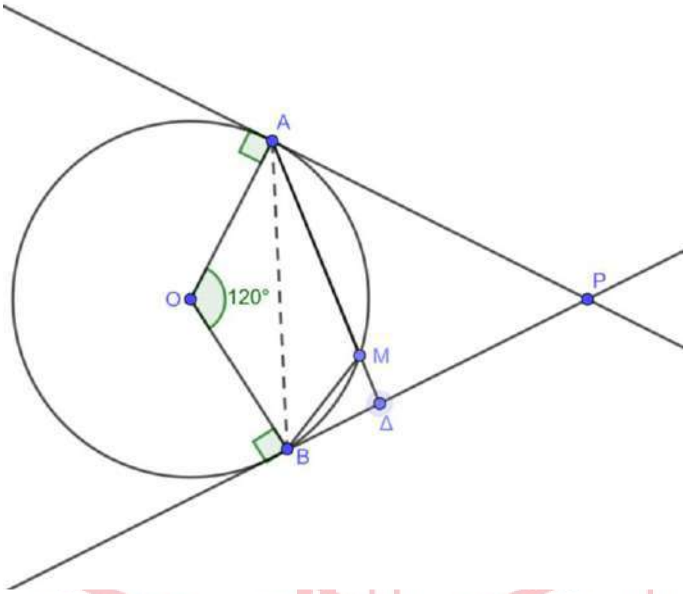
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΜΑΒ βρίσκουμε:

$M\widehat{A}B + M\widehat{B}A + A\widehat{M}B = 180^o \Leftrightarrow M\widehat{A}B + M\widehat{B}A + 120^o = 180^o \Leftrightarrow M\widehat{A}B + M\widehat{B}A = 60^o$



1768-Λύση

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ είναι $\widehat{B}$ = 60ο οπότε Μ$\widehat{A}$Β = 30ο. Από το ερώτημα β προκύπτει ότι Μ$\widehat{B}$Α = 30ο. Άρα ΜΑ = ΜΒ. Τελικά ΑΜ⊥ΒΡ στην περίπτωση που το Μ είναι μέσο του τόξου $\widehat{AB}$.



ΘΕΜΑ 4

1770

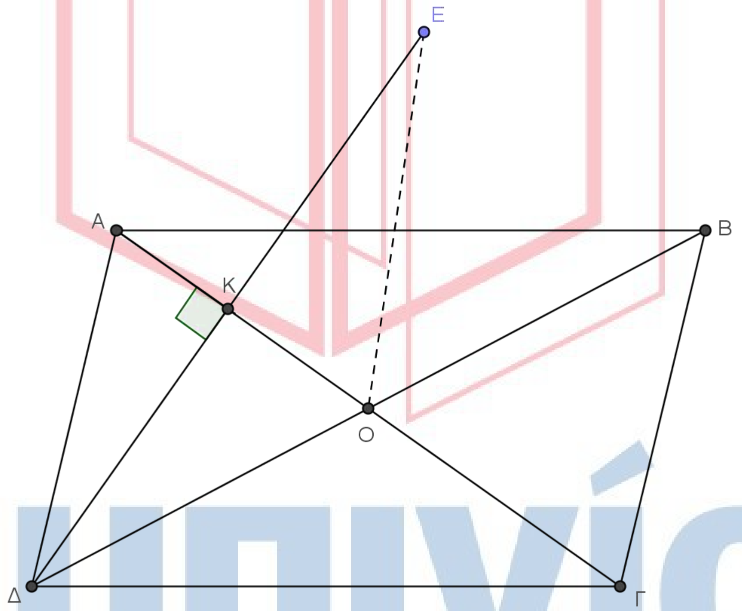
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρουμε το τμήμα ΔΚ κάθετο στην ΑΓ και στην προέκτασή του προς το Κ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε ΚΕ= ΔΚ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $EO = \frac{B\Delta}{2}$. (Μονάδες 8)

β) Η γωνία $\Delta\hat{E}B$ είναι ορθή. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

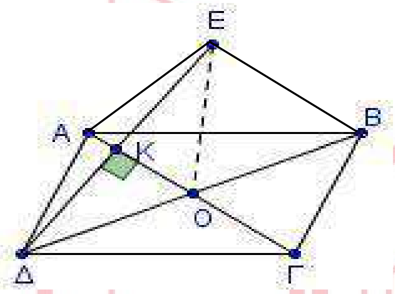


1770-Λύση

α) Στο τρίγωνο ΟΔΕ το ΟΚ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα ΕΟ = ΟΔ.

Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ διχοτομούνται άρα ΟΔ = $\frac{\mathrm{B}\Delta}{2}$.

Συνεπώς ΕΟ = ΟΔ = $\frac{\mathrm{B}\Delta}{2}$.



β) Στο τρίγωνο ΔΕΒ είναι: ΕΟ = $\frac{\mathrm{B}\Delta}{2}$. Δηλαδή η διάμεσος ΕΟ του τριγώνου ΔΕΒ ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί. Άρα το τρίγωνο ΔΕΒ είναι ορθογώνιο με $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = 90^{o}$.

γ) Είναι ΕΒ $\perp$ ΔΕ και ΓΑ $\perp$ ΔΕ, άρα ΕΒ // ΑΓ .

Η ΑΕ τέμνει την ΑΔ και ΑΔ // ΒΓ άρα η ευθεία ΑΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ. Συνεπώς το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι τραπέζιο.

Στο τρίγωνο ΑΔΕ το ΑΚ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές και ισχύει ότι ΑΕ = ΑΔ .

Από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχουμε ΑΔ = ΒΓ . Άρα ΑΕ = ΒΓ.

Συνεπώς το τραπέζιο ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές.

1771

ΘΕΜΑ 4

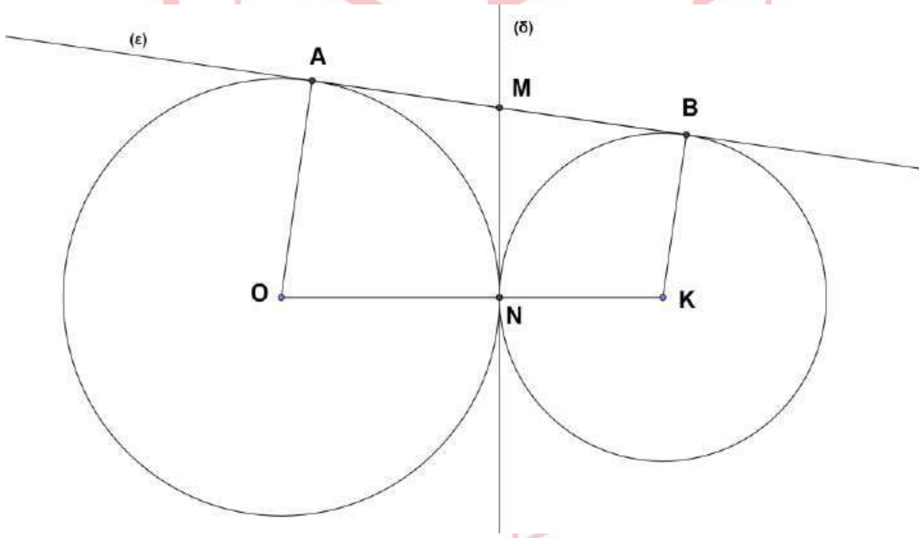
Δύο κύκλοι (O, ρ_1), (K,ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο Ν. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο Ν τέμνει την (ε) στο Μ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το Μ είναι μέσον του ΑΒ. (Μονάδες 7)

β) $O\hat{M}K = 90^0$ (Μονάδες 9)

γ) $A\hat{N}B = 90^0$ (Μονάδες 9)

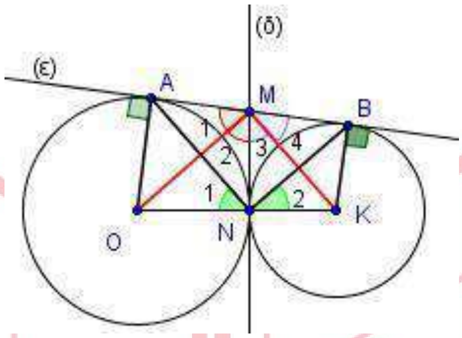


1771-Λύση

α) Τα τμήματα ΜΑ και ΜΝ εφάπτονται στον κύκλο (O, ρ_1) άρα ΜΑ = ΜΝ (1).

Τα τμήματα ΜΒ και ΜΝ εφάπτονται στον κύκλο (K, ρ_2) άρα ΜΒ = ΜΝ (2).

Από (1), (2) βρίσκουμε ΜΑ = ΜΒ, δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΑΒ.



β) Η διακεντρική ευθεία ΜΟ διχοτομεί τη γωνία $A\widehat{M}N$, άρα $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = \widehat{\varphi}$. Όμοια η διακεντρική ευθεία ΚΜ διχοτομεί τη γωνία $B\widehat{M}N$, άρα $\widehat{M}_3 = \widehat{M}_4 = \widehat{\omega}$. Τότε:

$A\widehat{M}B = \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 + \widehat{M}_4 = 2\widehat{\varphi} + 2\widehat{\omega} \Leftrightarrow 180^o = 2\widehat{\varphi} + 2\widehat{\omega} \Leftrightarrow \widehat{\omega} + \widehat{\varphi} = 90^o \Leftrightarrow$

$O\widehat{M}K = 90^o$

γ) Είναι $MN = \frac{AB}{2}$ από το (α) και ΜΝ διάμεσος του τριγώνου ΑΝΒ. Άρα το τρίγωνο ΑΝΒ είναι ορθογώνιο με $A\widehat{N}B = 90^o$.

1774

ΘΕΜΑ 4

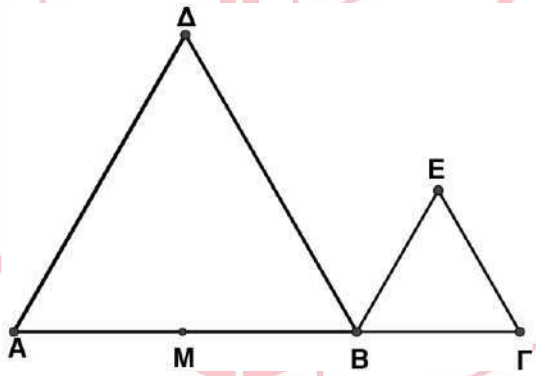
Έστω Α, Β, Γ συνευθειακά σημεία με ΑΒ=2ΒΓ. Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ, ΒΕΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο (ΑΔ//ΒΕ). (Μονάδες 9)

β) Τα τρίγωνα ΔΜΒ, ΔΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

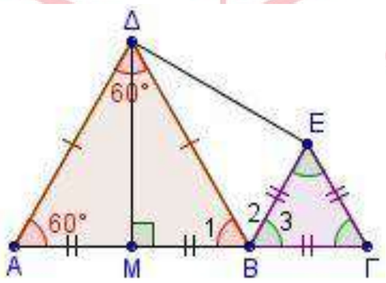
γ) Το τετράπλευρο ΔΜΒΕ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 8)



1774-Λύση

α) Είναι $\widehat{A} = \widehat{B}_3 = 60^o$ ως γωνίες ισοπλεύρων τριγώνων. Οι ίσες γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}_3$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη ΑΔ και ΕΒ που τέμνονται από την ΑΓ οπότε ΑΔ // ΒΕ.

Έστω ότι ΔΕ // ΑΒ. Τότε το τετράπλευρο ΑΔΕΒ θα έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και θα είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΑΔ = ΒΕ. Όμως ΑΒ =ΑΔ και ΒΕ = ΒΓ άρα ΑΒ = ΒΓ που είναι άτοπο αφού ΑΒ = 2ΒΓ. Άρα οι ΔΕ, ΑΒ τέμνονται και συνεπώς το ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο.



β) Είναι $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 + \widehat{B}_3 = 180^o \Leftrightarrow 60^o + \widehat{B}_2 + 60^o = 180^o \Leftrightarrow \widehat{B}_2 = 60^o$ και $\widehat{B}_1 = 60^o$ ως γωνία του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΔ.

Τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΕΒ έχουν:

ΔΒ κοινή πλευρά

ΒΜ = ΕΒ διότι ΒΜ = $\frac{AB}{2} = \frac{2B\Gamma}{2}$ = ΒΓ = ΕΒ

$\widehat{B}_2 = 60^o = \widehat{B}_1$

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Το ΔΜ είναι διάμεσος στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα θα είναι και ύψος του οπότε $\Delta\widehat{M}B = 90^o$.

Επειδή τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΕΒ είναι ίσα, είναι και $\Delta\widehat{E}B = \widehat{M} = 90^o$ αφού οι γωνίες αυτές είναι απέναντι από την πλευρά κοινή τους πλευρά ΔΒ. Οπότε $\Delta\widehat{E}B + \widehat{M} = 180^o$.

Άρα το τετράπλευρο ΔΜΒΕ έχει δύο απέναντι γωνίες παραπληρωματικές, οπότε είναι εγγράψιμο.

1775

ΘΕΜΑ 4

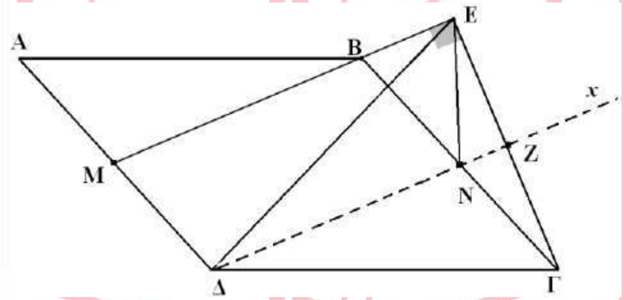
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θεωρούμε το μέσο Μ της πλευράς ΑΔ και ΓΕ κάθετος από τη κορυφή Γ στην ευθεία ΜΒ ($ΓΕ \perp ΜΒ$) . Η παράλληλη από την κορυφή Δ στην ευθεία ΜΒ (Δx // ΜΒ) τέμνει τις ΒΓ και ΓΕ στα σημεία Ν , Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΒΝΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) Το σημείο Ζ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΓΕ. (Μονάδες 9)

γ) ΔΕ=ΔΓ. (Μονάδες 9)



1775-Λύση

α) Επειδή ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο είναι ΑΔ // ΒΓ άρα και ΜΔ // ΒΝ. Από υπόθεση είναι ΔΝ // ΜΒ, άρα το τετράπλευρο ΜΒΝΔ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο.

β) Επειδή ΜΒΝΔ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ότι ΒΝ = ΜΔ (1). Το Μ είναι μέσο του ΑΔ άρα ΜΔ = $\frac{ΑΔ}{2}$ (2). Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο συνεπώς ΑΔ = ΒΓ (3). Από (1), (2) και (3) προκύπτει ΒΝ $= \frac{ΒΓ}{2}$. Άρα το Ν είναι μέσο του τμήματος ΒΓ.

Στο τρίγωνο ΒΕΓ, το Ν είναι μέσο του ΒΓ και η ΝΖ είναι παράλληλη στη ΒΕ, άρα το Ζ είναι μέσο του ΕΓ.

γ) Επειδή ΔΖ // ΜΕ και ΜΕ $\perp$ ΓΕ θα είναι και ΔΖ $\perp$ ΓΕ δηλαδή το ΔΖ είναι ύψος του τριγώνου ΔΕΖ. Το Ζ είναι μέσο του ΕΓ άρα η ΔΖ είναι και διάμεσος του τριγώνου ΔΕΖ. Οπότε το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισοσκελές με ΔΕ = ΔΓ.

1776

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ, ΑΓΔ. Ονομάζουμε Ζ το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΔ, ΓΕ.

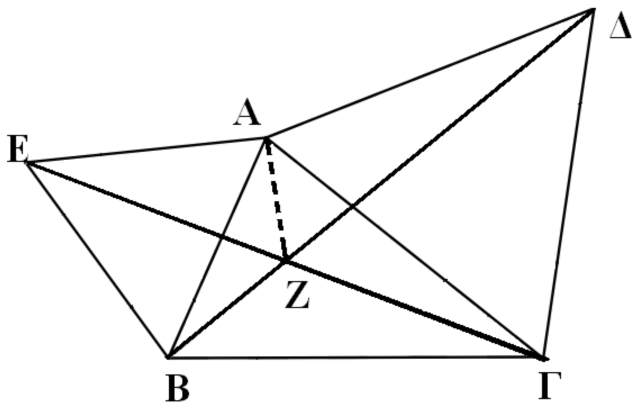
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΔ είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών

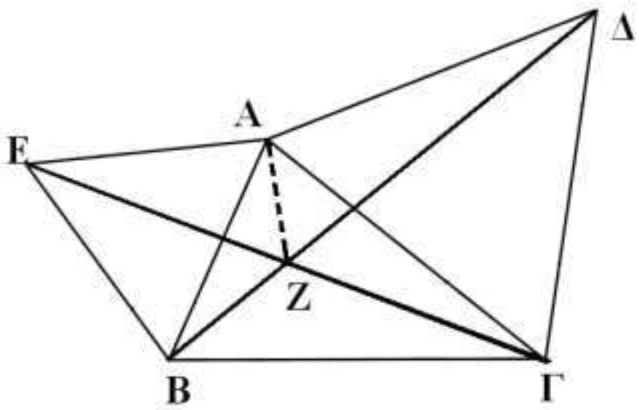
(Μονάδες 10)

β) Τα τετράπλευρα ΑΖΓΔ, ΑΖΒΕ είναι εγγράψιμα. (Μονάδες 10)

γ) Η γωνία $B\hat{Z}\Gamma$ είναι 120^0. (Μονάδες 5)



1776-Λύση



α) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΔ έχουν:

ΑΕ = ΑΒ, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΕΒ

ΑΓ = ΑΔ, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΓΔ

$E\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Delta$, διότι $E\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Gamma + 60^o$ και $B\hat{A}\Delta = B\hat{A}\Gamma + 60^o$.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π, τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε: $A\hat{E}\Gamma = A\hat{B}\Delta$ (1) επειδή είναι απέναντι των ίσων πλευρών ΑΓ και ΑΔ και $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Gamma}E$ (2) επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΕ.

β) Επειδή $A\hat{\Gamma}Z = A\hat{\Delta}Z$, λόγω της (2), στο τετράπλευρο ΑΖΓΔ η πλευρά του ΑΖ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Γ και Δ υπό ίσες γωνίες, οπότε το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι εγγράψιμο.

Επειδή $A\hat{E}Z = A\hat{B}Z$, λόγω της (1), στο τετράπλευρο ΑΖΒΕ η πλευρά ΑΖ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Ε και Β υπό ίσες γωνίες, οπότε το τετράπλευρο ΑΖΒΕ είναι εγγράψιμο.

γ) Οι γωνίες $A\hat{\Delta}\Gamma$ και $A\hat{Z}\Gamma$ είναι απέναντι γωνίες του εγγράψιμου τετραπλεύρου ΑΖΓΔ, άρα είναι παραπληρωματικές. Οπότε:

$A\hat{Z}\Gamma + A\hat{\Delta}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow A\hat{Z}\Gamma + 60^o = 180^o \Leftrightarrow A\hat{Z}\Gamma = 120^o$.

Όμοια, στο εγγράψιμο ΑΖΒΕ είναι:

$A\hat{Z}B + A\hat{E}B = 180^o \Leftrightarrow A\hat{Z}B + 60^o = 180^o \Leftrightarrow A\hat{Z}B = 120^o$.

Τελικά:

$A\hat{Z}\Gamma + A\hat{Z}B + B\hat{Z}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow 120^o + 120^o + B\hat{Z}\Gamma = 360^o \Leftrightarrow B\hat{Z}\Gamma = 120^o$.

1778

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθή γωνία $x\widehat{O}y$ και τα σημεία Α και Β των ημιευθειών Oy και Ox αντίστοιχα με ΟΑ = ΟΒ. Μία ευθεία (ε) η οποία δεν είναι παράλληλη στην ΑΒ διέρχεται από το Ο ώστε τα σημεία Α και Β να είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο. Η κάθετη από το Α στην (ε) την τέμνει στο Δ και η κάθετη από το Β στην (ε) την τέμνει στο Ε.

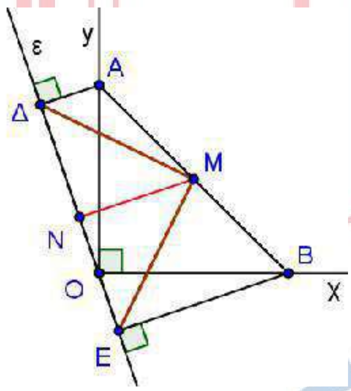
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

β) ΑΔ + ΒΕ = ΔΕ. (Μονάδες 7)

γ) ΜΝ = $\frac{ΔΕ}{2}$, όπου Μ και Ν τα μέσα των ΑΒ και ΔΕ αντίστοιχα. (Μονάδες 7)

δ) Το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 4)



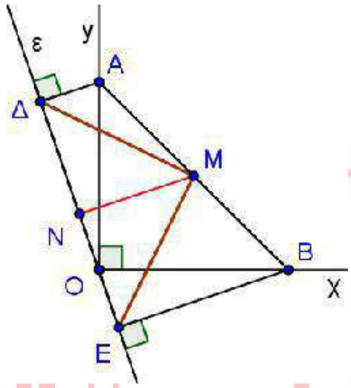
1778-Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΕ έχουν:

ΟΑ = ΟΒ, από υπόθεση

$A\widehat{O}\Delta = O\widehat{B}E$, ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες ($OA \perp OB, O\Delta \perp EB$).

Άρα τα τρίγωνα έχουν ίσες υποτείνουσες και ίσες οξείες γωνίες οπότε είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΕΒ είναι ίσα, ισχύει ότι: ΑΔ = ΟΕ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες ΑΟΔ και ΟΒΕ και ΟΔ = ΒΕ .

Οπότε: ΑΔ + ΒΕ = ΟΕ + ΟΔ = ΔΕ.

γ) Είναι ΑΔ $\perp$ ε και ΒΕ $\perp$ ε, άρα ΑΔ // ΒΕ και η ΑΒ δεν είναι παράλληλη στην ΔΕ από υπόθεση. Οπότε το ΑΒΕΔ είναι τραπέζιο.

Η ΜΝ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΕΔ οπότε ισχύει:

$MN = \frac{A\Delta + BE}{2}$. Όμως ΑΔ +ΒΕ = ΔΕ άρα $MN = \frac{\Delta E}{2}$.

δ) Ισχύει ΜΝ // ΑΔ διότι η διάμεσος ΜΝ του τραπεζίου ΑΔΕΒ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Επειδή ΑΔ $\perp$ ε θα είναι και ΜΝ $\perp$ ε. Από το ερώτημα (γ) έχουμε ότι:

$MN = \frac{\Delta E}{2}$.

Άρα στο τρίγωνο ΔΜΕ η διάμεσός του ΜΝ ισούται με το μισό της πλευράς ΔΕ στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΔΕ, δηλαδή $M\widehat{\Delta}E = 90^o$.

Επειδή ΜΝ // ΑΔ και ΑΔ κάθετη στη ΔΕ είναι ΜΝ κάθετη στη ΔΕ, οπότε το τμήμα ΜΝ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΔΜΕ, οπότε το τρίγωνο ΔΜΕ είναι και ισοσκελές.

1779

ΘΕΜΑ 4

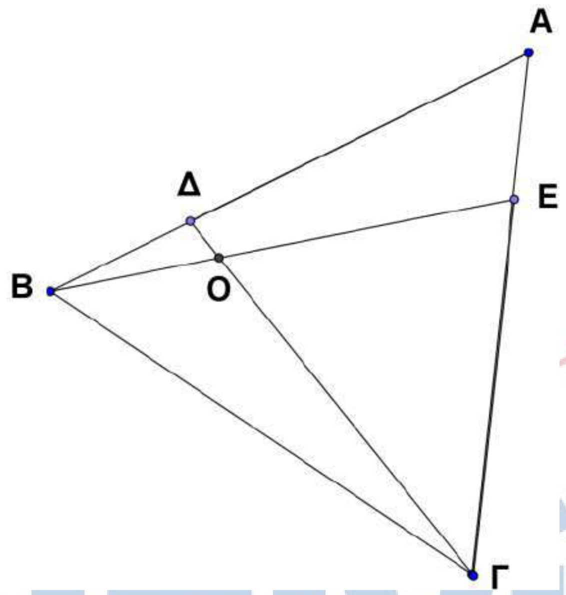
Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε να είναι ΑΔ=ΓΕ. Έστω Ο το σημείο τομής των ΓΔ και ΒΕ.

α) Να αποδείξτε ότι:

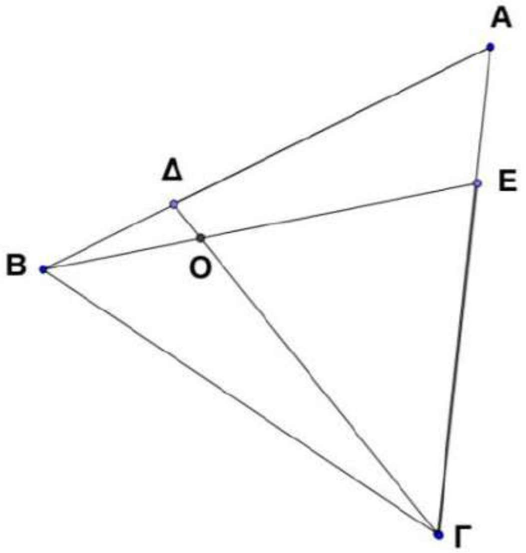
i. $B\hat{E}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$. (Μονάδες 10)

ii. $B\hat{O}\Gamma = 120^0$. (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΕΟΔ είναι εγγράψιμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



1779-Λύση



α) i. Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΑΔΓ έχουν:

ΑΔ = ΓΕ από υπόθεση,

ΑΓ = ΒΓ ως πλευρές του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ και

$\Gamma\hat{A}\Delta = B\hat{\Gamma}E = 60^o$ ως γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B\hat{E}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$ διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΓ και ΑΓ.

ii. Επειδή τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΑΔΓ είναι ίσα, ισχύει ότι: $E\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}A$ διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΕΓ και ΑΔ. Οπότε ισχύει και ότι: $O\hat{B}\Gamma = O\hat{\Gamma}A$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΟΓ έχουμε:

$B\hat{O}\Gamma + O\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}O = 180^o \Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma + O\hat{\Gamma}A + B\hat{\Gamma}O = 180^o \Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma + B\hat{\Gamma}A = 180^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma + 60^o = 180^o \Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma = 120^o$.

β) Είναι $\Delta\hat{O}E = B\hat{O}\Gamma = 120^o$ ως κατακορυφήν και $A = 60^o$ ως γωνία του ισόπλευρου τριγώνου, άρα $\Delta\hat{O}E + \hat{A} = 180^o$, δηλαδή στο τετράπλευρο ΑΔΟΕ δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, οπότε είναι εγγράψιμο.

1783

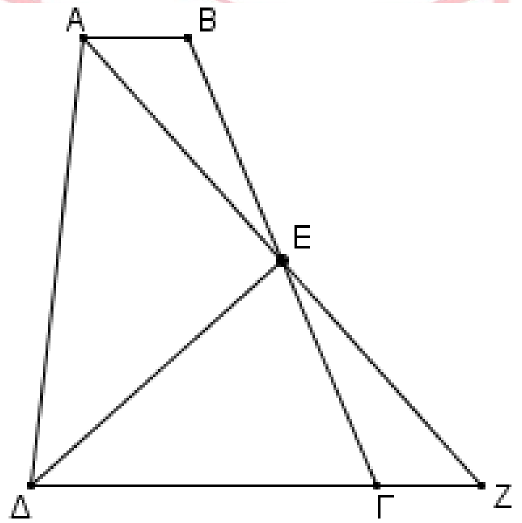
ΘΕΜΑ 4

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) ισχύει ΑΒ+ΓΔ=ΑΔ. Αν η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει την ΒΓ στο Ε και την προέκταση της ΔΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΑΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το Ε είναι το μέσο της ΒΓ (Μονάδες 10)

γ) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραπεζίου. (Μονάδες 8)



1783-Λύση

α) Είναι:

$\Delta\widehat{Z}A = Z\widehat{A}B$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΖ,

$\Delta\widehat{A}Z = Z\widehat{A}B$, διότι η ΑΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.

Άρα $\Delta\widehat{A}Z = \Delta\widehat{Z}A$, οπότε το τρίγωνο ΔΑΖ είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο ΔΑΖ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι

$A\Delta = \Delta Z \Leftrightarrow AB + \Gamma\Delta = \Delta Z \Leftrightarrow AB = \Delta Z - \Gamma\Delta \Leftrightarrow AB = \Gamma Z$.

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΕΓΖ έχουν:

ΑΒ = ΓΖ,

$\Delta\widehat{Z}A = Z\widehat{A}B$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΖ

$\widehat{B} = E\widehat{\Gamma}Z$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ.

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ, τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΕΓΖ είναι ίσα, οπότε είναι και ΒΕ = ΕΓ διότι είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες ΖΑΒ και ΔΖΑ, δηλαδή το Ε είναι το μέσο της ΒΓ.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΕΓΖ είναι ίσα ισχύει ότι ΑΕ = ΕΖ διότι είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες Β και ΕΓΖ.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΑΖ, το ΔΕ είναι διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος του τριγώνου. Δηλαδή η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$.

1785

ΘΕΜΑ 4

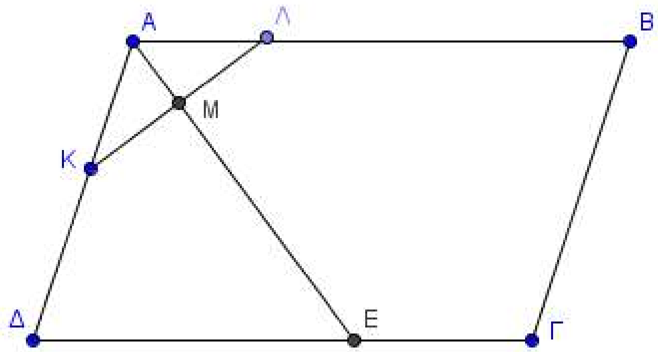
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με ΑΒ > ΑΔ. Θεωρούμε σημεία Κ, Λ, των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε ΑΚ = ΑΛ. Έστω Μ το μέσο του ΚΛ και η προέκταση του ΑΜ (προς το Μ) τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ =ΔΕ. (Μονάδες 8)

β) ΒΓ + ΓΕ = ΑΒ. (Μονάδες 10)

γ) $\hat{B} = 2 \cdot A\hat{\Lambda}K$. (Μονάδες 7)



1785-Λύση

α) Επειδή ΑΚ = ΑΛ, το τρίγωνο ΑΚΛ είναι ισοσκελές οπότε η διάμεσος ΑΜ είναι και διχοτόμος της γωνίας Α, δηλαδή $K\widehat{A}M = M\widehat{A}Λ$ (1). Επίσης $M\widehat{A}Λ = A\widehat{E}Δ$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΕ. Από (1), (2) προκύπτει $K\widehat{A}M = A\widehat{E}Δ$, οπότε το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές, άρα ΑΔ = ΔΕ.

β) Είναι ΔΕ = ΑΔ από το ερώτημα (α) και ΑΔ = ΒΓ, ΑΒ = ΔΓ αφού ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο οπότε ΔΕ = ΑΔ = ΒΓ, οπότε ΒΓ + ΓΕ = ΔΕ + ΓΕ = ΔΓ = ΑΒ.

γ) Από το άθροισμα των γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου ΑΚΛ έχουμε:

$\widehat{A} + A\widehat{K}Λ + A\widehat{Λ}K = 180^o \Leftrightarrow \widehat{A} + 2A\widehat{Λ}K = 180^o \Leftrightarrow 2A\widehat{Λ}K = 180^o - \widehat{A}$ (3).

Οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ. Δηλαδή $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^o \Leftrightarrow \widehat{B} = 180^o - \widehat{A}$ (4).

Από τις σχέσεις (3), (4) προκύπτει ότι $\widehat{B} = 2A\widehat{Λ}K$.

1786

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΒΓ και τη γωνία Β αμβλεία. Από την κορυφή Α φέρουμε την ΑΕ κάθετη στην ευθεία ΒΓ και έστω Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΔΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΒΓΝ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΜΕΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) Η ΕΝ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{M}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$. (Μονάδες 8)

1786-Λύση

α) Επειδή ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο ισχύει ότι: ΑΒ // ΓΔ και ΑΒ = ΓΔ . Άρα ΜΒ // ΝΓ και $\frac{AB}{2}=\frac{\Gamma\Delta}{2}$ και επειδή Μ και Ν μέσα των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα προκύπτει ΜΒ = ΝΓ. Οπότε το ΜΒΓΝ έχει τις δύο απέναντι πλευρές ΜΒ και ΝΓ ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επίσης ΜΒ = $\frac{AB}{2}$ = $\frac{2B\Gamma}{2}$ = ΒΓ.

Επομένως το παραλληλόγραμμο ΜΒΓΝ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες και συνεπώς είναι ρόμβος.

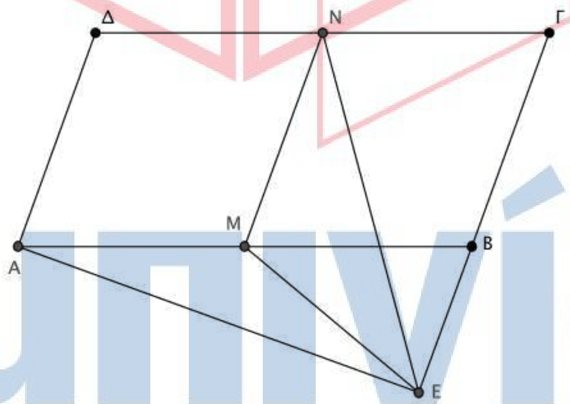
β) Ισχύει ότι ΜΝ // ΒΓ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΜΒΓΝ

άρα ΜΝ // ΕΓ .

Η ευθεία ΜΕ τέμνει την ευθεία ΓΝ επειδή αν ΜΕ // ΓΝ τότε από το Μ θα διέρχονταν δύο παράλληλες προς την ΓΝ (ΜΕ // ΓΝ και ΜΒ // ΓΝ). Άτοπο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΒ η ΕΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα ΕΜ = $\frac{AB}{2}$ = $\frac{\Gamma\Delta}{2}$ = ΓΝ.

Οπότε το τετράπλευρο ΜΕΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



γ) Έχουμε: ΕΜ = $\frac{AB}{2}$ = ΜΒ και ΜΒ = ΜΝ αφού ΜΒΓΝ ρόμβος.

Άρα ΕΜ = ΜΝ οπότε το τρίγωνο ΜΕΝ είναι ισοσκελές και ισχύει $M\hat{E}N = M\hat{N}E$ (3).

Επίσης $N\hat{E}\Gamma = M\hat{N}E$ (4) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΜΝ, ΒΓ που τέμνονται από την ΝΕ.

Άρα, από (3), (4) προκύπτει: $M\hat{E}N = N\hat{E}\Gamma$.

Οπότε η ΕΝ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{E}\Gamma$.

1787

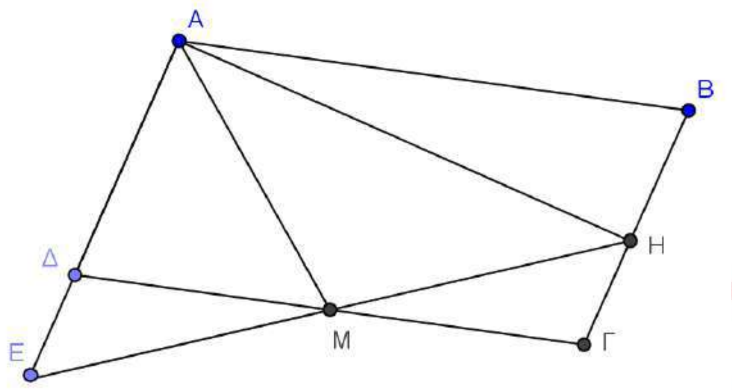
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2 ΒΓ, τη γωνία Α αμβλεία και Μ το μέσο της ΓΔ . Φέρουμε κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α, η οποία τέμνει την ΒΓ στο Η. Αν η προέκταση της ΗΜ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ε, να αποδείξετε ότι:

α) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΒ. (Μονάδες 9)

β) Τα τμήματα ΕΗ, ΔΓ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

γ) $\hat{E} = \Delta\hat{M}A$. (Μονάδες 8)



1787-Λύση

α) Είναι $B\widehat{A}M = \Delta\widehat{M}A$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΜ.

Επειδή το Μ είναι μέσο του ΔΓ ισχύει ότι $\Delta M = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ και ΓΔ = ΑΒ (απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ) άρα $\Delta M = \frac{AB}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma$. Όμως ΒΓ = ΑΔ (απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ) άρα ΔΜ = ΑΔ και συνεπώς το τρίγωνο ΔΑΜ είναι ισοσκελές οπότε $\Delta\widehat{A}M = \Delta\widehat{M}A$ (2).

Από τις (1), (2) είναι $B\widehat{A}M = \Delta\widehat{A}M$, οπότε η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\widehat{A}B$.

β) Τα τρίγωνα ΔΕΜ και ΜΗΓ έχουν:

ΔΜ = ΜΓ από υπόθεση

$\Delta\widehat{M}E = H\widehat{M}\Gamma$, ως κατακορυφήν

$E\widehat{\Delta}M = \widehat{\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ.

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΜΕ = ΜΗ διότι είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες ΕΔΜ και Γ.

Επειδή ΔΜ = ΜΓ και ΜΕ = ΜΗ, τα τμήματα ΕΗ, ΔΓ διχοτομούνται.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΗ, η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $AM = \frac{EH}{2} = ME$. Άρα το τρίγωνο ΑΜΕ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι: $\widehat{E} = E\widehat{A}M$. Όμως έχει αποδειχθεί ότι $E\widehat{A}M = \Delta\widehat{M}A$ άρα $\widehat{E} = \Delta\widehat{M}A$.

1788

ΘΕΜΑ 4

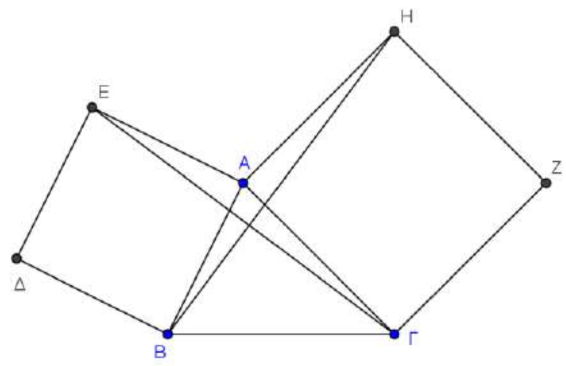
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{H} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma + \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$ (Μονάδες 8)

β) ΕΓ = ΒΗ (Μονάδες 9)

γ) Η ΕΓ είναι κάθετη στη ΒΗ. (Μονάδες 8)



1788-Λύση

α) Ισχύει ότι:

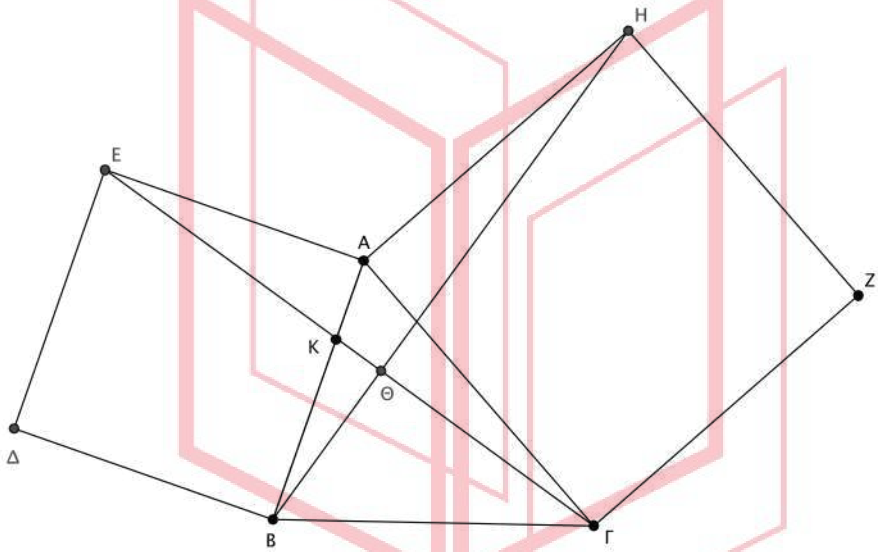
$B\widehat{A}E + B\widehat{A}\Gamma + H\widehat{A}\Gamma + E\widehat{A}H = 360^o \Leftrightarrow 90^o + B\widehat{A}\Gamma + 90^o + E\widehat{A}H = 360^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E\widehat{A}H = 180^o - B\widehat{A}\Gamma$ (1).

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ βρίσκουμε:

$A\widehat{B}\Gamma + A\widehat{\Gamma}B + B\widehat{A}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow A\widehat{B}\Gamma + A\widehat{\Gamma}B = 180^o - B\widehat{A}\Gamma$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι: $E\widehat{A}H = A\widehat{B}\Gamma + A\widehat{\Gamma}B$.



β) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΗ έχουν:

ΑΓ = ΑΗ, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΓΖΗ

$E\widehat{A}\Gamma = H\widehat{A}B$, διότι $E\widehat{A}\Gamma = E\widehat{A}B + B\widehat{A}\Gamma = 90^o + B\widehat{A}\Gamma$ και

$H\widehat{A}B = H\widehat{A}\Gamma + B\widehat{A}\Gamma = 90^o + B\widehat{A}\Gamma$

ΑΒ = ΑΕ, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΔΕ

Σύμφωνα με το κρτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΗ είναι ίσα οπότε ισχύει και ΕΓ = ΒΗ διότι είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες ΕΑΓ και ΒΑΗ.

γ) Έστω Θ το σημείο τομής των ΕΓ, ΒΗ και Κ το σημείο τομής των ΕΓ, ΑΒ. Επειδή τα τρίγωνα ΕΑΓ και ΗΑΒ είναι ίσα, ισχύει ότι: $A\widehat{E}\Gamma = A\widehat{B}H$ (3) διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΗ και ΑΓ.

Επίσης $E\widehat{K}A = B\widehat{K}\Gamma$ (4) ως κατακορυφήν.

Στο τρίγωνο ΑΕΚ είναι: $A\widehat{E}\Gamma + E\widehat{K}A = 90^o \overset{(3),(4)}{\Longleftrightarrow} A\widehat{B}H + B\widehat{K}\Gamma = 90^o$ (5).

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΒΚΘ βρίσκουμε:

$B\widehat{\Theta}K + A\widehat{B}H + B\widehat{K}\Gamma = 180^o \overset{(5)}{\Leftrightarrow} B\widehat{\Theta}K + 90^o = 180^o \Leftrightarrow B\widehat{\Theta}K = 90^o$. Άρα $E\Gamma \perp BH$.

1788-Λύση

1790

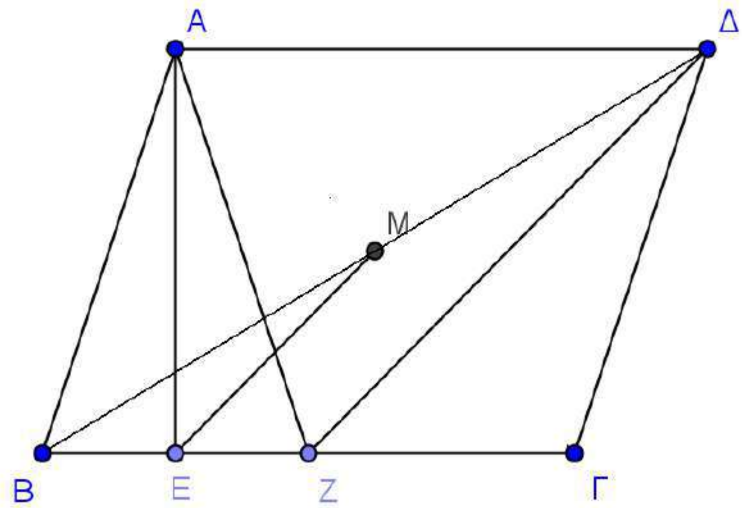
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τη γωνία του Β να είναι ίση με 70^{o} και το ύψος του ΑΕ. Έστω Ζ σημείο της ΒΓ ώστε ΒΕ = ΕΖ.

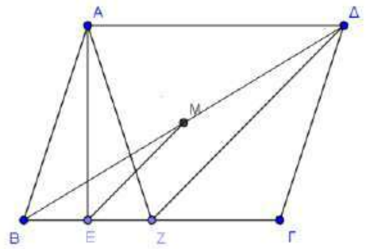
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου ΑΖΓΔ (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ το μέσο του ΒΔ, να αποδείξετε ότι ΕΜ = $\frac{\text{ΑΓ}}{2}$. (Μονάδες 8)



1790-Λύση



α) Στο τρίγωνο ΑΒΖ το ΑΕ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα ΑΒ = ΑΖ.

Επίσης ισχύει ότι ΑΒ = ΓΔ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, άρα και ΓΔ = ΑΖ.

Επειδή ΑΔ // ΒΓ είναι και ΑΔ // ΖΓ. Η ΑΖ τέμνει την ΓΔ, αφού τέμνει την παράλληλή της ΑΒ. Άρα το ΑΖΓΔ έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες οπότε είναι τραπέζιο.

Το τραπέζιο ΑΖΓΔ έχει ΑΖ = ΒΓ οπότε είναι ισοσκελές.

β) Είναι $A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{B}\Gamma = 70^o$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Επειδή οι γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow 70^o + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 110^o$

Επειδή το ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οι γωνίες της βάσης είναι ίσες, δηλαδή:

$A\hat{Z}\Gamma = \hat{\Gamma} = 110^o$ και $Z\hat{A}\Delta = \hat{\Delta} = 70^o$

γ) Το ΕΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΒΔΖ, άρα

$EM = \frac{\Delta Z}{2}$

Επίσης, οι διαγώνιοι του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΖΓΔ είναι ίσες, οπότε

ΔΖ = ΑΓ

Άρα $EM = \frac{A\Gamma}{2}$.

1791

ΘΕΜΑ 4

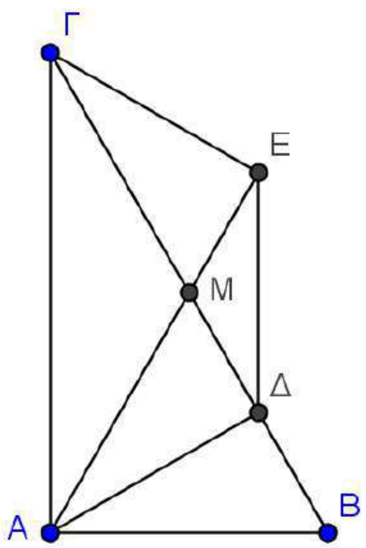
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^{O}$ και $\hat{\Gamma}=30^{O}$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και τη διάμεσό του ΑΜ. Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία ΑΜ, η οποία την τέμνει στο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

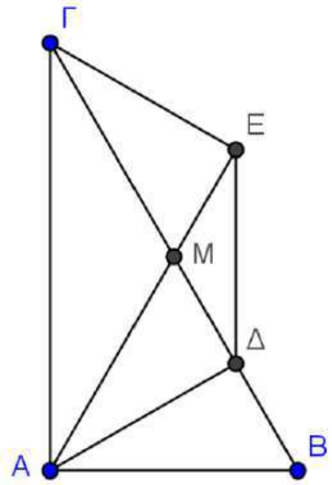
α) Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) ΜΕ=ΜΔ=ΒΓ/4 (Μονάδες 9)

γ) Το ΑΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



1791-Λύση



α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$\hat{B}+\hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \hat{B} + 30^o = 90^o \Leftrightarrow \hat{B} = 60^o$

Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB = M\Gamma$

Άρα το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές και επειδή $\hat{B} = 60^o$, το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο.

β) Το ΑΔ είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΜΒ, άρα είναι και διάμεσος, οπότε ισχύει ότι: $M\Delta = \frac{MB}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$

Είναι $\Gamma\widehat{M}E = A\widehat{M}B = 60^o$ ως κατακορυφήν, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΓΕ είναι $M\hat{\Gamma}E = 30^o$, άρα για την απέναντι πλευρά ΜΕ έχουμε $ME = \frac{M\Gamma}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$

γ) Η $A\widehat{M}B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔΜΕ, οπότε $A\widehat{M}B = M\hat{E}\Delta + M\hat{\Delta}E$. Από το ερώτημα (β) το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές άρα $A\widehat{M}B = 2M\hat{\Delta}E \Leftrightarrow$

$M\hat{\Delta}E = \frac{A\widehat{M}B}{2} = 30^o$

Οι ίσες γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $M\hat{\Delta}E$ είναι εντός εναλλάξ των ΑΓ, ΔΕ που τέμνονται από τη ΓΔ άρα ΑΓ // ΔΕ.

Το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές (ΑΜ = ΓΜ) οπότε $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}M = 30^o$

Στο ορθογώνιο τρίγωνα ΜΓΕ έχουμε:

$E\hat{\Gamma}M + \Gamma\widehat{M}E = 90^o \Leftrightarrow E\hat{\Gamma}M + 60^o = 90^o \Leftrightarrow E\hat{\Gamma}M = 30^o$

Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΜΒ η ΑΔ διχοτόμος οπότε $M\hat{A}\Delta = 30^o$

1791-Λύση

Έχουμε $E\hat{\Gamma}A + \Delta\hat{A}\Gamma = 60^o + 60^o = 120^o < 180^o$ δηλ. οι ΓΕ και ΑΔ τέμνονται.

Το τετράπλευρο ΑΔΕΓ έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες (ΕΔ= ΑΓ) οπότε είναι τραπέζιο.

Έχουμε $E\hat{\Gamma}A = \Delta\hat{A}\Gamma = 60^o$ οπότε το ΑΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1792

ΘΕΜΑ 4

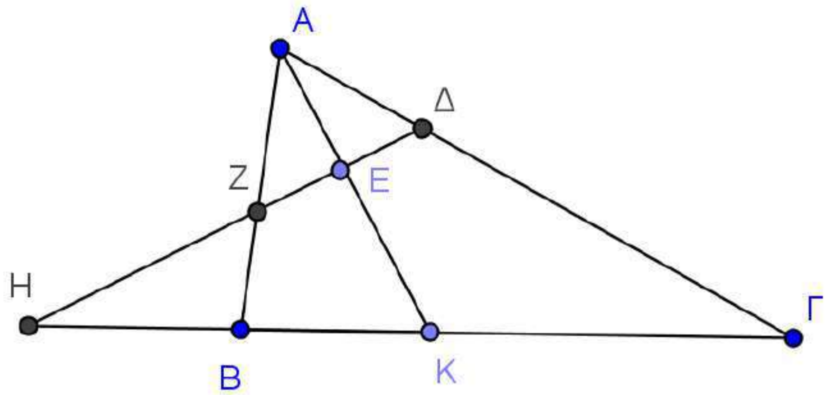
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΚ και σε τυχαίο σημείο της Ε φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο ΑΚ, η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Η.

Να αποδείξετε ότι:

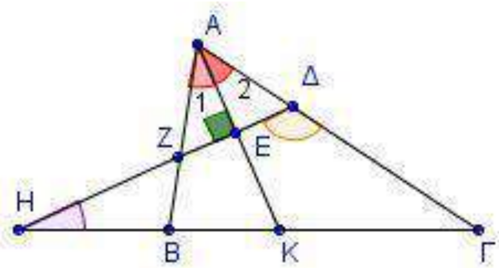
α) $Z\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$. (Μονάδες 7)

β) ΖΚ = ΚΔ. (Μονάδες 8)

γ) $Z\hat{H}\Gamma = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$. (Μονάδες 10)



1792-Λύση



α) Στο τρίγωνο ΑΖΔ η ΑΕ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα $A\hat{Z}E = A\hat{\Delta}E$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ βρίσκουμε:

$$\hat{A} + A\hat{Z}E + A\hat{\Delta}E = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} + 2A\hat{\Delta}E = 180^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E = 90^o - \frac{\hat{A}}{2}$$

Τότε:

$$Z\hat{\Delta}\Gamma + A\hat{\Delta}E = 180^o \Leftrightarrow Z\hat{\Delta}\Gamma = 180^o - A\hat{\Delta}E \Leftrightarrow Z\hat{\Delta}\Gamma = 180^o - 90^o + \frac{\hat{A}}{2} \Leftrightarrow Z\hat{\Delta}\Gamma = 90^o + \frac{\hat{A}}{2}$$

β) Η ΑΕ είναι μεσοκάθετος του ΖΔ και το σημείο Κ ανήκει σε αυτήν. Άρα το Κ ισαπέχει από τα Ζ και Δ, οπότε ΖΚ = ΚΔ.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΗΔΓ βρίσκουμε:

$$Z\hat{H}\Gamma + Z\hat{\Delta}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow Z\hat{H}\Gamma + 90^o + \frac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow Z\hat{H}\Gamma = 90^o - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma}$$

Όμως στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^o$$

Οπότε έχουμε:

$$Z\hat{H}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow Z\hat{H}\Gamma = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$

1795

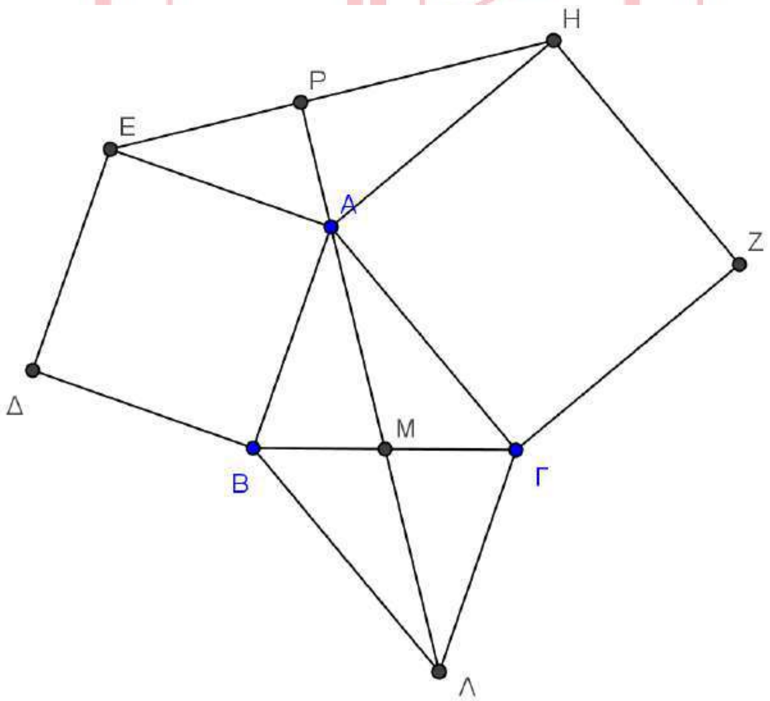
ΘΕΜΑ 4

Εκτός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Μ το μέσο του ΒΓ και Λ σημείο στην προέκταση της ΑΜ τέτοιο ώστε ΑΜ = ΜΛ, να αποδείξετε ότι:

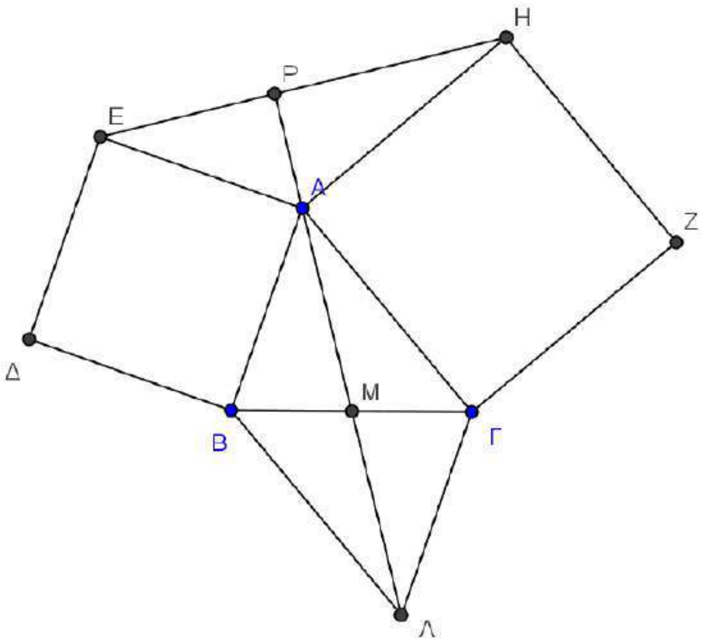
α) ΓΛ = ΑΕ. (Μονάδες 10)

β) Οι γωνίες ΑΓΛ και ΕΑΗ είναι ίσες. (Μονάδες 10)

γ) Η προέκταση της ΜΑ (προς το Α) τέμνει κάθετα την ΕΗ. (Μονάδες 5)



1795-Λύση



α) Στο τετράπλευρο ΑΒΛΓ οι διαγώνιές του διχοτομούνται, αφού Μ μέσο του ΒΓ και ΑΜ = ΜΛ από υπόθεση. Άρα είναι παραλληλόγραμμο και ΓΛ = ΑΒ. Επίσης ΑΕ = ΑΒ γιατί είναι πλευρές τετραγώνου, άρα ΓΛ = ΑΕ.

β) Είναι $E\widehat{A}B = H\widehat{A}\Gamma = 90^o$, οπότε ισχύει ότι

$E\widehat{A}H + B\widehat{A}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow E\widehat{A}H = 180^o - B\widehat{A}\Gamma$

Το τετράπλευρο ΑΒΛΓ είναι παραλληλόγραμμο και οι γωνίες $B\widehat{A}\Gamma$ και $A\widehat{\Gamma}\Lambda$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ,ΓΔ που τέμνονται από την ΑΓ. Άρα είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $B\widehat{A}\Gamma + A\widehat{\Gamma}\Lambda = 180^o \Leftrightarrow A\widehat{\Gamma}\Lambda = 180^o - B\widehat{A}\Gamma$.

Οπότε $A\widehat{\Gamma}\Lambda = E\widehat{A}H$.

γ) Τα τρίγωνα ΕΑΗ και ΑΓΛ έχουν:

- ΑΓ= ΑΗ, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΓΖΗ
- ΓΛ = ΑΕ, όπως αποδείξαμε στο (α) ερώτημα
- $A\widehat{\Gamma}\Lambda = E\widehat{A}H$, όπως αποδείξαμε στο (β) ερώτημα

Σύμφωνα το κριτήριο Π–Γ–Π, τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $P\widehat{H}A = \Gamma\widehat{A}\Lambda$ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΕ, ΓΛ αντίστοιχα. Ισχύει ότι:

$P\widehat{A}H + H\widehat{A}\Gamma + \Lambda\widehat{A}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow P\widehat{A}H + 90^o + P\widehat{H}A = 180^o \Leftrightarrow P\widehat{A}H + P\widehat{H}A = 90^o$.

Άρα το τρίγωνο ΡΑΗ είναι ορθογώνιο στο Ρ οπότε $MA \perp EH$.

1796

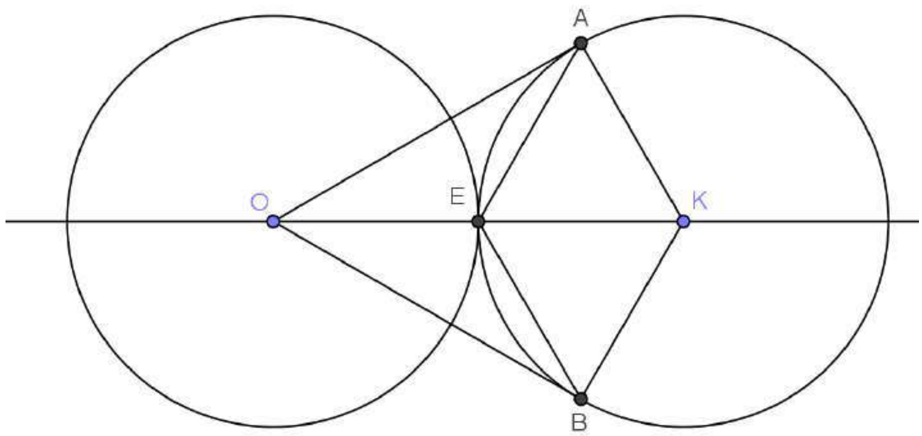
ΘΕΜΑ 4

Δυο ίσοι κύκλοι (Ο, ρ) και (Κ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε. Αν ΟΑ και ΟΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Ο στον κύκλο (Κ,ρ) να αποδείξετε ότι:

α) ΑΕ = ΒΕ. (Μονάδες 9)

β) $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{K} = 30^o$. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

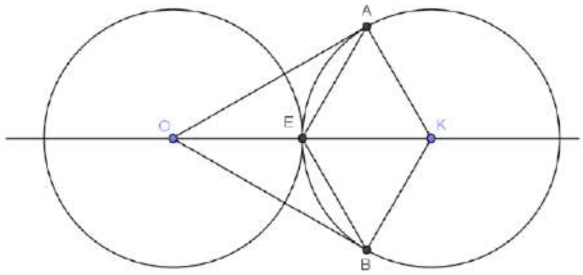


1796-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΒΕ έχουν:

- ΟΕ κοινή πλευρά
- ΟΑ = ΟΒ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου (Κ,ρ) που άγονται από σημείο Ο εκτός κύκλου
- $A\widehat{O}E$ = $E\widehat{O}B$,διότι η διακεντρική ευθεία ΟΚδιχοτομεί τη γωνία $A\widehat{O}B$ των εφαπτομένων

Σύμφωνα με το κριτήριο Π–Γ–Π, τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΒΕ είναι ίσα οπότε έχουν και ΑΕ =ΒΕ ως πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\widehat{O}E$, $E\widehat{O}B$.



β) Η ΑΚ είναι ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής με την ΟΑ, άρα ΟΑ $\perp$ ΑΚ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΚ είναι ΑΚ = ρ και ΟΚ = 2ρ = 2ΑΚ $\Leftrightarrow$ΑΚ =$\frac{OK}{2}$

Δηλαδή, μια κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, άρα η απέναντι γωνία από τη πλευρά αυτή είναι 30^o, δηλαδή $A\widehat{O}K$= 30^o.

γ) Είναι ΟΕ = ΚΕ οπότε το Ε είναι μέσο του ΟΚ.

Το τμήμα ΑΕ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άραΑΕ = $\frac{OK}{2}$ = ρ

Το τμήμα ΒΕ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΚ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα ΒΕ = $\frac{OK}{2}$ = ρ

Τελικά ισχύει ΑΕ = ΒΕ = ΚΒ = ΑΚ = ρ, οπότε το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος.

1799

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ, ΒΕ τα ύψη του.

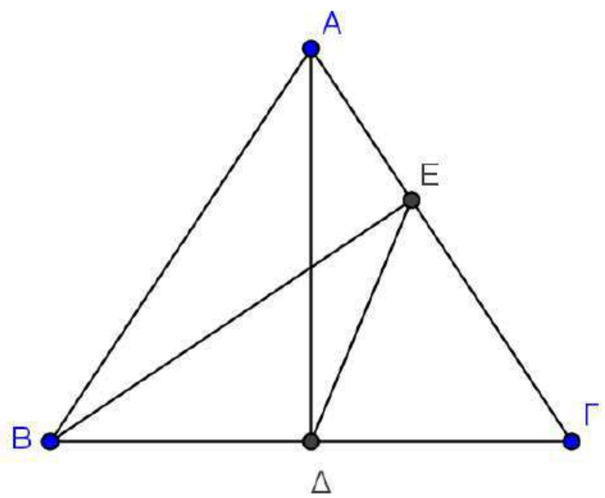
Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΓ =2 ΕΔ. (Μονάδες 6)

β) $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Delta = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}$. (Μονάδες 7)

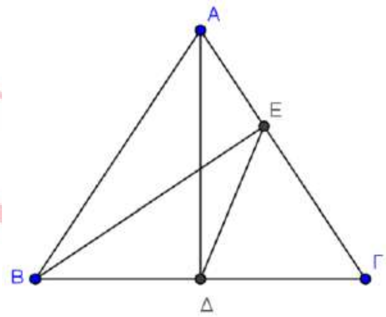
γ) Το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 6)

δ) $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}$. (Μονάδες 6)



1799-Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ η ΕΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $ΕΔ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΒΓ = 2ΕΔ$.



β) Είναι $ΕΔ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΕΔ = ΔΒ$

Άρα το τρίγωνο ΕΔΒ είναι ισοσκελές και έχει $Β\hat{Ε}Δ = Ε\hat{Β}Δ$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΕΒΓ, έχουμε:

$Ε\hat{Β}Γ + \hat{Γ} = 90^o \Leftrightarrow Ε\hat{Β}Δ + \hat{Γ} = 90^o \Leftrightarrow Β\hat{Ε}Δ = 90^o - \hat{Γ}$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ, έχουμε:

$Δ\hat{Α}Γ + \hat{Γ} = 90^o \Leftrightarrow \frac{\hat{Α}}{2} + \hat{Γ} = 90^o \Leftrightarrow \frac{\hat{Α}}{2} = 90^o - \hat{Γ}$

Οπότε έχουμε $Β\hat{Ε}Δ = \frac{\hat{Α}}{2}$.

γ) Επειδή $Α\hat{Ε}Β = Α\hat{Δ}Β = 90^o$, η πλευρά ΑΒ φαίνεται από τις κορυφές Δ, Ε υπό ίσες γωνίες, οπότε το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο.

δ) Επειδή το ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο, η πλευρά του ΑΕ φαίνεται από τις κορυφές Β, Δ υπό ίσες γωνίες, οπότε $Α\hat{Β}Ε = Α\hat{Δ}Ε$.

1800

ΘΕΜΑ 4

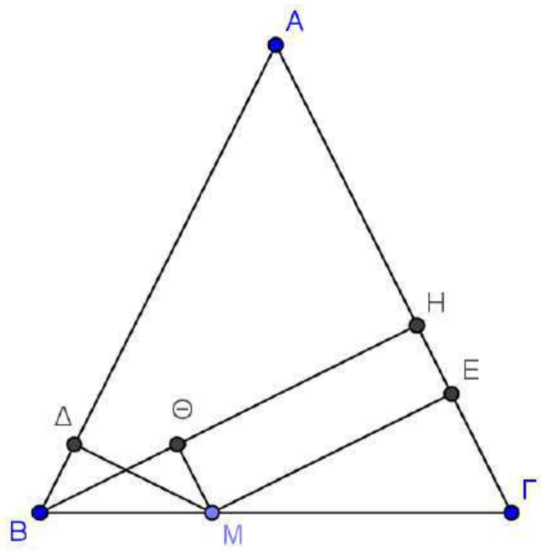
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ , τυχαίο σημείο Μ της βάσης του ΒΓ και το ύψος του ΒΗ. Από το Μ φέρουμε κάθετες ΜΔ, ΜΕ και ΜΘ στις ΑΒ, ΑΓ και ΒΗ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΕΗΘ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

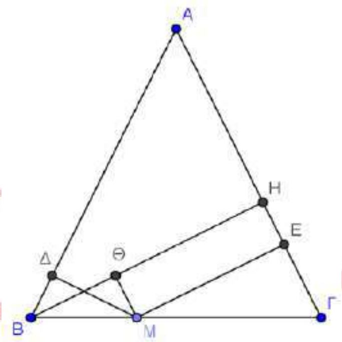
β) ΒΘ = ΔΜ (Μονάδες 9)

γ) Το άθροισμα ΜΔ+ΜΕ=ΒΗ. (Μονάδες 7)



1800-Λύση

α) Το τετράπλευρο ΜΕΗΘ έχει τρείς ορθές γωνίες άρα είναι ορθογώνιο.



β) Είναι $Μ\Theta \perp ΒΗ$ και $ΓΗ \perp ΒΗ$ οπότε ΜΘ // ΓΗ. Τότε ισχύει $Β\widehat{Μ}\Theta = \widehat{Γ}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΜΘ και ΓΗ που τέμνονται από τη ΒΓ.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΒΘΜ έχουν:

- $Δ\widehat{Β}Μ = Β\widehat{Μ}\Theta$, διότι $Δ\widehat{Β}Μ = \widehat{Γ}$ (ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ) και $Β\widehat{Μ}\Theta = \widehat{Γ}$.
- ΜΒ κοινή πλευρά

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΒΘ=ΔΜ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $Β\widehat{Μ}\Theta$, $Δ\widehat{Β}Μ$ αντίστοιχα.

γ) Από το ορθογώνιο ΜΕΗΘ ισχύει ΜΕ = ΘΗ. Έχουμε:

$ΜΔ + ΜΕ = Β\Theta + \Theta Η \Leftrightarrow ΜΔ + ΜΕ = ΒΗ$

1803

ΘΕΜΑ 4

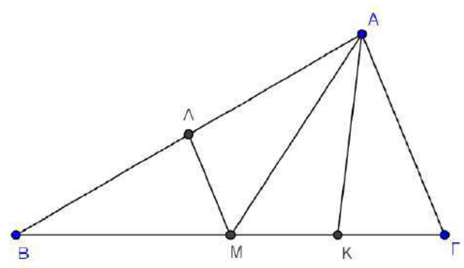
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 2ΑΓ. Έστω ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ και Κ, Λ τα μέσα των ΜΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

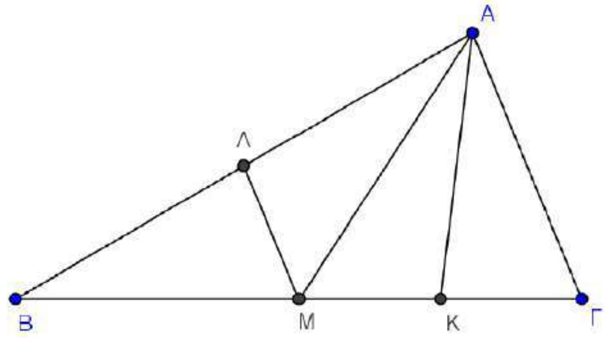
α) $M\widehat{A}\Gamma = A\widehat{M}\Gamma$ (Μονάδες 7)

β) ΜΛ = ΜΚ. (Μονάδες 9)

γ) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΛΜΚ . (Μονάδες 9)



1803-Λύση



α) Ισχύει ότι: ΜΓ = $\frac{ΒΓ}{2} = \frac{2ΑΓ}{2}$ = ΑΓ

Άρα το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΜ και ισχύει ότι

$M\widehat{A}Γ = A\widehat{M}Γ$

β) Το ΑΜΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο και ισχύει ΑΓ = ΜΓ

Επίσης Κ μέσο του ΜΓ οπότε ΜΚ = $\frac{ΜΓ}{2}$

Το ΜΛ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα ΜΛ // ΑΓ και

ΜΛ = $\frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΜΓ}{2} =$ ΜΚ

γ) Είναι: $Λ\widehat{M}A = M\widehat{A}Γ$

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΛΜ και ΑΓ που τέμνονται από την ΑΜ.

Επειδή $M\widehat{A}Γ = A\widehat{M}Γ$ έχουμε $Λ\widehat{M}A = A\widehat{M}Γ$.

Δηλαδή η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $Λ\widehat{M}K$.

1805

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στην προέκταση της ΑΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΔΕ = ΔΓ ενώ στην προέκταση της ΑΒ θεωρούμε σημείο θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΒΖ = ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E}$. (Μονάδες 10)

ii. τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

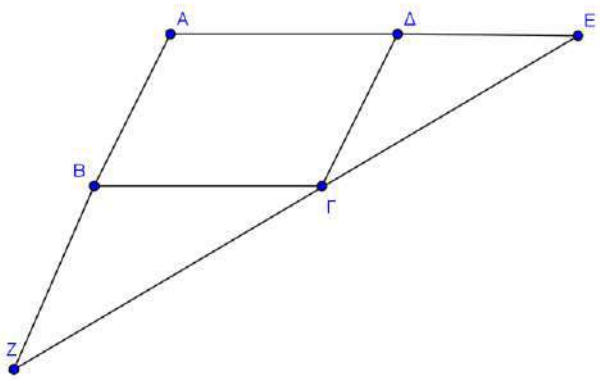
β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό. « Έχουμε:

$\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = \Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma$ (ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΖΕ) και

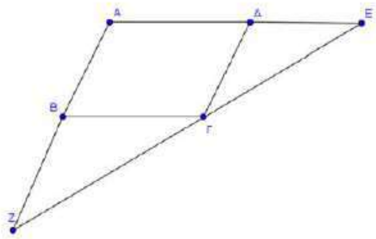
$\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ).

Όμως $\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E} + \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E} + \Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma = 180^o$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα: $\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E} + \mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta + \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = 180^o$. Οπότε τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό. (Μονάδες 5)



1805-Λύση



α) i. Επειδή ΒΖ = ΒΓ, το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές άρα $B\hat{\Gamma}Z = B\hat{Z}\Gamma$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΓΖ έχουμε:

$\Gamma\hat{B}Z + B\hat{\Gamma}Z + B\hat{Z}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow 180^o - \hat{B} + 2B\hat{\Gamma}Z = 180^o \Leftrightarrow B\hat{\Gamma}Z = \frac{\hat{B}}{2}$.

Το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές διότι ΔΕ = ΔΓ οπότε $\Delta\hat{\Gamma}E = \Delta\hat{E}\Gamma$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΓΔΕ, έχουμε:

$\Delta\hat{\Gamma}E + \Delta\hat{E}\Gamma + E\hat{\Delta}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow 2\Delta\hat{\Gamma}E + 180^o - \hat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{\Gamma}E = \frac{\hat{\Delta}}{2}$

Επειδή $\hat{B} = \hat{\Delta}$, ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου, έχουμε $B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{\Gamma}E$.

ii. Η $A\hat{B}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΖΓ οπότε $A\hat{B}\Gamma = B\hat{\Gamma}Z + B\hat{\Gamma}Z \Leftrightarrow A\hat{B}\Gamma = 2B\hat{\Gamma}Z$

Είναι: $Z\hat{\Gamma}E = B\hat{\Gamma}Z + B\hat{\Gamma}\Delta + \Delta\hat{\Gamma}E \Leftrightarrow Z\hat{\Gamma}E = 2B\hat{\Gamma}Z + B\hat{\Gamma}\Delta \Leftrightarrow Z\hat{\Gamma}E = A\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta \Leftrightarrow$

$Z\hat{\Gamma}E = A\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta \Leftrightarrow Z\hat{\Gamma}E = 180^o$ διότι οι γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι παραπληρωματικές. Άρα τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά.

β) Το λάθος οφείλεται στο συλλογισμό ότι χρησιμοποιήθηκε ως δεδομένο ότι τα Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά και αξιοποιήθηκε για να αποδείξουμε ότι οι γωνίες $B\hat{\Gamma}Z$ και $\Delta\hat{E}\Gamma$ είναι ίσες.

1806

ΘΕΜΑ 4

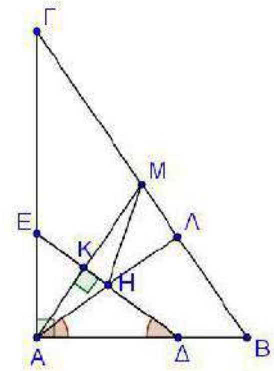
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή. Φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ και σε τυχαίο σημείο Κ αυτής φέρουμε κάθετη στην ΑΜ η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Αν Η είναι το μέσο του ΔΕ να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = B\hat{A}M$. (Μονάδες 8)

β) $A\hat{\Delta}H = \Delta\hat{A}H$. (Μονάδες 9)

γ) Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ. (Μονάδες 8)

1806-Λύση



α) Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα

$$AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB = M\Gamma$$

Επομένως το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ και ισχύει ότι $\widehat{B} = B\widehat{A}M$.

β) Το ΑΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΕ, άρα

$$AH = \frac{\Delta E}{2} = H\Delta = HE$$

Επομένως το τρίγωνο ΑΗΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ και ισχύει ότι $A\widehat{\Delta}H = \Delta\widehat{A}H$

γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΔ, έχουμε:

$B\widehat{A}M + A\widehat{\Delta}H = 90^o \Leftrightarrow \widehat{B} + A\widehat{\Delta}H = 90^o \Leftrightarrow A\widehat{\Delta}H = 90^o - \widehat{B} = \Delta\widehat{A}H$

Στο τρίγωνο ΑΛΒ έχουμε:

$\Delta\widehat{A}H + \widehat{B} = 90^o - \widehat{B} + \widehat{B} = 90^o$

Άρα και $A\widehat{\Lambda}B = 90^o$, δηλαδή $AH \perp B\Gamma$.

1807

ΘΕΜΑ

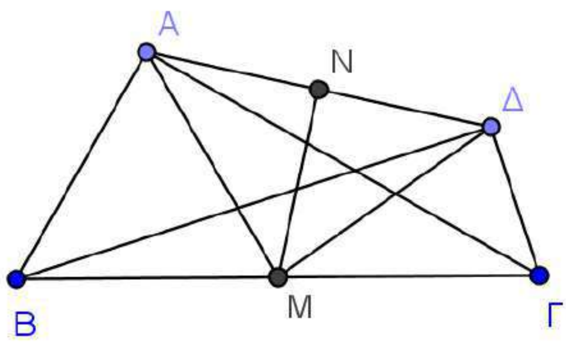
Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ με $\hat{A} = 90^o$, $\hat{\Delta} = 90^o$ και Μ, Ν τα μέσα των ΒΓ και ΑΔ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΜ = ΜΔ. (Μονάδες 10)

β) Η ΜΝ είναι κάθετη στην ΑΔ. (Μονάδες 10)

γ) $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$. (Μονάδες 5)

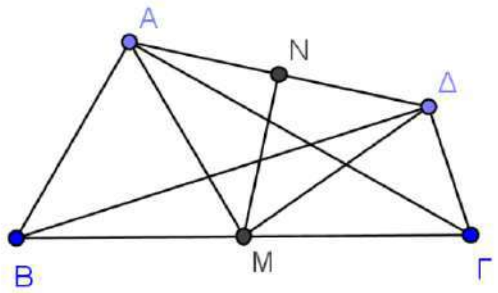


1807-Λύση

α) Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα ΑΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

Η ΔΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΔΒΓ, άρα ΔΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

Οπότε προκύπτει ότι ΑΜ =ΜΔ.



β)Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΔ η ΜΝ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και ύψος του τριγώνου, δηλαδή ΜΝ $\perp$ ΑΔ.

γ) Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει Β$\widehat{Α}$Γ= Β$\widehat{Δ}$Γ= 90^o. Δηλαδή η πλευρά ΒΓ φαίνεται από τις κορυφές Α και Δ υπό ίσες γωνίες, άρα το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο. Επομένως η πλευρά ΔΓ φαίνεται από τις κορυφές Β και Α υπό ίσες γωνίες, δηλαδή Γ$\widehat{Β}$Δ= Γ$\widehat{Α}$Δ.

1808

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) θεωρούμε σημείο Λ ώστε ΕΛ = ΑΕ και στην προέκταση της ΕΔ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο Κ τέτοιο ώστε ΔΚ = ΑΔ.

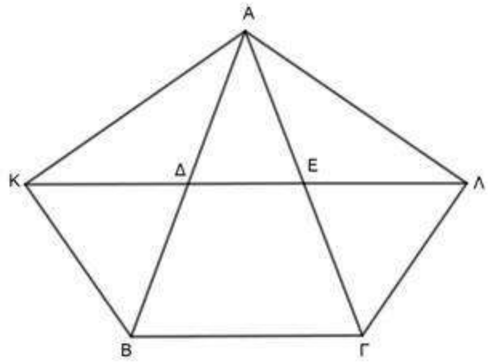
Να αποδείξετε ότι:

α) ΚΔ = ΛΕ. (Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ορθογώνια. (Μονάδες 9)

γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

1808-Λύση



α)Είναι

ΚΔ = ΑΔ $\Leftrightarrow$ ΚΔ $= \frac{ΑΒ}{2}$ και

ΛΕ = ΑΕ $\Leftrightarrow$ ΛΕ $= \frac{ΑΓ}{2}$

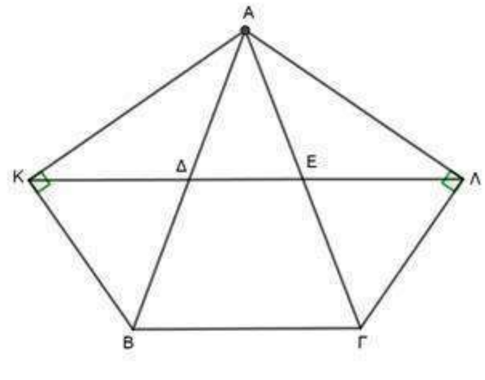
Επειδή ΑΒ = ΑΓ είναι και ΚΔ = ΛΕ

β) Ισχύει ότι ΚΔ = $\frac{ΑΒ}{2}$

Δηλαδή μια διάμεσος του τριγώνου ΑΚΒ ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη πλευρά αυτή.

Όμοια, στο τρίγωνο ΑΛΓ ισχύει για τη διάμεσο ΛΕ: ΛΕ = $\frac{ΑΓ}{2}$

Δηλαδή, μια διάμεσος στο τρίγωνο ΛΓ ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο ΑΛΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη πλευρά αυτή.



γ) Τα τρίγωνα ΑΔΛ και ΑΚΕ είναι ίσα από το κριτήριο Π-Γ-Π διότι:

• ΑΔ = ΑΕ ως μισά των ίσων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ

• ΛΔ = ΚΕ ως άθροισμα των ίσων τμημάτων ΛΕ, ΚΔ με το ΔΕ

• $Α\hat{Ε}Δ = Α\hat{Δ}Ε$, ως γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΔΕ(ΑΔ = ΑΕ)

Άρα ΑΛ = ΑΚ

1808-Λύση

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσα διότι:

- ΑΒ = ΑΓ, διότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές
- ΑΚ = ΑΛ

1809

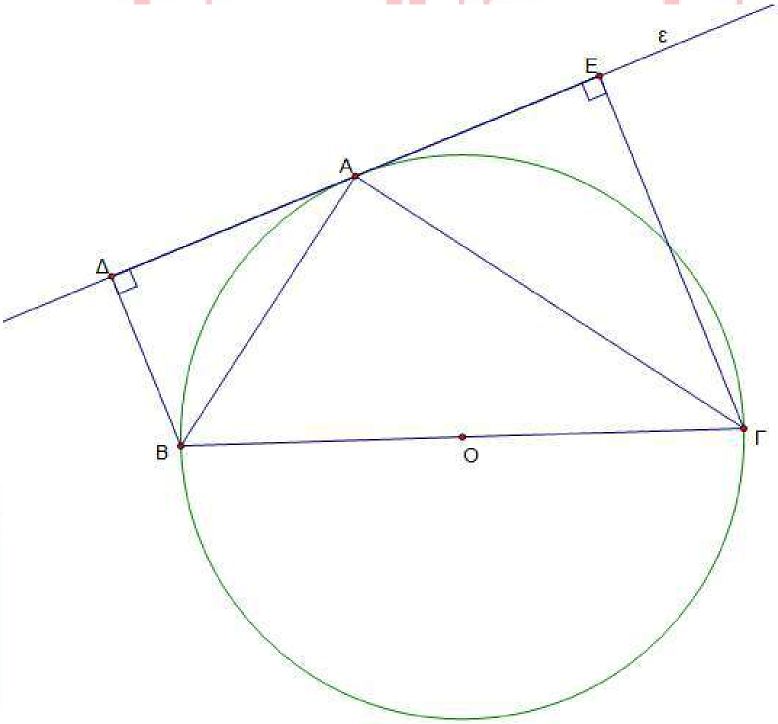
ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο, με διάμετρο ΒΓ. Από σημείο Α του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ε) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$.
Από τα σημεία Β και Γ φέρουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στην ευθεία (ε).

α) Να αποδείξετε ότι ΒΑ και ΓΑ είναι διχοτόμοι των γωνιών $\mathrm{\Delta}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{\Gamma}$ και $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Αν ΑΖ είναι ύψος του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$, να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE} = \mathrm{AZ}$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{B\Delta} + \mathrm{\Gamma E} = \mathrm{B\Gamma}$. (Μονάδες 9)



1809-Λύση

α) Είναι $B\widehat{A}\Gamma = 90^o$ ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο.

Η γωνία $\Delta\widehat{A}B$ σχηματίζεται από την εφαπτομένη ευθεία (ε) και τη χορδή ΑΒ, άρα ισχύει $\Delta\widehat{A}B = A\widehat{\Gamma}B$. Όμοια $E\widehat{A}\Gamma = A\widehat{B}\Gamma$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ βρίσκουμε

$A\widehat{B}\Gamma + A\widehat{\Gamma}B = 90^o \Leftrightarrow A\widehat{B}\Gamma = 90^o - A\widehat{\Gamma}B$

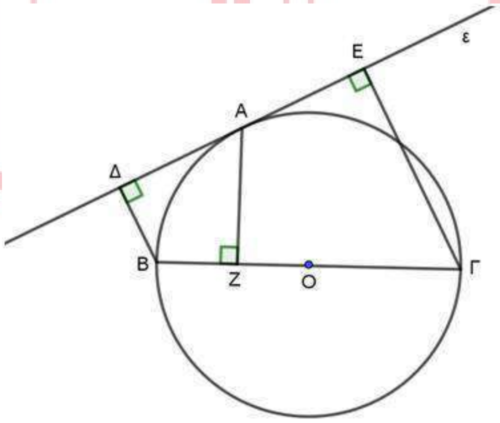
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ βρίσκουμε

$A\widehat{B}\Delta + \Delta\widehat{A}B = 90^o \Leftrightarrow A\widehat{B}\Delta = 90^o - A\widehat{\Gamma}B$

Οπότε προκύπτει ότι $A\widehat{B}\Gamma = A\widehat{B}\Delta$. Άρα η ΒΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\widehat{B}\Gamma$.

Όμοια βρίσκουμε $A\widehat{\Gamma}B = 90^o - A\widehat{B}\Gamma$ και $A\widehat{\Gamma}E = 90^o - E\widehat{A}\Gamma = 90 - A\widehat{B}\Gamma$. Άρα

$A\widehat{\Gamma}B = A\widehat{\Gamma}E$, δηλαδή η ΓΑ είναι διχοτόμος της $E\widehat{\Gamma}B$.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΓ και ΑΕΓ είναι ίσα διότι:

• ΑΓ κοινή πλευρά,

• $Z\widehat{\Gamma}A = A\widehat{\Gamma}E$, διότι ΑΓ διχοτόμος της $E\widehat{\Gamma}B$

Άρα ΑΖ = ΑΕ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $Z\widehat{\Gamma}A$, $A\widehat{\Gamma}E$ αντίστοιχα.

Επίσης, τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΖ είναι ίσα διότι

• ΑΒ, κοινή πλευρά,

• $A\widehat{B}\Delta = A\widehat{B}Z$, διότι ΑΒ διχοτόμος της $\Delta\widehat{B}\Gamma$

Άρα ΑΔ = ΑΖ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\widehat{B}\Delta$, $A\widehat{B}Z$ αντίστοιχα.

Οπότε προκύπτει ότι ΑΔ = ΑΕ = ΑΖ.

γ) Από τα ίσα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΖ έχουμε ΒΖ = ΒΔ .

Όμοια, από τα ίσα τρίγωνα ΑΖΓ και ΑΕΓ έχουμε ΓΖ = ΓΕ.

Έχουμε ΒΓ = ΒΖ + ΓΖ = ΒΔ + ΓΕ $\Leftrightarrow$ ΒΓ = ΒΔ + ΓΕ

1811

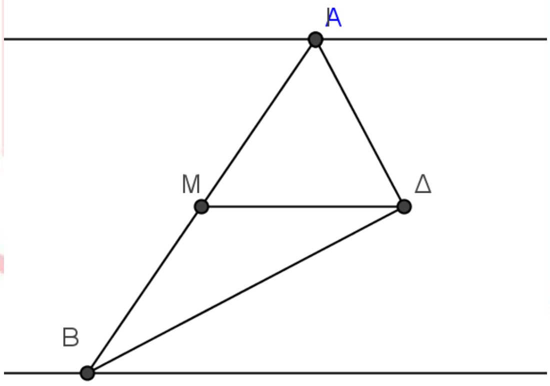
ΘΕΜΑ 4

Δίνονται δυο παράλληλες ευθείες (ε) και (ζ), και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ. Αν Μ είναι το μέσον του ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

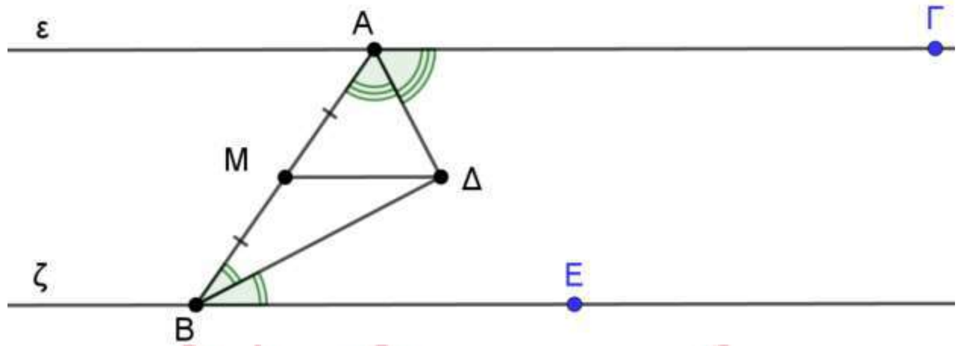
α) Η γωνία ΒΔΑ είναι ορθή. (Μονάδες 9)

β) $B\hat{M}\Delta = 2 \cdot M\hat{\Delta}A$ (Μονάδες 8)

γ) ΜΔ // ε (Μονάδες 8)



1811-Λύση



Για διευκόλυνση της διατύπωση της λύσης, παίρνουμε δύο σημεία Γ και Ε στις ευθείες (ε) και (ζ), αντίστοιχα.

α) Οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma$ και $A\hat{B}E$ ως εντός και επί τα αυτά μέρη, των παραλλήλων (ε) και (ζ) με τέμνουσα την ΑΒ, είναι παραπληρωματικές.

Επίσης οι ΑΔ, ΒΔ είναι οι διχοτόμοι των ίδιων γωνιών, $B\hat{A}\Gamma$ και $A\hat{B}E$, αντίστοιχα.

Άρα, λόγω των παραπάνω ισχύει ότι $B\hat{A}\Delta + A\hat{B}\Delta = \frac{B\hat{A}\Gamma}{2} + \frac{A\hat{B}E}{2} = \frac{B\hat{A}\Gamma + A\hat{B}E}{2} = \frac{180^o}{2} = 90^o$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΔΒ βρίσκουμε:

$$B\hat{A}\Delta + A\hat{B}\Delta + B\hat{\Delta}A = 180^o \Leftrightarrow 90^o + B\hat{\Delta}A = 180^o \Leftrightarrow B\hat{\Delta}A = 90^o$$

β) Από το α), το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ορθογώνιο, με ορθή την $B\hat{\Delta}A$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ η ΔΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $\Delta M = \frac{AB}{2} = MA$.

Επομένως το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές και οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση του ΑΔ είναι ίσες, δηλαδή $M\hat{A}\Delta = M\hat{\Delta}A$ (1).

Η γωνία $B\hat{M}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΜΔ, οπότε:

$B\hat{M}\Delta = M\hat{\Delta}A + M\hat{A}\Delta$ (2).

Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι $B\hat{M}\Delta = 2M\hat{\Delta}A$.

γ) Από την υπόθεση η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$, επομένως $\Gamma\hat{A}B = 2M\hat{A}\Delta$.

Από την (1) έχουμε ότι $\Gamma\hat{A}B = 2M\hat{\Delta}A$ (3).

Επομένως, από το β) και την ισότητα (3) έχουμε ότι $\Gamma\hat{A}B = B\hat{M}\Delta$. Άρα οι ευθείες ΜΔ και (ε) σχηματίζουν δύο εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες, επομένως ΜΔ // ε.

1814

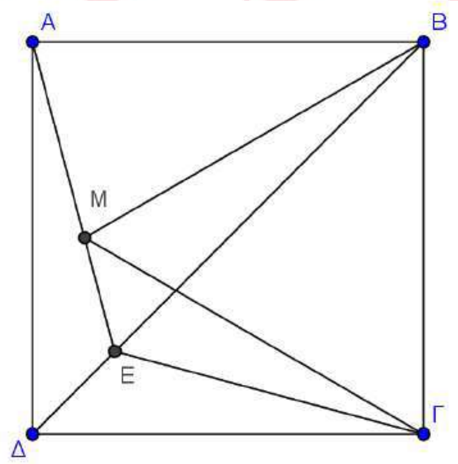
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο ΜΒΓ. Αν η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΒΔ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι:

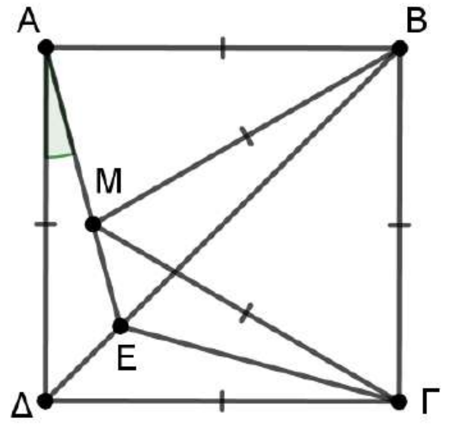
α) $\Delta\hat{A}E = 15^o$. (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) Η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΓΜ. (Μονάδες 9)



1814-Λύση



α) Επειδή το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισόπλευρο ισχύει ότι $M\widehat{B}\Gamma = 60^o$.

Επίσης οι γωνίες $A\widehat{B}M$ και $M\widehat{B}\Gamma$ είναι συμπληρωματικές.

Άρα $A\widehat{B}M + M\widehat{B}\Gamma = 90^o \Leftrightarrow A\widehat{B}M + 60^o = 90^o \Leftrightarrow A\widehat{B}M = 30^o$.

Ισχύει ακόμη ότι ΒΜ = ΜΓ = ΒΓ, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΜΒΓ. Επίσης ΒΑ = ΒΓ ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Άρα ΒΑ = ΒΜ οπότε το τρίγωνο ΒΑΜ είναι ισοσκελές και ισχύει $B\widehat{A}M = B\widehat{M}A$. Τότε από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΜ βρίσκουμε:

$A\widehat{B}M + B\widehat{A}M + B\widehat{M}A = 180^o \Leftrightarrow 30^o + 2B\widehat{A}M = 180^o \Leftrightarrow B\widehat{A}M = 75^o$.

Όμως οι γωνίες $\Delta\widehat{A}E$ και $B\widehat{A}M$ είναι συμπληρωματικές.

Άρα $\Delta\widehat{A}E = 90^o - B\widehat{A}M = 90^o - 75^o = 15^o$.

β) Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ έχουν:

- ΔΕ κοινή πλευρά
- ΔΑ = ΔΓ, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ
- $A\widehat{\Delta}E = E\widehat{\Delta}\Gamma$ διότι η διαγώνιος του τετραγώνου διχοτομεί τις γωνίες του

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π, τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων ισχύει ότι $\Delta\widehat{A}E = \Delta\widehat{\Gamma}E \Leftrightarrow \Delta\widehat{\Gamma}E = 15^o$ (1), καθώς οι γωνίες $\Delta\widehat{A}E$ και $\Delta\widehat{\Gamma}E$ βρίσκονται απέναντι από την κοινή πλευρά ΔΕ, των ίσων τριγώνων.

Επειδή το ΒΓΜ είναι ισόπλευρο ισχύει ότι $B\widehat{\Gamma}M = 60^o$.

Επίσης $\Delta\widehat{\Gamma}B = \Delta\widehat{\Gamma}E + E\widehat{\Gamma}M + B\widehat{\Gamma}M = 15^o + E\widehat{\Gamma}M + 60^o$.

Όμως $\Delta\widehat{\Gamma}B = 90^o$, άρα $15^o + E\widehat{\Gamma}M + 60^o = 90^o \Leftrightarrow E\widehat{\Gamma}M = 15^o$ (2).

Από (1) και (2) βρίσκουμε $\Delta\widehat{\Gamma}E = E\widehat{\Gamma}M$, άρα η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\widehat{\Gamma}M$.

1815

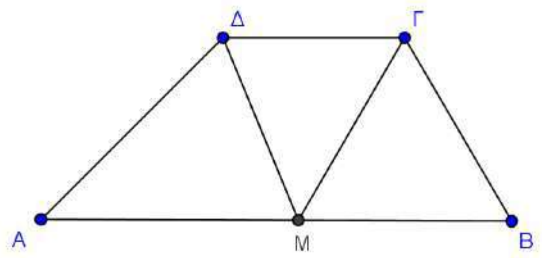
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και ΑΒ = ΑΔ + ΒΓ. Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

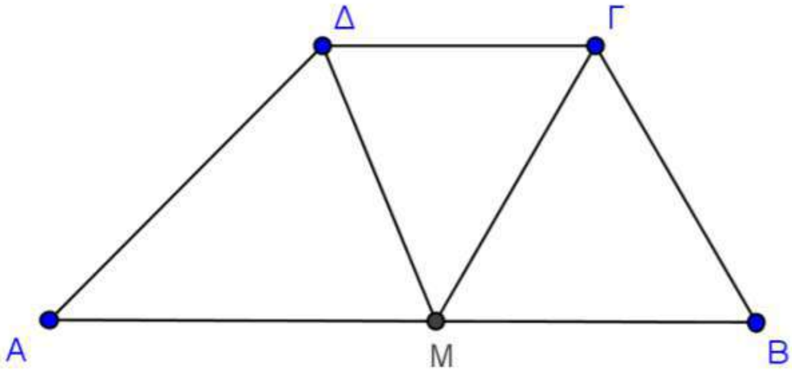
α) Το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Η ΓΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ του τραπεζίου. (Μονάδες 8)



1815-Λύση



α) Ισχύουν τα εξής:

$\Delta\widehat{M}A = \Gamma\widehat{\Delta}M$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΜ.

$A\widehat{\Delta}M = \Gamma\widehat{\Delta}M$, διότι η ΔΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$.

Άρα $\Delta\widehat{M}A = A\widehat{\Delta}M$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι ΑΔ = ΑΜ (1).

β) Είναι ΑΒ = ΑΔ + ΒΓ. Λόγω της (1) είναι ΑΒ = ΑΜ + ΒΓ.

Όμως ΑΒ = ΑΜ + ΜΒ.

Άρα ΑΜ + ΒΓ = ΑΜ + ΜΒ $\Leftrightarrow$ ΒΓ = ΜΒ.

Άρα τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές και έχει $\Gamma\widehat{M}B = M\widehat{\Gamma}B$ (2).

γ) Ισχύουν τα εξής:

$\Gamma\widehat{M}B = \Delta\widehat{\Gamma}M$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΓΜ.

$\Gamma\widehat{M}B = M\widehat{\Gamma}B$ λόγω της (2).

Άρα είναι $\Delta\widehat{\Gamma}M = M\widehat{\Gamma}B$, δηλαδή η ΓΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Gamma}$.

1816

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΚ κάθετη στην ΑΒ και ΔΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΓ. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓΗ κάθετη στην ΑΒ και ΓΖ κάθετη στην ΚΔ.

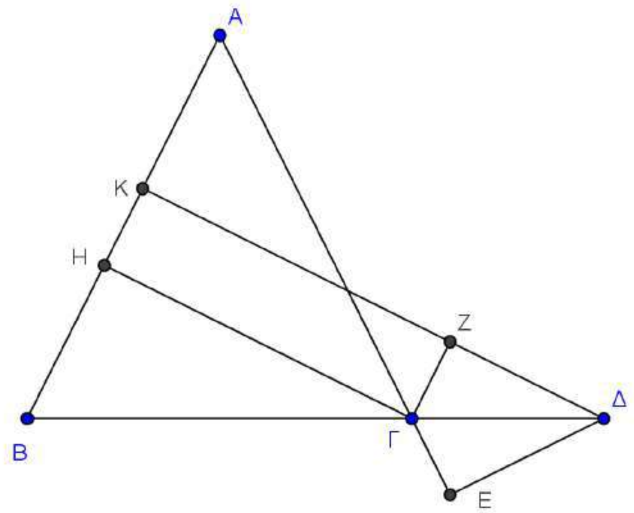
Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΖΓΔ είναι ίση με τη γωνία Β. (Μονάδες 4)

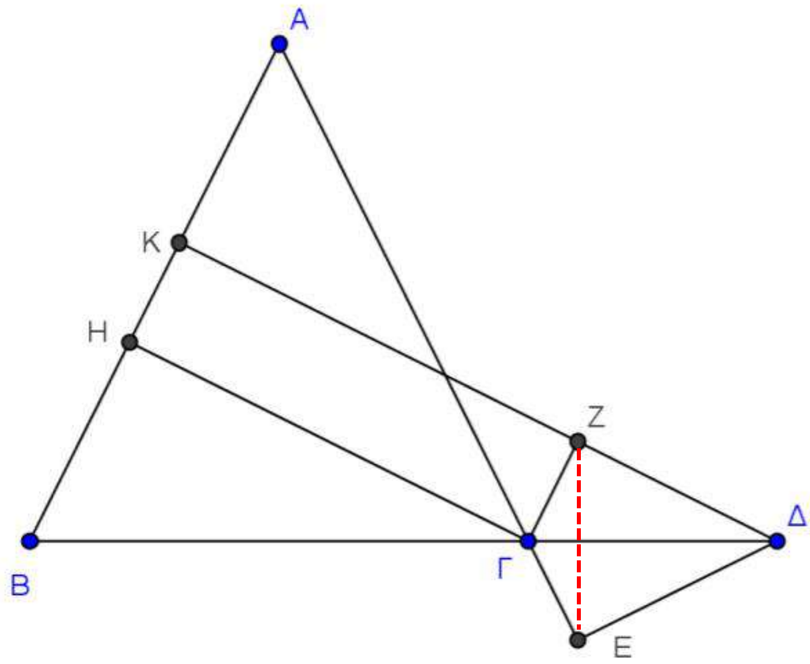
β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΓΕ. (Μονάδες 4)

γ) Το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

δ) ΔΚ – ΔΕ = ΗΓ (Μονάδες 8)



1816-Λύση



α) Επειδή ΓΖ ⊥ ΔΚ και ΒΑ ⊥ ΔΚ, είναι ΓΖ // ΑΒ. Επομένως $Z\hat{\Gamma}\Delta = \hat{B}$ (1), ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΖ που τέμνονται από την ΒΔ.

β) Είναι $A\hat{\Gamma}B = \hat{B}$ (2) ως γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου. Ακόμη $\Delta\hat{\Gamma}E = A\hat{\Gamma}B$ (3) ως κατακορυφήν. Τελικά από τις (1), (2) και (3) προκύπτει $\Delta\hat{\Gamma}E = Z\hat{\Gamma}\Delta$, οπότε η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\hat{\Gamma}E$.

γ) Τα τρίγωνα ΖΓΔ και ΔΓΕ:

- Είναι ορθογώνια
- Έχουν ΔΓ κοινή πλευρά
- Έχουν $E\hat{\Gamma}\Delta = Z\hat{\Gamma}\Delta$

Άρα έχουν ίσες υποτείνουσες και οξείες γωνίες μία προς μία ίσες. Επομένως είναι ίσα και έχουν ΔΖ = ΔΕ (απέναντι από τις ίσες γωνίες $E\hat{\Gamma}\Delta$ και $Z\hat{\Gamma}\Delta$), οπότε το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές.

δ) Το τετράπλευρο ΚΗΓΖ έχει τρεις γωνίες ορθές οπότε είναι ορθογώνιο. Οι ΚΖ, ΗΓ είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου οπότε ΚΖ = ΗΓ. Τότε:

ΔΚ – ΔΕ = ΔΚ – ΔΖ = ΖΚ = ΗΓ.

1818

ΘΕΜΑ 4

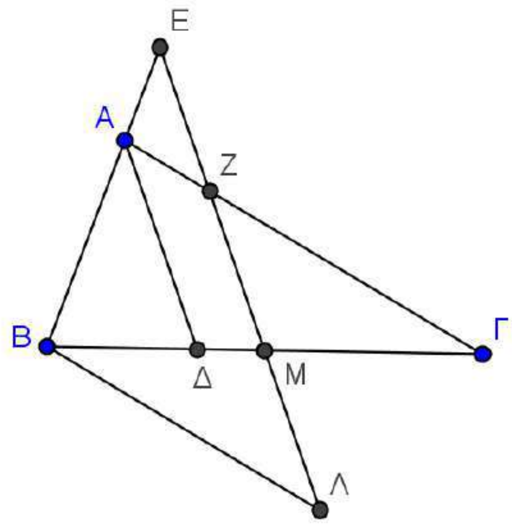
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, η διχοτόμος του ΑΔ και ευθεία (ε) παράλληλη από το Β προς την ΑΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ, την ευθεία (ε) στο σημείο Λ και την προέκταση της ΒΑ στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

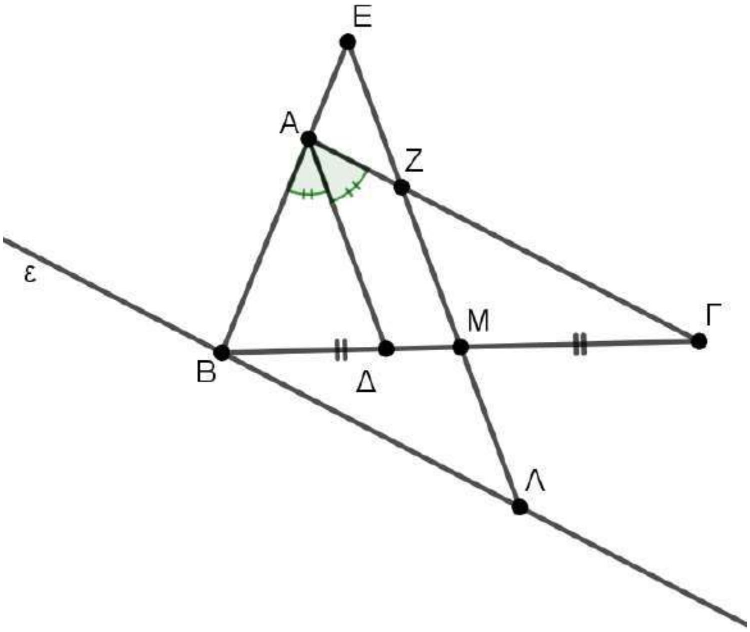
α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΒΛΕ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) ΒΛ =ΓΖ . (Μονάδες 9)

γ) ΑΕ=ΑΓ-ΒΛ. (Μονάδες 8)



1818-Λύση



α) Είναι $\hat{E}$ = Β$\widehat{A}$Δ (1), ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΕΜ που τέμνονται από την ΒΕ. Επίσης Ε$\widehat{Z}$Α = Δ$\widehat{A}$Γ (2), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ, ΕΜ που τέμνονται από την ΑΓ. Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ = Β$\widehat{A}$Γ ισχύει ότι Β$\widehat{A}$Δ = Δ$\widehat{A}$Γ (3). Η (3) λόγω των (1) και (2) γράφεται $\hat{E}$ = Ε$\widehat{Z}$Α (4), οπότε το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

Είναι Ε$\widehat{Z}$Α = Β$\widehat{\Lambda}$Ε (5) ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΓ, ΒΛ που τέμνονται από την ΕΛ. Από τις (4), (5) προκύπτει $\hat{E}$ = Β$\widehat{\Lambda}$Ε οπότε και το τρίγωνο ΒΛΕ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΒΜΛ και ΖΜΓ έχουν:

- ΒΜ = ΜΓ, διότι Μ μέσο της ΒΓ,
- Ζ$\widehat{M}$Γ = Β$\widehat{M}$Λ ως κατακορυφήν,
- Λ$\widehat{B}$Μ = Ζ$\widehat{\Gamma}$Μ, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΓ, ΒΛ που τέμνονται από την ΒΓ.

Από το κριτήριο Γ-Π-Γ, τα τρίγωνα ΒΜΛ και ΖΜΓ είναι ίσα, οπότε ΒΛ = ΓΖ, καθώς βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες Ζ$\widehat{M}$Γ και Β$\widehat{M}$Λ στα ίσα τρίγωνα.

γ) Είναι ΑΕ = ΑΖ, λόγω του ισοσκελούς ΑΕΖ.

Επίσης ΑΖ = ΑΓ – ΓΖ = ΑΓ – ΒΛ, καθώς ΓΖ = ΒΛ, από το β).

Άρα, ΑΕ = ΑΓ – ΒΛ.

1819

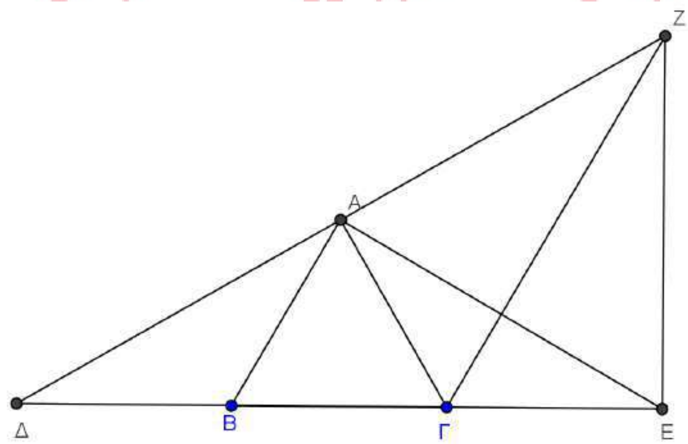
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΒΔ = ΒΓ, ενώ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΓΕ = ΒΓ. Φέρουμε την κάθετη στην ΕΔ στο σημείο Ε, η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο Ζ.

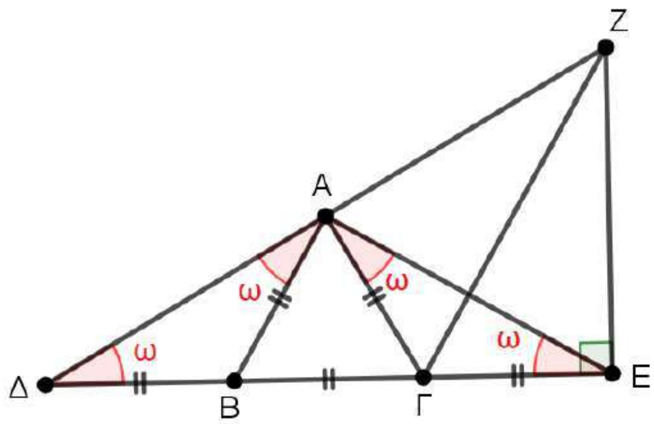
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΓΑΕ και ΒΔΑ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΖ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ. (Μονάδες 12)

γ) Να αποδείξετε ότι ΑΒ//ΓΖ. (Μονάδες 5)



1819-Λύση



α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο ισχύει ότι $B\hat{A}\Gamma = A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = 60^o$.

Οι $A\hat{B}\Delta$ και $A\hat{\Gamma}E$ είναι παραπληρωματικές των $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}B$, αντίστοιχα.

Άρα είναι $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E = 180^o – 60^o = 120^o$.

Επίσης, ισχύει ότι ΑΒ = ΑΔ = ΑΓ = ΓΕ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα (λόγω του Π-Γ-Π) και ισοσκελή.

Αν συμβολίσουμε με ω κάθε μια από τις γωνίες που αντιστοιχούν στις βάσεις τους, τότε από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΔ βρίσκουμε:

$A\hat{B}\Delta + A\hat{\Delta}B + \Delta\hat{A}B = 180^o \Leftrightarrow 120^o + 2\omega = 180^o \Leftrightarrow 2\omega = 60^o \Leftrightarrow \omega = 30^o$.

β) Είναι $\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B + B\hat{A}\Gamma = 30^o + 60^o = 90^o$. Άρα $\Gamma A \perp A\Delta$, άρα $\Gamma\hat{A}Z = 90^o$.

Τα τρίγωνα ΑΓΖ και ΓΕΖ:

- Είναι ορθογώνια, με ορθές τις $\Gamma\hat{A}Z$ και $\Gamma\hat{E}Z$.
- Έχουν τη ΓΖ κοινή πλευρά.
- Έχουν ΑΓ = ΓΕ.

Άρα τα τρίγωνα ΑΓΖ και ΓΕΖ έχουν κοινή υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά, ίσες μία προς μία, επομένως είναι ίσα. Οπότε ΖΑ = ΖΕ (καθώς είναι η άλλη κάθετη πλευρά τους).

Επομένως το Ζ ισαπέχει από τα Α και Ε, άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΕ.

Επειδή ΓΑ = ΓΕ, το Γ ισαπέχει από τα Α και Ε, άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΕ. Επομένως, η ΓΖ είναι η μεσοκάθετος του ΑΕ.

γ) Από την ισότητα των τριγώνων ΓΑΖ και ΓΕΖ προκύπτει ότι $A\hat{\Gamma}Z = E\hat{\Gamma}Z$, καθώς βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΖ και ΕΖ. Οπότε η ΓΖ είναι διχοτόμος της $A\hat{\Gamma}E$. Άρα $A\hat{\Gamma}Z = \frac{A\hat{\Gamma}E}{2} = \frac{120^o}{2} = 60^o$.

1819-Λύση

Άρα $A\hat{\Gamma}Z = B\hat{A}\Gamma$, οπότε οι ευθείες ΑΒ και ΓΖ που τέμνονται από την ΑΓ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $A\hat{\Gamma}Z$ και $B\hat{A}\Gamma$ ίσες. Άρα ΑΒ//ΓΖ

1823

ΘΕΜΑ 4

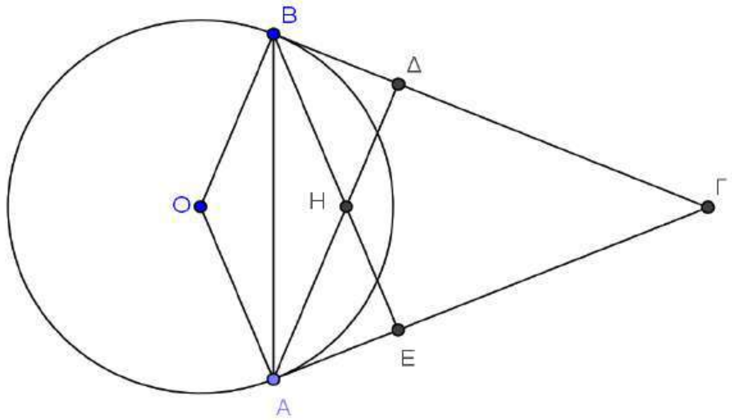
Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του Α και Β. Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α και Β οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ. Φέρουμε επίσης και τα ύψη ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ τα οποία τέμνονται στο σημείο Η.

Να αποδείξετε ότι:

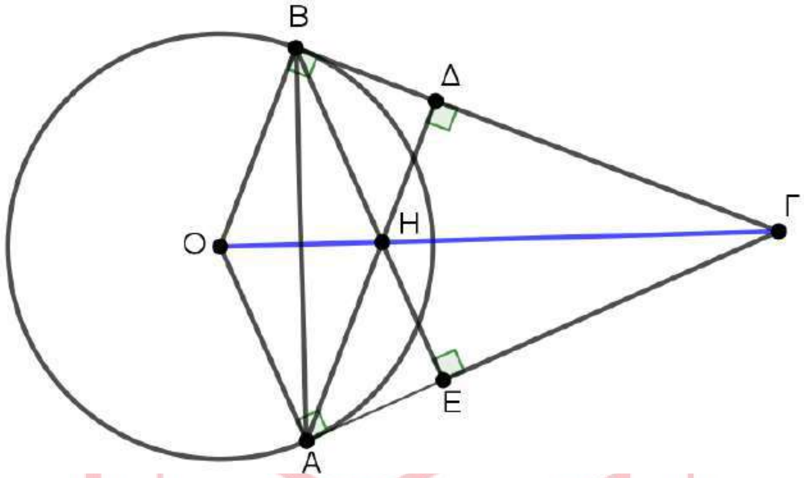
α) Το τρίγωνο ΒΗΑ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΟΒΗΑ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

γ) Τα σημεία Ο, Η, Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)



1823-Λύση



α) Είναι ΑΓ = ΒΓ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου που άγονται από το σημείο Γ. Άρα το τρίγωνα ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΔ.

- Είναι ορθογώνια
- Έχουν ΑΒ κοινή πλευρά (υποτείνουσα)
- Έχουν $A\widehat{B}\Delta = B\widehat{A}E$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΑΒ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, ως ορθογώνια που έχουν τις υποτείνουσες και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία. Οπότε ισχύει και $A\widehat{B}E = B\widehat{A}\Delta$, άρα το τρίγωνο ΒΗΑ είναι ισοσκελές με βάση της ΑΒ.

β) Επειδή ΟΑ, ΟΒ ακτίνες του κύκλου, ισχύει ότι $OA \perp A\Gamma$ και $OB \perp B\Gamma$[1], δηλαδή είναι κάθετες στα αντίστοιχα εφαπτόμενα τμήματα. Όμως $BE \perp A\Gamma$ και $A\Delta \perp B\Gamma$.

Άρα ΟΑ // ΒΕ, γιατί είναι και οι δύο κάθετες στην ΑΓ και ΟΒ // ΑΔ, γιατί είναι και οι δύο κάθετες στην ΒΓ. Οπότε το τετράπλευρο ΟΒΗΑ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή ΟΑ = ΟΒ, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, το παραλληλόγραμμο ΟΒΗΑ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες (τις ΟΑ και ΟΒ) οπότε είναι ρόμβος.

γ) Είναι $OH \perp AB$ διότι, ως διαγώνιοι του ρόμβου ΟΒΗΑ τέμνονται κάθετα.

Επίσης τα τμήματα ΓΑ και ΓΒ είναι εφαπτόμενα στον κύκλο οπότε η ΟΓ είναι μεσοκάθετος της χορδής ΑΒ. Επομένως $O\Gamma \perp AB$ (2). Όμως από το Ο διέρχεται μοναδική κάθετη στην ΑΒ άρα τα σημεία Ο, Η και Γ είναι συνευθειακά.

[1] το σύμβολο $\perp$ σημαίνει «κάθετες».

1824

ΘΕΜΑ 4

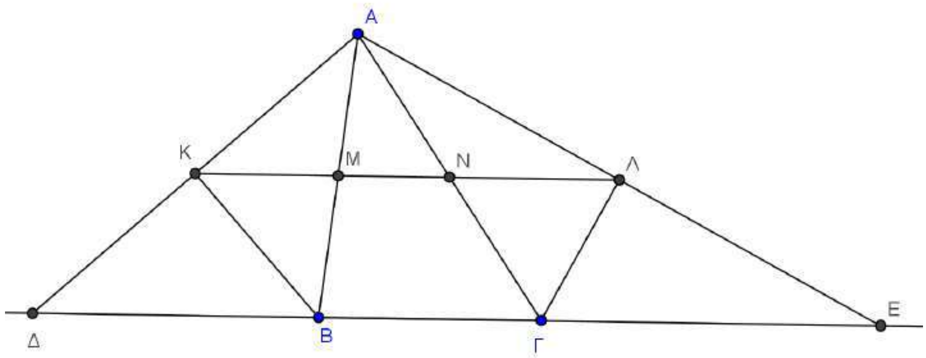
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΒΔ =ΑΒ ενώ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΓΕ = ΓΑ.

Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνουν τις ΑΔ και ΑΕ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, και η ΚΛ τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

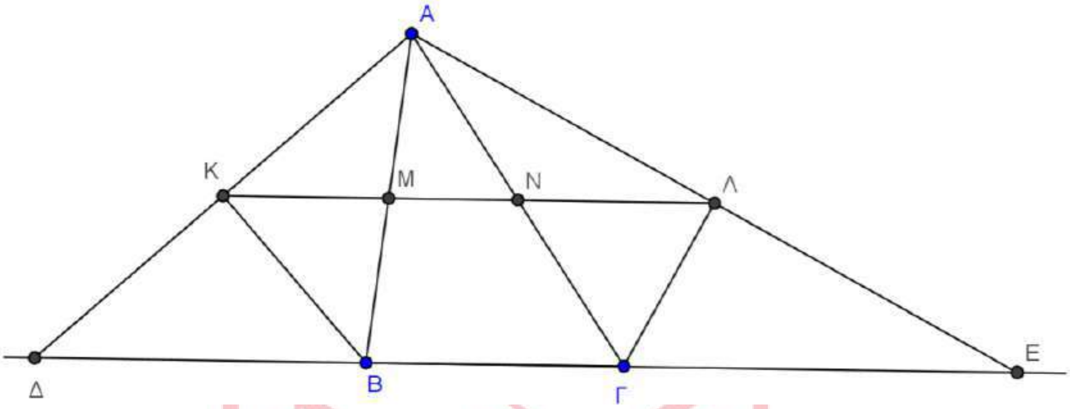
α) Τα σημεία Κ και Λ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΚΜΑ και ΑΝΛ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 9)

γ) ΚΛ = $\frac{AB+A\Gamma+B\Gamma}{2}$ (Μονάδες 8)



1824-Λύση



α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΒΔ και βάση ΑΔ και το ΑΓΕ είναι ισοσκελές με ΑΓ = ΓΕ και βάση ΑΕ.

Άρα στο ισοσκελές ΑΒΔ η ΒΚ είναι διχοτόμος που αντιστοιχεί στην κορυφή του, άρα είναι και διάμεσος της βάσης του τριγώνου. Επομένως το Κ είναι μέσο του ΑΔ.

Ομοίως, στο ΑΓΕ, ισοσκελές, η ΓΛ είναι διχοτόμος που αντιστοιχεί στην κορυφή του, άρα είναι και διάμεσος της βάσης του τριγώνου. Συνεπώς το Λ είναι μέσο του ΑΕ.

β) Στο τρίγωνο ΑΔΕ τα σημεία Κ και Λ είναι μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΕ, αντίστοιχα. Άρα, η ΚΛ είναι παράλληλη της ΔΕ. Επομένως ΚΜ // ΔΒ και ΝΛ // ΓΕ.

Η ΚΒ είναι διχοτόμος της κορυφής του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΔ, άρα είναι και ύψος της βάσης του. Επομένως η $A\widehat{K}B$ είναι ορθή και το ΑΚΒ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΑΒ.

Επίσης, στο τρίγωνο ΑΔΒ, το Κ είναι μέσο της πλευράς ΑΔ και το ΚΜ είναι παράλληλο στην πλευρά ΔΒ, άρα θα διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΑΒ. Συνεπώς το Μ είναι μέσο της ΑΒ.

Άρα, η ΚΜ είναι διάμεσος της υποτείνουσας ΑΒ, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΒ. Επομένως, ΑΜ = $\frac{AB}{2}$ = ΜΚ, άρα το τρίγωνο ΚΜΑ είναι ισοσκελές με βάση ΑΚ.

Με όμοια επιχειρήματα αποδεικνύουμε ότι το ΑΝΛ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΛ.

Πράγματι, το ΓΛ ύψος της βάσης του ισοσκελούς ΑΓΕ, ως διχοτόμος, άρα η $A\widehat{\Lambda}\Gamma = 90^o$.

Επίσης, στο τρίγωνο ΑΓΕ, το Λ είναι μέσο της πλευράς ΑΕ και το ΝΛ είναι παράλληλο στην πλευρά ΓΕ, άρα το Ν είναι μέσο της ΑΓ. Επομένως, η ΝΛ είναι διάμεσος της υποτείνουσας, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΛΓ. Επομένως, ΑΝ = ΝΛ, άρα το τρίγωνο ΑΝΛ είναι ισοσκελές με βάση ΑΛ.

γ) Στο τρίγωνο ΑΒΔ, τα Κ και Μ είναι μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ, αντίστοιχα.

Άρα ΚΜ = $\frac{\Delta B}{2}$.

1824-Λύση

Ομοίως, στο τρίγωνο ΑΒΓ, τα Μ και Ν είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, άρα ΜΝ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

Με όμοιο επιχείρημα, στο τρίγωνο ΑΓΕ, προκύπτει ότι ΝΛ = $\frac{ΓΕ}{2}$.

Άρα, ΚΛ = ΚΜ + ΜΝ + ΝΛ ⇔ ΚΛ = $\frac{ΔΒ}{2}+\frac{ΒΓ}{2}+\frac{ΓΕ}{2}$

Όμως ΔΒ = ΑΒ και ΓΕ = ΑΓ, από την υπόθεση.

Άρα, ΚΛ = $\frac{ΑΒ}{2}+\frac{ΒΓ}{2}+\frac{ΑΓ}{2}=\frac{ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ}{2}$.

1825

ΘΕΜΑ 4

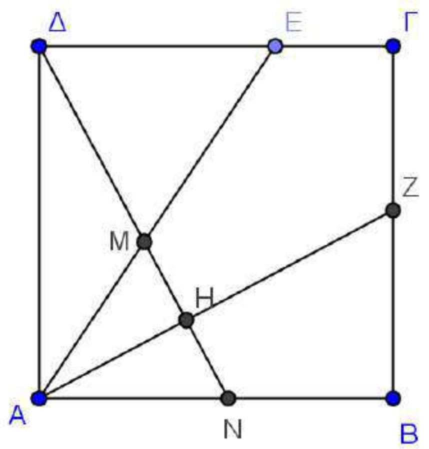
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΔΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΖ της γωνίας ΕΑΒ και τη ΔΗ κάθετη από το Δ προς την ΑΖ, η οποία τέμνει την ΑΕ στο Μ και την ΑΒ στο Ν.

Να αποδείξετε ότι:

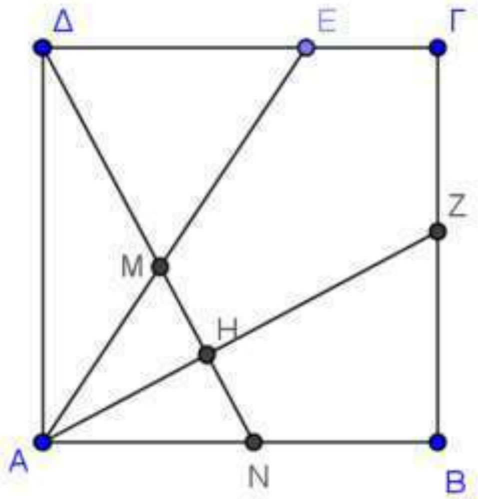
α) Τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) ΑΜ=ΑΝ και ΔΕ=ΕΜ. (Μονάδες 10)

γ) ΑΕ=ΔΕ+ΒΖ (Μονάδες 7)



1825-Λύση



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ ($\widehat{B} = 90^o$), από το άθροισμα των γωνιών του, η γωνία $A\widehat{Z}B$ είναι συμπληρωματική της $Z\widehat{A}B$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΝ ($A\widehat{H}N = 90^o$), από το άθροισμα των γωνιών του, η γωνία $A\widehat{N}H$ είναι συμπληρωματική της $H\widehat{A}N$ ή αλλιώς $Z\widehat{A}B$.

Επομένως, $A\widehat{Z}B = A\widehat{N}H$, ως συμπληρωματικές στην ίδια γωνία.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ.

- Είναι ορθογώνια.
- $A\widehat{Z}B = A\widehat{N}\Delta$, γιατί $A\widehat{Z}B = A\widehat{N}H$.
- ΑΔ = ΑΒ, ως πλευρές του ίδιου τετραγώνου.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ είναι ίσα, γιατί έχουν μία κάθετη πλευρά και μία οξεία γωνία, ίσες μία προς μία.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΗΜ και ΑΗΝ.

- Είναι ορθογώνια, γιατί η ΔΗ είναι κάθετη στην ΑΖ, από την υπόθεση.
- ΑΗ κοινή πλευρά.
- $M\widehat{A}H = N\widehat{A}H$, γιατί η ΑΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\widehat{A}N$.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΜ και ΑΗΝ είναι ίσα, καθώς έχουν μια κοινή κάθετη πλευρά και από μία οξεία γωνία ίση. Συνεπώς ΑΜ = ΑΝ, καθώς είναι οι υποτείνουσές τους.

Οι γωνίες $E\widehat{\Delta}N = A\widehat{N}M$ (1) ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων ΔΓ και ΑΒ με τέμνουσα την ΔΝ.

Επίσης $\Delta\widehat{M}E = A\widehat{M}N$ (2), ως κατακορυφήν.

Όμως, το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές με βάση την ΜΝ, καθώς ΑΜ = ΑΝ.

1825-Λύση

Άρα, $A\widehat{M}N = A\widehat{N}M$ (3).

Από (1), (2) και (3) είναι $\Delta\widehat{M}E = E\widehat{\Delta}N$. Άρα το τρίγωνο ΔΕΝ είναι ισοσκελές με βάση ΔΜ και ΔΕ = ΕΜ.

γ) Είναι ΑΕ = ΑΜ + ΜΕ.

Όμως, από το β) ΑΜ = ΑΝ και ΜΕ = ΔΕ, άρα ΑΕ = ΑΝ + ΔΕ.

Από τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ έχουμε ότι ΑΝ = ΒΖ, καθώς είναι οι δύο άλλες κάθετες πλευρές τους, πέρα από τις ΑΔ και ΑΒ (οι οποίες είναι ίσες).

Επομένως ΑΕ = ΒΖ + ΔΕ.

1828

ΘΕΜΑ 4

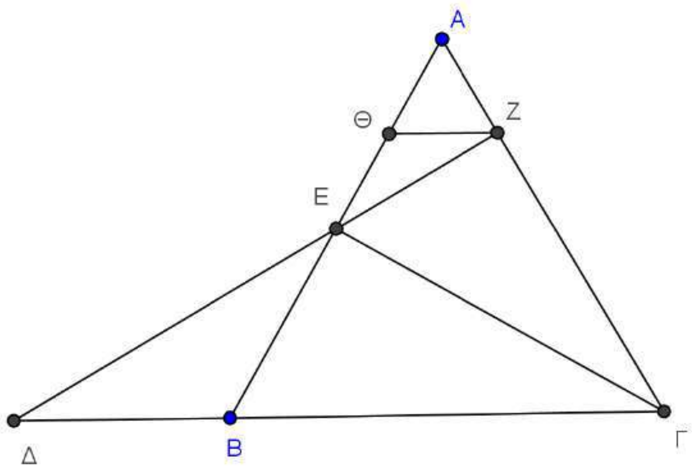
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΓΕ. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΒΔ = $\frac{ΒΓ}{2}$. Αν η ευθεία ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και ΖΘ // ΒΓ:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο ΑΘΖ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

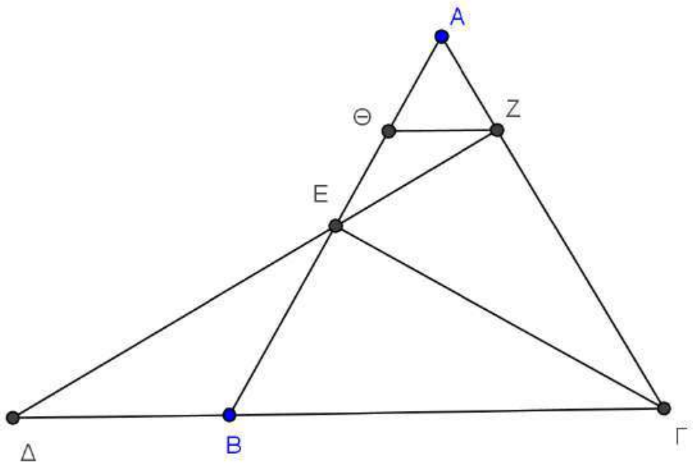
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘΕΖ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι ΑΕ = 2 ΘΖ. (Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι 3ΑΒ = 4ΘΒ. (Μονάδες 5)



1828-Λύση



α) Το ΓΕ είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα είναι διάμεσος και διχοτόμος του. Συγκεκριμένα είναι διάμεσος της πλευράς ΑΒ, άρα ΒΕ = $\frac{\mathrm{AB}}{2}$.

Επίσης, από την υπόθεση ΒΔ = $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$.

Όμως ΑΒ = ΒΓ, καθώς το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, άρα ΒΕ = ΒΔ και επομένως το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $\widehat{A} = A\widehat{B}\Gamma = A\widehat{\Gamma}B = 60^o$.

Είναι ακόμη $A\widehat{\Theta}Z = A\widehat{B}\Gamma$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΘΖ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Άρα $A\widehat{\Theta}Z = 60^o$.

Ισχύει ακόμη ότι $A\widehat{Z}\Theta = A\widehat{\Gamma}B$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΘΖ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ. Άρα $A\widehat{Z}\Theta = 60^o$.

Συνεπώς, από τα παραπάνω στο τρίγωνο ΑΘΖ ισχύει $A\widehat{\Theta}Z = A\widehat{Z}\Theta = \widehat{A} = 60^o$, οπότε είναι ισόπλευρο.

β) Οι γωνίες $E\widehat{\Theta}Z$ και $A\widehat{\Theta}Z$ είναι παραπληρωματικές. Άρα, $E\widehat{\Theta}Z + A\widehat{\Theta}Z = 180^o \Leftrightarrow E\widehat{\Theta}Z = 180^o - A\widehat{\Theta}Z \Leftrightarrow E\widehat{\Theta}Z = 180^o - 60^o = 120^o$.

Η γωνία $A\widehat{B}\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΒΔΕ, άρα $A\widehat{B}\Gamma = \widehat{\Delta} + \Delta\widehat{E}B \Leftrightarrow 60^o = \widehat{\Delta} + \Delta\widehat{E}B$.

Όμως το ΒΔΕ, όπως έχει αποδειχθεί στο α) είναι ισοσκελές με βάση ΔΕ, άρα οι γωνίες της βάσης, $\widehat{\Delta}$ και $\Delta\widehat{E}B$ είναι ίσες. Επομένως $60^o = 2\Delta\widehat{E}B \Leftrightarrow \Delta\widehat{E}B = 30^o$.

Οπότε και $\Theta\widehat{E}Z = 30^o$ ως κατακορυφήν της $\Delta\widehat{E}B$.

Από το άθροισμα γωνιών στο τρίγωνο ΘΕΖ, βρίσκουμε:

$\Theta\widehat{E}Z + E\widehat{\Theta}Z + \Theta\widehat{Z}E = 180^o \Leftrightarrow 30^o + 120^o + \Theta\widehat{Z}E = 180^o \Leftrightarrow \Theta\widehat{Z}E = 30^o$.

γ) Επειδή $\Theta\widehat{E}Z = \Theta\widehat{Z}E = 30^o$, το τρίγωνο ΘΖΕ είναι ισοσκελές, άρα ΘΕ = ΘΖ.

1828-Λύση

Όμως το ΑΘΖ είναι ισόπλευρο, όπως έχει αποδειχθεί στο α), άρα ΘΖ = ΘΑ ως πλευρές ισόπλευρου και άρα ισχύει ότι ΘΕ = ΘΖ = ΘΑ. Όμως ΑΕ = ΘΑ + ΘΕ ή ΑΕ = 2ΘΖ .

δ) Από τα προηγούμενα ΑΕ = ΕΒ = $\frac{AB}{2}$ και ΘΕ = $\frac{AE}{2}$, άρα ΘΕ = $\frac{AB}{4}$.

ΘΒ = ΘΕ + ΕΒ = $\frac{AB}{4} + \frac{AB}{2} = \frac{3AB}{4}$.

Άρα 4ΘΒ = 3ΑΒ.

1830

ΘΕΜΑ 4

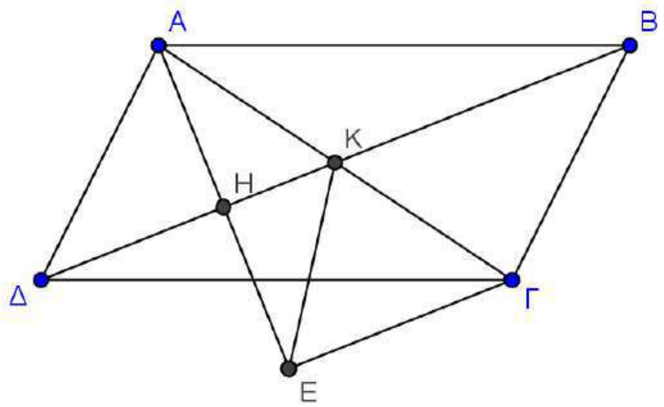
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε ΑΗ κάθετη στην ΒΔ και στην προέκταση της ΑΗ (προς το Η) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΑΗ = ΗΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΚΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



1830-Λύση

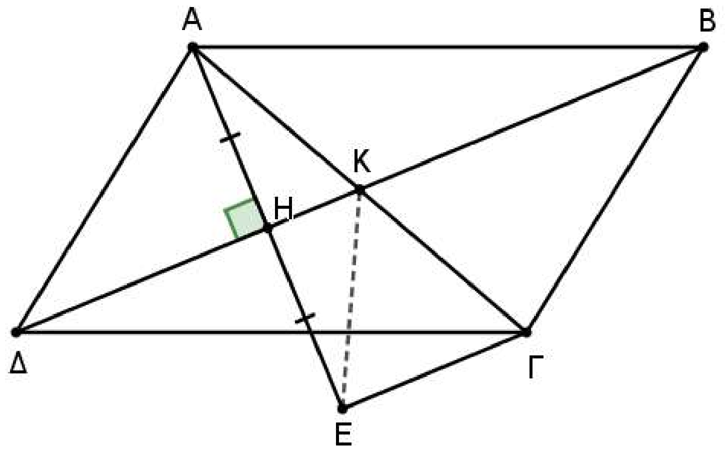
α) Στο τρίγωνο ΑΚΕ το ΚΗ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Επειδή ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται, οπότε το Κ είναι μέσο της ΑΓ, οπότε ΚΑ = $\frac{\mathrm{ΚΓ}}{2}$.

Αξιοποιώντας το ερώτημα (α) βρίσκουμε:

ΕΚ = ΚΑ $\Leftrightarrow$ ΕΚ = $\frac{\mathrm{ΚΓ}}{2}$

Άρα στο τρίγωνο ΑΕΓ η διάμεσός του ΕΚ ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, συνεπώς το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\mathrm{Α\hat{Ε}Γ} = 90^{\circ}$.



γ) Ισχύει ότι:

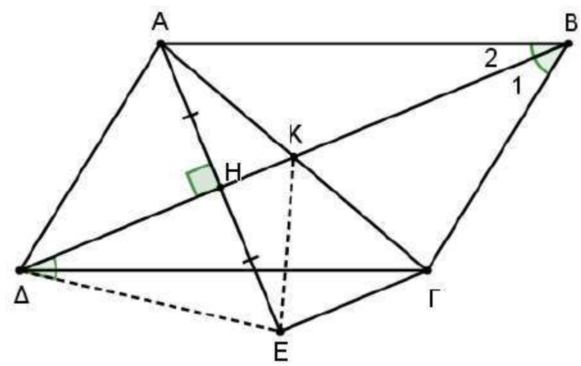
ΗΚ$\perp$ ΑΕ και ΕΓ$\perp$ΑΕ, άρα ΗΚ // ΕΓ $\Leftrightarrow$ΒΔ // ΕΓ(1)

Στο τρίγωνο ΑΔΕ το ΔΗ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ΔΕ=ΑΔ. Επειδή ΑΔ=ΒΓ, προκύπτει ότι ΔΕ=ΒΓ(2).

Επίσης, $\mathrm{Ε\hat{Δ}Β} = \widehat{\mathrm{Β}_2}$ ως εντός και εναλλάξ γωνίες στις παράλληλες ευθείες ΑΒ και ΓΔ.

Οπότε $\widehat{\mathrm{Β}_1} + \mathrm{Ε\hat{Δ}Β} = \widehat{\mathrm{Β}_1} + \widehat{\mathrm{Β}_2} = \hat{\mathrm{Β}} < 180^{\circ}$ (3) άρα οι ΔΕ και ΒΓ δεν είναι παράλληλες (3).

Από τις (1),(2) και (3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



1832

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνίες Β και Γ οξείες και Δ, Μ και Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των ΑΒ και ΒΓ και εκτός του τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΔΖ = \frac{AB}{2}$ και $ΕΗ = \frac{ΒΓ}{2}$.

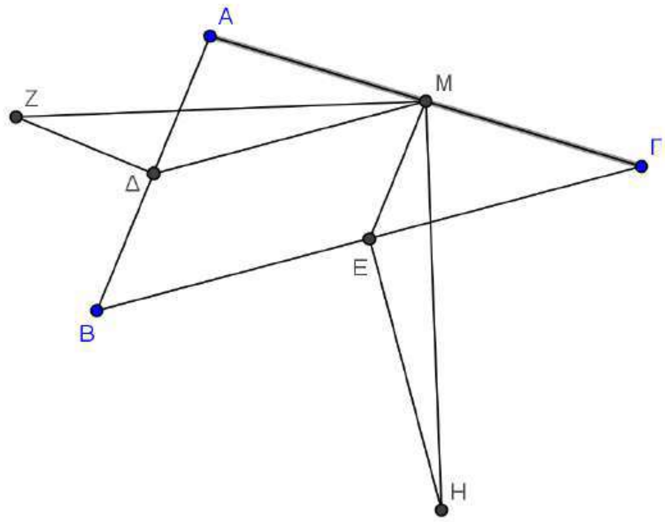
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΒΔΜΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 5)

ii. Τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Αν τα σημεία Ζ, Δ, Ε είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι η γωνία $Α=90^{o}$.

(Μονάδες 10)



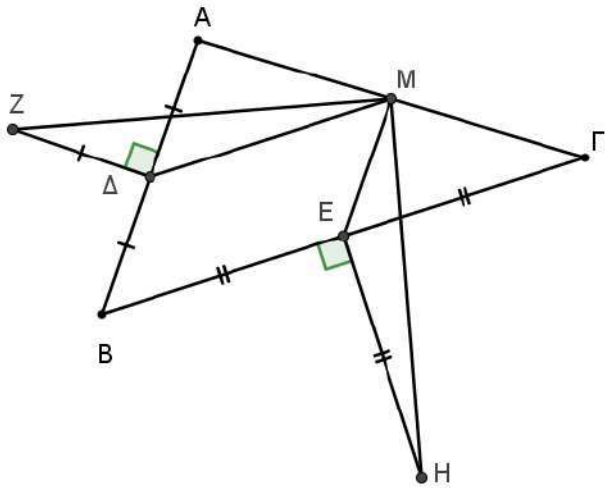
1832-Λύση

α) i. Επειδή τα Δ και Μ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει ότι

$\Delta M \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \Delta M \parallel BE$ και $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2} = BE$

Στο τετράπλευρο ΒΔΜΕ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες (ΔΜ//= ΒΕ), άρα είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ έχουν:



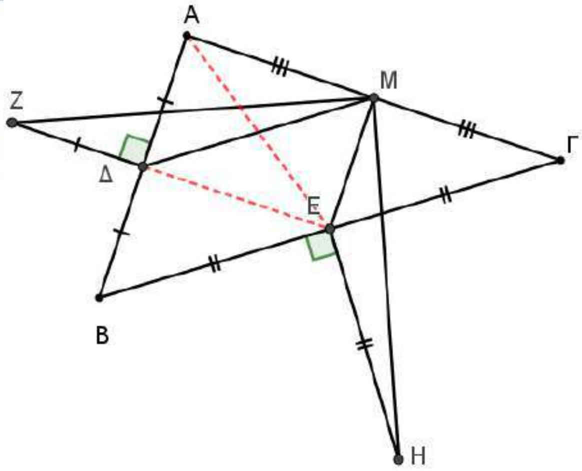
- $Z\Delta = \frac{AB}{2} = B\Delta = ME$, αφού τα ΒΔ και ΜΕ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- $M\Delta = BE = \frac{B\Gamma}{2} = EH$, αφού τα ΜΔ, ΒΕ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- $M\hat{E}H = Z\hat{\Delta}M$, διότι
  - ➢ $M\hat{E}H = H\hat{E}\Gamma + M\hat{E}\Gamma = 90^o + M\hat{E}\Gamma$,
  - ➢ $Z\hat{\Delta}M = 90^o + A\hat{\Delta}M$,
  - ➢ $M\hat{E}\Gamma = \hat{B}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΜΕ, ΑΒ που τέμνονται από την ΒΕ.
  - ➢ $A\hat{\Delta}M = \hat{B}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΜΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ είναι ίσα.

β)Το ΜΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ

άρα ισχύει ότι:

$ME \parallel = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow ME \parallel = A\Delta$



Επομένως το ΑΜΕΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή τα σημεία Ζ, Δ και Ε είναι συνευθειακά και $Z\Delta \perp AB$

θα είναι και $E\Delta \perp AB$, δηλαδή $E\hat{\Delta}A = 90^o$.

Συνεπώς το παραλληλόγραμμο ΑΜΕΔ έχει μια γωνία ορθή, οπότε είναι ορθογώνιο, άρα $\hat{A} = 90^o$.

1834

ΘΕΜΑ 4

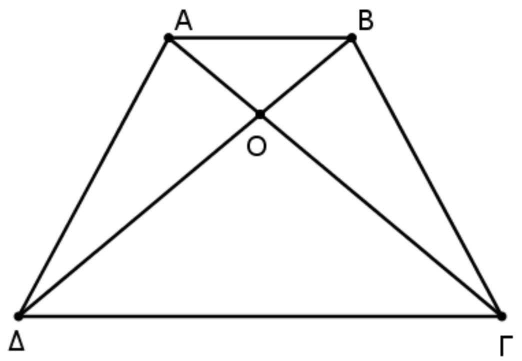
Στο παρακάτω τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν: $Α\Delta = ΒΓ$, $ΑΓ = Β\Delta$, και ΑΒ<ΓΔ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\widehat{Α}Β = Α\widehat{Β}Γ$ (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 8)



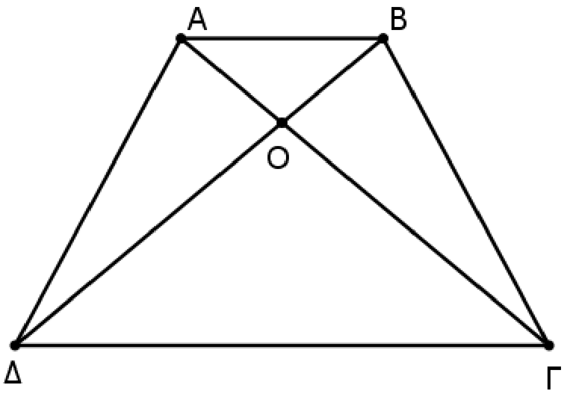
1834-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΔ έχουν:

- ΓΔ κοινή πλευρά
- ΑΔ = ΒΓ, από υπόθεση
- ΑΓ = ΒΔ, από υπόθεση

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Π – Π τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΔ είναι ίσα οπότε:
$A\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{\Delta}\Gamma$ αφού είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΓ. Άρα το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με ΟΓ = ΟΔ (1).

Ισχύει ακόμη ότι: $A\Gamma = B\Delta \Leftrightarrow O\Gamma + OA = OB + O\Delta \overset{(1)}{\Leftrightarrow} OA = OB$
Επομένως και το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές.



β) Στο τρίγωνο ΑΒΟ, επειδή ΟΑ=ΟΒ από το (α) ερώτημα, οι γωνίες $\Gamma\hat{A}B$, $A\hat{B}\Delta$ είναι ίσες.
Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΒΓΔ, οι γωνίες $\Delta\hat{A}\Gamma$ και $\Delta\hat{B}\Gamma$ είναι ίσες αφού είναι απέναντι από την κοινή πλευρά ΓΔ.
Άρα $\Delta\hat{A}B = \Delta\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}B = \Delta\hat{B}\Gamma + A\hat{B}\Delta = A\hat{B}\Gamma$

γ) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΒΓΔ, οι γωνίες $A\hat{\Delta}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ίσες, αφού είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΓ και ΒΔ.
Από το άθροισμα γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ έχουμε:
$\Delta\hat{A}B + A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Delta}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta = 360^o \Leftrightarrow 2\Delta\hat{A}B + 2A\hat{\Delta}\Gamma = 360^o \Leftrightarrow \Delta\hat{A}B + A\hat{\Delta}\Gamma = 180^o$
Οι γωνίες $\Delta\hat{A}B$ και $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εντός και επι τα αυτά μέρη των ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ. Επειδή είναι παραπληρωματικές, οι ευθείες ΑΒ, ΓΔ είναι παράλληλες (1).
Αν υποθέσουμε ότι ΑΔ // ΒΓ, τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ θα ήταν παραλληλόγραμμο και θα είχε ΑΒ = ΓΔ που είναι άτοπο αφού ΑΒ<ΓΔ. Άρα οι ΑΔ, ΒΓ δεν είναι παράλληλες (2).
Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο και επειδή ΑΔ=ΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1835

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ ($\hat{\mathrm{A}} = 90^o$) και $\hat{\Gamma} = 30^o$ με Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

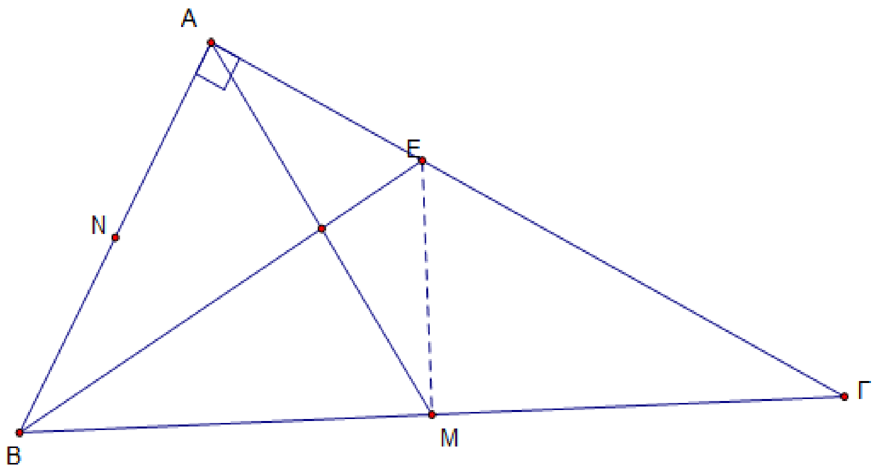
α) Να αποδείξετε ότι:

i) η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$. (Μονάδες 6)

ii) $\mathrm{AE} = \frac{\Gamma\mathrm{E}}{2}$. (Μονάδες 6)

iii) η ΒΕ είναι μεσοκάθετος της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 7)

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ που τέμνει την ΒΕ στο Η, να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Η και Ν είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)



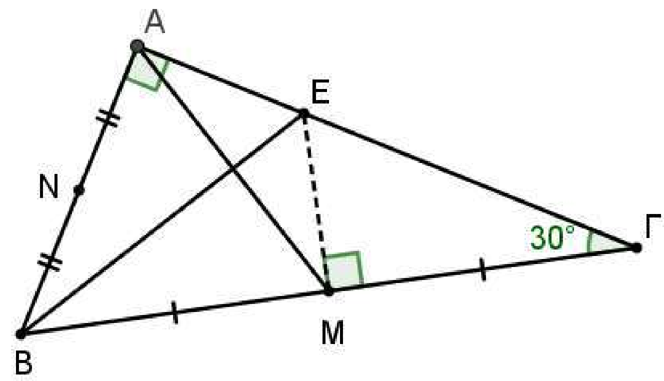
1835-Λύση

α) i. Επειδή η ΕΜ είναι μεσοκάθετος της ΒΓ, το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές οπότε:

$E\hat{B}\Gamma = \hat{\Gamma} = 30^o$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ βρίσκουμε:

$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \hat{B} + 30^o = 90^o \Leftrightarrow \hat{B} = 60^o$



Τότε

$A\hat{B}E = \hat{B} - E\hat{B}\Gamma = 60^o - 30^o = 30^o$

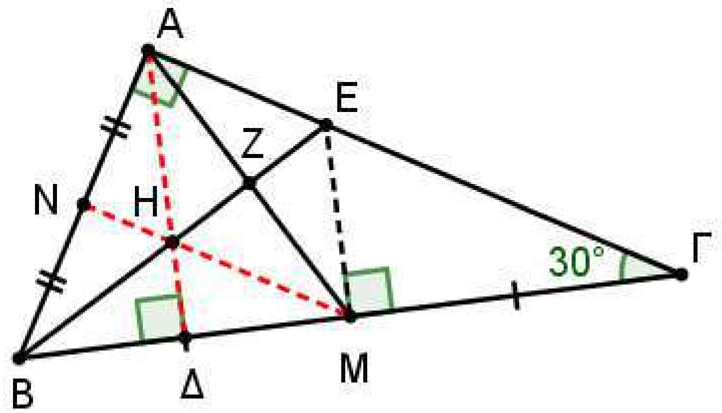
Επειδή $A\hat{B}E = E\hat{B}\Gamma$, η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ είναι

$A\hat{B}E = 30^o$, άρα $AE = \frac{EB}{2} = \frac{\Gamma E}{2}$.

iii. Το ΑΜ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB$

Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές και επιπλέον έχει $\hat{B} = 60^o$, άρα είναι ισόπλευρο. Η ΒΕ είναι διχοτόμος του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΜ, οπότε θα τέμνει κάθετα την ΑΜ, άρα το ΒΕ είναι μεσοκάθετος του ΑΜ.



β) Έστω Ζ το σημείο τομής της ΒΕ με την ΑΜ. Το Η είναι σημείο τομής των υψών ΑΔ και ΒΖ, άρα είναι ο ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΜ, έτσι η ΜΗ είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου που επειδή είναι ισόπλευρο, θα περνά από το μέσο Μ της ΑΒ. Άρα τα σημεία Μ, Η και Ν είναι συνευθειακά.

1837

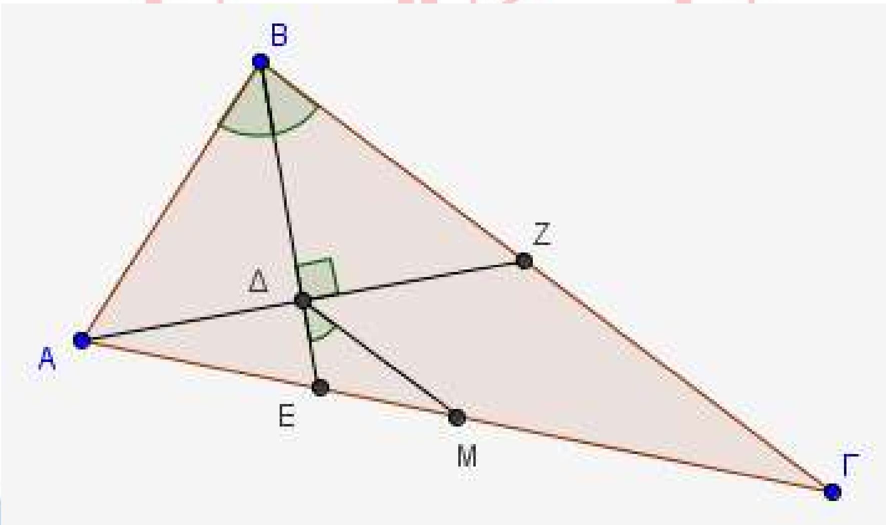
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΒΓ και η διχοτόμος ΒΕ της γωνίας $\hat{B}$. Αν ΑΖ $\perp$ ΒΕ, όπου Ζ σημείο της ΒΓ και Μ το μέσον της ΑΓ, να αποδείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) ΔΜ//ΒΓ και ΔΜ = $\frac{B\Gamma - AB}{2}$ (Μονάδες 10)

γ) $E\hat{\Delta}M = \frac{\hat{B}}{2}$, όπου $\hat{B}$ η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)



1837-Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΖ το ΒΔ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε είναι ισοσκελές με βάση την ΑΖ.

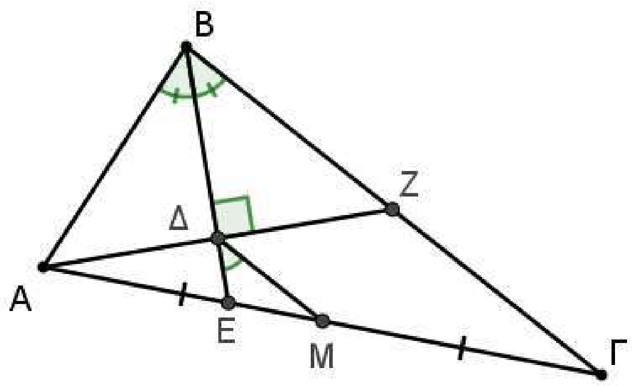
β) Από το προηγούμενο ερώτημα η διχοτόμος ΒΔ είναι και διάμεσος, άρα το Δ είναι μέσο της ΑΖ.

Στο τρίγωνο ΑΖΓ το ΔΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών του οπότε:

ΔΜ // ΖΓ $\Leftrightarrow$ ΔΜ // ΒΓ

Επίσης ισχύει ότι:

ΔΜ = $\frac{ΖΓ}{2} = \frac{ΒΓ-ΒΖ}{2}$. Όμως ΒΖ=ΑΒ από το (α) ερώτημα, άρα ΔΜ = $\frac{ΒΓ-ΑΒ}{2}$



γ) Είναι ΕΔ̂Μ = ΕΒ̂Γ = $\frac{\hat{Β}}{2}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΔΜ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΕ.

1838

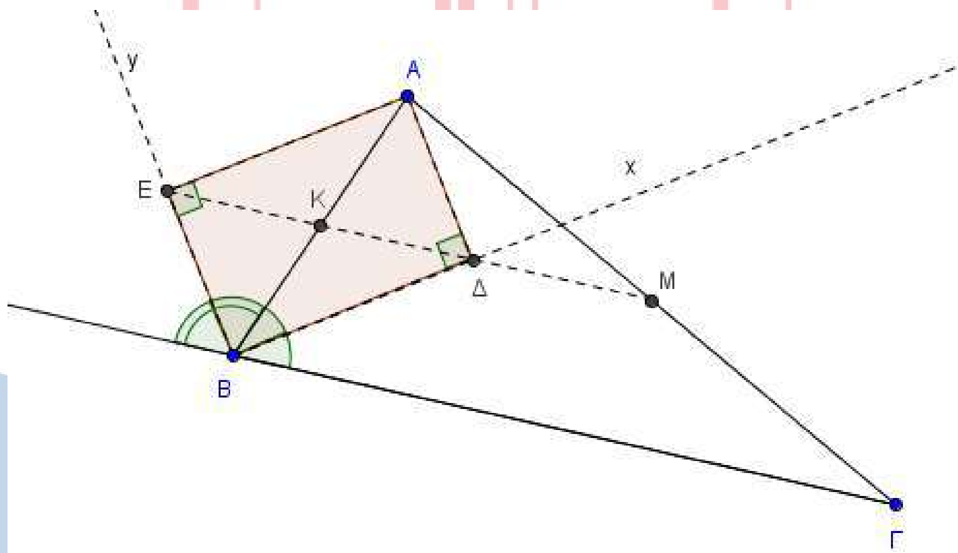
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος Βx της γωνίας Β του τριγώνου ΑΒΓ και η διχοτόμος Βy της εξωτερικής γωνίας Β. Αν Δ και Ε είναι οι προβολές της κορυφής Α του τριγώνου ΑΒΓ στην Βx και Βy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

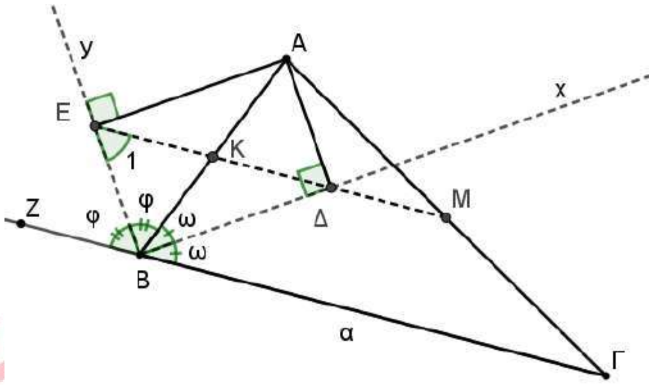
β) Η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ. (Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3\alpha}{4}$, όπου α=ΒΓ . (Μονάδες 8)



1838-Λύση

α) Οι Bx και By είναι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{B}_{εξ}$, θέτουμε $Γ\widehat{B}Δ=Δ\widehat{B}Α=\widehat{ω}$ και $Α\widehat{B}Ε=Ε\widehat{B}Ζ=\widehat{φ}$. Τότε:



$Γ\widehat{B}Δ + Δ\widehat{B}Α + Α\widehat{B}Ε + Ε\widehat{B}Ζ = 180^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \widehat{ω} + \widehat{ω} + \widehat{φ} + \widehat{φ} = 180^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\widehat{ω} + 2\widehat{φ} = 180^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \widehat{ω} + \widehat{φ} = 90^o \Leftrightarrow Ε\widehat{B}Δ = \widehat{ω} + \widehat{φ} = 90^o$

Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ έχει τρείς γωνίες ορθές άρα είναι ορθογώνιο.

β) Οι διαγώνιοι ΕΔ και ΑΒ του ορθογωνίου ΑΔΒΕ είναι ίσες και διχοτομούνται. Άρα:

$ΑΒ = ΕΔ \Leftrightarrow \dfrac{ΑΒ}{2} = \dfrac{ΕΔ}{2} \Leftrightarrow ΚΒ = ΚΔ$

Επομένως το τρίγωνο ΚΒΔ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι $Κ\widehat{B}Δ = Κ\widehat{Δ}Β$ (1).

Ισχύει ακόμη ότι $Κ\widehat{B}Δ = Δ\widehat{B}Γ = \widehat{ω}$ (2).

Από (1), (2) βρίσκουμε $Κ\widehat{Δ}Β = Δ\widehat{B}Γ$.

Δηλαδή οι ευθείες ΕΔ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΒΔ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες, άρα είναι ΕΔ // ΒΓ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Κ είναι μέσο της ΑΒ και ΚΜ // ΒΓ, άρα η ΚΜ διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ.

γ) Επειδή το ΚΜ ενώνει μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, είναι ΚΜ // ΒΓ (3) και $ΚΜ = \dfrac{ΒΓ}{2}$ (4)

Από την (3) και γνωρίζοντας ότι οι ΚΒ και ΜΓ δεν είναι παράλληλες αφού τέμνονται στο Α, προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο. Η διάμεσος του τραπεζίου, είναι ίση με: $\dfrac{ΚΜ+ΒΓ}{2}$. Αντικαθιστώντας το ΚΜ από τη σχέση (4) έχουμε

$$\frac{\frac{ΒΓ}{2} + ΒΓ}{2} = \frac{\frac{3ΒΓ}{2}}{2} = \frac{3ΒΓ}{4} = \frac{3α}{4}$$

1839

ΘΕΜΑ 4

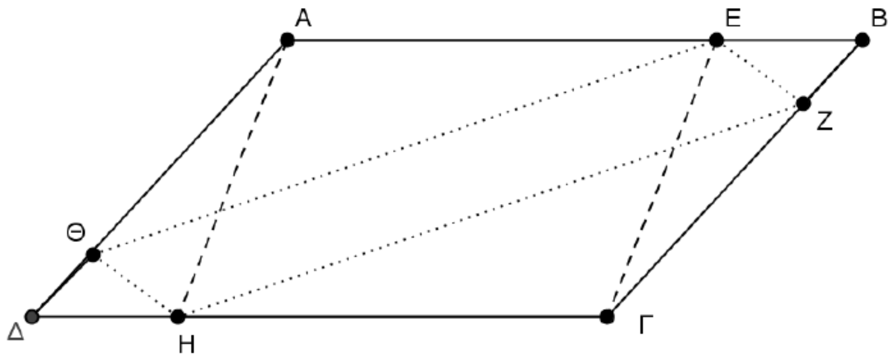
Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ, Η, Θ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, με ΑΕ=ΓΗ και ΒΖ=ΔΘ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο. (6 μονάδες)

β) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο. (10 μονάδες)

γ) Τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΖΘ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (9 μονάδες)

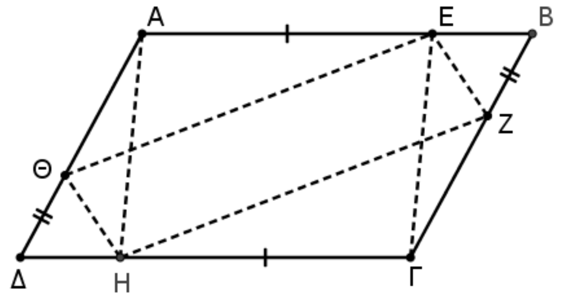


1839-Λύση

α) Επειδή ΑΒ // ΓΔ είναι και ΑΕ // ΓΗ. Επίσης ΑΕ=ΓΗ από υπόθεση, οπότε το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες.

β) Τα τρίγωνα ΔΗΘ και ΒΕΖ έχουν:

- ΔΗ = ΒΕ αφού ΔΗ = ΔΓ – ΗΓ = ΑΒ – ΑΕ = ΒΕ
- $\hat{\Delta} = \hat{B}$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
- ΔΘ=ΒΖ, από υπόθεση



Σύμφωνα με το κριτήριο Π–Γ–Π τα τρίγωνα είναι ίσα άρα και ΘΗ = ΕΖ (1) αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\Delta}$ και $\hat{B}$.

Τα τρίγωνα ΑΘΕ και ΓΗΖ έχουν:

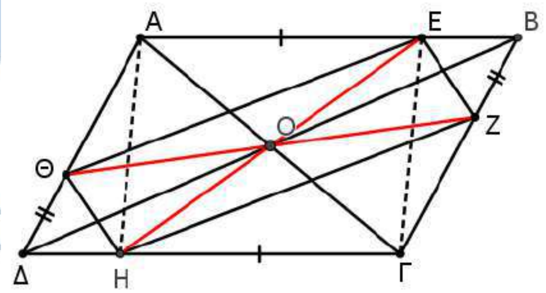
- ΑΕ =ΓΗ, από υπόθεση
- $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
- ΑΘ=ΓΖ διότι ΑΘ= ΑΔ – ΘΔ = ΒΓ – ΒΖ =ΓΖ

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΘΕ = ΗΖ(2) αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$.

Από τις (1) και (2) το τετράπλευρο ΕΖΗΘ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Έστω Ο το μέσον της ΑΓ.

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η ΒΔ διέρχεται από το Ο.



Επειδή το ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η ΕΗ διέρχεται από το Ο που είναι και το μέσον της.

Επειδή το ΑΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα η ΘΖ διέρχεται από το μέσον της ΕΗ που είναι το Ο.

Άρα οι ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΖΘ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

1841

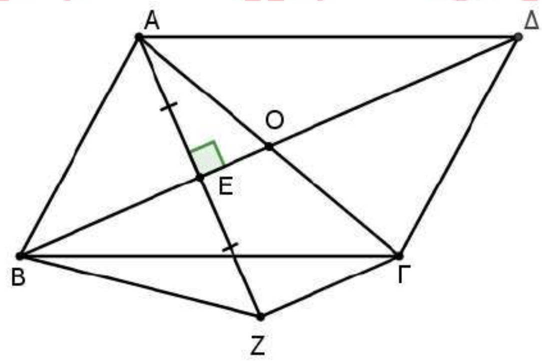
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ<ΑΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ. Φέρνουμε την ΑΕ κάθετη στην διαγώνιο ΒΔ. Αν το Ζ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την διαγώνιο ΒΔ και δεν συμπίπτει με το σημείο Γ, τότε να αποδείξετε ότι:

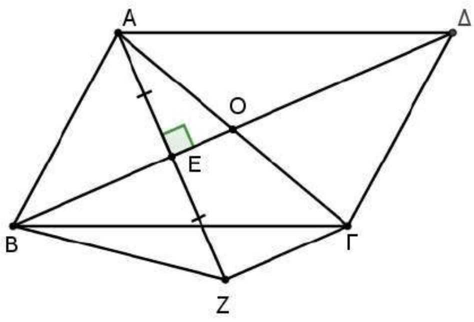
α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) ΖΓ = 2ΟΕ. (Μονάδες 9)

γ) Το ΒΔΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



1841-Λύση



α) Το ΔΕ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΔΖ, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Το ΟΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΖΓ, άρα

$ΟΕ = \frac{ΖΓ}{2} \Leftrightarrow ΖΓ = 2ΟΕ$.

γ) Επειδή το ΟΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΖΓ, άρα ΟΕ//ΖΓ $\Leftrightarrow$ ΒΔ//ΖΓ. Η ΒΖ τέμνει την ΑΒ άρα τέμνει και την ΓΔ, οπότε οι πλευρές ΒΖ και ΓΔ δεν είναι παράλληλες. Άρα το ΒΔΖΓ είναι τραπέζιο.

Στο τρίγωνο ΑΒΖ το ΒΕ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα ΒΖ = ΑΒ αλλά και ΑΒ=ΓΔ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, οπότε ΒΖ = ΓΔ. Άρα το τετράπλευρο ΒΔΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

.

1843

ΘΕΜΑ 4

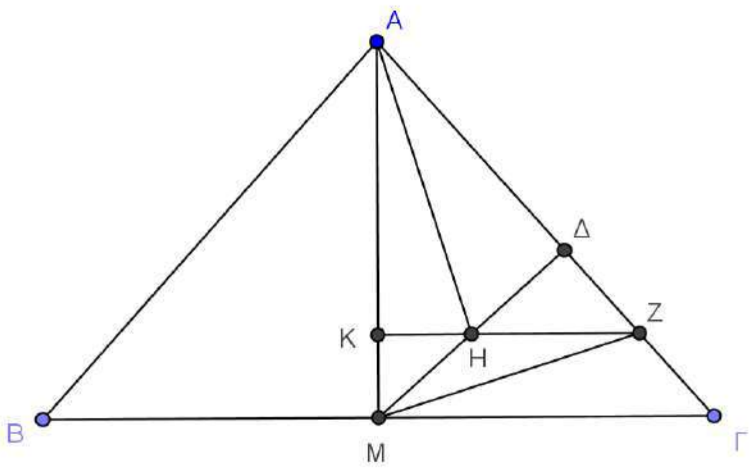
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και το ύψος του ΑΜ. Φέρουμε ΜΔ κάθετη στην ΑΓ και θεωρούμε Η το μέσο του τμήματος ΜΔ. Από το Η φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ η οποία τέμνει τις ΑΜ και ΑΓ στα σημεία Κ και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΗΖ = $\frac{\text{ΒΓ}}{4}$ (Μονάδες 9)

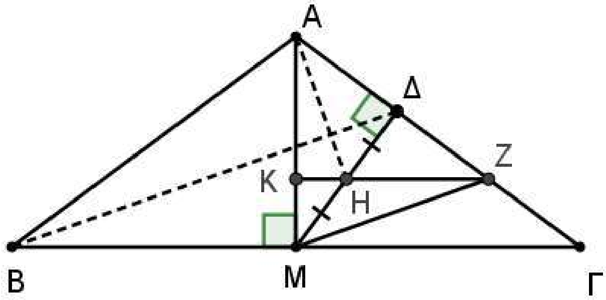
β) ΜΖ // ΒΔ (Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία ΑΗ είναι κάθετη στη ΒΔ. (Μονάδες 8)



1843-Λύση

α) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ το ΑΜ είναι ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του, οπότε είναι και διάμεσος του τριγώνου. Άρα $ΓΜ = \frac{ΒΓ}{2}$ (1).



Στο τρίγωνο ΜΔΓ το Η είναι μέσο της ΜΔ και ΗΖ// ΜΓ, άρα το Ζ είναι μέσο της ΔΓ και ισχύει ότι:

$ΗΖ = \frac{ΓΜ}{2}$ (2)

Από (1), (2) βρίσκουμε:

$ΗΖ = \frac{ΓΜ}{2} = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{ΒΓ}{4}$

β) Στο τρίγωνο ΒΔΓ το ΜΖ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του, άρα ΜΖ // ΒΔ.

γ) Είναι ΚΖ // ΒΓ και ΒΓ $\perp$ ΑΜ, άρα ΚΖ $\perp$ ΑΜ.

Στο τρίγωνο ΑΜΖ τα ΜΔ, ΖΚ είναι ύψη, άρα το σημείο τομής τους Η, είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Επομένως το ΑΗ είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου. Δηλαδή ΑΗ $\perp$ ΜΖ και επειδή ΜΖ // ΒΔ είναι και ΑΗ $\perp$ ΒΔ.

1844

ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α, για την οποία ισχύει $\mathrm{A}\Delta = \Delta\Gamma$.

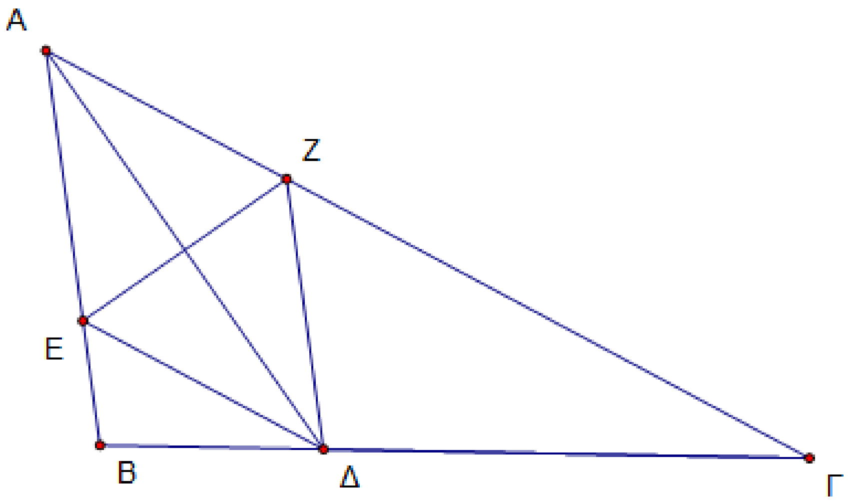
Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΔΒ και η ΔΖ παράλληλη στην ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΕΔ και ΑΓ είναι παράλληλα. (Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Τα τμήματα ΑΔ και ΕΖ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

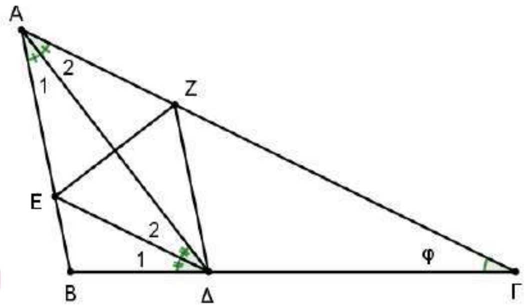


1844-Λύση

α) Επειδή ΑΔ=ΔΓ, το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, άρα $\widehat{A}_2 = \widehat{\Gamma} = \widehat{\varphi}$

Η γωνία $B\widehat{\Delta}A$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, άρα

$B\widehat{\Delta}A = \widehat{A}_2 + \widehat{\Gamma} = 2\,\widehat{\varphi}$.



Είναι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = \frac{B\widehat{\Delta}A}{2} = \frac{2\widehat{\varphi}}{2} = \widehat{\varphi}$

Είναι $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{A}_2$. Δηλαδή δύο εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται από τις ΔΕ, ΑΓ και την ΑΔ, είναι ίσες. Άρα ΔΕ // ΑΓ.

β) Είναι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ και $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{A}_2$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ.

γ) Επειδή ΔΖ // ΑΒ και ΔΕ //ΑΖ, το τετράπλευρο ΑΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο. Τα ΑΔ και ΕΖ είναι διαγώνιες παραλληλογράμμου, οπότε διχοτομούνται.

1845

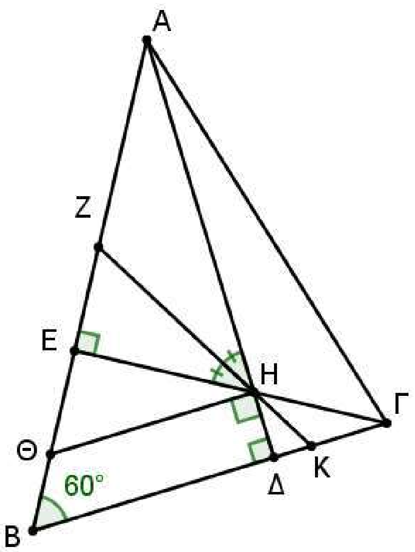
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Β=60^{o}. Φέρνουμε τα ύψη ΑΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η. Φέρνουμε ΚΖ διχοτόμο της γωνίας ΕΗΑ και ΘΗ κάθετο στο ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) Για το τμήμα ΖΕ ισχύει ΖΗ=2ΕΖ. (Μονάδες 9)

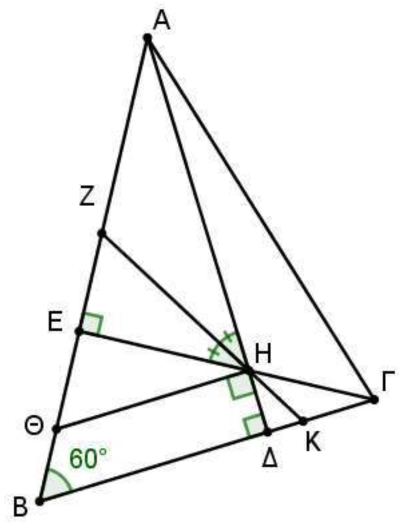
β) Το τρίγωνο ΘΖΗ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΘΗΚΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



1845-Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ βρίσκουμε:



$B\hat{A}\Delta + \hat{B} = 90^o \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta + 60^o = 90^o \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta = 30^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E\hat{A}H = 30^o (1)$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τρίγωνο ΑΕΗ έχουμε:

$E\hat{H}A + E\hat{A}H = 90^o \Leftrightarrow E\hat{H}A + 30^o = 90^o \Leftrightarrow E\hat{H}A = 60^o$

Επειδή η ΖΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{H}E$, είναι $E\hat{H}Z = 30^o$, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΗΖ ισχύει ότι

$EZ = \frac{ZH}{2} \Leftrightarrow ZH = 2EZ$

β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΘΗ έχουμε:

$B\hat{A}\Delta + A\hat{\Theta}H = 90^o \Leftrightarrow 30^o + A\hat{\Theta}H = 90^o \Leftrightarrow A\hat{\Theta}H = 60^o$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΕΗΘ έχουμε:

$E\hat{\Theta}H + E\hat{H}\Theta = 90^o \Leftrightarrow 60^o + E\hat{H}\Theta = 90^o \Leftrightarrow E\hat{H}\Theta = 30^o$

Επειδή $E\hat{H}\Theta = E\hat{H}Z = 30^o$, η ΗΕ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΘΗΖ και επειδή είναι και ύψος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Όμως $A\hat{\Theta}H = 60^o$, οπότε το τρίγωνο ΘΗΖ είναι ισόπλευρο.

γ) Είναι $\Theta H \perp A\Delta$ και $BK \perp A\Delta$, οπότε ΘΗ//ΒΚ. Οι ΘΒ και ΗΔ τέμνονται στο Α, άρα δεν είναι παράλληλες. Άρα το ΘΗΚΒ είναι τραπέζιο.

Επίσης, $\Delta\hat{H}K = A\hat{H}Z = 30^o$ ως κατακορυφήν.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΗΔΚ είναι:

$\Delta\hat{H}K + H\hat{K}\Delta = 90^o \Leftrightarrow 30^o + H\hat{K}\Delta = 90^o \Leftrightarrow H\hat{K}\Delta = 60^o$

Επειδή $H\hat{K}\Delta = \hat{B} = 60^o$, οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση ΒΚ του τραπεζίου είναι ίσες, οπότε το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

1846

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΑΓ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$. Αν τα τμήματα ΔΕ και ΒΓ τέμνονται στο Κ και η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΕΓ στο Μ.

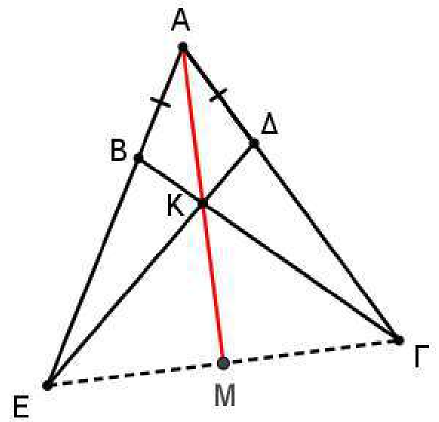
Να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = \Delta E$ (Μονάδες 6)

β) $BK = K\Delta$ (Μονάδες 7)

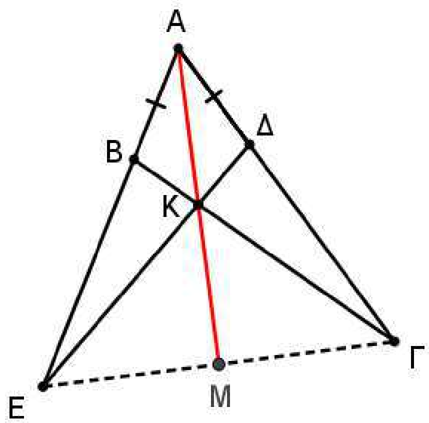
γ) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α. (Μονάδες 6)

δ) Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ. (Μονάδες 6)



1846-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΔΕΓ έχουν:



- ΕΓ κοινή
- ΒΕ = ΔΓ ως διαφορά των ίσων τμημάτων ΑΕ, ΑΒ και ΑΓ, ΑΔ αντίστοιχα
- $A\hat{E}\Gamma = A\hat{\Gamma}E$, αφού ΕΑΓ ισοσκελές τρίγωνο

Από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΔΕΓ είναι ίσα οπότε έχουν και ΒΓ=ΔΕ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{E}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}E$.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΔΕΓ είναι ίσα προκύπτει ότι $\Delta\hat{E}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}E$ οπότε το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές, άρα ΕΚ= ΚΓ (1)

Τα τρίγωνα ΒΕΚ και ΔΚΓ έχουν:

- ΕΚ=ΚΓ, λόγω της (1)
- ΒΕ=ΔΓ, ως διαφορές των ίσων τμημάτων ΑΕ, ΑΒ και ΑΓ, ΑΔ αντίστοιχα
- $B\hat{E}K = \Delta\hat{\Gamma}K$ ως διαφορές των ίσων γωνιών $B\hat{E}\Gamma$, $K\hat{E}\Gamma$ και $\Delta\hat{\Gamma}E$, $K\hat{\Gamma}E$ αντίστοιχα

Από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα ΒΕΚ και ΔΚΓ είναι ίσα, οπότε ισχύει και ΒΚ=ΚΔ ως απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ και ΓΔ.

γ) Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΚΔ είναι ίσα γιατί ΒΚ=ΚΔ από το (β) ερώτημα, ΑΚ κοινή και ΑΒ=ΑΔ.

Επομένως $B\hat{A}K = K\hat{A}\Delta$, οπότε η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

δ) Επειδή το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές και η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, θα είναι διάμεσος και ύψος, άρα η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ.

1847

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Έστω σημείο Α εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ ώστε να ισχύει $\hat{\mathrm{B A \Gamma}} = 60^o$. Το ΟΑ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ. Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Δ, τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

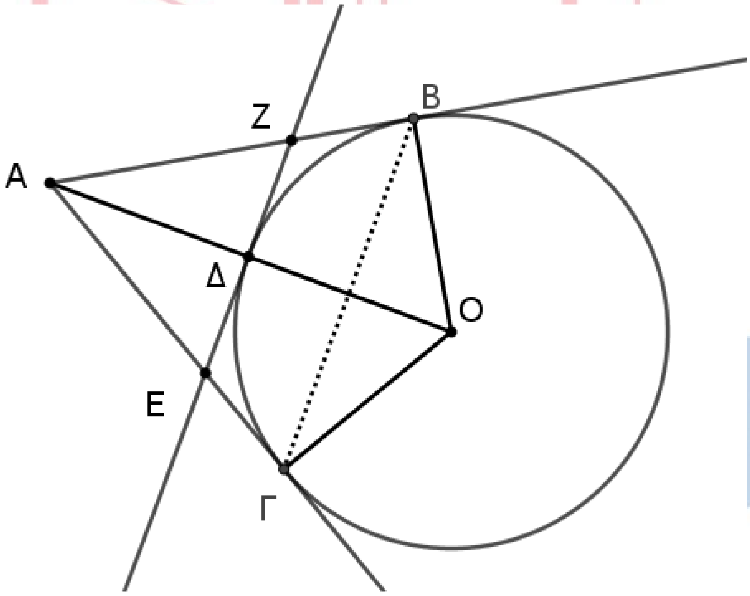
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι εγγράψιμο με ΟΑ=2ΟΒ. (Μονάδες 6)

β) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 6)

γ) $2\mathrm{ZB} = \mathrm{AZ}$ (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 6)



1847-Λύση

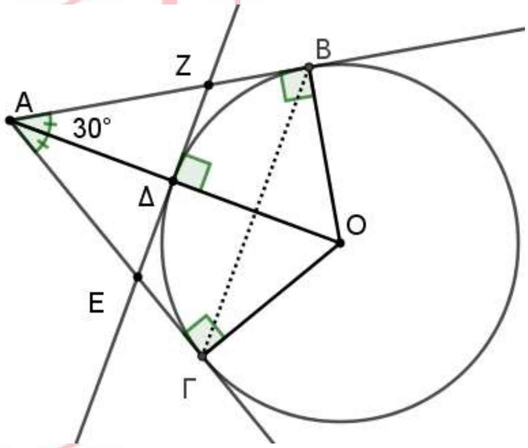
α) Οι εφαπτόμενες ΑΒ και ΑΓ είναι κάθετες στις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ, άρα $ΟΒ \perp ΑΒ$ και $ΟΓ \perp ΑΓ$ οπότε $Ο\hat{Β}Α = Ο\hat{Γ}Α = 90^o$.

Στο τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι $Ο\hat{Β}Α + Ο\hat{Γ}Α = 90^o + 90^o = 180^o$ οπότε είναι εγγράψιμο.

Η διακεντρική ευθεία ΑΟ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων, δηλαδή

$Ο\hat{Α}Β = \frac{Β\hat{Α}Γ}{2} = \frac{60^o}{2} = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ είναι $Ο\hat{Α}Β = 30^o$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή: $ΟΒ = \frac{ΟΑ}{2} \Leftrightarrow ΟΑ = 2ΟΒ$.



β) Η ΖΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Δ, άρα $ΖΕ \perp ΟΔ$.

Στο τρίγωνο ΑΖΕ το ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Επειδή $Β\hat{Α}Γ = 60^o$ το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

γ) Τα τμήματα ΖΒ και ΖΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ζ, οπότε

ΖΒ = ΖΔ (1). Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΕΖ, το ύψος ΑΔ είναι και διάμεσος οπότε:

$ΖΒ = ΖΔ = \frac{ΕΖ}{2} \Leftrightarrow ΖΒ = \frac{ΑΖ}{2} \Leftrightarrow ΑΖ = 2ΖΒ$

δ) Η ΑΟ είναι μεσοκάθετη της χορδής ΒΓ που έχει άκρα τα σημεία επαφής. Τότε: $ΒΓ \perp ΑΔ$ και $ΕΖ \perp ΑΔ$. Άρα ΕΖ // ΒΓ, και οι πλευρές ΒΖ και ΕΓ τέμνονται στο Α, άρα δεν είναι παράλληλες, οπότε ΕΖΒΓ τραπέζιο. Επίσης τα τμήματα ΕΓ και ΕΔ είναι εφαπτόμενα του κύκλου που άγονται από το Ε, άρα ΕΓ = ΕΔ (2).

Επειδή ΖΔ = ΕΔ, από τις (1), (2) προκύπτει ΖΒ = ΕΓ, οπότε το τραπέζιο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές.

1848

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και ΑΓ μια διάμετρός του. Θεωρούμε τις χορδές ΑΔ=ΒΓ. Έστω Κ και Λ τα μέσα των χορδών ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

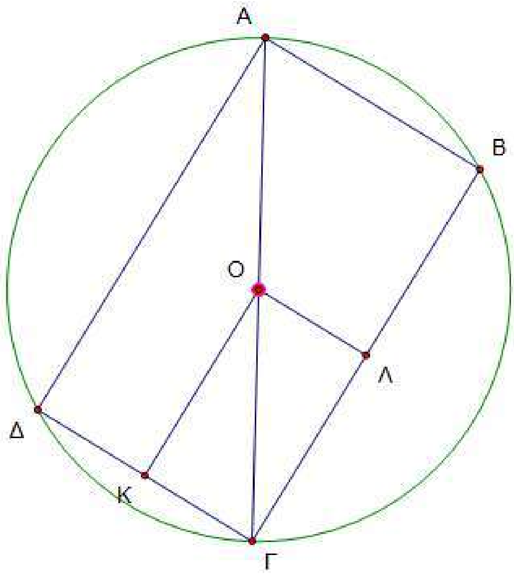
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι χορδές ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες. (Μονάδες 6)

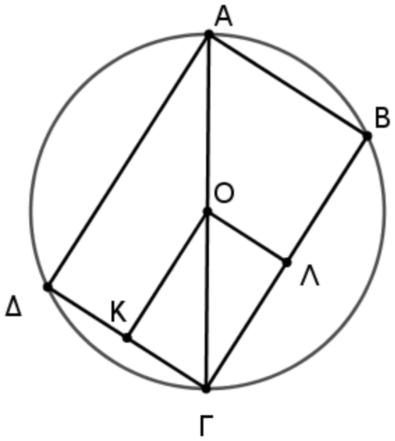
β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

γ) Η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΟΛΓΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



1848-Λύση



α) Είναι $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΒΓ είναι ίσα γιατί έχουν την πλευρά ΑΓ κοινή και ΑΔ=ΒΓ.

Άρα $A\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{A}\Gamma$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΓ.

Δηλαδή οι ΑΒ και ΔΓ που τέμνονται από την ΑΓ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $A\hat{\Gamma}\Delta$ και $B\hat{A}\Gamma$ ίσες, άρα ΑΒ // ΔΓ (1).

β) Είναι $\Gamma\hat{A}\Delta = A\hat{\Gamma}B$ ως περιεχόμενες σε ίσες μία προς μία πλευρές των ίσων τριγώνων ΑΓΔ και ΑΒΓ. Δηλαδή οι ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $A\hat{\Gamma}B$ ίσες, άρα ΑΔ// ΒΓ (2).

Από τις (1) και (2) το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και αφού $A\hat{B}\Gamma = 90^o$, είναι ορθογώνιο.

γ) Επειδή η γωνία $B\hat{A}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη και ορθή, βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

δ) Επειδή τα ΟΚ και ΟΛ είναι αποστήματα των χορδών ΓΔ και ΒΓ αντίστοιχα, ισχύει ότι $OK \perp \Gamma\Delta$ και $O\Lambda \perp B\Gamma$ οπότε $O\hat{K}\Gamma = O\hat{\Lambda}\Gamma = 90^o$.

Επίσης από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχουμε ότι $\Delta\hat{\Gamma}B = 90^o \Leftrightarrow K\hat{\Gamma}\Lambda = 90^o$.

Το τετράπλευρο ΟΛΚΓ έχει τρεις γωνίες ορθές, οπότε είναι ορθογώνιο.

1849

ΘΕΜΑ 4

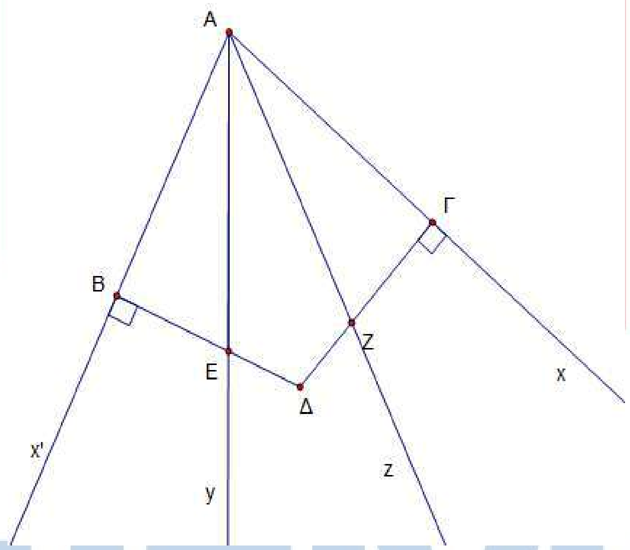
Στις πλευρές Ax' και Ax γωνίας $x'\hat{A}x$ θεωρούμε σημεία Β και Γ ώστε ΑΒ=ΑΓ. Οι κάθετες στις Αx' και Αx στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ.

Αν οι ημιευθείες Ay και Az χωρίζουν τη γωνία $x'\hat{A}x$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις ΒΔ και ΔΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

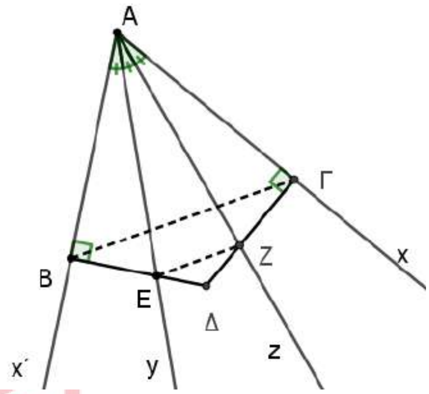
α) Το τρίγωνο $E\overset{\Delta}{A}Z$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $x'\hat{A}x$. (Μονάδες 8)

γ) Οι γωνίες ΓΒΔ και ΓΑΔ είναι ίσες. (Μονάδες 9)



1849-Λύση

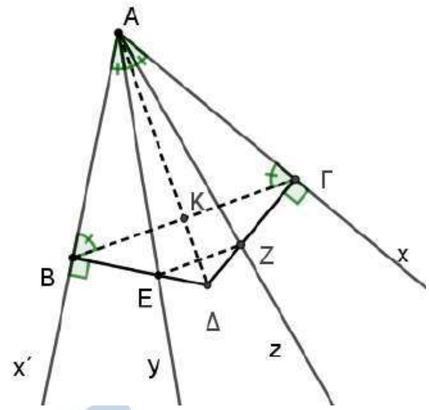


α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΖ είναι ίσα διότι:

- ΑΒ = ΑΓ, από την υπόθεση και
- $B\widehat{A}E = Z\widehat{A}\Gamma$ αφού οι Αy, Αz χωρίζουν τη γωνία $x΄\widehat{A}x$ σε τρεις ίσες γωνίες.

Άρα ΑΕ = ΑΖ ως υποτείνουσες των ίσων τριγώνων, οπότε το ΕΑΖ είναι ισοσκελές τρίγωνο.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα γιατί έχουν ΑΔ κοινή πλευρά και ΑΒ = ΑΓ, από την υπόθεση. Άρα ισχύει και $B\widehat{A}\Delta = \Gamma\widehat{A}\Delta$ ως περιεχόμενες γωνίες σε δύο ίσες, μία προς μία, πλευρές των ίσων τριγώνων, οπότε ΑΔ διχοτόμος της $x΄\widehat{A}x$.



γ) Έστω Κ το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΚ είναι διχοτόμος άρα και ύψος. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ βρίσκουμε: $K\widehat{A}\Gamma + A\widehat{\Gamma}K = 90^o \Leftrightarrow \Delta\widehat{A}\Gamma = 90^o - A\widehat{\Gamma}K$.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ, οπότε $A\widehat{\Gamma}B = A\widehat{B}\Gamma$.

Άρα $\Delta\widehat{A}\Gamma = 90^o - A\widehat{B}\Gamma \Leftrightarrow \Delta\widehat{A}\Gamma = \Gamma\widehat{B}\Delta$.

Θέμα 4

1850

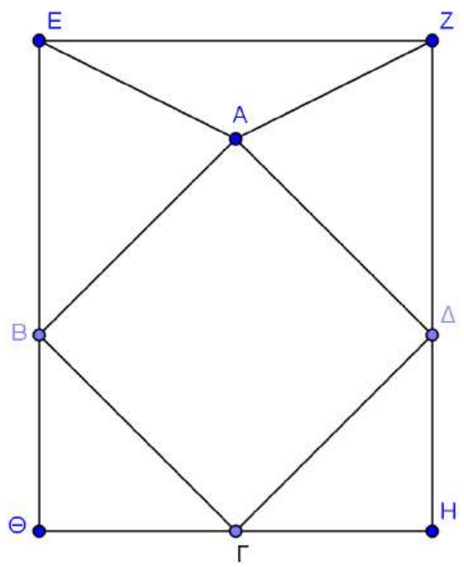
Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο ΕΖΗΘ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Μια μπάλα του μπιλιάρδου ξεκινάει από σημείο Α της μεσοκαθέτου του τμήματος ΕΖ και χτυπώντας διαδοχικά στους τοίχους ΕΘ, ΘΗ, ΗΖ στα σημεία Β, Γ και Δ αντίστοιχα, καταλήγει στο σημείο εκκίνησης Α. Για τη διαδρομή Α$\rightarrow$ Β $\rightarrow$ Γ$\rightarrow$ Δ$\rightarrow$ Α που ακολουθεί η μπάλα ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ η γωνία ΑΒΕ) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ η γωνία ΘΒΓ) και η κάθε μια απ' αυτές είναι 45^o.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

ii. Η διαδρομή ΑΒΓΔΑ της μπάλας σχηματίζει τετράγωνο. (Μονάδες 8)

β) Αν η ΑΖ είναι διπλάσια από την απόσταση του Α από τον τοίχο ΕΖ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΖ. (Μονάδες 8)



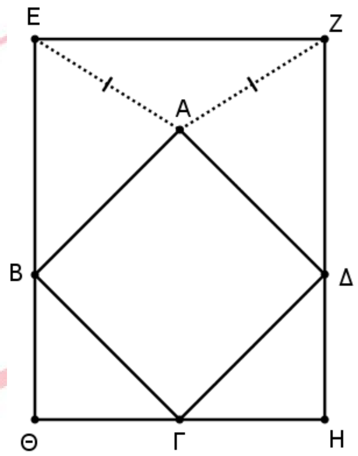
1850-Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΖΑΔ είναι ίσα γιατί έχουν:

- ΕΑ =ΑΖ, διότι το Α είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΕΖ.
- $\mathrm{A\hat{E}B}=\mathrm{A\hat{Z}\Delta}$, διότι $\hat{E}=\hat{Z}=90^o$ και $\mathrm{A\hat{E}Z} = \mathrm{A\hat{Z}E}$ αφού το ΑΖΕ τρίγωνο είναι ισοσκελές.
- $\mathrm{E\hat{B}A}= \mathrm{A\hat{\Delta}Z} = 45^o$ ως γωνίες πρόσπτωσης, $\mathrm{E\hat{A}B}= \mathrm{Z\hat{A}\Delta}$ αφού τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες τους γωνίες θα είναι ίσες.

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΖΑΔ είναι ίσα.

ii. Επειδή τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΖΑΔ είναι ίσα, είναι και ΑΒ=ΑΔ αφού είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\mathrm{A\hat{E}B}$, $\mathrm{A\hat{Z}\Delta}$.



Οι γωνίες πρόσκρουσης και ανάκλασης είναι 45^o, οπότε ισχύει ότι:

$\mathrm{A\hat{B}E} =\Theta\hat{B}\Gamma= B\hat{\Gamma}\Theta=\Delta\hat{\Gamma}H = H\hat{\Delta}\Gamma= A\hat{\Delta}Z = 45^o$

Άρα

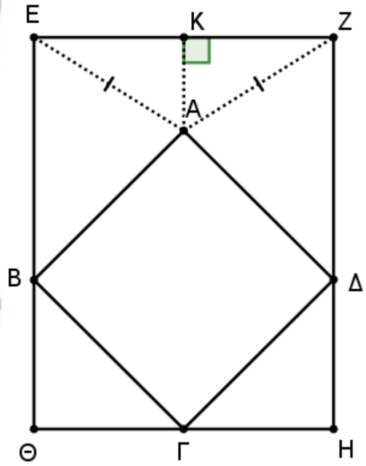
$\mathrm{A\hat{B}\Gamma}= B\hat{\Gamma}\Delta=\Gamma\hat{\Delta}A= 90^o$

Επομένως το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, επομένως είναι τετράγωνο.

β) Έστω ΑΚ η απόσταση του Α από την πλευρά ΕΖ. Είναι

$AZ= 2AK \Leftrightarrow AK = \frac{AZ}{2}$



Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΖ μια κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, επομένως η απέναντι γωνία από την πλευρά αυτή είναι 30^o, δηλαδή $\mathrm{A\hat{Z}K} =30^o$.

Επειδή το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές με βάση την ΕΖ, ισχύει ότι: $\mathrm{A\hat{Z}K} = \mathrm{A\hat{E}Z}= 30^o$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΕΖ, έχουμε:

$\mathrm{E\hat{A}Z}+ \mathrm{A\hat{E}Z}+ \mathrm{A\hat{Z}K}= 180^o \Leftrightarrow \mathrm{E\hat{A}Z}+ 30^o + 30^o = 180^o \Leftrightarrow \mathrm{E\hat{A}Z}= 120^o$

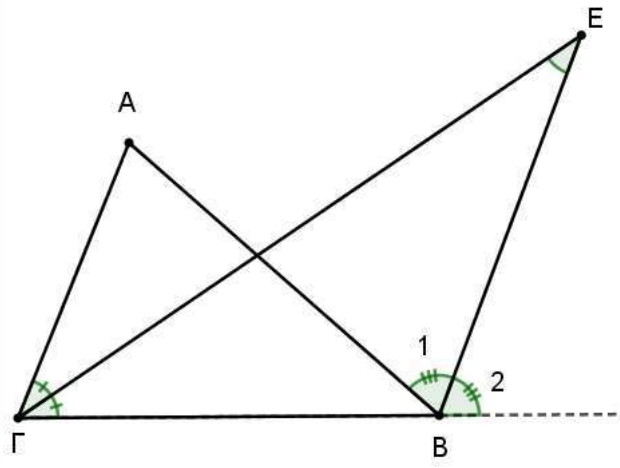
1851

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ η προέκταση της διχοτόμου της $\widehat{\Gamma}$ και της εξωτερικής γωνίας του $\widehat{\mathrm{B}}$, τέμνονται στο Ε. Δίνεται ότι $\mathrm{A}\overset{\Lambda}{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 70^o = 2\Gamma\overset{\Lambda}{\mathrm{E}}\mathrm{B}$

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΒΕ είναι ισοσκελές (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$. (Μονάδες 13)



1851-Λύση

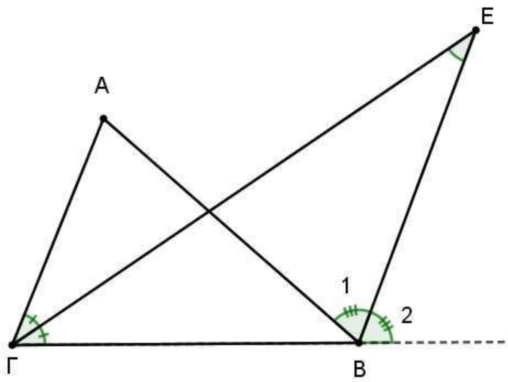
α) Επειδή $\widehat{B}_1 = 70^o$, άρα $2\ \Gamma\widehat{E}B = 70^o$, άρα $\Gamma\widehat{E}B = 35^o$.

Η ΒΕ είναι διχοτόμος της $\widehat{B}_{\varepsilon\xi}$ και $\widehat{B}_1 = 70^o$,

άρα $\widehat{B}_2 = 70^o$. Η γωνία $\widehat{B}_2$ είναι η εξωτερική γωνία του τριγώνου $\overset{\Delta}{EB\Gamma}$, άρα

$\widehat{B}_2 = E\widehat{\Gamma}B + \Gamma\widehat{E}B \Leftrightarrow 70^o = E\widehat{\Gamma}B + 35^o \Leftrightarrow E\widehat{\Gamma}B = 35^o$.

Δηλαδή $E\widehat{\Gamma}B = \Gamma\widehat{E}B = 35^o$, άρα το τρίγωνο ΓΒΕ είναι ισοσκελές.



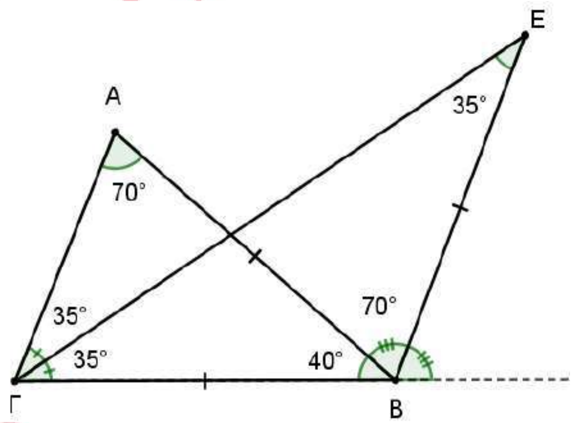
β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΒΕ είναι εξωτερική διχοτόμος, άρα $\widehat{B}_{\varepsilon\xi} = 2\widehat{B}_1 = 2\cdot70^o = 140^o$. Άρα $\widehat{B} = 180^o - 140^o = 40^o$.

Επειδή η ΓΕ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{\Gamma}$,

είναι $\widehat{\Gamma} = 2E\widehat{\Gamma}B = 70^o$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, είναι:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \widehat{A} + 40^o + 70^o = 180^o \Leftrightarrow \widehat{A} = 70^o$



1853

ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

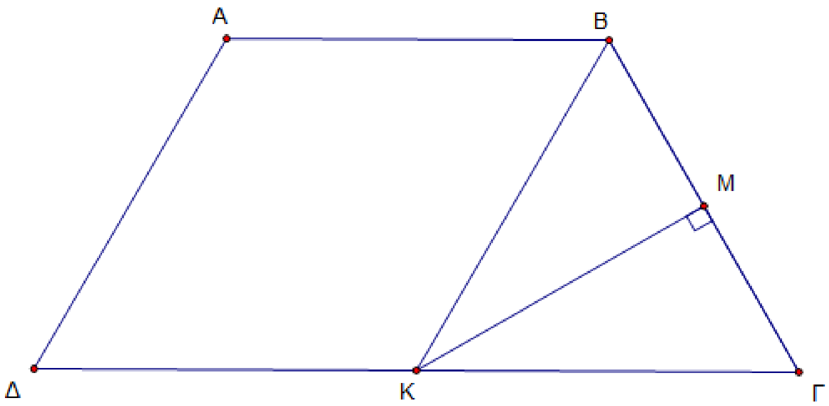
Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$, η οποία τέμνει το ΔΓ στο Κ και η κάθετη από το Κ προς το ΒΓ το τέμνει στο Μ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 10)

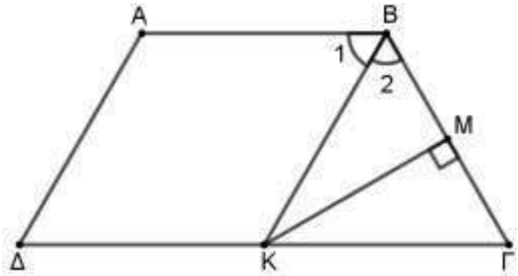
β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΚΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

ii. Το σημείο Μ είναι το μέσο του ΒΓ. (Μονάδες 7)



1853-Λύση



α) Οι γωνίες $\widehat{\mathrm{B}}$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από τη ΒΓ. Άρα $\widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} = 180^o$.

Επειδή από την υπόθεση έχουμε ότι $\widehat{\mathrm{B}} = 2\widehat{\Gamma}$, τότε $3\widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 60^o$. Άρα $\widehat{\mathrm{B}} = 120^o$. Το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο οπότε οι γωνίες που είναι προσκείμενες σε κάθε του βάση είναι ίσες, άρα $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}} = 120^o$ και $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma} = 60^o$.

β) i. Επειδή η ΒΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$, είναι $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{K} = \mathrm{K}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = 60^o$. Στο τρίγωνο ΒΚΓ δύο γωνίες του είναι ίσες με 60^o οπότε και $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{K}}\Gamma = 60^o$, δηλαδή το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, επομένως ΚΒ = ΚΓ = ΒΓ.

Επειδή $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{AB} = \mathrm{A\Delta} = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ από υπόθεση θα είναι και ΔΚ = ΚΒ = ΑΒ = ΑΔ, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΚΔ είναι ρόμβος γιατί έχει τις πλευρές του ίσες.

ii. Το τρίγωνο ΚΒΓ είναι ισόπλευρο και το ΚΜ είναι ύψος του αφού $\mathrm{KM} \perp \mathrm{B\Gamma}$, άρα θα είναι και διάμεσος της πλευράς ΒΓ, συνεπώς το Μ είναι μέσο του ΒΓ.

1857

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ), με ΑΚ διχοτόμο της γωνίας Α. Στην προέκταση της ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $\mathrm{AK} = \mathrm{K\Delta}$. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

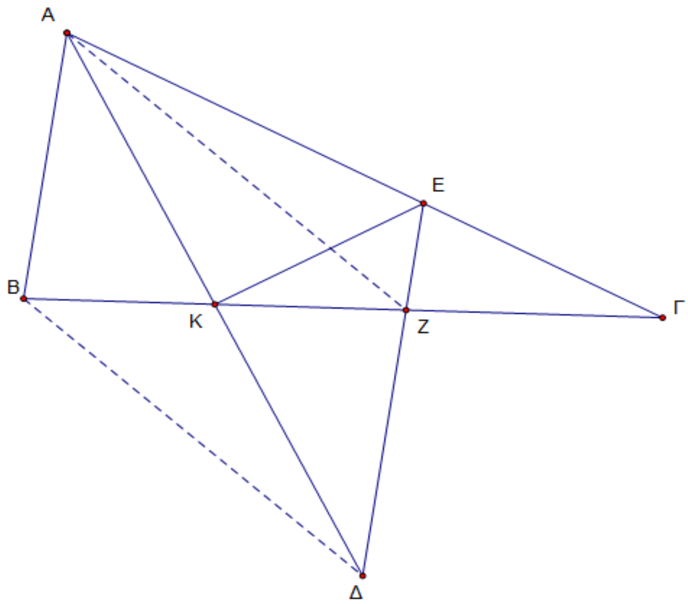
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

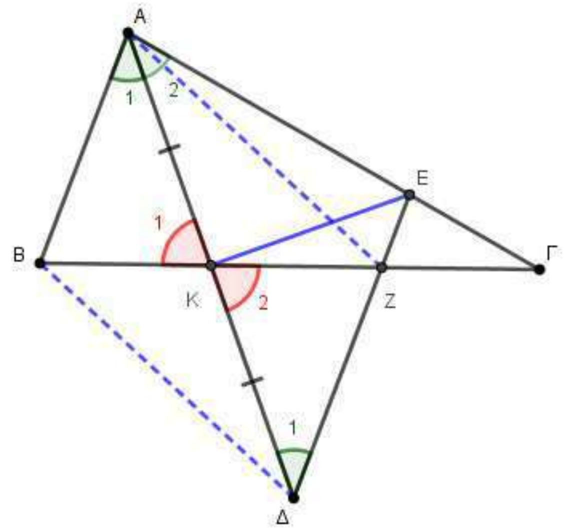
β) Η ΕΚ είναι μεσοκάθετος της ΑΔ . (Μονάδες 6)

γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΚΔΖ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



1857-Λύση



α) Είναι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (1) αφού ΑΚ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ και $\widehat{A}_1 = \widehat{\Delta}_1$ (2) ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τις τέμνει η ΑΔ. Από (1), (2) προκύπτει ότι $\widehat{A}_2 = \widehat{\Delta}_1$.

Άρα το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές με βάση ΑΔ και ίσες πλευρές τις ΕΑ, ΕΔ.

β) Από την υπόθεση είναι ΑΚ = ΚΔ, οπότε η ΕΚ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση ΑΔ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΔ του α) ερωτήματος, άρα η ΕΚ είναι και ύψος του. Οπότε η ΕΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΔ.

γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΚΔΖ έχουν:

- $\widehat{A}_1 = \widehat{\Delta}_1$ λόγω της (2)
- $\widehat{K}_1 = \widehat{K}_2$ ως κατακορυφήν
- ΑΚ = ΚΔ, από υπόθεση

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα είναι ίσα.

δ) Αφού τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΚΔΖ είναι ίσα (προηγούμενο ερώτημα) τότε θα έχουν και ΒΚ = ΚΖ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών $\widehat{A}_1$ και $\widehat{\Delta}_1$ αντίστοιχα. Επίσης είναι ΑΚ = ΚΔ από υπόθεση. Άρα το ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

1858

ΘΕΜΑ 4

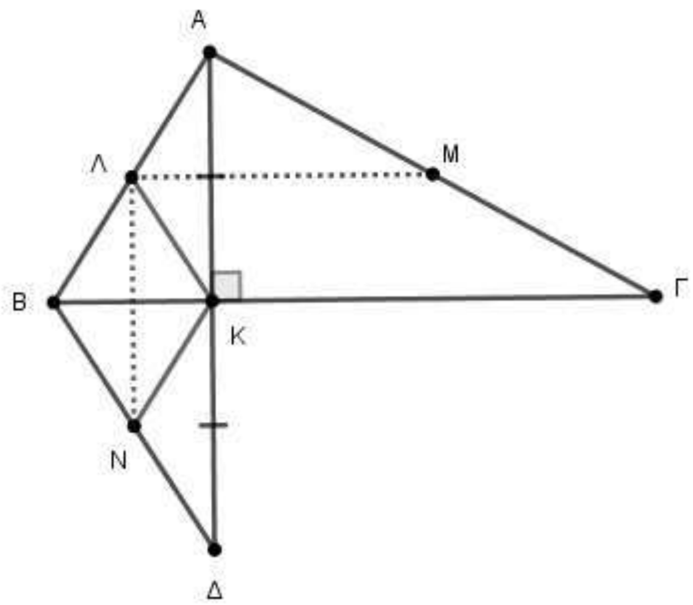
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση του ύψους του ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $\mathrm{AK} = \mathrm{K\Delta}$. Έστω Λ, Μ και Ν τα μέσα των τμημάτων ΑΒ, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

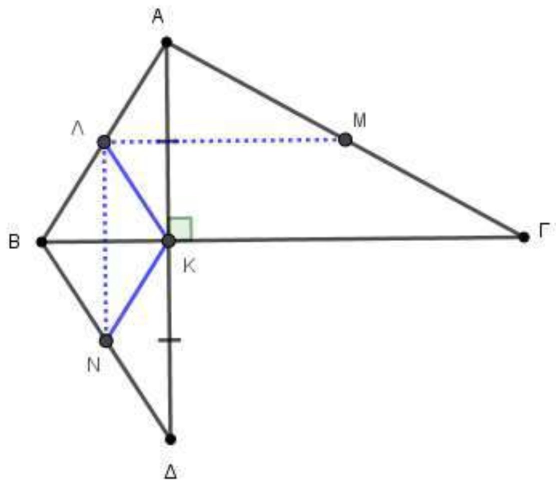
α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΒΛΚΝ είναι ρόμβος . (Μονάδες 9)

γ) $\Lambda\mathrm{M} \perp \Lambda\mathrm{N}$ (Μονάδες 9)



1858-Λύση



α) Αφού το ΑΚ είναι ύψος στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα το ΑΔ είναι κάθετο στο ΒΓ.

Αφού είναι ΑΚ = ΚΔ, άρα το Κ είναι μέσο του ΑΔ.

Οπότε, στο τρίγωνο ΑΒΔ το ΒΚ είναι ύψος και διάμεσος στην πλευρά ΑΔ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ και ίσες πλευρές τις ΒΑ και ΒΔ.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΒ το ΚΛ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΑ, άρα είναι ΚΛ = $\frac{\text{ΒΑ}}{2}$ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΔ το ΚΝ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΔ, άρα είναι ΚΝ =$\frac{\text{ΒΔ}}{2}$ (2).

Επειδή τα Λ, Ν είναι μέσα των ΒΑ, ΒΔ αντίστοιχα, θα είναι ΒΛ =$\frac{\text{ΒΑ}}{2}$ (3) και ΒΝ =$\frac{\text{ΒΔ}}{2}$ (4)

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με ΒΑ =ΒΔ (από α) ερώτημα) τότε από τις σχέσεις (1), (2), (3) και (4) θα είναι ΚΛ =ΛΒ = ΒΝ = ΝΚ. Οπότε, το τετράπλευρο ΒΛΚΝ είναι ρόμβος γιατί έχει όλες του τις πλευρές ίσες.

γ) Οι ΛΝ και ΒΚ είναι διαγώνιοι του ρόμβου ΒΝΚΛ, άρα είναι κάθετες, δηλαδή

ΛΝ ⊥ ΒΚ, οπότε θα είναι ΛΝ ⊥ ΒΓ.

Αφού το ΛΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, τότε είναι ΛΜ // ΒΓ.

Οπότε, αφού ΛΜ, ΒΓ παράλληλες μεταξύ τους και η ΛΝ είναι κάθετη στην μία από αυτές, την ΒΓ, τότε η ΛΝ θα είναι κάθετη και στην άλλη, δηλαδή ΛΝ ⊥ ΛΜ.

1859

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τις μεσοκαθέτους μ1, μ2 των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνονται στο μέσο Μ της ΒΓ.

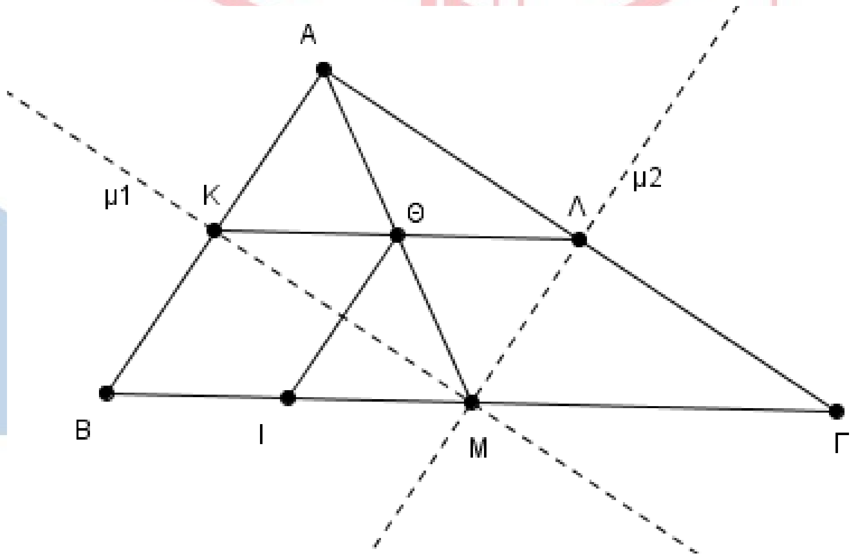
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^o$. (Μονάδες 5)

ii. Το τετράπλευρο ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

iii. $\Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4}$, όπου Θ το σημείο τομής των ΑΜ και ΚΛ. (Μονάδες 6)

β) Αν Ι σημείο της ΒΓ τέτοιο ώστε $BI = \frac{B\Gamma}{4}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΘΙΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



1859-Λύση

α) i. Το σημείο Μ ανήκει στις μεσοκαθέτους μ_1, μ_2 των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, οπότε ισαπέχει από τα σημεία Α, Β, Γ, δηλαδή είναι ΜΑ = ΜΒ (1) και ΜΑ = ΜΓ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΜΒ = ΜΓ, άρα το Μ είναι μέσο της ΒΓ και ισχύει

$AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος του ΑΜ ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\widehat{A} = 90^o$.

ii. Το τετράπλευρο ΑΛΜΚ έχει τρείς γωνίες ορθές, την γωνία $K\widehat{A}\Lambda$ από το i.) ερώτημα και τις γωνίες $A\widehat{\Lambda}M$ και $A\widehat{K}M$ λόγω των μεσοκαθέτων μ_2 και μ_1 των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Οπότε το τετράπλευρο ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο.

iii. Επειδή το ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιοί του ΑΜ και ΚΛ είναι ίσες και διχοτομούνται και Θ είναι το κέντρο του.

Οπότε είναι $\Lambda\Theta = \frac{K\Lambda}{2} = \frac{AM}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$ αφού είναι ΚΛ = ΑΜ και $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΜ, τα Κ, Θ είναι μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΜ αντίστοιχα.

Οπότε είναι ΚΘ // ΒΜ άρα είναι ΚΘ // ΒΙ (3)

Επίσης είναι $K\Theta = \frac{BM}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$ αφού Μ μέσο του ΒΓ και επειδή το σημείο Ι είναι το μέσο του ΒΜ θα είναι $BI = \frac{BM}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$. Άρα θα είναι ΚΘ = ΒΙ (4).

Οπότε, το τετράπλευρο ΚΘΙΒ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΚΘ και ΒΙ, ίσες και παράλληλες (σχέσεις (3) και (4)).

1860

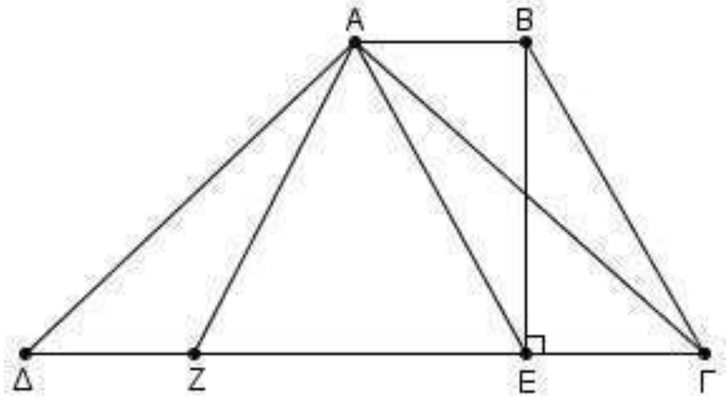
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB//\Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma = 4AB$ και $B\Gamma = 2AB$. Θεωρούμε σημείο Ζ εσωτερικό της ΓΔ, ώστε $\Delta Z = AB$. Αν η γωνία Γ είναι 60^0 και ΒΕ το ύψος του τραπεζίου, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

γ) Τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΓΑΕ είναι ίσα. (Μονάδες 9)



1860-Λύση

α) Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΒΕΓ έχουμε:

$$\mathrm{E}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma + \widehat{\Gamma} = 90^{o} \Leftrightarrow \mathrm{E}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma + 60^{o} = 90^{o} \Leftrightarrow \mathrm{E}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = 30^{o}$$

Οπότε, στο τρίγωνο ΒΕΓ η απέναντι πλευρά από τη γωνία των 30^0 είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή ΕΓ = $\frac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$ = ΑΒ (1).

Επειδή είναι ΑΒ // ΔΓ και το σημείο Ε της ΔΓ είναι τέτοιο ώστε ΕΓ = ΑΒ τότε θα είναι ΑΒ // = ΕΓ, οπότε το τετράπλευρο ΑΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Είναι ΔΓ = ΔΖ + ΖΕ + ΕΓ (2). Επίσης ισχύουν:

- ΔΓ = 4 ΑΒ από υπόθεση
- ΔΖ = ΑΒ από υπόθεση
- ΕΓ =ΑΒ από σχέση (1)

Άρα η σχέση (2) γίνεται 4ΑΒ = ΑΒ + ΖΕ + ΑΒ $\Leftrightarrow$ ΖΕ = 2ΑΒ και επειδή 2ΑΒ = ΒΓ από υπόθεση, είναι ΖΕ = ΒΓ.

Επειδή είναι ΒΓ = ΑΕ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΕΓΒ, άρα ΖΕ = ΑΕ. Οπότε το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές.

Επίσης $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = \widehat{\Gamma} = 60^{o}$, ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΓΔ, οπότε το ισοσκελές τρίγωνο ΖΑΕ έχει μια γωνία 60^0, άρα είναι ισόπλευρο.

γ) Τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΓΑΕ έχουν:

- ΔΖ = ΓΕ, αφού είναι ΔΖ = ΑΒ (υπόθεση) και ΕΓ = ΑΒ (σχέση (1))
- ΑΖ = ΑΕ, διότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο (από β) ερώτημα)
- $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{Z}}\Delta = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\Gamma = 120^{o}$, ως παραπληρωματικές των γωνιών $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{E} = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = 60^0$ του ισοπλεύρου τριγώνου ΖΑΕ.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΓΑΕ είναι ίσα.

1861

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB // \Gamma\Delta$ και ΑΔ= ΒΓ =ΑΒ. Φέρουμε τμήματα ΑΕ και ΒΖ κάθετα στις διαγώνιες ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

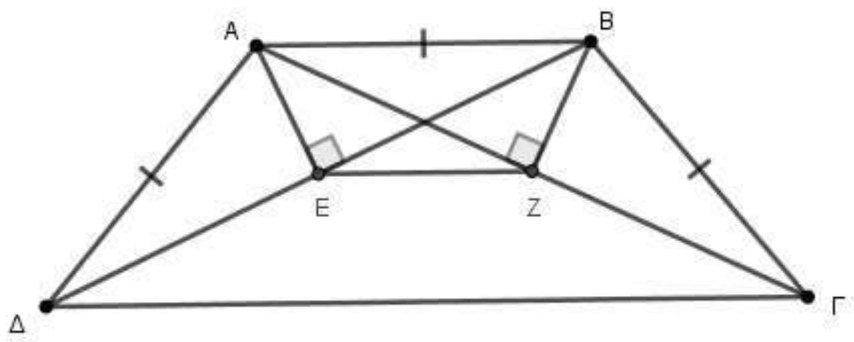
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Ζ και Ε είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

β) ΑΕ =ΒΖ . (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

δ) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ. (Μονάδες 5)



1861-Λύση

α) Επειδή ΑΔ = ΑΒ, το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές οπότε το ύψος ΑΕ είναι και διάμεσος, δηλαδή το Ε είναι μέσο της ΒΔ. Όμοια, επειδή ΑΒ = ΒΓ, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές οπότε το ύψος ΒΖ είναι και διάμεσος, δηλαδή το Ζ είναι μέσο της ΑΓ.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΖ είναι ορθογώνια, αφού από υπόθεση είναι ΑΕ ⊥ ΒΔ και ΒΖ ⊥ ΑΓ, και έχουν:

- ΑΒ κοινή πλευρά
- ΑΖ = ΑΕ, ως μισά των ίσων διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ του ισοσκελούς τραπεζίου.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΖ είναι ίσα γιατί έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Οπότε έχουν και τις άλλες κάθετες πλευρές τους ίσες, δηλαδή ΑΕ = ΒΖ (1).

γ) Τα σημεία Ε και Ζ είναι μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου ΑΒΓΔ, άρα θα ισχύει ότι ΕΖ // ΑΒ // ΓΔ.

Επειδή είναι $Α\hat{Ε}Ζ = 90^0 + Β\hat{Ε}Ζ$ και $Β\hat{Ζ}Ε = 90^0 + Α\hat{Ζ}Ε$ θα είναι $Α\hat{Ε}Ζ + Β\hat{Ζ}Ε > 180^0$. Επομένως, οι ΑΕ και ΒΖ δεν είναι παράλληλες. Άρα, το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι τραπέζιο γιατί έχει μόνο δυο πλευρές του παράλληλες.

Επειδή είναι ΑΕ = ΒΖ (λόγω της (1)) προκύπτει ότι το τραπέζιο ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές.

δ) Επειδή το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΔ, ισχύει ότι:

$Α\hat{Δ}Β = Α\hat{Β}Δ$ (2)

Ισχύει επίσης ότι $Α\hat{Β}Δ = Β\hat{Δ}Γ$ (3) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ.

Άρα από τις (2), (3) προκύπτει ότι $Α\hat{Δ}Β = Β\hat{Δ}Γ$, δηλαδή η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Δ}$.

1862

ΘΕΜΑ 4

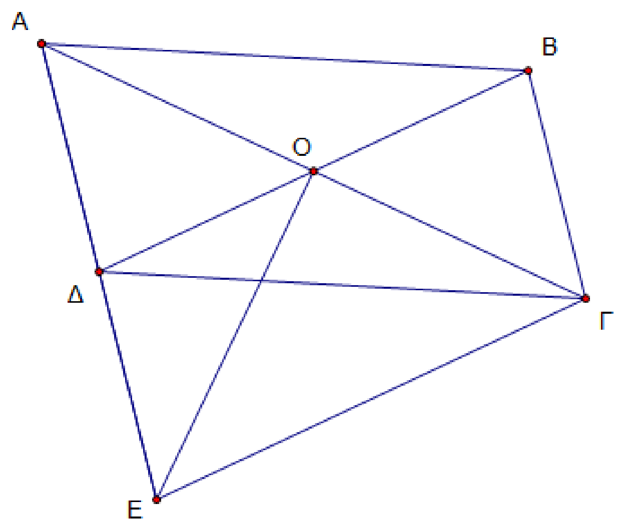
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην ΑΓ στο κέντρο του Ο, αυτή τέμνει την προέκταση της ΑΔ σε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΔΕ=ΑΔ.

Να αποδείξετε ότι:

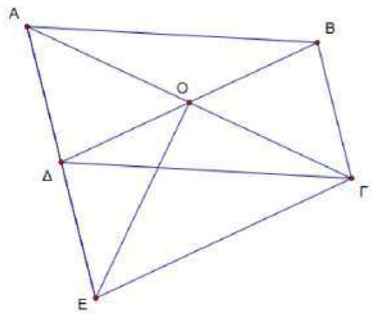
α) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)



1862-Λύση



α) Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες του διχοτομούνται, άρα το Ο είναι μέσο των ΑΓ, ΒΔ. Επίσης ΟΕ $\perp$ ΑΓ από υπόθεση. Άρα στο τρίγωνο ΑΕΓ το ΟΕ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Είναι: ΒΓ = ΑΔ = ΔΕ και ΒΓ // ΑΔ $\Leftrightarrow$ ΒΓ // ΔΕ

Άρα στο τετράπλευρο ΒΓΕΔ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Ισχύουν τα εξής:

• ΟΔ = ΟΒ , διότι οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ διχοτομούνται.

• ΑΔ = ΒΓ , διότι οι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι ίσες.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΕ η ΟΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα:

$$ΟΔ = \frac{ΑΕ}{2} = \frac{2ΑΔ}{2} = ΑΔ \Leftrightarrow ΟΒ = ΒΓ$$

Οπότε το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 4

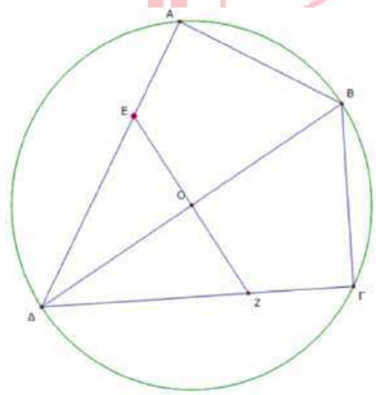
Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος (Ο, ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔΒ να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία Β είναι διπλάσια της γωνίας Δ και οι πλευρές ΑΒ και ΒΓ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη ΒΔ στο Ο, η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΔ και ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 6)

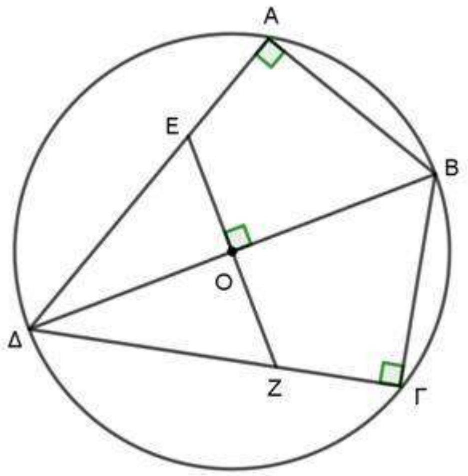
β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΓΒ. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΟ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΟΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. (Μονάδες 6)



1864-Λύση



α) Είναι $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = 90^o$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο άρα $\widehat{B} + \widehat{\Delta} = 180^o$. Όμως $\widehat{B} = 2\widehat{\Delta}$, άρα

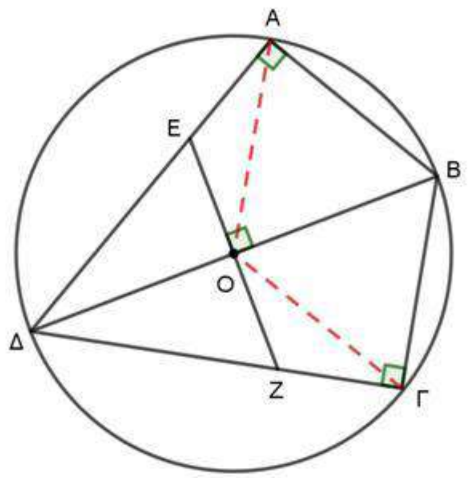
$2\widehat{\Delta} + \widehat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow 3\widehat{\Delta} = 180^o \Leftrightarrow \widehat{\Delta} = 60^o$ και $\widehat{B} = 120^o$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΓΒ έχουν:

• ΒΔ κοινή πλευρά και

• ΑΒ = ΒΓ, από υπόθεση

Άρα τα τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΓΒ είναι ίσα.



γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα, ισχύει $A\widehat{\Delta}B = \Gamma\widehat{\Delta}B$ διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα, οπότε η ΔΒ είναι διχοτόμος της $A\widehat{\Delta}\Gamma$ οπότε:

$A\widehat{\Delta}B = B\widehat{\Delta}\Gamma = \frac{A\widehat{\Delta}\Gamma}{2} = \frac{60^o}{2} = 30^o$

Επειδή στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ είναι $A\widehat{\Delta}B = 30^o$, η απέναντι κάθετη ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $AB = \frac{\Delta B}{2} = \frac{2\rho}{2} = \rho$

1864-Λύση

Όμοια, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΒ είναι $\Gamma\hat{\Delta}B = 30^o$, οπότε $B\Gamma = \frac{\Delta B}{2} = \frac{2\rho}{2} = \rho$

Επίσης ΟΑ = ΟΓ = ρ .

Οπότε προκύπτει ότι το ΑΒΓΟ έχει όλες τις πλευρές του ίσες άρα είναι ρόμβος.

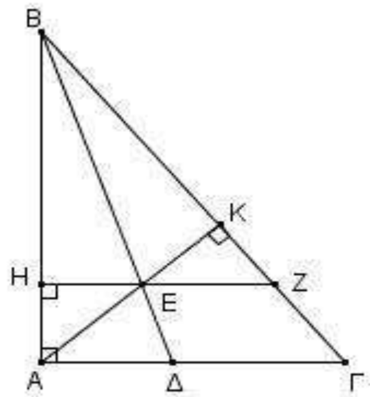
δ) Ισχύει ότι: $E\hat{A}B + E\hat{O}B = 90^o + 90^o = 180^o$.

Δηλαδή δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΟΕ είναι παραπληρωματικές, άρα είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

1865

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ με ΒΔ διχοτόμο και ΑΚ ύψος, που τέμνονται στο Ε. Η κάθετη από το Ε στην ΑΒ τέμνει τις ΑΒ και ΒΓ στα Η και Ζ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι:

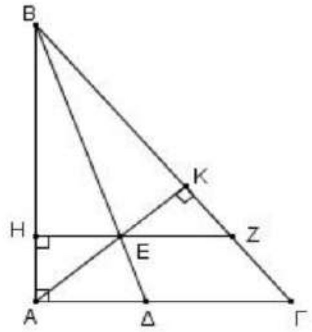
i. Τα τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

ii. Το τρίγωνο ΒΚΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

iii. Η ΒΔ είναι κάθετη στην ΑΖ (Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ. (Μονάδες 6)

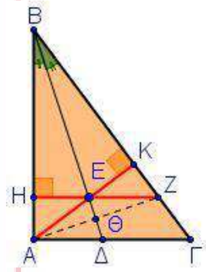
1865-Λύση



α) i) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ έχουν:

- ΗÊΑ = ΚÊΖ, ως κατακορυφήν
- ΗΕ = ΕΚ, διότι το Ε είναι σημείο της διχοτόμου ΑΔ και ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $\hat{B}$.

Άρα τα τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ είναι ίσα.



ii) Τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΒΕΚ . Έχουν:

- ΗΒ̂Ε = ΕΒ̂Κ, διότι ΒΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$
- ΒΕ κοινή πλευρά

Άρα τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΒΕΚ είναι ίσα, οπότε είναι και ΒΗ = ΒΚ διότι είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες ΗÊΒ, ΒÊΚ αντίστοιχα. Επομένως το τρίγωνο ΒΚΗ είναι ισοσκελές

iii) Στο τρίγωνο ΑΒΖ το σημείο Ε είναι το σημείο τομής των υψών ΑΚ, ΖΗ άρα είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Οπότε και το ΑΘ είναι ύψος αφού διέρχεται από το Ε. Άρα η ΒΔ $\perp$ ΑΖ.

β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, το ΑΚ είναι ύψος και διχοτόμος. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Ε είναι σημείο τομής των διχοτόμων ΑΚ και ΒΔ άρα είναι έγκεντρο. Η ΓΕ διέρχεται από το Ε άρα είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

1866

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Με βάση την ΑΒ κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΒ, εκτός του τριγώνου ΑΒΓ, με γωνία $\hat{\Delta} = 120^o$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Η των πλευρών ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

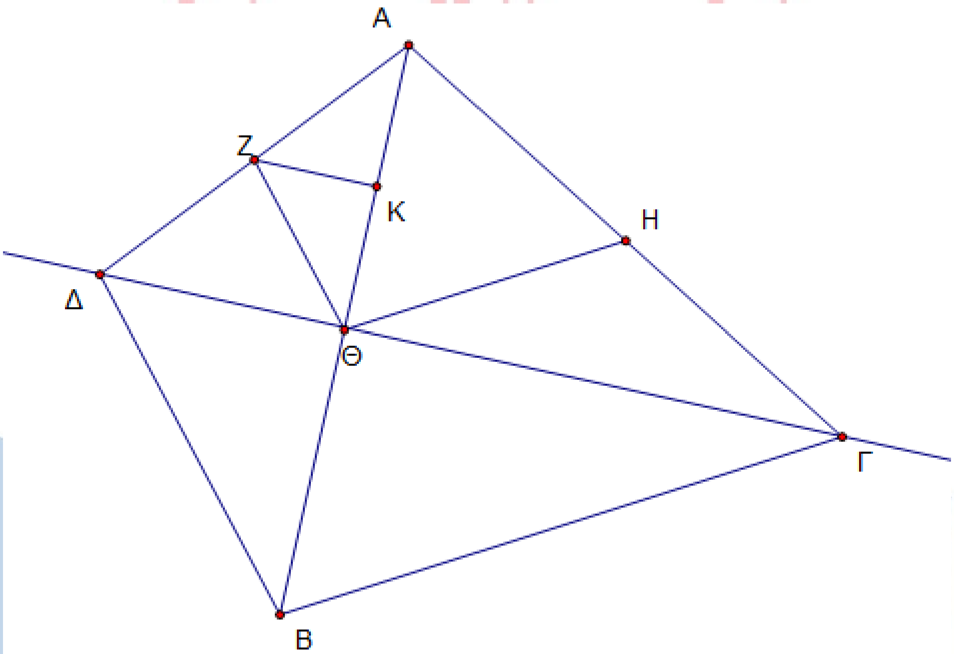
α) Να αποδείξετε ότι η ΔΓ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ. (Μονάδες 8)

β) Αν η ΔΓ τέμνει την ΑΒ στο Θ, να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{Z\Theta H}$ είναι ορθή.

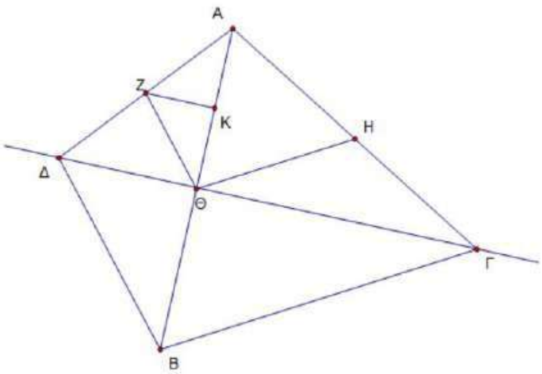
(Μονάδες 9)

γ) Αν η ΖΚ είναι η κάθετη στην ΑΒ από το σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $ZK = \frac{A\Delta}{4}$.

(Μονάδες 8)



1866-Λύση



α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, οπότε ΓΑ = ΓΒ, δηλαδή το Γ ισαπέχει από τα Α και Β, οπότε ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

Επίσης το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές, οπότε ΔΑ = ΔΒ, δηλαδή το Δ ισαπέχει από τα Α και Β, οπότε ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

Επειδή τα σημεία Γ, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ, η ΓΔ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος αυτού.

β) Επειδή η ΓΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ, θα είναι και διχοτόμος των γωνιών $\hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}$, δηλαδή $A\hat{\Delta}\Theta = \Theta\hat{\Delta}B = 60^o$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΔ η ΘΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $\Theta Z = \frac{A\Delta}{2} = ZA$

Επομένως το τρίγωνο ΖΘΔ είναι ισοσκελές και αφού $A\hat{\Delta}\Theta = 60^o$, το τρίγωνο ΖΘΔ είναι ισόπλευρο. Τότε: $Z\hat{\Theta}\Delta = 60^o$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΘΓ, έχουμε:

$A\hat{\Gamma}\Theta + \Theta\hat{A}\Gamma = 90^o \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}\Theta + 60^o = 90^o \Leftrightarrow A\hat{\Gamma}\Theta = 30^o$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΓ η ΘΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $\Theta H = \frac{A\Gamma}{2} = H\Gamma$

Επομένως το τρίγωνο ΘΗΓ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι:

$H\hat{\Theta}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Theta \Leftrightarrow H\hat{\Theta}\Gamma = 30^o$

Τότε:

$Z\hat{\Theta}\Delta + Z\hat{\Theta}H + H\hat{\Theta}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow 60^o + Z\hat{\Theta}H + 30^o = 180^o \Leftrightarrow Z\hat{\Theta}H = 90^o$

γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΘΔ βρίσκουμε:

$A\hat{\Delta}\Theta + \Delta\hat{A}\Theta = 90^o \Leftrightarrow 60^o + \Delta\hat{A}\Theta = 90^o \Leftrightarrow \Delta\hat{A}\Theta = 30^o$

Τότε για την απέναντι πλευρά στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΚ ισχύει ότι:

1866-Λύση

$$ZK = \frac{AZ}{2} = \frac{\frac{AΔ}{2}}{2} = \frac{AΔ}{4}$$

1867

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΔ και η ΒΔ είναι κάθετη στην ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Μ, Ε και Ζ των ΓΔ, ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

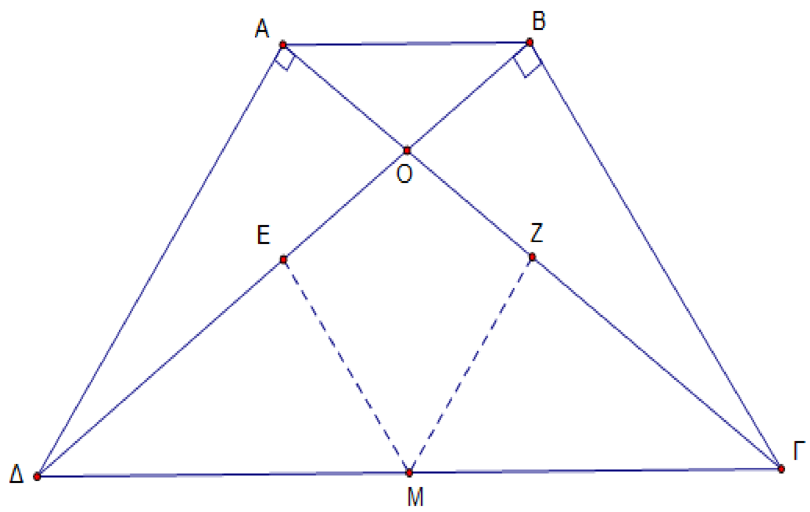
Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΕ=ΜΖ. (Μονάδες 6)

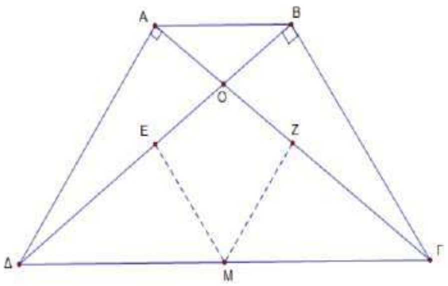
β) Η ΜΖ είναι κάθετη στην ΑΓ. (Μονάδες 6)

γ) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{M\Delta E}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{MZ\Gamma}}$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

δ) Η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ. (Μονάδες 6)



1867-Λύση



α) Το ΜΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΔΒΓ, οπότε ΕΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$

Το ΖΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΓΑΔ, άρα ΜΖ // ΑΔ και ΜΖ = $\frac{ΑΔ}{2}$

Επίσης, το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο οπότε ισχύει ότι ΒΓ = ΑΔ .

Οπότε προκύπτει ότι ΜΕ = ΜΖ .

β) Είναι ΜΖ // ΑΔ και ΑΔ $\perp$ ΑΓ άρα είναι και ΜΖ $\perp$ ΑΓ.

γ) Τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ έχουν:

- ΜΕ =ΜΖ, από το ερώτημα (α)
- ΜΔ = ΜΓ, διότι Μ μέσο του ΓΔ
- ΔΕ = $\frac{ΔΒ}{2} = \frac{ΑΓ}{2}$ = ΖΓ, διότι οι ΑΓ, ΒΔ είναι διαγώνιες του ισοσκελούς τραπεζίου.

Σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας Π – Π – Π, τα τρίγωνα είναι ίσα.

δ) Επειδή τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ είναι ίσα έχουν και

$Ο\hat{Δ}Γ = Ο\hat{Γ}Δ$ διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΜΕ, ΜΖ αντίστοιχα.

Άρα το τρίγωνο ΟΔΓ είναι ισοσκελές και ισχύει ΟΔ = ΟΓ. Τότε:

ΟΔ = ΟΓ $\Leftrightarrow$ ΟΕ + ΕΔ = ΟΖ + ΖΓ $\Leftrightarrow$ ΟΕ = ΟΖ

Επίσης ισχύει ΜΕ=ΜΖ, λόγω του ερωτήματος (α) . Άρα ΟΕ = ΟΖ και ΜΕ = ΜΖ οπότε η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ.

1868

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ και τα μέσα Δ, Ε και Μ των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση του ΜΔ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα ΔΖ=ΔΜ.

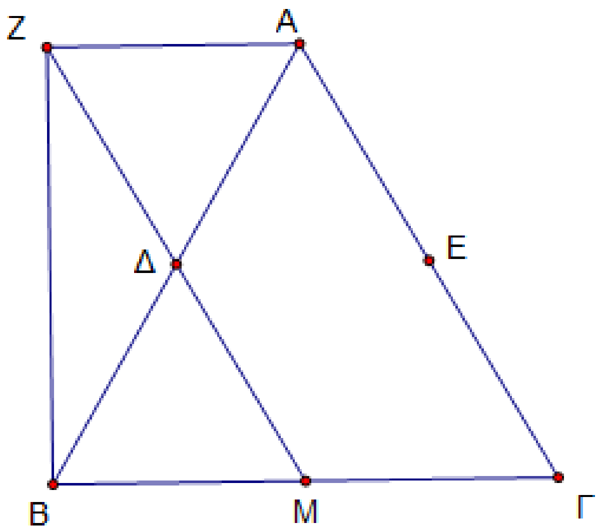
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{AZ\Delta}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{BM\Delta}}$ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

γ) Τα τμήματα ΖΕ και ΑΔ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται. (Μονάδες 7)

δ) Η ΒΖ είναι κάθετη στη ΖΑ. (Μονάδες 6)



1868-Λύση

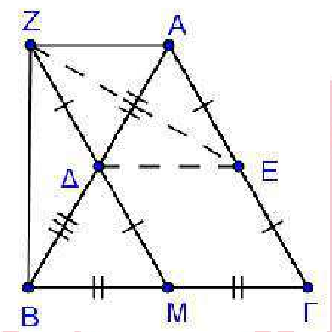
α) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΒΜΔ έχουν:

ΔΖ = ΔΜ, από υπόθεση

ΑΔ = ΔΒ, διότι Δ είναι μέσο του ΑΒ

$A\widehat{\Delta}Z = B\widehat{\Delta}M$, ως κατακορυφήν

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΒΜΔ είναι ίσα.



β) Το ΔΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα η ΔΜ // ΑΓ οπότε και ΖΜ // ΑΓ και ΔΜ = $\frac{\mathrm{ΑΓ}}{2}$. Όμως το Δ είναι μέσο του ΖΜ άρα ΔΜ = $\frac{\mathrm{ΖΜ}}{2}$. Συνεπώς ΖΜ = ΑΓ.

Τελικά οι απέναντι πλευρές ΖΜ και ΑΓ του τετραπλεύρου ΖΑΓΜ είναι παράλληλες και ίσες οπότε το τετράπλευρο ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Επειδή το ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ότι ΖΑ // ΜΓ δηλαδή

ΖΑ // ΒΓ και ΖΑ = ΜΓ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου οπότε:

ΔΕ //ΒΓ και ΔΕ = $\frac{\mathrm{ΒΓ}}{2}$. Όμως το Μ είναι μέσο του ΒΓ άρα ΔΕ = ΜΓ .

Οπότε ΖΑ // ΔΕ και ΖΑ = ΔΕ, δηλαδή το τετράπλευρο ΖΑΕΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ΖΑ και ΔΕ ίσες παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον ισχύει ότι: ΔΕ = $\frac{\mathrm{ΒΓ}}{2}$ και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο οπότε

ΒΓ = ΑΓ. Συνεπώς ΔΕ = $\frac{\mathrm{ΑΓ}}{2}$. Όμως Ε μέσο του ΑΓ άρα ΑΕ = $\frac{\mathrm{ΑΓ}}{2}$. Οπότε ΔΕ = ΑΕ

Επομένως το παραλληλόγραμμο ΑΕΔΖ έχει τις διαδοχικές του πλευρές ΔΕ και ΑΕ ίσες οπότε είναι ρόμβος.

1868-Λύση

Τα τμήματα ΖΕ, ΑΔ είναι διαγώνιοι του ρόμβου, οπότε τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.

δ) Είναι ΖΔ = ΔΜ = $\frac{\text{ΑΓ}}{2} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}$.

Στο τρίγωνο ΖΑΒ η ΖΔ είναι διάμεσος και ισούται με το μισό της πλευράς ΑΒ στην οποία αντιστοιχεί. Άρα το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΒ, οπότε η ΖΒ είναι κάθετη στη ΖΑ.

1869

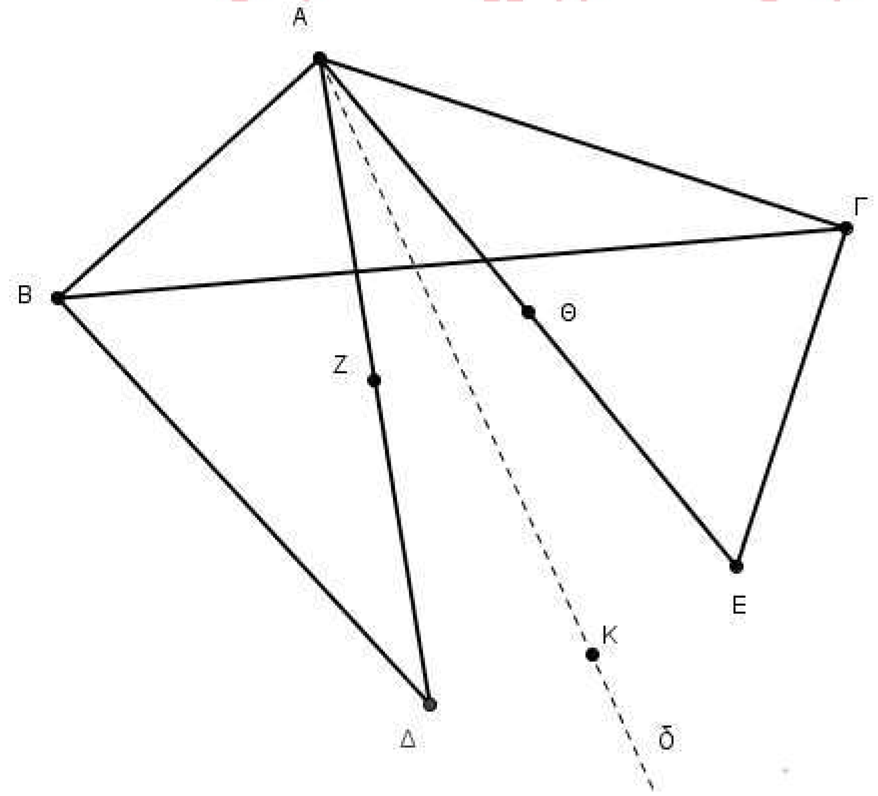
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με ΑΒ<ΑΓ και $\hat{\mathrm{A}} > 90^0$. Φέρνουμε τμήμα ΒΔ κάθετο στην ΑΒ και με $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{A\Gamma}$ και τμήμα ΓΕ κάθετο στην ΑΓ με $\mathrm{\Gamma E} = \mathrm{AB}$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Θ των ΑΔ και ΑΕ καθώς και τη διχοτόμο Αδ της γωνία $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE}$. (Μονάδες 9)

β) Αν Κ τυχαίο σημείο της διχοτόμου Αδ, να αποδείξετε ότι το Κ ισαπέχει από τα μέσα Ζ και Θ. (Μονάδες 9)

γ) Αν το Κ είναι σημείο της διχοτόμου Αδ τέτοιο ώστε ΚΖ=ΑΖ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΚΘ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)



1869-Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

ΓΕ = ΑΒ, από υπόθεση

ΒΔ = ΑΓ, από υπόθεση

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν δύο κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία οπότε είναι ίσα και ισχύει ότι ΑΔ = ΑΕ ως υποτείνουσες των ίσων ορθογωνίων τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ.

β) Τα τρίγωνα ΑΖΚ και ΑΘΚ έχουν:

ΑΖ = ΑΘ, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΔ και ΑΕ

ΑΚ κοινή πλευρά

$Z\widehat{A}K = K\widehat{A}\Theta$, διότι Αδ διχοτόμος της $\Delta\widehat{A}E$

Σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΖΚ και ΑΘΚ είναι ίσα, οπότε έχουν και ΚΖ = ΚΘ. Δηλαδή το Κ ισαπέχει από τα μέσα Ζ και Θ.

γ) Το Κ ανήκει στην Αδ οπότε από το β ερώτημα προκύπτει ΚΖ = ΚΘ (1).

Από υπόθεση είναι ΚΖ = ΑΖ (2). Επίσης ΑΖ = ΑΘ (3) ως μισά των ίσων πλευρών ΑΔ και ΑΕ. Από τις (1), (2), (3) βρίσκουμε ΚΖ = ΚΘ = ΑΖ = ΑΘ. Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΖΚΘ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

1870

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με ΑΒ=ΑΓ. Φέρνουμε τμήμα ΑΔ κάθετο στην ΑΒ και τμήμα ΑΕ κάθετο στην ΑΓ με ΑΔ=ΑΕ. Θεωρούμε τα μέσα Ζ, Η και Μ τα μέσα των ΔΒ, ΕΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta B}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{AE\Gamma}}$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

ii. Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{ZAH}}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

iii. Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΖΗ. (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta B}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{AE\Gamma}}$ έγραψε τα εξής:

« 1. *ΑΔ=ΑΕ από υπόθεση*

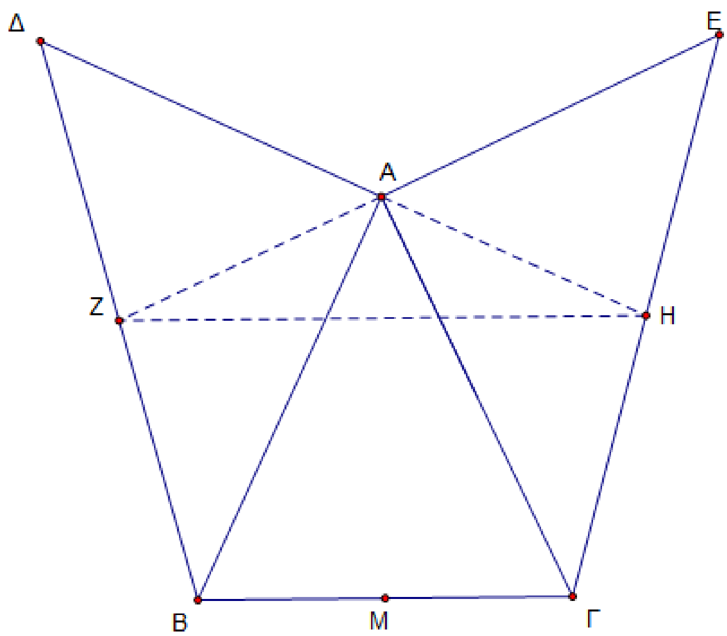
2. ΑΒ=ΑΓ πλευρές ισοσκελούς τριγώνου

3. $\mathrm{\Delta\hat{A}B} = \mathrm{E\hat{A}\Gamma}$ *ως κατακορυφήν*

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία ίση».

Ο καθηγητής είπε ότι αυτή η λύση περιέχει λάθος μπορείς να το εντοπίσεις;

(Μονάδες 5)



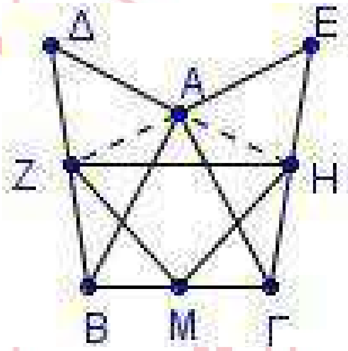
1870-Λύση

α) i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν:

ΑΔ = ΑΕ, από υπόθεση

ΑΒ = ΑΓ, από υπόθεση

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες οπότε είναι ίσα.



ii. Η ΑΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΔΑΒ, άρα ΑΖ = $\frac{ΒΔ}{2}$ (1).

Η ΑΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΕΑΓ, άρα ΑΗ = $\frac{ΓΕ}{2}$ (2).

Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα έχουν και τις υποτείνουσες ΔΒ και ΕΓ ίσες. Τότε, από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΑΖ = ΑΗ, οπότε το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.

iii. Τα τρίγωνα ΜΒΖ και ΓΗΜ έχουν:

ΜΒ = ΜΓ, διότι το Μ είναι μέσο του ΒΓ

ΒΖ = ΗΓ, ως μισά των ίσων πλευρών ΔΒ και ΕΓ

Ζ$\widehat{Β}$Μ = Μ$\widehat{Γ}$Η, διότι οι γωνίες Β και Γ της βάσης ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσες και Α$\widehat{Β}$Δ = Α$\widehat{Γ}$Ε επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΑΕ στα ίσα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ, οπότε $\widehat{Β}$ +Α$\widehat{Β}$Δ = $\widehat{Γ}$ + Μ$\widehat{Γ}$Η και συνεπώς Ζ$\widehat{Β}$Μ = Μ$\widehat{Γ}$Η.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π, τα τρίγωνα ΜΖΒ και ΓΗΜ είναι ίσα, οπότε έχουν και ΜΖ = ΜΗ.

Επειδή ΑΖ = ΑΗ το Α ανήκει στη μεσοκάθετη του ΖΗ και ΜΖ = ΜΗ οπότε το Μ ανήκει στη μεσοκάθετη του ΖΗ. Άρα η ΑΜ είναι μεσοκάθετη του ΖΗ.

1870-Λύση

β) Οι γωνίες $\Delta\widehat{A}B$ και $E\widehat{A}\Gamma$ δεν είναι κατακορυφήν σε κάθε περίπτωση επειδή οι πλευρές τους δεν είναι αντικείμενες ημιευθείες. Οι γωνίες $\Delta\widehat{A}B$ και $E\widehat{A}\Gamma$ είναι κατακορυφήν μόνο όταν η γωνία $\Gamma\widehat{A}B$ είναι ορθή.

1872

ΘΕΜΑ 4

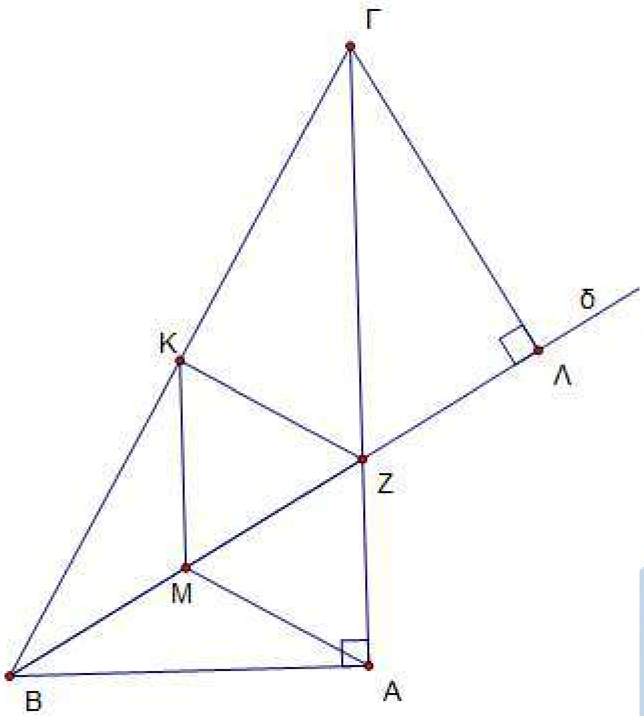
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με $\hat{A} = 90^o$ και $\hat{B} = 60^o$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Τα σημεία Μ και Κ είναι τα μέσα των ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΓΛ είναι κάθετο στη διχοτόμο Βδ να αποδείξετε:

α) Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{BZ\Gamma}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο ΑΜΚΖ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)

γ) $\Gamma Z = 2ZA$ (Μονάδες 7)

δ) $B\Lambda = A\Gamma$ (Μονάδες 6)



1872-Λύση

α) Επειδή η Βδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$, ισχύει ότι: $\Gamma\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = 30^{\circ}$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, βρίσκουμε:

$\widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} = 90^{\circ} \Leftrightarrow 60^{\circ} + \widehat{\Gamma} = 90^{\circ} \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 30^{\circ}$.

Επειδή $\Gamma\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \widehat{\Gamma} = 30^{\circ}$, το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές με ΓΖ = ΒΖ (1).

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{BZ}}{2} = \mathrm{MZ}$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΒΑΖ, βρίσκουμε:

$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} + \mathrm{B}\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{A} = 90^{\circ} \Leftrightarrow 30^{\circ} + \mathrm{B}\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{A} = 90^{\circ} \Leftrightarrow \mathrm{B}\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{A} = 60^{\circ}$.

Οπότε το τρίγωνο ΑΜΖ είναι ισόπλευρο και ΑΜ = ΜΖ = ΑΖ (2).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{\Gamma} = 30^{\circ}$, άρα $\mathrm{AB} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} = \mathrm{BK}$.

Από το α), το ΒΖΓ είναι ισοσκελές, άρα η ΚΖ ως διάμεσος της βάσης του, ΒΓ, είναι και ύψος του, επομένως $\mathrm{KZ} \perp \mathrm{B\Gamma}$.

Επειδή το Ζ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας Β οι αποστάσεις του ΚΖ και ΑΖ από τις πλευρές της γωνίας θα είναι ίσες, δηλαδή ΚΖ = ΑΖ (3).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΖ το ΚΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα $\mathrm{KM} = \frac{\mathrm{BZ}}{2} = \mathrm{MZ}$ (4).

Από τις (2), (3), (4) το τετράπλευρο ΑΜΚΖ έχει τις πλευρές του ίσες και συνεπώς είναι ρόμβος.

γ) Είναι: $\mathrm{AZ} = \mathrm{MZ} = \frac{\mathrm{BZ}}{2}$ και ΒΖ = ΖΓ.

Άρα $\mathrm{AZ} = \frac{\mathrm{Z\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \Gamma\mathrm{Z} = 2\mathrm{ZA}$.

δ) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΖΑ και ΓΖΛ έχουν:

ΓΖ = ΖΒ

$\Gamma\widehat{\mathrm{Z}}\Lambda = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{A}$, ως κατακορυφήν

Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση οπότε είναι ίσα, οπότε έχουν και ΖΑ = ΖΛ (5) διότι είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{Z}$ και $\mathrm{Z}\widehat{\Gamma}\Lambda$.

Από τις σχέσεις (1), (5) προκύπτει:

$\Gamma\mathrm{Z} + \mathrm{ZA} = \mathrm{ZB} + \mathrm{Z}\Lambda \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{B}\Lambda$.

1874

ΘΕΜΑ 4

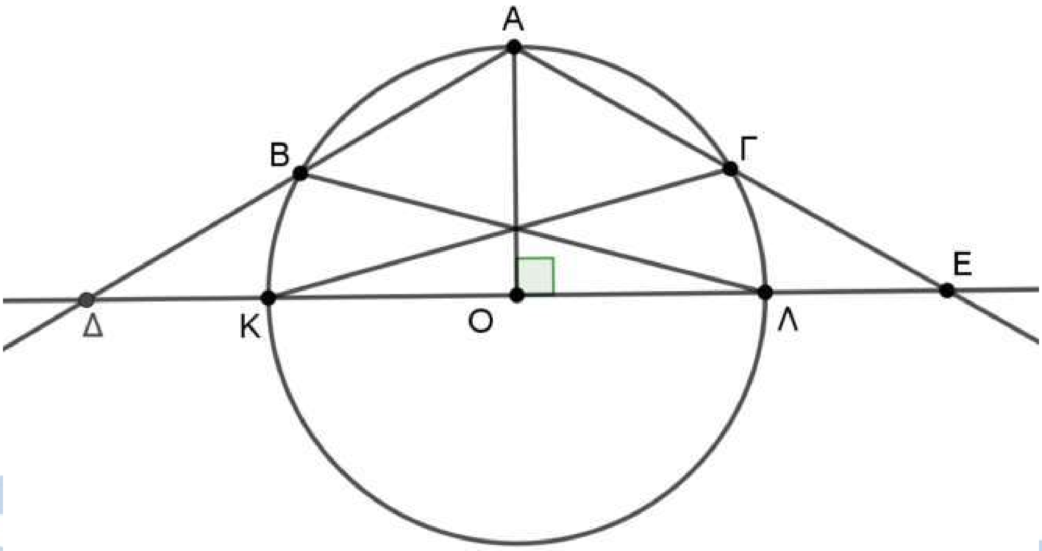
Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΚΛ. Έστω Α σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα ΟΑ να είναι κάθετη στην ΚΛ. Φέρουμε τις χορδές $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} = \rho$. Έστω Δ και Ε τα σημεία τομής των προεκτάσεων των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου ΚΛ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΒΑΓ είναι 120° . (Μονάδες 7)

β) Τα σημεία Β και Γ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα. (Μονάδες 9)

γ) $\mathrm{K\Gamma} = \mathrm{\Lambda B}$. (Μονάδες 9)

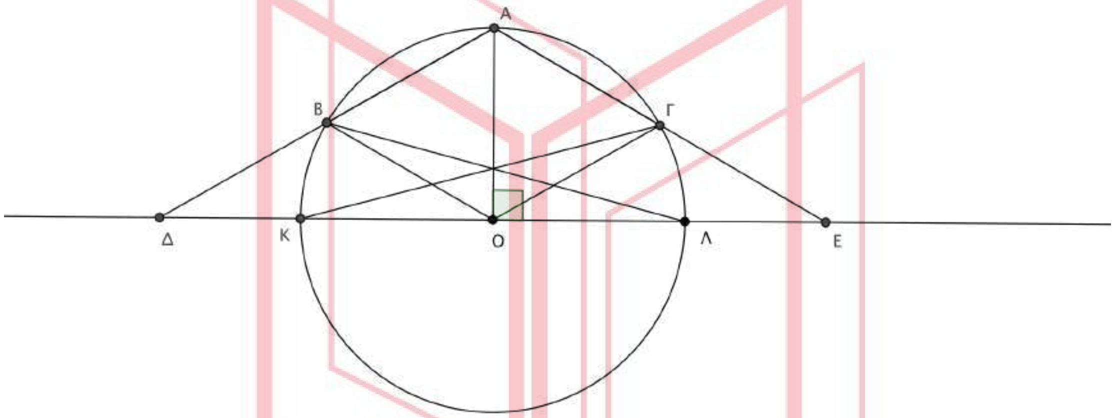


1874-Λύση

α) Επειδή ΟΑ = ΑΒ = ΟΒ = ρ, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο οπότε $\mathrm{B\widehat{A}O} = 60^o$.

Επίσης ΟΑ = ΟΓ = ΑΓ = ρ οπότε το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισόπλευρο οπότε $\mathrm{O\widehat{A}\Gamma} = 60^o$.

Άρα $\mathrm{B\widehat{A}\Gamma} = \mathrm{B\widehat{A}O} + \mathrm{O\widehat{A}\Gamma} = 120^o$.



β) Το τρίγωνο ΔΟΑ είναι ορθογώνιο και ισχύει ότι:

$$\mathrm{A\widehat{\Delta}O} + \mathrm{O\widehat{A}\Delta} = 90^o \Leftrightarrow \mathrm{A\widehat{\Delta}O} + 60^o = 90^o \Leftrightarrow \mathrm{A\widehat{\Delta}O} = 30^o.$$

Άρα η ΑΟ που είναι απέναντι κάθετη πλευρά από την $\mathrm{A\widehat{\Delta}O}$ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΑΔ, δηλαδή $\mathrm{AO} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{2}$. Όμως ΑΒ =ΑΟ άρα $\mathrm{AB} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{2}$.

Οπότε το σημείο Β είναι μέσο του ΑΔ. Όμοια δείχνουμε ότι το Γ είναι μέσο του ΑΕ.

γ) Είναι $\mathrm{A\widehat{O}\Gamma} = 60^o$ επειδή το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισόπλευρο και $\mathrm{B\widehat{O}A} = 60^o$ επειδή το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισόπλευρο. Οπότε:

$\mathrm{K\widehat{O}\Gamma} = \mathrm{K\widehat{O}A} + \mathrm{A\widehat{O}\Gamma} = 90^o + 60^o = 150^o$

$\mathrm{B\widehat{O}\Lambda} = \mathrm{B\widehat{O}A} + \mathrm{A\widehat{O}\Lambda} = 60^o + 90^o = 150^o$

Άρα οι επίκεντρες γωνίες $\mathrm{K\widehat{O}\Gamma}$ και $\mathrm{B\widehat{O}\Lambda}$ είναι ίσες. Συνεπώς τα τόξα ΚΓ και ΒΛ είναι ίσα . Οπότε και οι αντίστιχες χορδές ΚΓ και ΛΒ είναι ίσες, δηλαδή ΚΓ = ΛΒ.

1875

ΘΕΜΑ 4

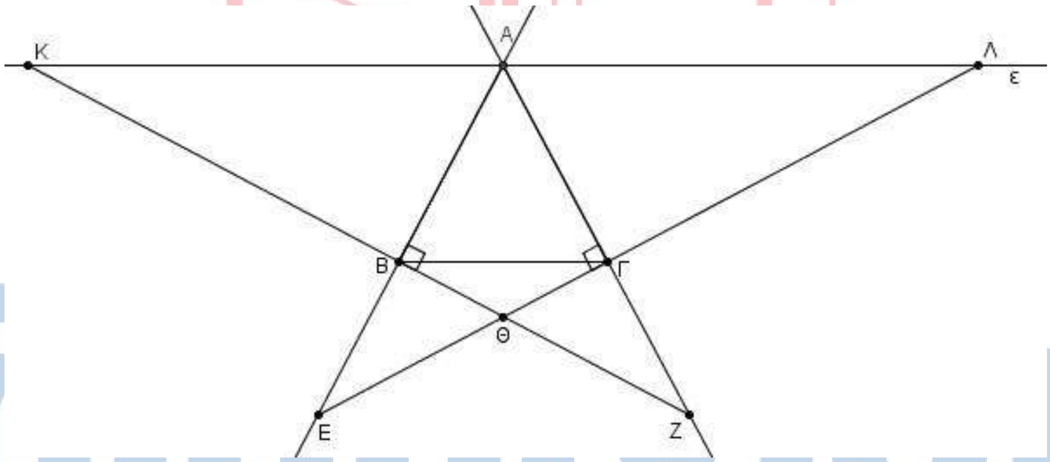
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α. Η κάθετη στην πλευρά ΑΒ στο Β τέμνει την ε στο Κ και την ευθεία ΑΓ στο Ζ. Η κάθετη στην πλευρά ΑΓ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία ΑΒ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι:

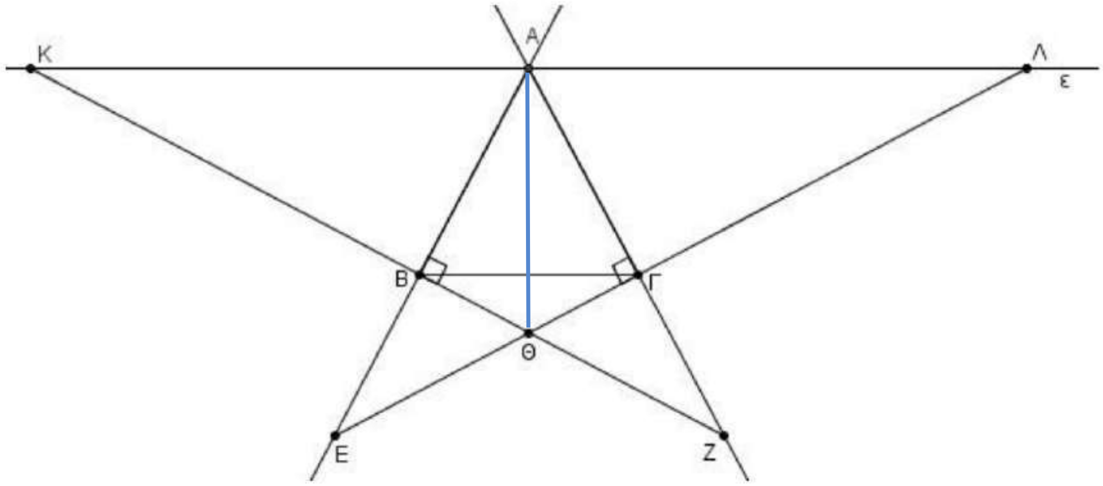
i. ΑΖ=ΑΕ (Μονάδες 8)

ii. ΑΚ=ΑΛ (Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η ΑΘ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Θ το σημείο τομής των ΚΖ και ΕΛ. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



1875-Λύση



α) i. Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΓΕ:

- Είναι ορθογώνια, γιατί ΑΒ ⊥ ΚΖ και ΑΓ ⊥ ΕΛ.
- Έχουν την $\widehat{\text{A}}$ κοινή γωνία.
- Έχουν ΑΒ = ΑΓ, γιατί το ΑΒΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, ως ορθογώνια που έχουν μία κάθετη πλευρά και μία οξεία γωνία, μία προς μία ίσες. Άρα ισχύει ΑΕ = ΑΖ (ίσες υποτείνουσες).

ii. Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΓΛ:

- Είναι ορθογώνια, γιατί ΑΒ ⊥ ΚΖ και ΑΓ ⊥ ΕΛ.
- ΑΒ = ΑΓ, γιατί το ΑΒΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο.
- Β$\widehat{\text{A}}$Κ = Γ$\widehat{\text{A}}$Λ, γιατί η (ε) είναι εξωτερική διχοτόμος της $\widehat{\text{A}}$, άρα Β$\widehat{\text{A}}$Κ = Γ$\widehat{\text{A}}$Λ = $\frac{\widehat{A_{\varepsilon\xi}}}{2}$.

Άρα τα τρίγωνα ΕΑΛ και ΚΑΖ είναι ίσα, ως ορθογώνια που έχουν μία κάθετη πλευρά και μία οξεία γωνία, μία προς μία ίσες. Οπότε και ΑΚ = ΑΛ (οι υποτείνουσές τους).

β) Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων, προκύπτει ότι $\widehat{\text{K}} = \widehat{\Lambda}$ (ως απέναντι γωνίες από τις ίσες κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ) οπότε το τρίγωνο ΘΚΛ είναι ισοσκελές με ΘΚ = ΘΛ. Επίσης, ΒΚ = ΓΛ.

Άρα ΘΚ – ΒΚ = ΘΛ – ΓΛ ή ΒΘ = ΘΓ.

Επειδή τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΒΘ, ΘΓ είναι οι αποστάσεις του Θ από τις πλευρές της γωνίας $\widehat{\text{A}}$, το Θ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{\text{A}}$. Επομένως η ΑΘ είναι διχοτόμος της $\widehat{\text{A}}$.

1876

ΘΕΜΑ 4

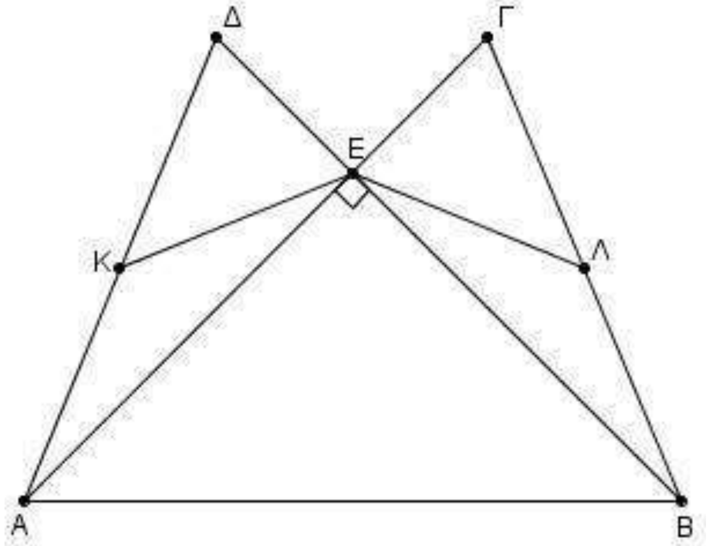
Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΑΒΔ (ΒΑ=ΒΔ), τέτοια ώστε οι πλευρές τους ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΔ=ΕΓ . (Μονάδες 7)

β) ΔΓ//ΑΒ . (Μονάδες 8)

γ) Το τρίγωνο ΕΚΛ είναι ισοσκελές και ΚΛ//ΑΒ. (Μονάδες 10)

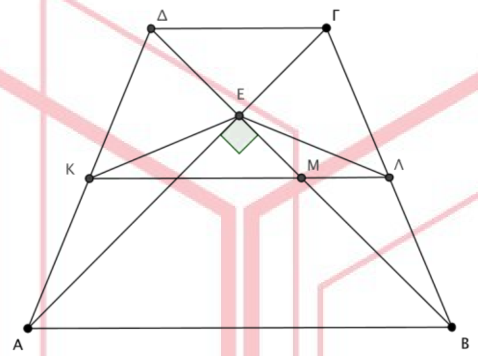


1876-Λύση

α) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΒΔ ισχύει ότι $E\widehat{A}B = E\widehat{B}A$ (1) επειδή περιέχονται στις ίσες πλευρές (ΑΒ = ΑΓ, ΒΑ = ΒΔ) των δύο τριγώνων και ΑΔ = ΒΓ (2).

Οπότε το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ισοσκελές λόγω της (1). Συνεπώς ΑΕ = ΕΒ.

Έχουμε ΒΔ = ΑΒ = ΑΓ. Επομένως ΕΔ = ΒΔ – ΕΒ = ΑΓ – ΑΕ = ΕΓ



β) Το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές αφού ΓΕ = ΔΕ, οπότε:

$$\Gamma\widehat{\Delta}E = 45^o$$

Το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές αφού ΕΑ = ΕΒ, οπότε:

$$A\widehat{B}\Delta = 45^o$$

Άρα οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ οι οποίες τέμνονται από την ΒΔ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους $\Gamma\widehat{\Delta}E$ και $A\widehat{B}\Delta$ ίσες, οπότε ΔΓ // ΑΒ.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΑ η ΕΚ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΑΔ, οπότε: $EK = \frac{A\Delta}{2}$

Όμοια, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ η ΕΛ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε: $E\Lambda = \frac{B\Gamma}{2}$

Όμως ΑΔ = ΒΓ, άρα ΕΚ = ΕΛ, οπότε το τρίγωνο ΕΚΛ είναι ισοσκελές.

Στο τρίγωνο ΑΔΒ φέρουμε από το μέσο Κ του ΑΔ ευθεία παράλληλη στην ΑΒ η οποία τέμνει την ΔΒ στο μέσο της Μ. Το τμήμα ΜΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΔΒ και ΒΓ του τριγώνου ΔΓΒ οπότε ΜΛ // ΔΓ, άρα και ΜΛ // ΑΒ και επειδή από το Μ διέρχεται μοναδική παράλληλη στην ΑΒ προκύπτει ότι τα σημεία Κ, Μ, Λ είναι συνευθειακά. Επομένως ΚΛ // ΑΒ.

1877

ΘΕΜΑ 4

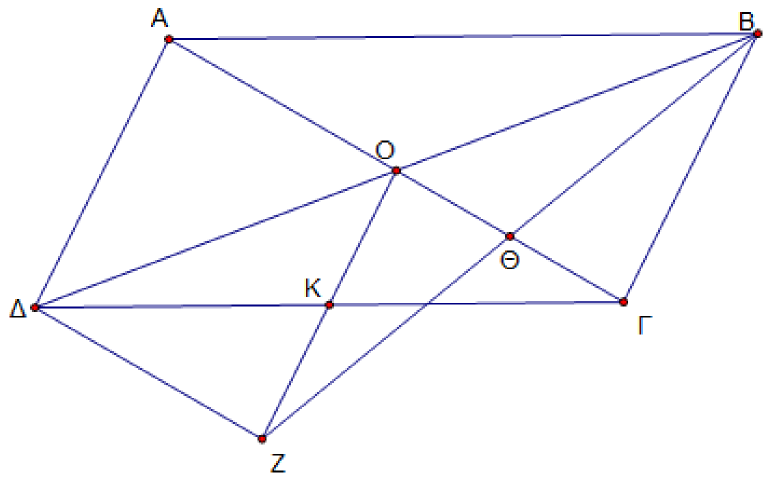
Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του και Κ το μέσο του ΓΔ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΟΚ κατά τμήμα $\mathrm{KZ} = \mathrm{KO}$. Η ΒΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Θ.

Να αποδείξετε ότι:

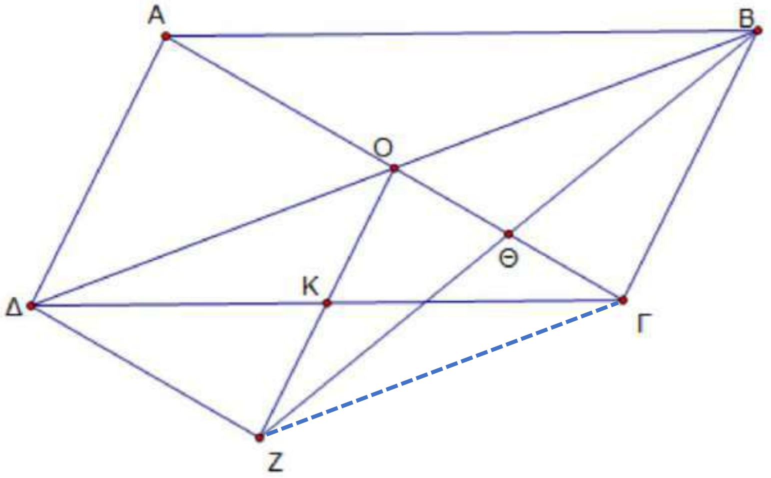
α) Τα τμήματα ΟΓ και ΒΖ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

β) $\mathrm{AO} = \Delta\mathrm{Z}$. (Μονάδες 9)

γ) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{AOB}}$ και $\overset{\Delta}{\Delta\mathrm{Z}\Gamma}$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)



1877-Λύση



α) Επειδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του, ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται οπότε ισχύει ΟΒ = ΟΔ και ΟΑ = ΟΓ.

Επίσης, το Κ είναι μέσο του ΔΓ οπότε ΔΚ = ΚΓ. Ακόμα ΚΖ = ΚΟ από υπόθεση. Δηλαδή οι διαγώνιοι ΟΖ και ΔΓ του τετραπλεύρου ΟΔΖΓ διχοτομούνται, άρα το ΟΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμο.

Τότε ΖΓ = ΟΔ και ΖΓ // ΟΔ, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Επειδή ΟΒ = ΟΔ, θα είναι ΖΓ = ΟΒ. Επίσης ΖΓ // ΟΒ.

Επομένως το τετράπλευρο ΟΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει δύο πλευρές παράλληλες και ίσες. Επειδή τα τμήματα ΟΓ και ΒΖ είναι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΟΓΖ, διχοτομούνται.

β) Από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΟΑ = ΟΓ. Από το παραλληλόγραμμο ΟΔΖΓ έχουμε ΔΖ = ΟΓ (απέναντι πλευρές). Άρα ΑΟ = ΔΖ.

γ) Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΔΖΓ έχουν:

- ΑΟ = ΔΖ, από το ερώτημα β),
- ΑΒ = ΔΓ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ,
- ΟΒ = ΖΓ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΟΒΓΖ.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Π – Π τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΔΖΓ είναι ίσα.

1879

ΘΕΜΑ 4

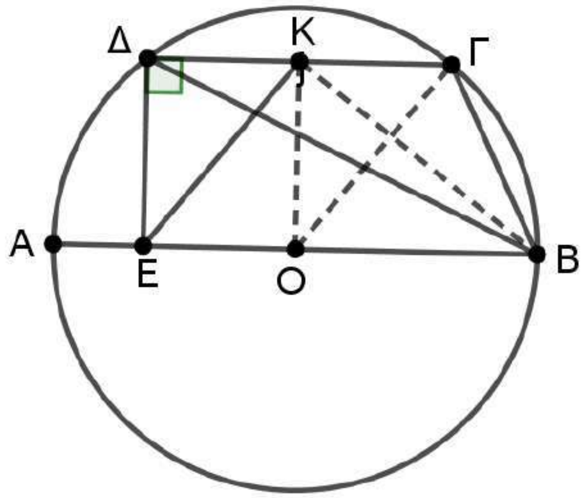
Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΑΒ. Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta // \mathrm{AB}$ με Κ το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΔΓ.

Να αποδείξετε ότι:

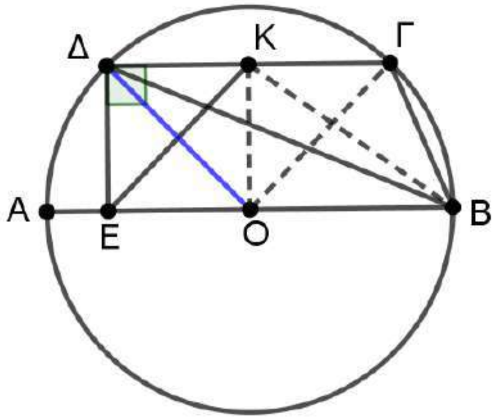
α) Το τετράπλευρο ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{K} = \dfrac{\Delta\hat{\mathrm{O}}\Gamma}{2}$. (Μονάδες 12)

γ) $\mathrm{KE} < \mathrm{KB}$. (Μονάδες 5)



1879-Λύση



α) Επειδή ΔΕ ⊥ ΓΔ και ΓΔ // ΑΒ είναι και ΔΕ ⊥ ΑΒ.

Το ΟΓΔ είναι ισοσκελές, καθώς οι ΟΔ και ΟΓ είναι ακτίνες του κύκλου. Το Κ είναι μέσο της χορδής ΔΓ. Συνεπώς η ΟΚ είναι διάμεσος της βάσης ΓΔ επομένως είναι και ύψος του τριγώνου, δηλαδή είναι ΟΚ ⊥ ΓΔ.

Τελικά, το τετράπλευρο ΔΕΟΚ έχει τρείς γωνίες ορθές, άρα είναι ορθογώνιο. Επομένως ΔΚ = ΟΕ.

Όμως, από υπόθεση, ΔΚ = ΚΓ, άρα ΟΕ = ΚΓ.

Επιπλέον ΟΕ // ΚΓ, οπότε το ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΕΚ και ΔΟΚ:

- Είναι ορθογώνια, με $\mathrm{E}\widehat{\Delta}\mathrm{K}$, $\Delta\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{O}$ ορθές.
- Έχουν ΔΚ κοινή πλευρά και
- ΔΕ = ΟΚ, ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΔΕΟΚ.

Άρα τα τρίγωνα ΔΕΚ και ΔΟΚ είναι ίσα, ως ορθογώνια με δύο κάθετες πλευρές ίσες, μία προς μία και άρα έχουν $\Delta\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{K} = \Delta\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{K}$ (1), ως απέναντι γωνίες της κοινής πλευράς τους, ΔΚ.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΓΔ η ΟΚ είναι διχοτόμος της $\Delta\widehat{\mathrm{O}}\Gamma$ (εφόσον είναι και διάμεσος της ΓΔ).

Άρα $\Delta\widehat{\mathrm{O}}\Gamma = 2\Delta\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{K}$. Από (1) έχουμε $\Delta\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{K} = \Delta\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{K}$, επομένως:

$\Delta\widehat{\mathrm{O}}\Gamma = 2\Delta\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{K} \Leftrightarrow \Delta\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{K} = \frac{\Delta\widehat{\mathrm{O}}\Gamma}{2}$.

γ) Είναι ΚΕ = ΟΔ, ως διαγώνιοι του ορθογωνίου ΔΕΟΚ και ΟΔ = ΟΒ, ως ακτίνες του κύκλου. Άρα ΚΕ = ΟΒ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΚ, η ΚΒ είναι υποτείνουσά του, άρα ισχύει ΟΒ < ΚΒ , άρα ΚΕ < ΚΒ.

1880

ΘΕΜΑ 4

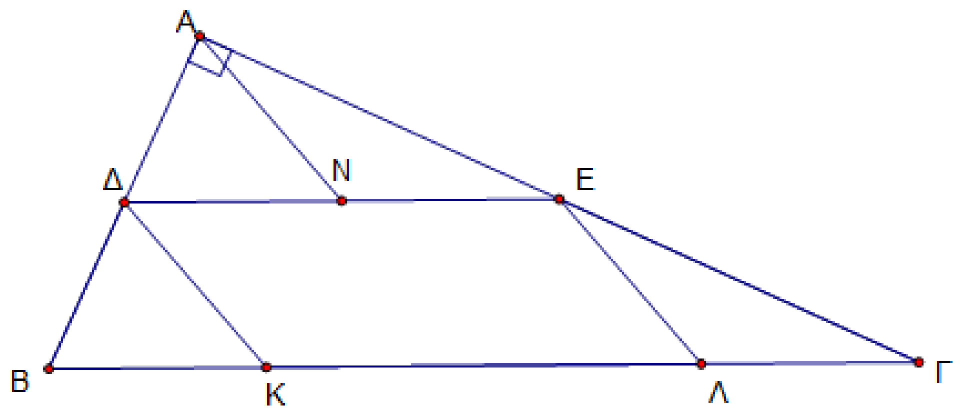
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με $\hat{\mathrm{A}}=90^{\circ}$ και Δ, Ε και Ν τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΔΕ αντίστοιχα. Στο τμήμα ΒΓ θεωρούμε σημεία Κ και Λ ώστε $\Delta\mathrm{K}=\mathrm{KB}$ και $\mathrm{E\Lambda}=\Lambda\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{\mathrm{K}}\Lambda=2\hat{\mathrm{B}}$ και $\mathrm{E}\hat{\Lambda}\mathrm{K}=2\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) $\Delta\mathrm{E}=2\Delta\mathrm{K}$ (Μονάδες 6)



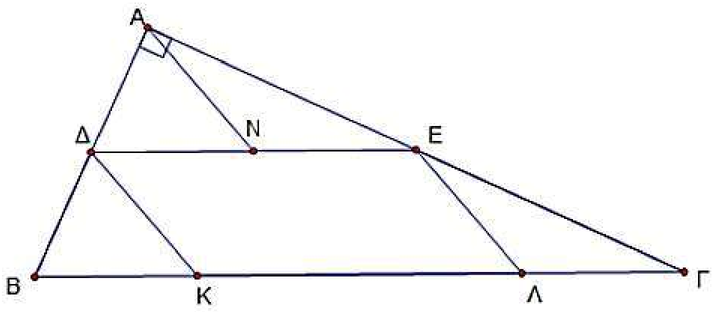
1880-Λύση

α) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΒ είναι ΔΚ = ΚΒ οπότε $B\hat{\Delta}K = \hat{B}$.

Η γωνία $\Delta\hat{K}\Lambda$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔΒΚ, άρα: $\Delta\hat{K}\Lambda = B\hat{\Delta}K + \hat{B} = 2\hat{B}$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΕΛΓ είναι ΕΛ = ΛΓ οπότε $\Lambda\hat{E}\Gamma = \hat{\Gamma}$.

Η γωνία $E\hat{\Lambda}K$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΛΓ, άρα: $E\hat{\Lambda}K = \Lambda\hat{E}\Gamma + \hat{\Gamma} = 2\hat{\Gamma}$



β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι: $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o$

Από το ερώτημα (α) ισχύει ότι: $\Delta\hat{K}\Lambda + E\hat{\Lambda}K = 2\hat{B} + 2\hat{\Gamma} = 2(\hat{B} + \hat{\Gamma}) = 2 \cdot 90^o = 180^o$

Επειδή οι γωνίες $\Delta\hat{K}\Lambda$, $E\hat{\Lambda}K$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ΔΚ, ΕΛ που τέμνονται από την ΒΓ και είναι παραπληρωματικές, προκύπτει ότι ΔΚ // ΕΛ.

Επειδή το ΔΕ ενώνει μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει ότι

ΔΕ // ΒΓ $\Leftrightarrow$ ΔΕ // ΚΛ και $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$

Στο τετράπλευρο ΔΕΛΚ οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Επειδή το ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο και $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$ θα είναι και $K\Lambda = \frac{B\Gamma}{2}$. Οπότε, και για το υπόλοιπο μέρος της ΒΓ θα είναι: $BK + \Lambda\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$.

Αφού ΒΚ = ΚΔ = ΛΕ = ΛΓ (δηλαδή ΒΚ=ΛΓ) θα έχουμε $BK = \Lambda\Gamma = \frac{B\Gamma}{4}$.

Άρα, τελικά είναι $\Delta K = \frac{B\Gamma}{4}$ και αφού $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$, θα είναι ΔΕ=2ΔΚ.

1881

ΘΕΜΑ 4

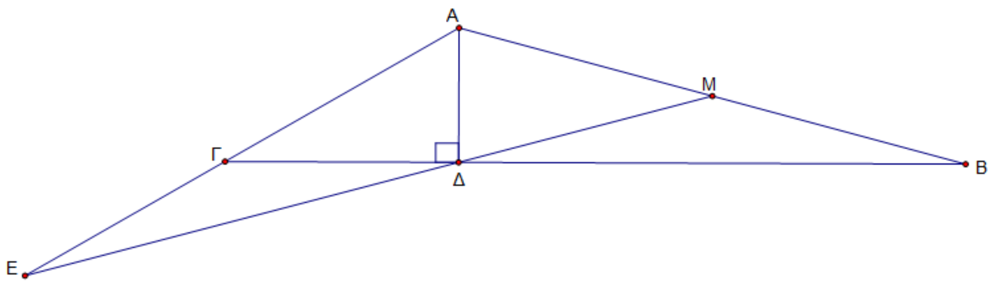
Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ($AB > A\Gamma$), ΑΔ το ύψος του και Μ το μέσο του ΑΒ. Η προέκταση της ΜΔ τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ε ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = \hat{E}$. (Μονάδες 8)

β) $\hat{\Gamma} = 2\hat{B} = A\hat{M}\Delta$. (Μονάδες 10)

γ) ΓΕ<ΑΓ. (Μονάδες 7)



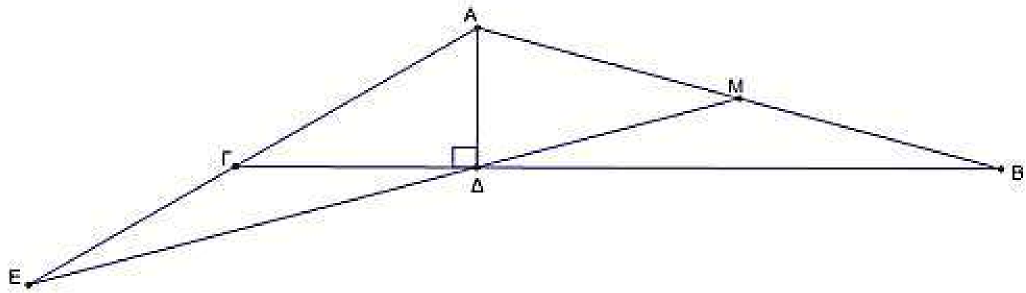
1881-Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ η ΔΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του άρα ΔΜ = $\frac{AB}{2}$ = ΜΒ

Συνεπώς το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές και ισχύει $M\hat{\Delta}B = \hat{B}$ (1)

Είναι ΓΔ = ΓΕ, οπότε το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές. Άρα $\hat{E} = \Gamma\hat{\Delta}E$ (2)

Επειδή $M\hat{\Delta}B = \Gamma\hat{\Delta}E$ ως κατακορυφήν, από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\hat{B} = \hat{E}$.



β) Η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΓΕΔ, οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{E} + \Gamma\hat{\Delta}E = \hat{E} + \hat{E} = 2\hat{E} = 2\hat{B}$ (3)

Η γωνία $A\hat{M}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΜΔΒ, άρα $A\hat{M}\Delta = M\hat{\Delta}B + \hat{B} = \hat{B} + \hat{B} = 2\hat{B}$ (4)

Από τις (3), (4) προκύπτει: $\hat{\Gamma} = 2\hat{B} = A\hat{M}\Delta$.

γ) Η ΑΓ είναι υποτείνουσα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, άρα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του. Άρα ΑΓ > ΓΔ και επειδή ΓΔ = ΓΕ θα είναι ΑΓ > ΓΕ.

1882

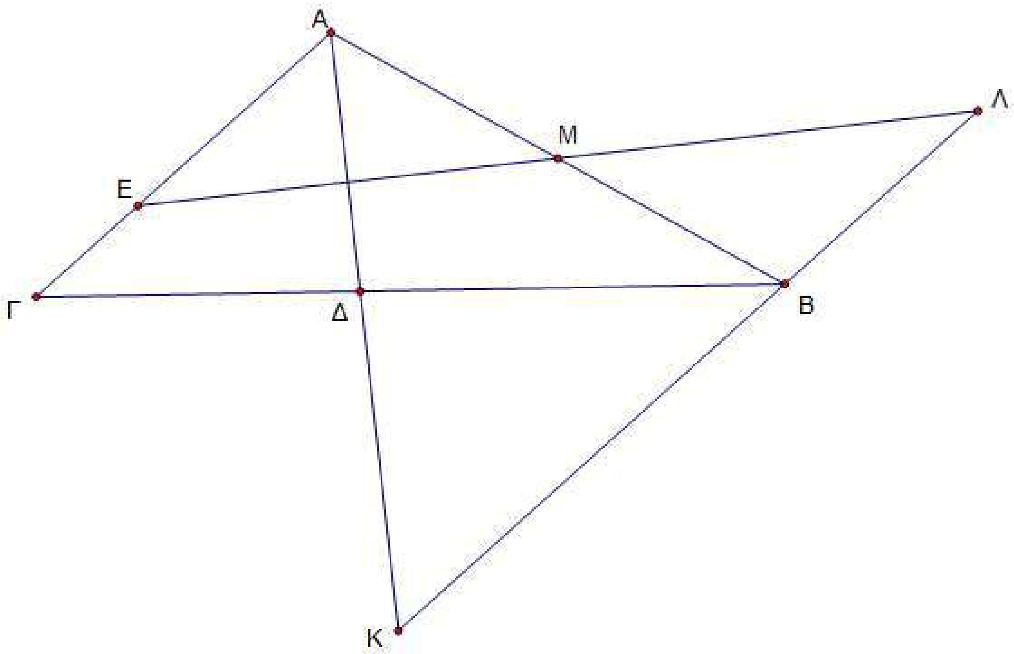
ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$, ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α και Μ το μέσον της ΑΒ. Η κάθετη από το Μ στην ΑΔ τέμνει το ΑΓ στο Ε. Η παράλληλη από το Β στο ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Κ και την προέκταση της ΕΜ στο Λ

Να αποδείξετε ότι:

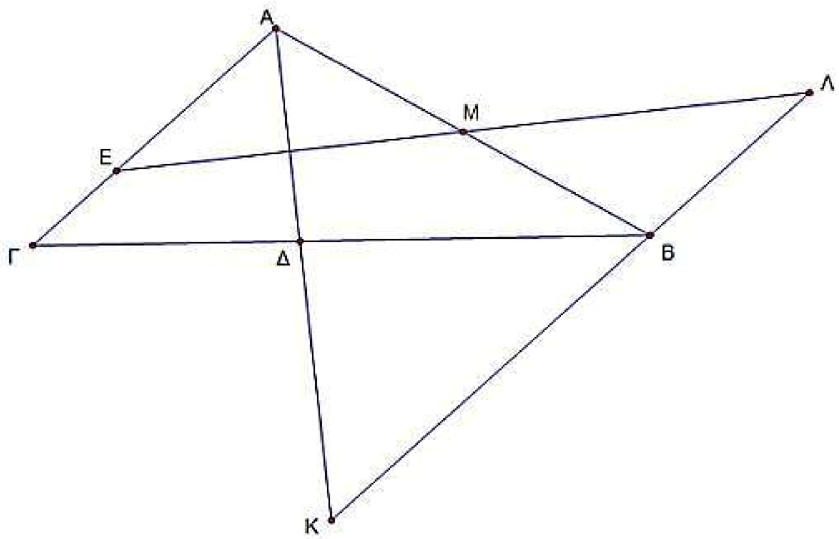
α) Τα τρίγωνα ΑΕΜ, ΜΒΛ και ΑΒΚ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



1882-Λύση

α) Η ΑΔ είναι ο φορέας του ύψους και της διχοτόμου του τριγώνου ΑΕΜ, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ΑΕ=ΑΜ και $A\hat{E}M = A\widehat{M}E$ (1).



Επίσης $A\hat{E}M = M\widehat{\Lambda}B$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΓ, ΛΚ που τέμνονται από την ΕΛ και $A\widehat{M}E = B\widehat{M}\Lambda$ (3) ως κατακορυφήν. Από (1), (2), (3) βρίσκουμε $B\widehat{M}\Lambda = M\widehat{\Lambda}B$, οπότε το τρίγωνο ΒΜΛ είναι ισοσκελές.

Είναι $\widehat{K} = \Gamma\widehat{A}\Delta$ (4) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΓ, ΚΛ που τέμνονται από την ΑΚ και $\Gamma\widehat{A}\Delta = \Delta\widehat{A}B$ (5) γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$. Από (4), (5) βρίσκουμε $\Delta\widehat{A}B = \widehat{K}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές.

β) Από τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΕΜ και ΜΒΛ και επειδή το Μ είναι μέσο του Β, έχουμε ΑΕ=ΑΜ=ΜΒ=ΒΛ. Οπότε ΑΕ=//ΒΛ, άρα το ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο.

1883

ΘΕΜΑ 4

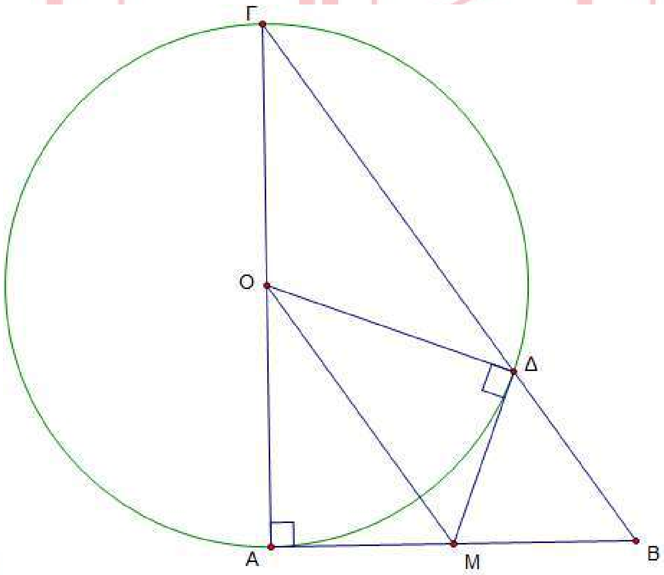
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ ($\hat{A}=90^\circ$). Με διάμετρο την πλευρά του ΑΓ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα ΒΓ στο Δ. Από το Δ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την ΑΒ στο Μ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\hat{A}\Delta=\hat{B}$ (Μονάδες 9)

β) $M\hat{\Delta}B=90^\circ-\hat{\Gamma}$ και το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Το Μ είναι το μέσο του ΑΒ. (Μονάδες 7)

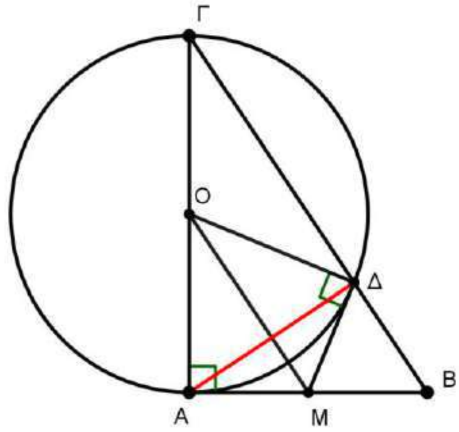


1883-Λύση

α) Η γωνία ΓΔΑ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο και είναι ορθή. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ βρίσκουμε: $\Gamma\widehat{A}\Delta + \widehat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \Gamma\widehat{A}\Delta = 90^o - \widehat{\Gamma}$ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \widehat{B} = 90^o - \widehat{\Gamma}$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει: $\Gamma\widehat{A}\Delta = \widehat{B}$



β) Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές διότι ΟΓ = ΟΔ = ακτίνα και ισχύει ότι: $\widehat{\Gamma} = O\widehat{\Delta}\Gamma$. Τότε $M\widehat{\Delta}B = 180^o - M\widehat{\Delta}O - O\widehat{\Delta}\Gamma = 180^o - 90^o - \widehat{\Gamma}$ δηλαδή τελικά $M\widehat{\Delta}B = 90^o - \widehat{\Gamma}$. Και λόγω της (2) θα είναι $M\widehat{\Delta}B = \widehat{B}$. Άρα το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές με ΜΔ = ΜΒ (3).

γ) Επειδή $MA \perp OA$ και $M\Delta \perp O\Delta$, τα ΜΑ, ΜΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα, οπότε ΜΑ = ΜΔ (4).

Από τις (3), (4) βρίσκουμε ότι ΜΑ = ΜΒ, δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

1884

ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ($AB = A\Gamma$) και ΑΔ διάμεσος. Στο τμήμα ΑΔ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα ΚΖ και ΚΕ κάθετα στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΒΓ και ΚΖΕ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής στην πορεία της λύσης του έδωσε το εξής επιχείρημα:

«*Το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου* $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ *και μεσοκάθετος του ΒΓ. Οπότε και το τρίγωνο* $\overset{\Delta}{BK\Gamma}$ *είναι ισοσκελές.*

Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ABK}$, $\overset{\Delta}{A\Gamma K}$ *έχουν*

1. $BK = K\Gamma$

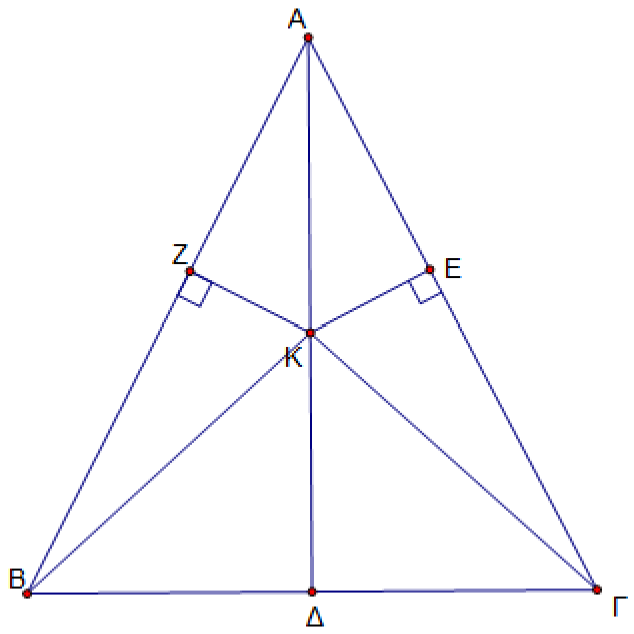
2. $B\hat{A}K = \Gamma\hat{A}K$ *επειδή ΑΚ διχοτόμος της* $\hat{A}$

3. $A\hat{B}K = A\hat{\Gamma}K$ *ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.*

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.»

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία –Πλευρά- Γωνία διατηρώντας τις πλευρές ΒΚ και ΚΓ. (Μονάδες 7)

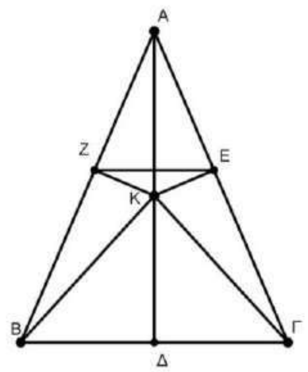
1884



1884-Λύση

α) Η ΑΔ είναι διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, άρα είναι και διχοτόμος και ύψος. Επειδή το Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ θα ισαπέχει από τα άκρα του, δηλαδή ΚΒ=ΚΓ, οπότε το τρίγωνο ΚΒΓ είναι ισοσκελές.

Επειδή το Κ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{A}$, ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας. Άρα ΖΚ = ΚΕ, οπότε το τρίγωνο ΖΚΕ είναι ισοσκελές.



β) Τα τρίγωνα ΒΖΚ και ΚΕΓ είναι ορθογώνια και έχουν:

- ΖΚ = ΚΕ, από το ερώτημα (α)
- ΚΒ = ΚΓ, από το ερώτημα (α)

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΖΚ και ΚΕΓ έχουν τις υποτείνουσες και από μία κάθετη πλευρά ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Οπότε ισχύει ΒΖ = ΓΕ.

Αφού ΑΒ = ΑΓ και ΒΖ = ΓΕ θα είναι και ΑΖ = ΑΕ. Επομένως το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές και έχει $A\hat{Z}E = A\hat{E}Z$ (1). Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΖΕ, έχουμε: $A\hat{Z}E = A\hat{E}Z = \frac{1}{2}(180^o - \widehat{A})$

Ομοίως, από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε: $\widehat{B} = \frac{1}{2}(180^o - \widehat{A})$.

Οπότε $A\hat{Z}E = \widehat{B}$ και επειδή οι γωνίες αυτές είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΖΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ, συμπεραίνουμε ότι ΖΕ // ΒΓ. Και αφού οι ΒΖ και ΓΕ δεν είναι παράλληλες, το ΒΖΕΓ είναι τραπέζιο.

Επιπλέον ισχύει ΒΖ = ΓΕ άρα το ΒΖΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Η απάντηση είναι ελλιπής διότι ο μαθητής έλαβε υπόψη του γωνίες που δεν είναι προσκείμενες σε κάθε πλευρά. Έπρεπε να αναφέρει ότι αφού τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, θα έχουν και τις τρίτες τους γωνίες ίσες, δηλαδή $A\widehat{K}B = A\widehat{K}\Gamma$. Οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα με το κριτήριο ΓΠΓ.

1885

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) οι γωνίες ΗΔΖ και ΗΕΖ είναι ίσες . (Μονάδες 8)

γ) οι γωνίες ΕΔΖ και ΕΗΖ είναι ίσες. (Μονάδες 9)

1885-Λύση

α) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου

ΑΒΓ, οπότε ισχύει ότι: ΔΕ // ΒΓ άρα και ΔΕ // ΗΖ.

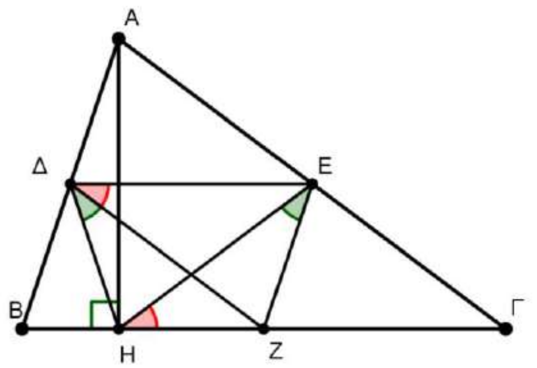
Το ΕΖ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα ισχύει ότι:

ΕΖ // ΑΒ και ΕΖ = $\frac{AB}{2}$ (1).

Αφού ΕΖ // ΑΒ και η ΔΗ τέμνει την ΑΒ, θα τέμνει και την παράλληλή της ΕΖ. Οπότε οι το τετράπλευρο ΔΕΗΖ έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες, άρα είναι τραπέζιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΒ η ΗΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα ΗΔ = $\frac{AB}{2}$ (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι ΕΖ = ΗΔ (3). Επομένως το τραπέζιο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές.



β) Τα τρίγωνα ΗΔΖ και ΗΕΖ έχουν:

- ΕΖ = ΗΔ, λόγω της (3)
- ΗΖ κοινή πλευρά
- Δ$\hat{H}$Ζ = Ε$\hat{Z}$Η, ως γωνίες βάσης του ισοσκελούς τραπεζίου

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ– Π, τα τρίγωνα ΗΔΖ και ΗΕΖ είναι ίσα, άρα και Η$\widehat{\Delta}$Ζ = Η$\hat{E}$Ζ.

γ) Είναι Ε$\widehat{\Delta}$Ζ = Δ$\hat{Z}$Η (4) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΔΖ.

Επίσης, Δ$\hat{Z}$Η = Ε$\widehat{H}Z$ (5) από την ισότητα των τριγώνων ΔΗΖ και ΕΗΖ.

Από (4), (5) προκύπτει ότι Ε$\widehat{\Delta}$Ζ = Ε$\widehat{H}$Ζ.

1886

ΘΕΜΑ 4

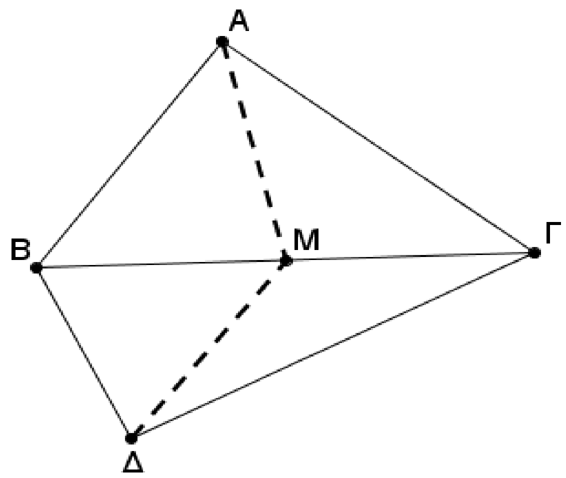
Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) και ΔΒΓ ($\hat{\Delta} = 90^o$) (όπου Α και Δ εκατέρωθεν της ΒΓ) και το μέσο Μ της ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) $A\hat{M}\Delta = 2A\hat{\Gamma}\Delta$ (Μονάδες 9)

γ) $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$ (Μονάδες 7)



1886-Λύση

α) Το τμήμα ΑΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή ΑΜ $= \frac{B\Gamma}{2}$.

Όμοια, το τμήμα ΔΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΒΔΓ, που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή ΔΜ $= \frac{B\Gamma}{2}$.

Άρα ΑΜ = ΔΜ, οπότε το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές.

β) Επειδή ΑΜ $= \frac{B\Gamma}{2}$ = ΜΓ το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές οπότε ισχύει ότι:

$M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$ (1)

Επειδή ΔΜ $= \frac{B\Gamma}{2}$ = ΜΓ το τρίγωνο ΔΜΓ είναι ισοσκελές οπότε ισχύει ότι:

$M\hat{\Delta}\Gamma = M\hat{\Gamma}\Delta$ (2)

Η γωνία $A\hat{M}B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΜΓ άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών, οπότε σε συνδυασμό με τη σχέση (1) βρίσκουμε:

$A\hat{M}B = M\hat{A}\Gamma + M\hat{\Gamma}A \Leftrightarrow A\hat{M}B = 2M\hat{\Gamma}A$ (3)

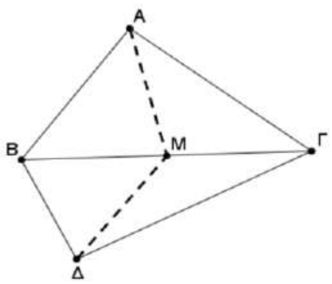
Η γωνία $B\hat{M}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΜΔΓ, άρα χρησιμοποιώντας τη σχέση (2) παίρνουμε

$B\hat{M}\Delta = M\hat{\Delta}\Gamma + M\hat{\Gamma}\Delta \Leftrightarrow B\hat{M}\Delta = 2M\hat{\Gamma}\Delta$ (4)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (3), (4) και βρίσκουμε:

$A\hat{M}B + B\hat{M}\Delta = 2M\hat{\Gamma}A + 2M\hat{\Gamma}\Delta \Leftrightarrow A\hat{M}\Delta = 2A\hat{\Gamma}\Delta$

γ) Είναι $B\hat{A}\Gamma + B\hat{\Delta}\Gamma = 90^o + 90^o = 180^o$, δηλαδή δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματικές άρα το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο. Επομένως η πλευρά του ΓΔ φαίνεται από τις κορυφές Α και Β υπό ίσες γωνίες, δηλαδή $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$.



1887

ΘΕΜΑ 4

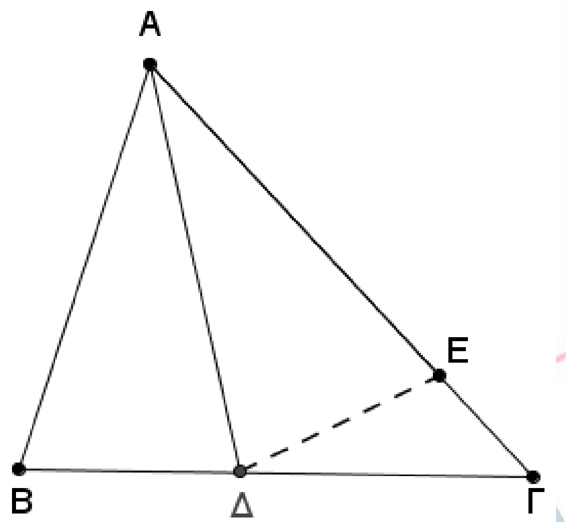
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΑΕ = ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

β) η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΕ. (Μονάδες 9)

γ) αν το ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ΑΔ στο Η τότε η ευθεία ΕΗ είναι κάθετη στην ΑΒ. (Μονάδες 9)

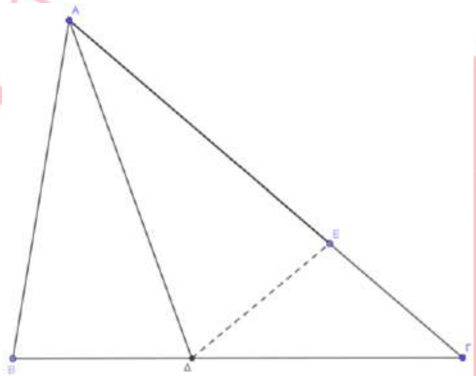


1887-Λύση

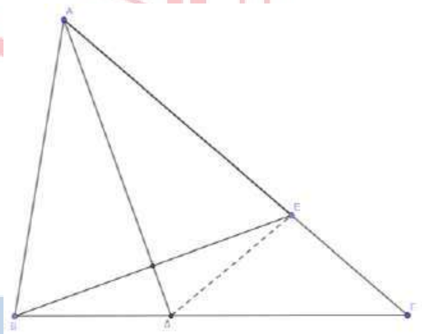
α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ έχουν:

- ΑΔ κοινή πλευρά
- ΑΕ = ΑΒ, από υπόθεση
- $B\widehat{A}\Delta = \Delta\widehat{A}E$, διότι ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$

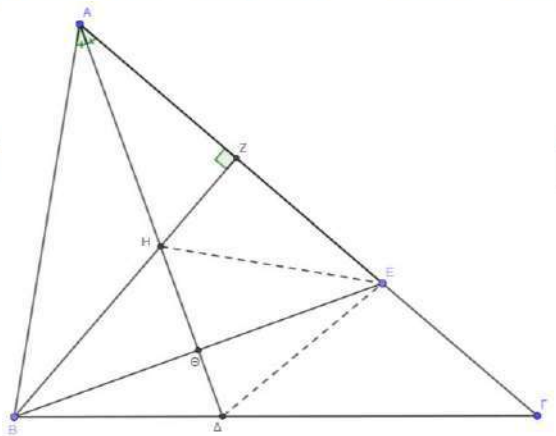
Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα.



β) Επειδή ΑΒ = ΑΕ (από υπόθεση) και ΔΒ = ΔΕ (από τα ίσα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ) τα Α, Δ βρίσκονται στη μεσοκάθετο του ΒΕ. Άρα η ΑΔ είναι μεσοκάθετος του ΒΕ.



γ) Στο τρίγωνο ΑΒΕ τα ΑΘ, ΒΗ είναι ύψη που τέμνονται στο Η, άρα το σημείο Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου. Συνεπώς το ΕΗ είναι το τρίτο ύψος και ισχύει $EH \perp AB$.



1888

ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε $\Gamma\Delta \perp \mathrm{B}\Gamma$ με ΓΔ=ΑΒ (Α,Δ εκατέρωθεν της ΒΓ).

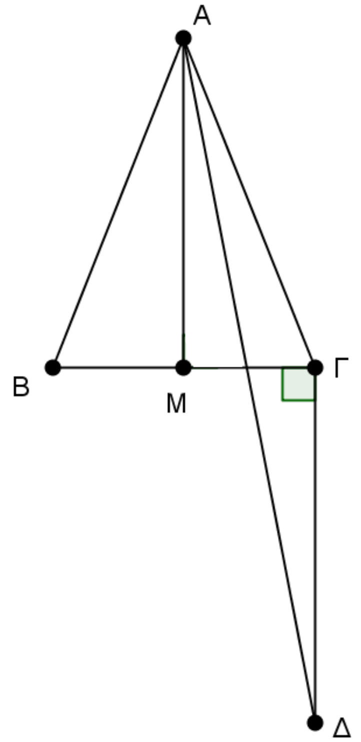
Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΜ // ΓΔ (Μονάδες 6)

β) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$. (Μονάδες 7)

γ) $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 45^o - \dfrac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$ (Μονάδες 7)

δ) ΑΔ < 2 ΑΒ (Μονάδες 5)



1888-Λύση

α) Η ΑΜ διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στη βάση του, οπότε θα είναι και ύψος και διχοτόμος του τριγώνου.

Επειδή ΑΜ⊥ΒΓ και ΓΔ⊥ΒΓ προκύπτει ότι ΑΜ//ΓΔ.

β) Ισχύει ότι ΑΒ = ΓΔ και ΑΒ = ΑΓ οπότε ΑΓ = ΓΔ. Άρα το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ, οπότε $\Gamma\widehat{A}\Delta = \widehat{\Delta}$.

Ισχύει επίσης ότι $M\widehat{A}\Delta = \widehat{\Delta}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΜ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ. Άρα $M\widehat{A}\Delta = \Gamma\widehat{A}\Delta$, επομένως η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\widehat{A}\Gamma$.

γ) Ισχύει ότι: $\Gamma\widehat{A}\Delta = \frac{M\widehat{A}\Gamma}{2} = \frac{\frac{B\widehat{A}\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\widehat{A}\Gamma}{4}$ (1)

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ βρίσκουμε:

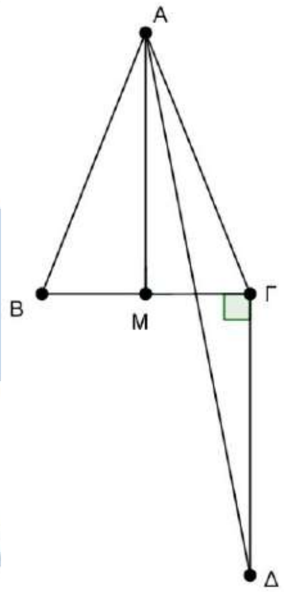
$$B\widehat{A}\Gamma + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o \Leftrightarrow B\widehat{A}\Gamma + 2\widehat{B} = 180^o \Leftrightarrow B\widehat{A}\Gamma = 180^o - 2\widehat{B}$$

Τότε η (1) γράφεται:

$$\Gamma\widehat{A}\Delta = \frac{180^o - 2\widehat{B}}{4} = 45^o - \frac{\widehat{B}}{2}$$

δ) Από τη τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΓΔ, έχουμε:

$$A\Delta < A\Gamma + \Gamma\Delta \Leftrightarrow A\Delta < AB + AB \Leftrightarrow A\Delta < 2AB$$



1890

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α, Β, Γ, Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό Ε ισαπέχει από τα χωριά Β, Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.

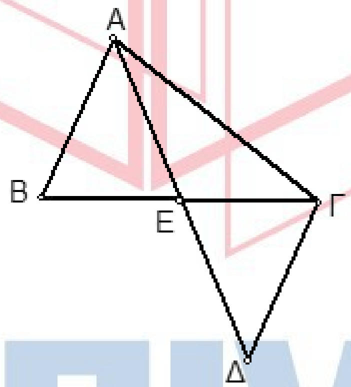
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ. (Μονάδες 5)

ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν. (Μονάδες 5)

iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο ΑΔ. (Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ. (Μονάδες 7)

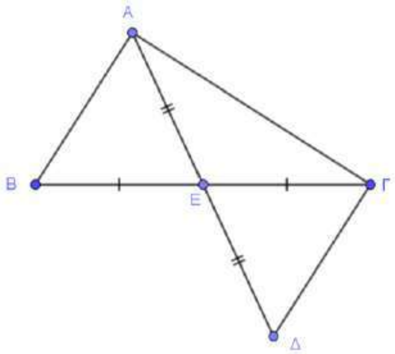


1890-Λύση

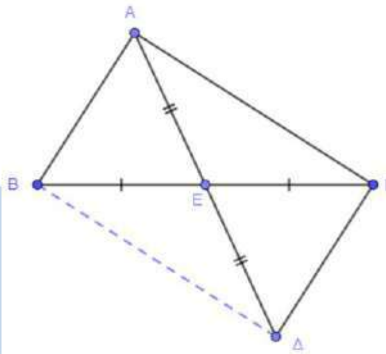
α) i. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ έχουν:

- ΕΒ = ΕΓ, από υπόθεση
- ΕΑ = ΕΔ, από υπόθεση,
- $A\hat{E}B = \Delta\hat{E}\Gamma$ ως κατακορυφήν.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{E}B$ και $\Delta\hat{E}\Gamma$ είναι ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΓΔ.



ii. Επειδή ΕΒ = ΕΓ και ΕΑ = ΕΔ, δηλαδή οι διαγώνιοι του ΑΒΔΓ διχοτομούνται, συμπεραίνουμε ότι το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΑΒ//ΓΔ. Άρα αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ προεκταθούν, αποκλείεται να συναντηθούν.

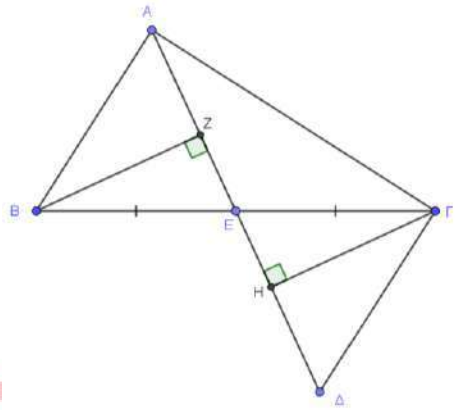


iii. Φέρουμε $BZ \perp A\Delta$ και $\Gamma H \perp A\Delta$. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΓΕΗ και ΒΕΖ έχουν:

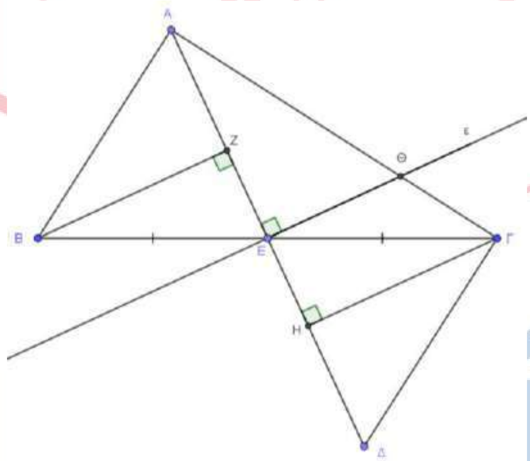
- ΕΓ = ΕΒ, από υπόθεση
- $B\hat{E}Z = \Gamma\hat{E}H$, ως κατακορυφήν

Άρα είναι ίσα οπότε ισχύει ΒΖ = ΓΗ, δηλαδή τα Β, Γ ισαπέχουν από την ΑΔ.

1890-Λύση



β) Για να ισαπέχει κάποιο σημείο από τα Α και Δ, θα πρέπει να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΔ. Εφόσον θέλουμε το σημείο αυτό να ανήκει στο δρόμο ΑΓ, θα είναι το σημείο τομής της της ΑΓ με τη μεσοκάθετο του ΑΔ. Οπότε φέρουμε τη μεσοκάθετη ε του ΑΔ και ονομάζουμε Θ το σημείο τομής της με την ΑΓ. Το σημείο Θ ισαπέχει από τα Α, Δ.



1891

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ > ΑΔ και οι διχοτόμοι των γωνιών του ΑΡ, ΒΕ, ΓΣ και ΔΤ (όπου Ρ, Ε στην ΔΓ και Σ, Τ στην ΑΒ) τέμνονται στα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

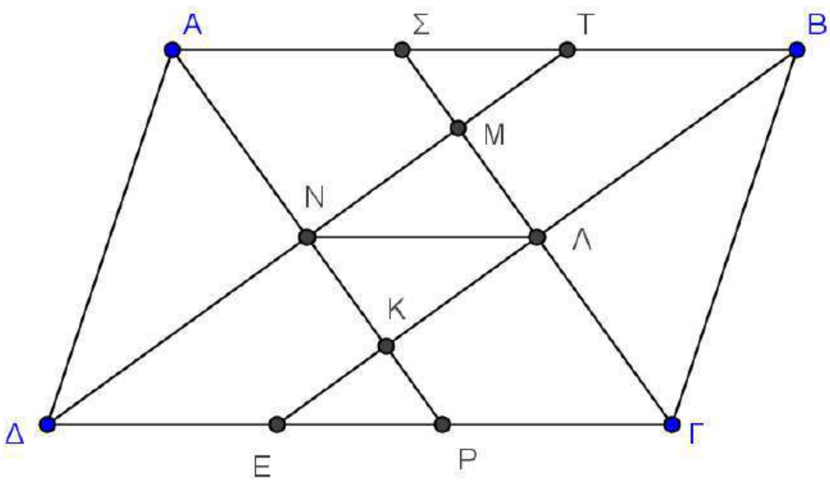
Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

γ) ΛΝ // ΑΒ (Μονάδες 5)

δ) ΛΝ = ΑΒ – ΑΔ (Μονάδες 5)



1891-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΔΤ και ΒΓΕ έχουν:

- $E\widehat{B}\Gamma = A\widehat{\Delta}T$, ως μισά των απέναντι γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ
- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ
- $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$, ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα ΑΔΤ και ΒΓΕ είναι ίσα, οπότε έχουν ΔΤ = ΒΕ (1) αφού οι πλευρές αυτές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$.

Επιπλέον, από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι ΑΤ = ΕΓ (2).

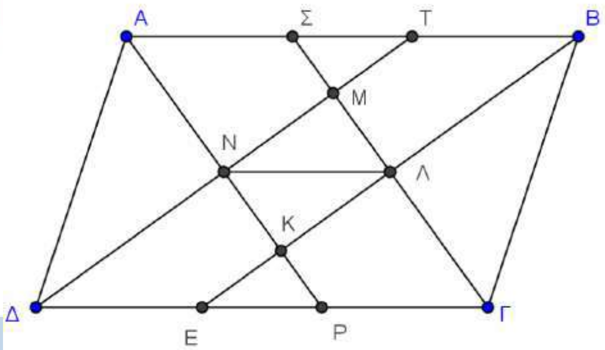
Επειδή ΑΒ = ΓΔ (ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο) ισχύει:

ΑΒ = ΓΔ $\Leftrightarrow$ ΑΤ + ΤΒ = ΔΕ + ΕΓ

η οποία λόγω της (2) γράφεται

ΤΒ = ΔΕ (3).

Από τις (1), (3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.



β) Όμοια δείχνουμε ότι το ΑΣΓΡ είναι παραλληλόγραμμο οπότε ΑΡ// ΣΓ και ΝΚ // ΜΛ. Επειδή το ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο, είναι ΜΝ // ΚΛ, οπότε και το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι $N\widehat{\Delta}E = \Sigma\widehat{T}M$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΓ που τέμνονται από την ΔΤ και

$N\widehat{\Delta}E = A\widehat{\Delta}N$, διότι η ΔΤ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$.

Άρα είναι $\Sigma\widehat{T}M = A\widehat{\Delta}N$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΤ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΤ.

Η ΑΝ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΔΤ, οπότε είναι ύψος και διάμεσός του, δηλαδή $\widehat{N} = 90^o$. Τελικά, επειδή το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ έχει μία γωνία ορθή, είναι ορθογώνιο.

γ) Το τρίγωνο ΑΔΤ είναι ισοσκελές (το αποδείξαμε στο β ερώτημα) οπότε ΑΔ = ΑΤ (4). Άρα η ΑΝ είναι και διάμεσος, οπότε το Ν είναι στο μέσο του ΔΤ. Όμοια προκύπτει ότι στο τρίγωνο ΓΒΕ το Λ είναι στο μέσο του ΒΕ. Από το παραλληλόγραμμο ΔΕΒΤ βρίσκουμε:

ΔΤ // = ΒΕ $\Leftrightarrow \frac{\Delta T}{2}$ // = $\frac{BE}{2} \Leftrightarrow$ ΔΝ // = ΕΛ

Άρα το ΔΝΛΕ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Συνεπώς είναι ΛΝ // ΔΕ οπότε και ΝΛ // ΑΒ.

δ) Είναι ΛΝ = ΒΤ = ΑΒ – ΑΤ και λόγω της (4) γίνεται

ΛΝ = ΑΒ – ΑΔ

1892

ΘΕΜΑ 4

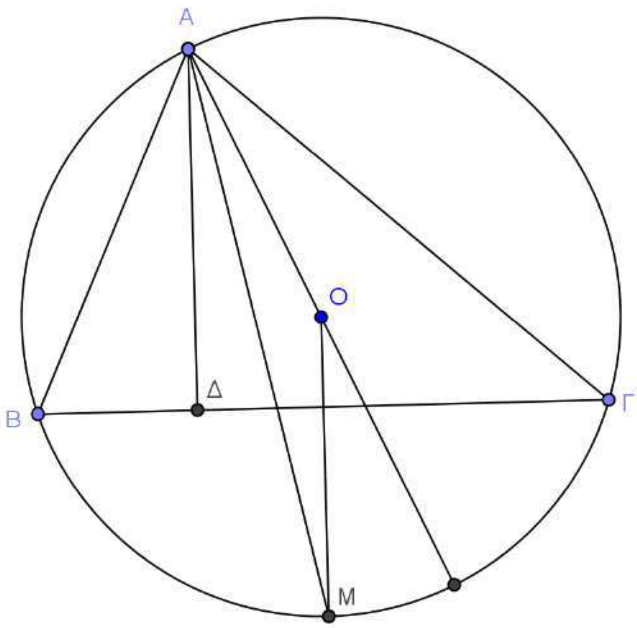
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο. Θεωρούμε το μέσο Μ του τόξου ΒΓ, το οποίο αντιστοιχεί σε κυρτή επίκεντρη γωνία και το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

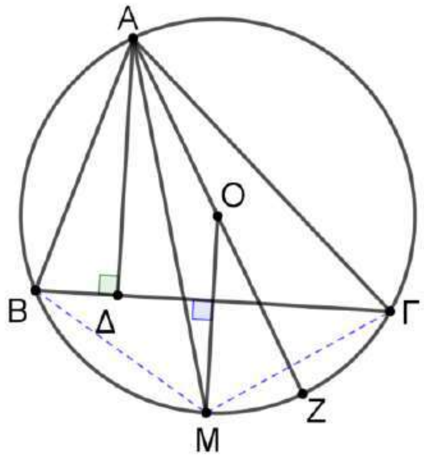
α) ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}O$. (Μονάδες 8)

β) $O\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B$ (Μονάδες 9)

γ) $\Delta\hat{A}O = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ (Μονάδες 8)



1892-Λύση



α) Επειδή το M είναι το μέσο του τόξου ΒΓ , τα τόξα BM και ΜΓ είναι ίσα, άρα το ίδιο ισχύει και για τις χορδές BM και ΜΓ.

Δηλαδή το M ισαπέχει από τα B και Γ, άρα είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΒΓ. Το ίδιο ισχύει και για το O, εφόσον OB = ΟΓ ως ακτίνες του κύκλου. Οπότε η OM είναι μεσοκάθετος του ΒΓ, άρα OM $\perp$ ΒΓ. Επίσης ΑΔ $\perp$ ΒΓ, άρα οι ΑΔ και OM είναι παράλληλες ως κάθετες στην ΒΓ.

Είναι $\Delta\widehat{A}M = A\widehat{M}O$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων OM, ΑΔ, οι οποίες τέμνονται από την AM.

Επίσης οι OA και OM είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου, άρα OA = OM. Άρα το τρίγωνο AOM είναι ισοσκελές με βάση την AM. Επομένως $M\widehat{A}O = A\widehat{M}O$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $M\widehat{A}O = \Delta\widehat{A}M$, άρα η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\widehat{A}O$.

β) Επειδή τα τόξα BM και ΜΓ είναι ίσα οι αντίστοιχες εγγεγραμμένες γωνίες BAM και ΜΑΓ είναι ίσες. Από το ερώτημα (α) ισχύει $\Delta\widehat{A}M = M\widehat{A}O$.

Οπότε $O\widehat{A}\Gamma = M\widehat{A}\Gamma - M\widehat{A}O = B\widehat{A}M - \Delta\widehat{A}M = \Delta\widehat{A}B$.

γ) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο με $A\widehat{\Delta}B$ ορθή. Άρα, από το άθροισμα γωνιών τριγώνου ΑΒΔ οι $B\widehat{A}\Delta$ και $\widehat{B}$ είναι συμπληρωματικές. Επομένως, $\Delta\widehat{A}B + \widehat{B} = 90^o$ (3).

Επίσης, το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο, άρα οι $\Gamma\widehat{A}\Delta + \widehat{\Gamma} = 90^o$.

Όμως $\Gamma\widehat{A}\Delta = O\widehat{A}\Gamma + \Delta\widehat{A}O$. Άρα $O\widehat{A}\Gamma + \Delta\widehat{A}O + \widehat{\Gamma} = 90^o$ (4).

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι $O\widehat{A}\Gamma + \Delta\widehat{A}O + \widehat{\Gamma} = \Delta\widehat{A}B + \widehat{B}$.

Όμως, όπως έχουμε αποδείξει στο β), $O\widehat{A}\Gamma = \Delta\widehat{A}B$, άρα $\Delta\widehat{A}O + \widehat{\Gamma} = \widehat{B}$ ή $\Delta\widehat{A}O = \widehat{B} - \widehat{\Gamma}$.

1893

ΘΕΜΑ 4

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με ΑΒ>ΒΓ τέτοιο ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60°. Από το Δ φέρουμε ΔΜ κάθετη στην ΑΓ.

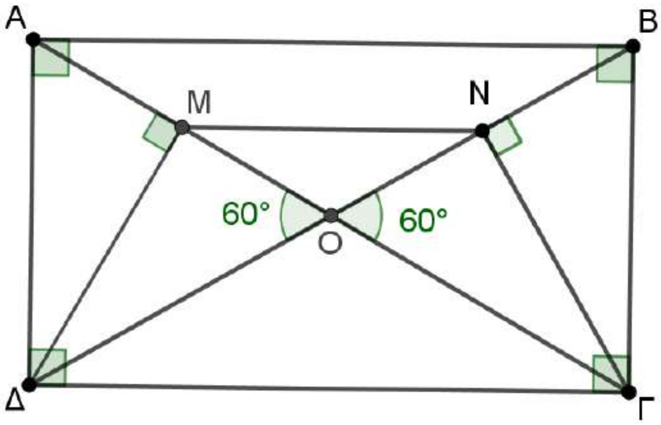
α) Να αποδείξετε ότι:

i. το σημείο Μ είναι μέσο του ΑΟ όπου Ο το κέντρο του ορθογωνίου. (Μονάδες 8)

ii. ΑΜ= $\frac{1}{4}$ ΑΓ (Μονάδες 7)

β) Αν από το Γ φέρουμε ΓΝ κάθετη στη ΒΔ, να αποδείξετε ότι το ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

1893-Λύση



α) i. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ίσες και διχοτομούνται, άρα και τα μισά τους είναι ίσα, δηλαδή ΑΓ = ΒΔ $\Leftrightarrow \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΒΔ}{2} \Leftrightarrow$ ΟΑ = ΟΔ.

Άρα το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισοσκελές με $Δ\widehat{Α}Ο = Α\widehat{Δ}Ο$. Όμως $Α\widehat{Ο}Δ = 60^o$, από υπόθεση και συνεπώς, από το άθροισμα των γωνιών του, το ισοσκελές τρίγωνο έχει $Δ\widehat{Α}Ο + Α\widehat{Δ}Ο + 60^o = 180^o$ με $Δ\widehat{Α}Ο = Α\widehat{Δ}Ο$. Άρα $Δ\widehat{Α}Ο = Α\widehat{Δ}Ο = Α\widehat{Ο}Δ = 60^o$. Οπότε το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισόπλευρο, εφόσον έχει τρεις γωνίες ίσες. Το ΔΜ είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο, οπότε είναι και διάμεσος, δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΟΑ.

ii. Είναι ΑΜ = $\frac{ΟΑ}{2} = \frac{\frac{ΑΓ}{2}}{2} = \frac{ΑΓ}{4}$.

β) Ομοίως με το ΟΑΔ, το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο οπότε το ΓΝ είναι ύψος και διάμεσός του.

Στο τρίγωνο ΟΑΒ το ΜΝ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών, άρα ΜΝ // ΑΒ. Όμως ΑΒ // ΓΔ ως πλευρές ορθογωνίου, άρα ΜΝ // ΓΔ.

Επίσης, ΜΝ = $\frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΓΔ}{2} <$ ΓΔ. Δηλαδή το ΜΝ είναι μικρότερο του ΓΔ, επομένως το ΜΝΓΔ δεν είναι παραλληλόγραμμο, καθώς αν ήταν οι απέναντι πλευρές του, ΜΝ και ΓΔ θα ήταν ίσες. Επομένως οι ΜΔ και ΓΝ δεν είναι παράλληλες.

Άρα το ΜΝΓΔ είναι τραπέζιο.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΜΔ και ΟΝΓ:

- Είναι ορθογώνια.
- $Μ\widehat{Ο}Δ = Ν\widehat{Ο}Γ = 60^o$, ως κατακορυφήν γωνίες και
- ΟΔ = ΟΓ, ως μισά των ίσων διαγωνίων του ορθογωνίου.

Άρα τα τρίγωνα ΟΜΔ και ΟΝΓ είναι ίσα οπότε ισχύει και ΔΜ = ΓΝ, ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $Μ\widehat{Ο}Δ$ και $Ν\widehat{Ο}Γ$. Επομένως το τραπέζιο ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές.

1894

ΘΕΜΑ 4

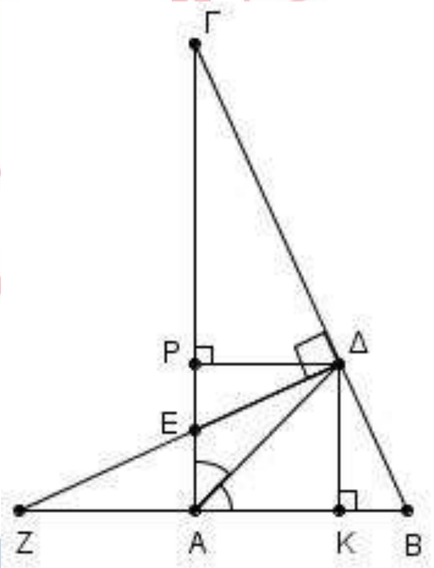
Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. ‘Εστω ΔΚ και ΔΡ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η κάθετη της ΒΓ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε και την προέκταση της πλευράς ΑΒ (προς το Β) στο σημείο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι:

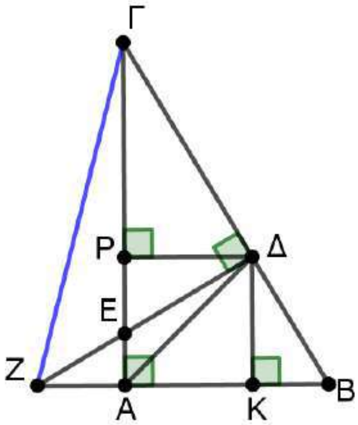
i. $\hat{B} = \Delta\hat{E}\Gamma$ (Μονάδες 8)

ii. ΔΕ=ΔΒ (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΔΓΖ (Μονάδες 9)



1894-Λύση



α) i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, από το άθροισμα γωνιών τριγώνου έχουμε $\widehat{B}$ + Α$\widehat{Γ}$Β = 90ο ⇔ $\widehat{B}$ = 90ο – Α$\widehat{Γ}$Β (1). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ έχουμε Δ$\widehat{Ε}$Γ + Ε$\widehat{Γ}$Δ = 90ο ⇔ Δ$\widehat{Ε}$Γ + Α$\widehat{Γ}$Β = 90ο ⇔ Δ$\widehat{Ε}$Γ = 90ο – Α$\widehat{Γ}$Β (2).

Από (1), (2) βρίσκουμε ότι $\widehat{B}$ = Δ$\widehat{Ε}$Γ (είναι συμπληρωματικές της ίδιας γωνίας).

ii) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΚΒ και ΔΡΕ:

- Είναι ορθογώνια, καθώς οι ΔΚ και ΔΡ είναι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, από την υπόθεση.
- $\widehat{B}$ = Δ$\widehat{Ε}$Ρ από το προηγούμενο ερώτημα και
- ΔΚ = ΔΡ, διότι το Δ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας Β$\widehat{Α}$Γ και κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει από τις πλευρές της ΑΒ και ΑΓ.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν μία οξεία γωνία και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες, μία προς μία. Επομένως ΔΕ = ΔΒ, ως υποτείνουσές τους.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΕΓ και ΔΒΖ:

- Είναι ορθογώνια, γιατί ΔΕ ⊥ ΒΓ.
- Δ$\widehat{Ε}$Γ = $\widehat{B}$, λόγω του α)i. και
- ΔΕ = ΔΒ, λόγω του α)ii.

Άρα τα τρίγωνα ΔΕΓ και ΔΒΖ είναι ίσα, γιατί έχουν μία κάθετη πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα, μία προς μία ίσες. Άρα ΔΓ = ΔΖ, γιατί είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες Δ$\widehat{Ε}$Γ και $\widehat{B}$ στα ίσα τρίγωνα. Άρα, το τρίγωνο ΔΓΖ είναι ισοσκελές (με βάση ΓΖ) και ορθογώνιο με Γ$\widehat{Δ}$Ζ = 90ο. Άρα Δ$\widehat{Γ}$Ζ = Δ$\widehat{Ζ}$Γ και από το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι Δ$\widehat{Γ}$Ζ + Δ$\widehat{Ζ}$Γ = 90ο. Άρα Δ$\widehat{Ζ}$Γ = Δ$\widehat{Γ}$Ζ = 45ο.

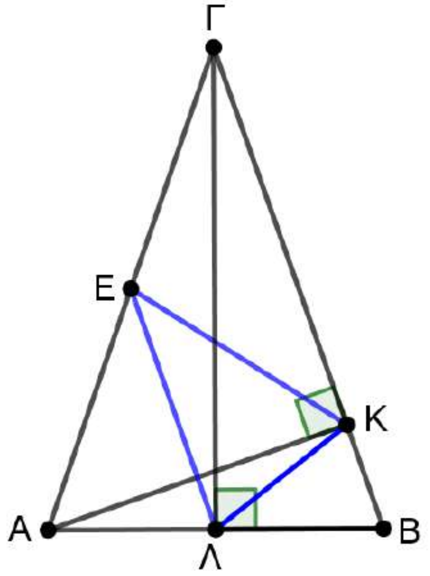
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΒ (ΑΓ=ΓΒ). Φέρουμε τα ύψη του ΑΚ και ΓΛ. Αν Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΚΕ. (Μονάδες 15)

1895-Λύση



α) Τα τρίγωνα ΑΚΓ και ΓΛΑ είναι ορθογώνια με υποτείνουσα την ΑΓ, γιατί τα ΑΚ και ΓΛ είναι ύψη του τριγώνου ΑΒΓ. Επίσης, το Ε είναι μέσο της ΑΓ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ η ΚΕ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα άρα ΚΕ = $\frac{ΑΓ}{2}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΛΑ η ΛΕ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα άρα ΛΕ = $\frac{ΑΓ}{2}$.

Επομένως ΚΕ = ΛΕ οπότε το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές με βάση την ΚΛ.

β) Επειδή το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι $Ε\widehat{Λ}Κ = Ε\widehat{Κ}Λ$ (1).

Επίσης, το Λ είναι μέσο της ΑΒ, εφόσον το ΓΛ είναι ύψος της βάσης του ισοσκελούς ΑΒΓ, άρα και διάμεσος. Άρα, στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΕΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών του ΑΓ και ΑΒ, οπότε ΛΕ // ΓΒ. Τότε $Ε\widehat{Λ}Κ = Λ\widehat{Κ}Β$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΛ και ΒΓ που τέμνονται από την ΚΛ.

Από (1), (2) συμπεραίνουμε ότι $Ε\widehat{Κ}Λ = Λ\widehat{Κ}Β$.

Επομένως η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β\widehat{Κ}Ε$.

11882

Θέμα 3

Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ και ΔΖΗ είναι ορθογώνια με ορθές γωνίες $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma$, $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\Delta$ και $\Delta\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{H}$, αντίστοιχα. Επίσης ΑΓ = ΑΔ και ΒΓ = ΔΖ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ και ΔΕ είναι ίσα.

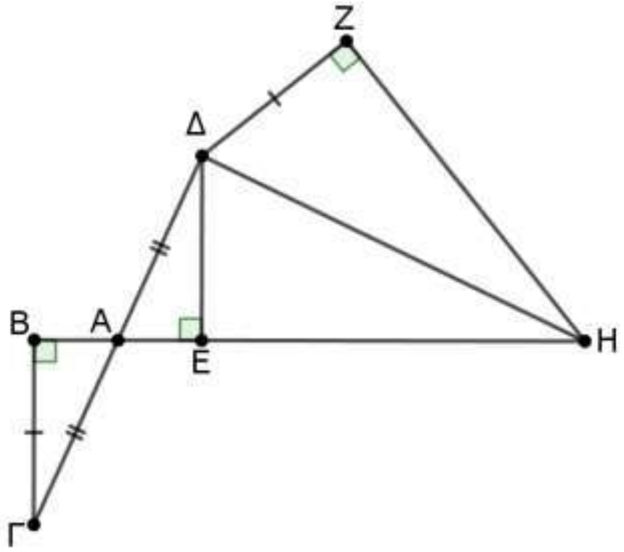
Μονάδες 10

β) Η ΔΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{E}\widehat{\mathrm{H}}\mathrm{Z}$.

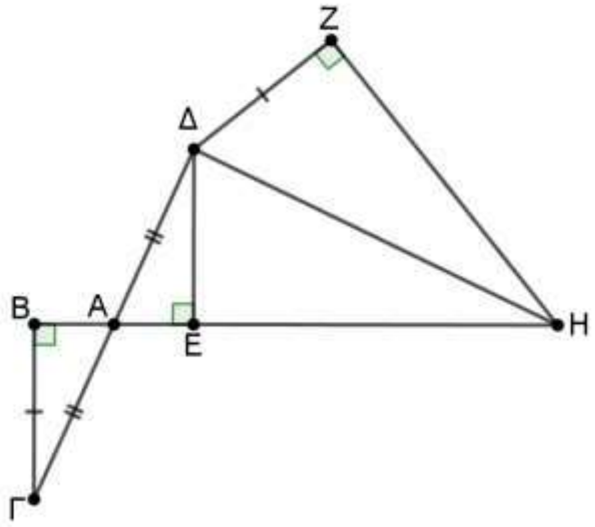
Μονάδες 6

γ) Αν, επιπλέον, οι ΑΔ και ΔΗ είναι κάθετες, τότε $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{E} = \dfrac{\mathrm{E}\widehat{\mathrm{H}}\mathrm{Z}}{2}$.

Μονάδες 9



11882-Λύση



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ.

Είναι ορθογώνια με $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$ και $\mathrm{\Delta\hat{E}A}$ ορθές,

ΑΓ = ΑΔ ίσες από υπόθεση,

$\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ = $\mathrm{\Delta\hat{A}E}$ ως κατακορυφήν.

Άρα, τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ είναι ίσα γιατί έχουν ίσες τις υποτείνουσές τους και δύο οξείες γωνίες. Επομένως, ΒΓ = ΔΕ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ και $\mathrm{\Delta\hat{A}E}$ των ίσων τριγώνων.

β) Άρα, λόγω της υπόθεσης ΒΓ = ΔΖ, θα είναι και ΔΕ = ΔΖ. Επομένως το Δ έχει ίσες αποστάσεις από τις πλευρές της γωνίας $\mathrm{E\hat{H}Z}$, ΖΗ και ΗΕ, άρα θα είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\mathrm{E\hat{H}Z}$. Δηλαδή η ΔΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{E\hat{H}Z}$.

γ) Οι $\mathrm{A\hat{\Delta}E}$ και $\mathrm{\Delta\hat{A}E}$ είναι συμπληρωματικές, ως οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΕΔ.

Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΗ, οι γωνίες $\mathrm{\Delta\hat{H}E}$ και $\mathrm{\Delta\hat{A}E}$ είναι συμπληρωματικές.

Άρα, $\mathrm{A\hat{\Delta}E} = \mathrm{\Delta\hat{H}E}$, ως συμπληρωματικές της $\mathrm{\Delta\hat{A}E}$.

Όμως, από το β΄ η ΔΗ είναι διχοτόμος της $\mathrm{E\hat{H}Z}$, άρα $\mathrm{\Delta\hat{H}E} = \frac{\mathrm{E\hat{H}Z}}{2}$. Συνεπώς, $\mathrm{A\hat{\Delta}E} = \frac{\mathrm{E\hat{H}Z}}{2}$.

11892

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμία από αυτές το γράμμα Σ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή το γράμμα Λ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και κάποια γωνία ίση, τότε είναι ίσα.

ii. Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

iii. Κάθε τετράγωνο είναι και ρόμβος.

iv. Κάθε επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης που βαίνει στο ίδιο τόξο.

v. Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου η απόσταση από το μέσο κάθε πλευράς είναι τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

(Μονάδες 10)

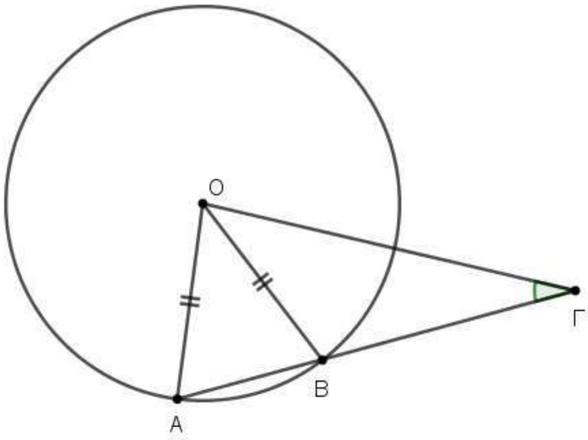
β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

(Μονάδες 15)

11892-Λύση

α)

i. Λάθος.



Τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΟΑΓ έχουν ΟΑ = ΟΒ, γιατί είναι ακτίνες του κύκλου, ΟΓ κοινή, και $\hat{\Gamma}$ κοινή. Όμως δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είναι ίσα, γιατί η $\hat{\Gamma}$ δεν είναι περιεχόμενη γωνία στις ίσες πλευρές. Μάλιστα τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΟΑΓ δεν είναι ίσα αφού ΑΓ>ΒΓ.

ii. Σωστό.

iii. Σωστό.

iv. Σωστό.

v. Λάθος. Η απόσταση του βαρύκεντρου από το μέσο της πλευράς είναι το $\frac{1}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

β) Σελίδα 88 σχολικού βιβλίου, παρ. 4.6.

11895

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.

ii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

iii. Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται.

iv. Η διάμεσος ενός τραπεζίου ισούται με το άθροισμα των δύο βάσεων του τραπεζίου.

v. Αν γνωρίζουμε ότι δύο κύκλοι που έχουν ακτίνες R και ρ με $R > \rho$, εφάπτονται, τότε συμπεραίνουμε ότι η απόσταση των κέντρων τους είναι $R + \rho$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα, ότι κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

(Μονάδες 15)

11895-Λύση

α)

i. Σ, Παράγραφος 4.6.

ii. Σ, Παράγραφος 6.2.

iii. Σ, Παράγραφος 5.2.

iv. Λ, Παράγραφος 5.10. Η διάμεσος ενός τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των δύο βάσεων του τραπεζίου.

iv. Λ, Παράγραφος 3.16. Αν εφάπτονται εσωτερικά η απόσταση των κέντρων είναι $\mathrm{R}-\rho$

β) Παράγραφος 3.6. ΘΕΩΡΗΜΑ IV (σελ 51).

11897

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΑΜ. Στην προέκταση της ΑΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα ΓΔ = ΑΓ. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΜ που τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΓ = ΓΕ. (Μονάδες 9)

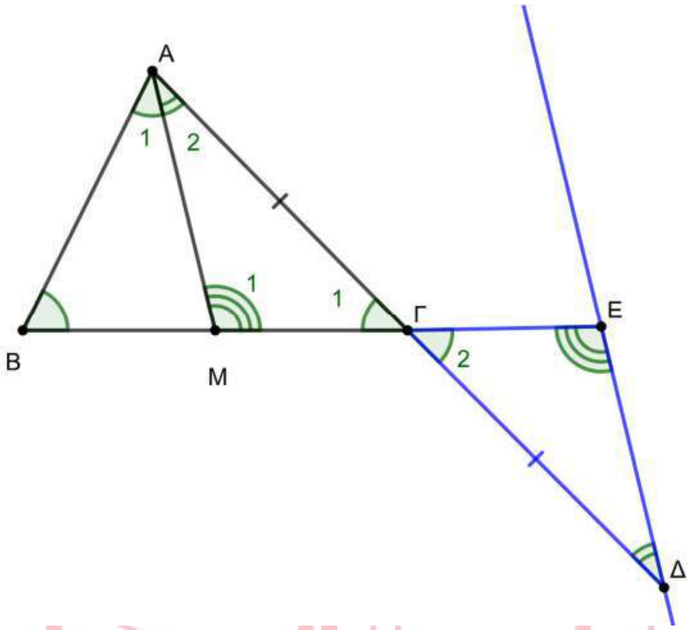
β) Το τετράπλευρο ΑΜΔΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

γ) $\widehat{\mathrm{B}}+\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{M}=\Gamma\widehat{\mathrm{E}}\Delta$. (Μονάδες 9)

11897-Λύση

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος ΑΜ. Προεκτείνουμε την ΑΓ κατά ΓΔ = ΑΓ.

Φέρουμε από το Δ παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ε.



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΔΕΓ. Αυτά έχουν:

ΑΓ = ΓΔ, από υπόθεση,

$\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$, ως κατακορυφήν,

$\hat{A}_2=\hat{\Delta}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΜ και ΔΕ που τέμνονται από την ΑΔ.

Είναι ίσα, επειδή έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες αντίστοιχα ίσες. Έτσι ΜΓ = ΓΕ γιατί είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}_2$ και $\hat{\Delta}$.

β) Αφού ΑΓ = ΓΔ και ΜΓ = ΓΕ, το τετράπλευρο ΑΜΔΕ είναι παραλληλόγραμμο επειδή οι διαγώνιοι του διχοτομούνται στο Γ.

γ) Στο τρίγωνο ΑΜΒ, η εξωτερική γωνία $\hat{M}_1=\hat{B}+B\hat{A}M$. (2)

$\hat{M}_1=\Gamma\hat{E}\Delta$ (3) επειδή είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΜ και ΔΕ που τέμνονται από την ΜΕ.

Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει ότι $\Gamma\hat{E}\Delta=\hat{B}+B\hat{A}M$.

11898

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

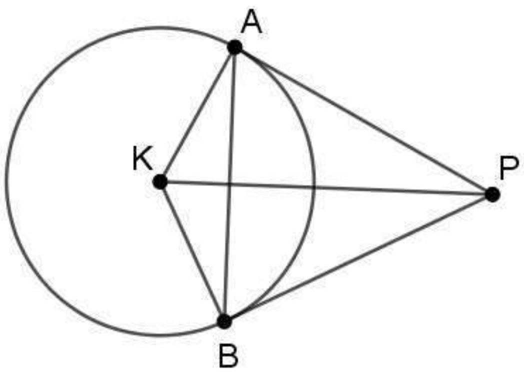
i. Οι μεσοκάθετες των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, που είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

ii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

iii. Σε κάθε τρίγωνο βαρύκεντρο ονομάζεται το σημείο τομής των διχοτόμων του.

iv. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που άγεται από οποιαδήποτε κορυφή είναι διχοτόμος της αντίστοιχης γωνίας και διάμεσος της απέναντι πλευράς.

v. Αν στο παρακάτω σχήμα η PK είναι η διακεντρική ευθεία του σημείου P, τότε η ίδια ευθεία είναι μεσοκάθετος της χορδής AB.



(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία ισούται με 30^o, τότε η απέναντι πλευρά της είναι το μισό της υποτείνουσας.

(Μονάδες 15)

11898-Λύση

α)

i. Σ, Παράγραφος 4.5.

ii. Σ, Παράγραφος 6.2.

iii. Λ, Παράγραφος 5.7. Βαρύκεντρο (ή κέντρο βάρους) λέγεται το σημείο τομής των διαμέσων κάθε τριγώνου.

iv. Λ, Παράγραφος 3.6. Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

iv. Σ, Παράγραφος 3.15.

β) Παράγραφος 5.9. Πόρισμα (μόνο το ευθύ).

11964

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι παραπληρωματικές.

ii. Υπάρχουν σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος που δεν ισαπέχουν από τα άκρα του.

iii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

iv. Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

v. Κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία βάση είναι ίσες. (Μονάδες 15)

11964-Λύση

α) i→ Λάθος , παράγραφος 4.6

ii→ Λάθος , παράγραφος 3.2

iii→ Σωστό , παράγραφος 6.2

iv→ Σωστό , παράγραφος 3.10

v→ Σωστό , παράγραφος 5.5

β) Σχολικό σελίδα 118, παράγραφος 5.11

12066

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ii. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου.

iii. Αν δύο διαφορετικές ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες προς μια τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

iv. Αν ένα τετράπλευρο έχει όλες τις γωνίες του ίσες, τότε είναι τετράγωνο.

v. Αν σε ένα τετράπλευρο δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

(Μονάδες 10)

β) Από ένα σημείο Α εκτός ευθείας ε φέρουμε το κάθετο τμήμα ΑΚ προς την ε και τα πλάγια τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Να αποδείξετε ότι, αν τα πλάγια τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους Β και Γ ισαπέχουν από το ίχνος Κ της καθέτου.

(Μονάδες 15)

12066-Λύση

α)

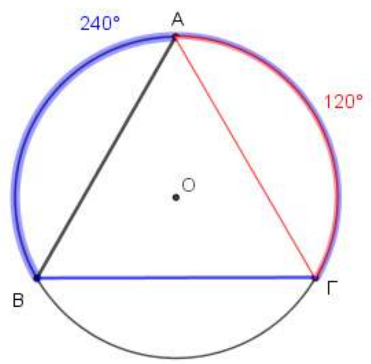
i. Λ

§ 3.4

Γιατί δεν αναφέρεται αν τα τόξα είναι και τα δύο μικρότερα ή μεγαλύτερα του ημικυκλίου.

Μπορούμε να δώσουμε ως αντιπαράδειγμα το εξής.

Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Οι ίσες πλευρές του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ είναι και ίσες χορδές του κύκλου. Στην χορδή ΑΓ το τόξο το μικρότερο του ημικυκλίου έχει μέτρο 120°, ενώ στην χορδή ΒΓ το τόξο το μεγαλύτερο του ημικυκλίου έχει μέτρο 240°. Είναι προφανές ότι, ενώ οι χορδές ΑΓ και ΒΓ είναι ίσες τα τόξα ΑΓ και ΒΑΓ δεν είναι ίσα.



ii. Λ

§ 3.10

Γιατί κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις <u>απέναντι</u> εσωτερικές γωνίες. Για παράδειγμα, η εξωτερική γωνία της ορθής γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου, είναι ίση με την εσωτερική της, δηλαδή την ορθή και όχι μεγαλύτερη.

iii. Σ

§ 4.2

iv. Λ

§ 5.5

Γιατί τότε είναι ορθογώνιο. Χρειάζεται επιπλέον να είναι και ρόμβος ώστε τελικά να είναι τετράγωνο.

v. Σ

§ 6.6

β) § 3.13

Θεώρημα Ι σχ. βιβλίο σελ. 65 (μόνο το ευθύ)

12068

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}$=90°) και Μ το μέσο της υποτείνουσας του ΒΓ. Από το Μ φέρουμε ΜΔ⊥ΑΒ και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΔΖ.

α) Να αποδείξετε ότι:

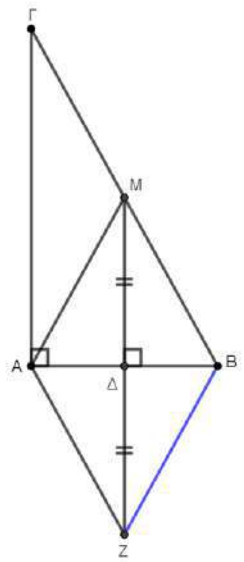
i. Το τρίγωνο ΜΒΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

ii. Το τετράπλευρο ΑΜΒΖ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

β) Αν το αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, τι είδους τετράπλευρο είναι το ΑΜΒΖ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

12068-Λύση

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}$=90°) και Μ το μέσο της υποτείνουσάς του ΒΓ. Φέρουμε ΜΔ⊥ΑΒ και έστω ΔΖ=ΜΔ.

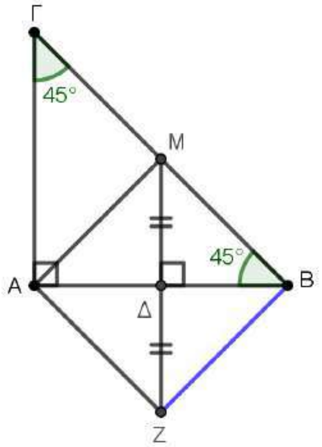


α)

i. Στο τρίγωνο ΜΒΖ επειδή ΜΔ=ΔΖ το τμήμα ΒΔ είναι διάμεσος της πλευράς ΜΖ και επιπλέον ΜΖ⊥ΑΒ από υπόθεση, άρα το τμήμα ΒΔ είναι και ύψος του. Επομένως το τρίγωνο ΜΒΖ είναι ισοσκελές.

ii. ΜΔ⊥ΑΒ (1) από υπόθεση και ΑΓ⊥ΑΒ αφού $\widehat{A}$=90°, άρα ΜΔ//ΑΓ ως κάθετες στο ίδιο τμήμα ΑΒ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ από το μέσο Μ της ΒΓ έχουμε ΜΔ//ΑΓ, άρα το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ. Στο τετράπλευρο ΑΜΒΖ οι διαγώνιές του διχοτομούνται αφού ισχύει επιπλέον ότι το Δ είναι μέσο και του τμήματος ΜΖ από κατασκευή. Άρα το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο και επειδή οι διαγώνιές του ΜΖ και ΑΒ είναι και κάθετες, τελικά το ΑΜΒΖ είναι ρόμβος.

β)



12068-Λύση

Αν το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές, τότε $\hat{B}=\hat{\Gamma}=45°$ (άθροισμα ίσων οξειών γωνιών ορθογωνίου τριγώνου). Στο ρόμβο ΑΜΒΖ γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του, άρα οι γωνίες $A\hat{B}M=A\hat{B}Z=45°$. Οπότε $M\hat{B}Z=90°$ και ο ρόμβος ΑΜΒΖ έχει μία ορθή γωνία οπότε είναι και ορθογώνιο, άρα τελικά το ΑΜΒΖ είναι τετράγωνο.

12069

ΘΕΜΑ 3

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) παίρνουμε στην πλευρά ΑΒ σημείο Δ, ώστε ΔΒ = 2ΑΔ, και στην πλευρά ΑΓ σημείο Ε, ώστε ΕΓ= 2ΑΕ. Το Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τμήματα ΔΒ και ΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

ii. Το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

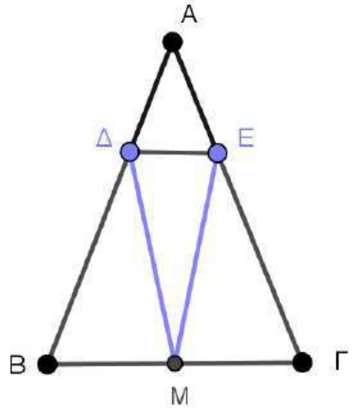
β) Αν Ρ το σημείο τομής των τμημάτων ΒΕ και ΓΔ να δείξετε ότι:

i. Οι γωνίες $Γ\widehat{Β}Ε$ και $Β\widehat{Γ}Δ$ είναι ίσες. (Μονάδες 6)

ii. Το τμήμα ΡΜ διχοτομεί τη γωνία $Β\widehat{P}Γ$. (Μονάδες 7)

12069-Λύση

α) Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Μ το μέσο της πλευράς του ΒΓ.



i. Στην πλευρά ΑΔ θεωρούμε σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΔΒ = 2 ΑΔ. Το σημείο Δ χωρίζει την πλευρά ΑΒ σε δυο τμήματα, από τα οποία το ένα είναι διπλάσιο του άλλου. Συνεπώς το τμήμα ΑΔ είναι ίσο με $\frac{1}{3}$ της ΑΒ. Αντίστοιχα και στην πλευρά ΑΓ ισχύει ότι το ΑΕ είναι ίσο με $\frac{1}{3}$ της ΑΓ. Για τα τμήματα ΔΒ και ΕΓ ισχύει ότι ΔΒ = $\frac{2}{3}$ ΑΒ και ΕΓ $= \frac{2}{3}$ ΑΓ, και αφού ΑΒ = ΑΓ θα ισχύει και ότι ΔΒ = ΕΓ.

ii. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ. Έχουν:

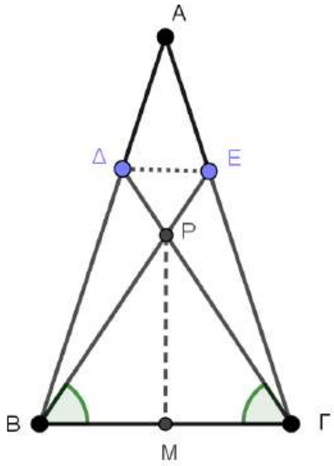
- ΒΜ = ΜΓ αφού το Μ είναι μέσο της ΒΓ
- ΔΒ = ΕΓ όπως αποδείξαμε στο ερώτημα α)
- $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ επειδή είναι οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν τις δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα. Συνεπώς οι πλευρές τους ΜΔ και ΜΕ θα είναι ίσες αφού είναι οι τρίτες πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$.

Στο τρίγωνο ΜΔΕ οι δυο πλευρές του είναι ίσες , οπότε αυτό είναι ισοσκελές.

12069-Λύση

β) Φέρω τα τμήματα ΒΕ και ΓΔ και έστω Ρ το σημείο τομής τους.



i. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΓΒΕ και ΒΓΔ. Έχουν:

- ΕΓ = ΔΒ από το ερώτημα α)
- ΒΓ κοινή πλευρά
- $E\hat{\Gamma}B = \Delta\hat{B}\Gamma$ ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε οι γωνίες $\Gamma\hat{B}E$ και $B\hat{\Gamma}\Delta$ που είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΕΓ και ΔΒ, είναι ίσες.

ii. Στο τρίγωνο ΡΒΓ οι δύο γωνίες του $\Gamma\hat{B}P$ και $B\hat{\Gamma}P$ είναι ίσες, από το προηγούμενο ερώτημα, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ. Το ΡΜ είναι διάμεσος προς τη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΡΒΓ οπότε είναι και διχοτόμος της γωνίας $B\hat{P}\Gamma$.

12070

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Από κάθε σημείο Ρ που είναι εξωτερικό ενός κύκλου διέρχεται μόνο μία εφαπτόμενη ευθεία προς τον κύκλο.

ii. Σε όλα τα κυρτά πολύγωνα το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών τους είναι 4 ορθές.

iii. Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος.

iv. Σε κάθε τραπέζιο οι διαγώνιές του είναι ίσες.

v. Δύο εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα του ίδιου κύκλου, είναι ίσες.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου ανά δύο είναι ίσες.

(Μονάδες 15)

12070-Λύση

α)

i. Λ

(Από το σημείο Ρ που είναι εξωτερικό ενός κύκλου υπάρχουν δυο εφαπτόμενες προς τον κύκλο).

ii. Σ (θεωρία § 4.8)

iii. Σ (θεωρία § 5.5)

iv. Λ (η ιδιότητα αυτή ισχύει μόνο στα ισοσκελή τραπέζια και όχι σε κάθε τραπέζιο).

v. Σ (θεωρία § 6.2)

β) Απόδειξη κριτηρίου i) σχολικό βιβλίο σελίδα 103, § 5.2

12106

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες.

ii. Από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται άπειρες κάθετες στην ευθεία.

iii. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.

iv. Κάθε τετράπλευρο με ίσες διαγωνίους είναι ορθογώνιο.

v. Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη του κύκλου στο άκρο της χορδής ισούται με την επίκεντρη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.

(Μονάδες 15)

12106-Λύση

α) i. Σωστό (σελ. 60)

ii. Λάθος γιατί από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος.

iii. Σωστό (σελ. 89)

iv. Λάθος γιατί μπορούμε να σχεδιάσουμε τετράπλευρο με ίσες διαγωνίους οι οποίες δεν διχοτομούνται.

v. Λάθος γιατί η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής και η εγγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης.

β) σελ. 107

12149

ΘΕΜΑ 2

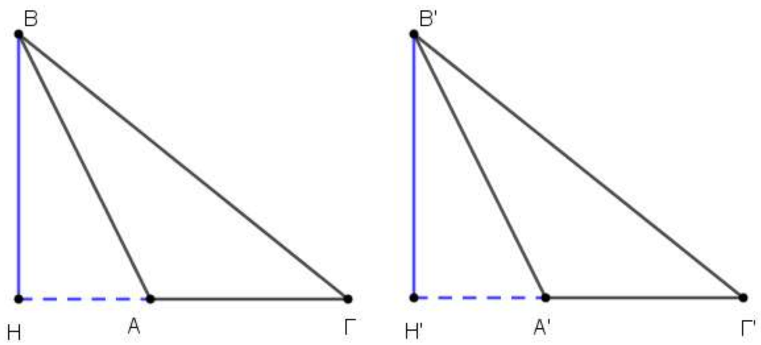
Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ ($\widehat{A} > 90^o$) και Α΄Β΄Γ΄ ($\widehat{A}' > 90^o$) με γ = γ΄ και β = β΄. Αν τα ύψη ΒΗ και Β΄Η΄ των τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

α) $B\widehat{A}H = B'\widehat{A}'H'$.

(Μονάδες 13)

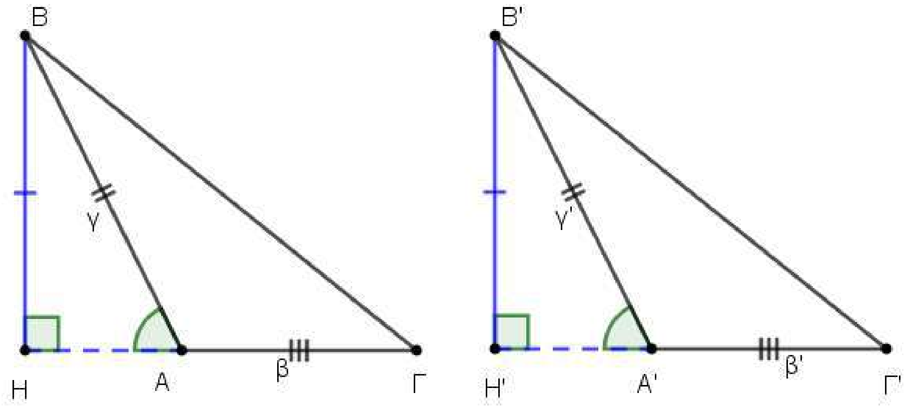
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)



12149-Λύση

Έστω τα αμβλυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ ($\widehat{A} > 90^o$) και Α΄Β΄Γ΄ ($\widehat{A'} > 90^o$) με γ = γ΄, β = β΄ και $\mathrm{BH} = \mathrm{B'H'}$.



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΗΑ και Β΄Η΄Α΄. Αυτά έχουν:

$\mathrm{BH} = \mathrm{B'H'}$, από υπόθεση

γ = γ΄, από υπόθεση

$\widehat{\mathrm{H}} = \widehat{\mathrm{H}}'= 90^o$ (τα ΒΗ και Β΄Η΄ είναι ύψη, άρα κάθετα στον φορέα της ΑΓ και της Α΄Γ΄.

Επομένως είναι ίσα, επειδή είναι ορθογώνια και έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

Άρα και οι γωνίες που είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΗ και Β΄Η΄ είναι ίσες, δηλαδή $\mathrm{B\widehat{A}H}=\mathrm{B'\widehat{A}'H'}$ (1).

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ. Αυτά έχουν:

γ = γ΄, από υπόθεση

β = β΄, από υπόθεση

$\mathrm{B\widehat{A}\Gamma}=\mathrm{B'\widehat{A}'\Gamma'}$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\mathrm{B\widehat{A}H}$ και $\mathrm{B'\widehat{A}'H'}$ αντίστοιχα από τη σχέση (1).

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

12165

ΘΕΜΑ 3

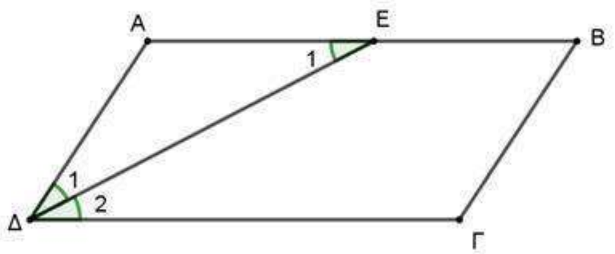
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\widehat{Α} = 120°$ και η διχοτόμος της γωνίας Δ που τέμνει την ΑΒ στο μέσο της Ε.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΒ = 2ΑΔ. (Μονάδες 6)

β) Αν το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από το σημείο Ε στην ΓΔ την τέμνει στο Η, τότε να αποδείξετε ότι $\frac{ΔΕ}{ΗΕ} = 2$. (Μονάδες 7)

γ) Αν Μ το μέσο της ΓΔ, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΑΔ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι $Δ\widehat{Α}Γ = 90°$. (Μονάδες 6)



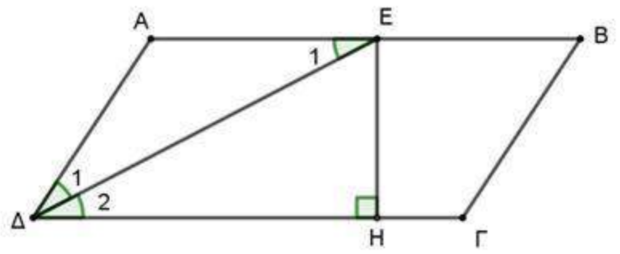
12165-Λύση

α) Επειδή η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ έχουμε ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$.

Όμως $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΕ, οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$. Άρα το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές οπότε ΑΔ = ΑΕ.

Επειδή το Ε είναι μέσο του ΑΒ έχουμε ΑΒ = 2ΑΕ = 2ΑΔ.

β)

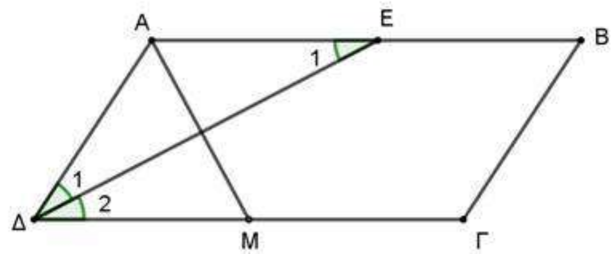


Οι γωνίες Α και Δ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ, οπότε είναι παραπληρωματικές δηλαδή $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180°$ και επειδή $\hat{A} = 120°$ έχουμε $\hat{\Delta} = 60°$.

Επειδή η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ προκύπτει $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$= 30°.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΗ έχουμε $\hat{\Delta}_2$= 30°, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ΕΗ είναι το μισό της υποτείνουσας ΔΕ, δηλαδή γωνία ΕΗ = $\frac{ΔΕ}{2} =\rangle \frac{ΔΕ}{ΕΗ} = 2$

γ)

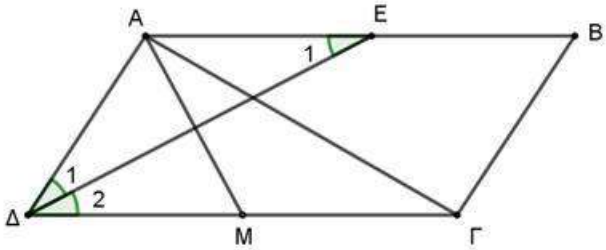


Από το ερώτημα (α) έχουμε ΑΒ = 2 ΑΔ και ΑΒ = ΔΓ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, οπότε ΔΓ = 2 ΑΔ (1). Επειδή το Μ είναι μέσο του ΔΓ, έχουμε ΔΓ = 2 ΔΜ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ΑΔ = ΔΜ.

Άρα το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές και επειδή η γωνία Δ είναι 60° το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

12165-Λύση

δ)



Επειδή το τρίγωνο ΜΑΔ είναι ισόπλευρο έχουμε ΑΜ = ΜΔ = $\frac{\Delta\Gamma}{2}$.

Στο τρίγωνο ΔΑΓ η ΑΜ είναι διάμεσος και ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΔΓ, οπότε η $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = 90°$.

12200

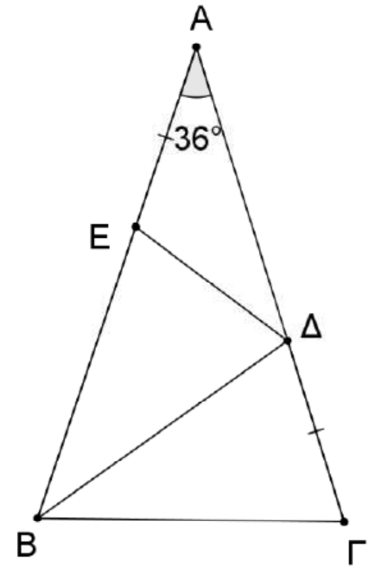
ΘΕΜΑ 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $\widehat{Α} = 36^o$. Έστω ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Β}$ και Ε σημείο της πλευράς ΑΒ ώστε $ΑΕ = ΓΔ$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = ΒΔ$. (Μονάδες 8)

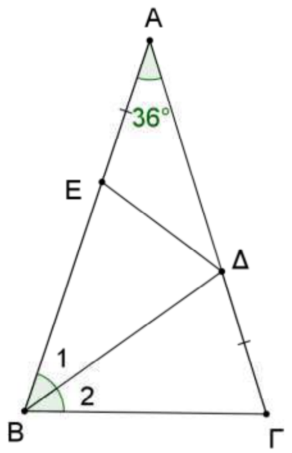
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

γ) Η παράλληλη από το Β προς την ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



12200-Λύση

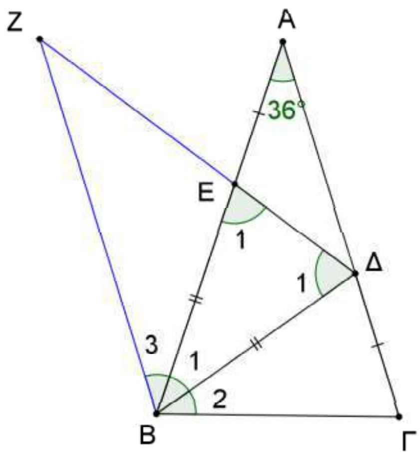
α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (1). Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, το δεδομένο $\hat{A} = 36^o$ και τη σχέση (1) προκύπτει ότι $36^o + \hat{B} + \hat{B} = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{B} = 144^o \Leftrightarrow \hat{B} = 72^o$.



Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, άρα $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{72^o}{2} = 36^o$ (2). Από το δεδομένο $\hat{A} = 36^o$ και τη σχέση (2) είναι $\hat{A} = \hat{B}_1$, άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές γιατί έχει δύο ίσες γωνίες. Οπότε, απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}_1$ βρίσκονται ίσες πλευρές αντίστοιχα, δηλαδή $B\Delta = A\Delta$ (3).

β) Από τα δεδομένα έχουμε $AB = A\Gamma$ και $AE = \Gamma\Delta$. Με αφαίρεση κατά μέλη είναι $AB - AE = A\Gamma - \Gamma\Delta$, δηλαδή $BE = A\Delta$ (4). Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι $B\Delta = BE$, άρα το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

γ) Έστω ΒΖ η παράλληλη στην ΑΓ που τέμνει την προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) στο Ζ.



12200-Λύση

Από το β) ερώτημα έχουμε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές ΒΔ και ΒΕ, οπότε οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ΔΕ του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ (5). Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΔΕ έχουμε ότι $\hat{B}_1 + \hat{\Delta}_1 + \hat{E}_1 = 180^o$ και επειδή είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ και από τη σχέση (4) θα έχουμε ότι

$36^o + \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_1 = 180^o \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 144^o \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = 72^o$ (6).

Αφού ΒΖ, ΑΓ είναι παράλληλες με τέμνουσα την ΑΒ, τότε είναι $\hat{B}_3 = \hat{A}$ ως εντός εναλλάξ γωνίες. Αφού είναι $\hat{A} = 36^o$ από δεδομένα και $\hat{B}_3 = \hat{A}$ θα είναι $\hat{B}_3 = 36^o$. Είναι $\Delta\hat{B}Z = \hat{B}_1 + \hat{B}_3 = 36^o + 36^o = 72^o$ (7), όπου $\hat{B}_1 = 36^o$ από την (2).

Από τις σχέσεις (6) και (7) θα είναι $\hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{B}Z$, άρα το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές γιατί έχει δύο γωνίες ίσες.

12416

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη της διαμέτρου.

ii. Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα.

iii. Αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου είναι ίσες και κάθετες, τότε το τετράπλευρο είναι τετράγωνο.

iv. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία είναι ίσα.

v. Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που μπορούμε να φέρουμε από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

(Μονάδες 15)

12416-Λύση

α)

i. Λάθος

Η πρόταση δεν ισχύει όταν η χορδή είναι διάμετρος του κύκλου.

ii. Σωστό

Πόρισμα II, σελίδα 103 σχολικό βιβλίο.

iii. Λάθος

Θα πρέπει το τετράπλευρο να είναι παραλληλόγραμμο.

iv. Σωστό

§3.6, $1^{η}$ συνέπεια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων, σελίδα 49 σχολικό βιβλίο (Σχήμα 24).

v. Σωστό

Πόρισμα i, σελίδα 129 σχολικό βιβλίο.

β) §3.15, Θεώρημα II (απόδειξη), σελίδα 68 σχολικό βιβλίο (Σχήμα 60).

12417

ΘΕΜΑ 2

Έστω δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r), με $R=3$, $r=2$ και $ΚΛ=4$. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω Α και Β.

(Μονάδες 15)

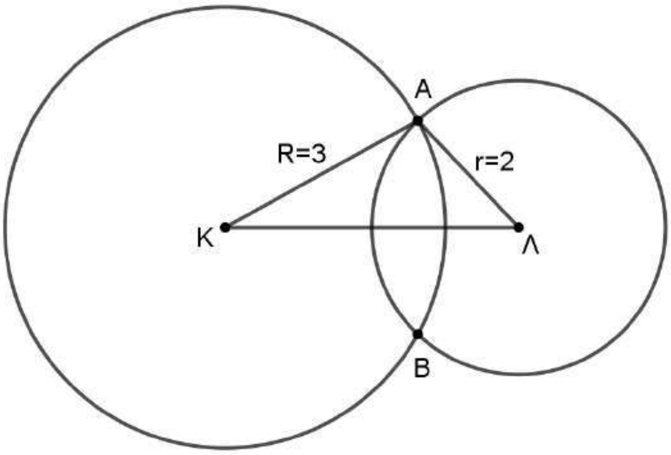
β) $K\hat{A}\Lambda > A\hat{\Lambda}K$.

(Μονάδες 10)

12417-Λύση

α) Έστω οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r), με R=3, r=2 και ΚΛ=4.

Έχουμε R+r=5 και R−r=1. Αφού ΚΛ<R+r και ΚΛ>R−r, συμπεραίνουμε ότι οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία Α και Β.



β) Στο τρίγωνο ΑΚΛ είναι ΚΛ>ΑΚ, αφού ΚΛ=4 και ΑΚ=R=3. Οπότε, οι απέναντι γωνίες $K\hat{A}\Lambda$ και $A\hat{\Lambda}K$ των άνισων πλευρών ΚΛ και ΑΚ αντίστοιχα, θα είναι ομοίως άνισες. Δηλαδή, $K\hat{A}\Lambda > A\hat{\Lambda}K$.

12418

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ>ΓΔ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τραπεζίου ΑΒΓΔ ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΕ με βάση ΑΒ. Αν Μ είναι το μέσο της βάσης ΓΔ, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ είναι ίσα.

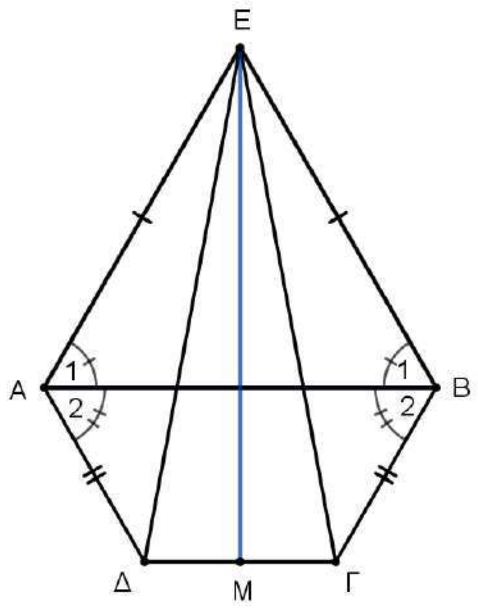
(Μονάδες 11)

β) Η διάμεσος ΕΜ του τριγώνου ΕΔΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{E}B$.

(Μονάδες 14)

12418-Λύση

Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ>ΓΔ και Μ το μέσο της βάσης ΓΔ. Επομένως, ΑΔ=ΒΓ (1) και $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ (2) (ως προσκείμενες στη βάση ΑΒ). Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τραπεζίου ΑΒΓΔ ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΕ με βάση ΑΒ. Οπότε ΑΕ=ΒΕ (3) και $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (4) (ως προσκείμενες στη βάση ΑΒ).



α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ έχουν:

ΑΔ=ΒΓ από (1)

ΑΕ=ΒΕ από (3)

$E\hat{A}\Delta = E\hat{B}\Gamma$ ως αθροίσματα ίσων γωνιών ($E\hat{A}\Delta = \hat{A}_1 + \hat{A}_2$, $E\hat{B}\Gamma = \hat{B}_1 + \hat{B}_2$ με $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$, $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$).

Επομένως, είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (Π-Γ-Π).

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΒΕΓ προκύπτει ότι ΕΔ=ΕΓ (5) (ως πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες $E\hat{A}\Delta$ και $E\hat{B}\Gamma$ αντίστοιχα) και $A\hat{E}\Delta = B\hat{E}\Gamma$ (6) (ως γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα).

Από την ισότητα (5) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ, οπότε η διάμεσος ΕΜ (το Μ είναι μέσο της πλευράς ΓΔ) είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{E}\Gamma$. Επομένως, $\Delta\hat{E}M = \Gamma\hat{E}M$ (7). Προσθέτοντας τις σχέσεις (6) και (7) κατά μέλη προκύπτει ότι $A\hat{E}\Delta + \Delta\hat{E}M = B\hat{E}\Gamma + \Gamma\hat{E}M$ και άρα $A\hat{E}M = B\hat{E}M$. Επομένως, η διάμεσος ΕΜ του τριγώνου ΕΔΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{E}B$.

12419

ΘΕΜΑ 4

Δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r), με R>r, τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από το σημείο Α φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διάκεντρο των κύκλων, η οποία τέμνει τους κύκλους (Κ, R) και (Λ, r) στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) ΓΔ=2ΚΛ

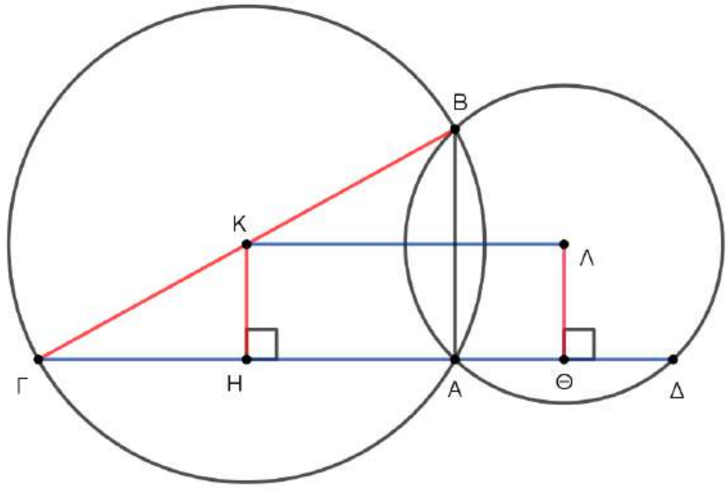
(Μονάδες 15)

β) Τα σημεία Β και Γ είναι αντιδιαμετρικά.

(Μονάδες 10)

12419-Λύση

α) Έστω οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r), με $R>r$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α, Β και η τέμνουσα ΓΑΔ παράλληλη στη διάκεντρο ΚΛ.



Φέρουμε τα αποστήματα ΚΗ και ΛΘ των χορδών ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Το τετράπλευρο ΚΛΘΗ είναι παραλληλόγραμμο, διότι οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες (ΚΛ//ΗΘ από υπόθεση και ΚΗ//ΛΘ αφού ΚΗ, ΛΘ είναι κάθετα στη ΓΔ). Οπότε ΚΛ=ΗΘ.

Επίσης, τα σημεία Η, Θ είναι μέσα των χορδών ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Οπότε έχουμε:

ΓΔ=ΓΑ+ΑΔ=2ΗΑ+2ΑΘ=2(ΗΑ+ΑΘ)=2ΗΘ=2ΚΛ

β) Η διάκεντρος ΚΛ των δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους ΑΒ, οπότε ΑΒ⊥ΚΛ. Επίσης, ΚΛ//ΓΔ. Άρα, ΑΒ⊥ΓΔ. Επομένως, η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή και εγγεγραμμένη στον κύκλο (Κ, R), οπότε η ΒΓ είναι διάμετρος. Συνεπώς, τα σημεία Β και Γ είναι αντιδιαμετρικά.

12635

Θέμα 2

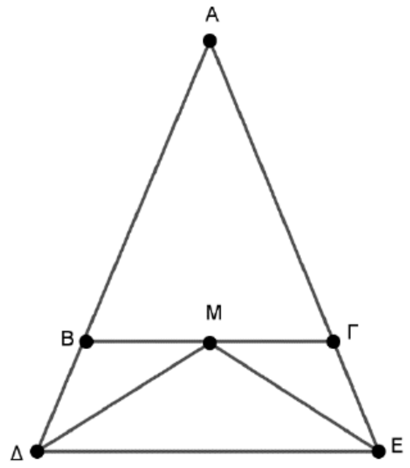
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Μ είναι το μέσο της βάσης του ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ προς τα Β,Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ ώστε ΒΔ=ΓΕ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΔΕ είναι ίση με τη γωνία ΜΕΔ. (Μονάδες 10)

12635-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ έχουν:

- ΜΒ=ΜΓ το Μ είναι μέσο της ΒΓ
- ΒΔ=ΓΕ από την υπόθεση
- $M\widehat{B}\Delta = M\widehat{\Gamma}E$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών Β και Γ

άρα τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα (ΠΓΠ).

β) Λόγω του (α) είναι ΜΔ=ΜΕ ως πλευρές των ίσων τριγώνων ΜΒΔ και ΜΓΕ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες ΜΒΔ και ΜΓΕ αντίστοιχα. Επομένως το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές, οπότε οι γωνίες της βάσης του ΜΔΕ και ΜΕΔ είναι ίσες.

12636

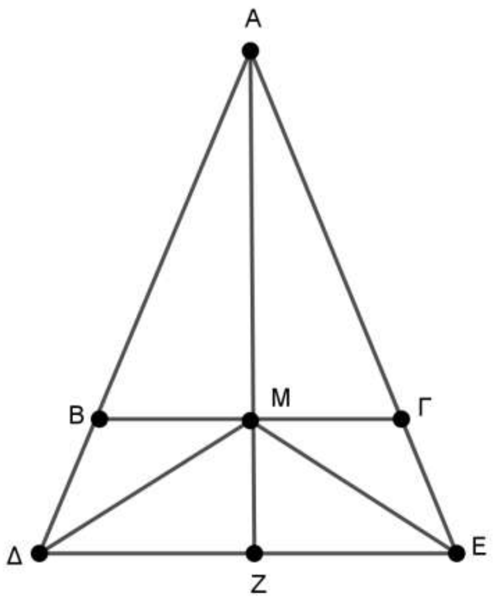
Θέμα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Μ είναι το μέσο της βάσης ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ, ΓΕ αντίστοιχα ώστε ΒΔ=ΓΕ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΔΕ είναι ίση με τη γωνία ΜΕΔ. (Μονάδες 6)

γ) Αν η ΑΜ τέμνει την ΔΕ στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι η ΑΖ είναι κάθετη στην ΔΕ. (Μονάδες 7)



12636-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ έχουν:

- ΜΒ = ΜΓ, το Μ είναι μέσο της ΒΓ
- ΒΔ = ΓΕ, από υπόθεση
- $\mathrm{M}\widehat{\mathrm{B}}\Delta = \mathrm{M}\widehat{\Gamma}\mathrm{E}$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών Β και Γ

άρα τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα (ΠΓΠ).

β) Λόγω του (α) είναι ΜΔ = ΜΕ, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\mathrm{M}\widehat{\mathrm{B}}\Delta$ και $\mathrm{M}\widehat{\Gamma}\mathrm{E}$ των ίσων τριγώνων ΜΒΔ και ΜΓΕ αντίστοιχα. Επομένως το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές, οπότε οι γωνίες της βάσης του ΜΔΕ και ΜΕΔ είναι ίσες.

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος άρα και διχοτόμος.

Επίσης ΑΔ = ΑΒ + ΒΔ και ΑΕ = ΑΓ +ΓΕ, οπότε ΑΔ=ΑΕ ως άθροισμα ίσων τμημάτων. Έτσι στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΕ, η ΑΖ ως διχοτόμος θα είναι και ύψος.

Άρα η ΑΖ είναι κάθετη στην ΔΕ.

12641

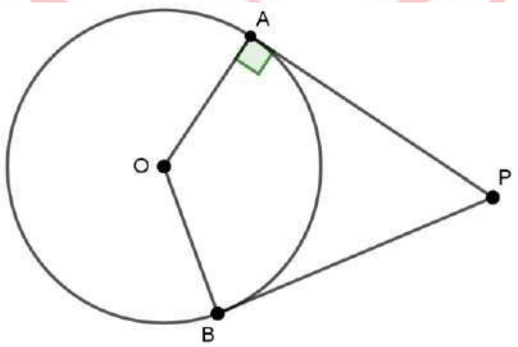
Θέμα 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα 4 cm. Από σημείο Ρ εκτός του κύκλου φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ προς τον κύκλο. Επίσης η γωνία ΑΡΒ ισούται με 60^0.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΡΑΟΒ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΑΡΟ. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΟΡ. (Μονάδες 9)



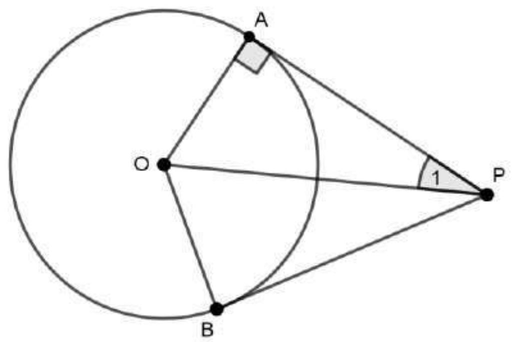
12641-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός κύκλου είναι κάθετα στις ακτίνες που αντιστοιχούν στα σημεία επαφής οπότε

$P\hat{A}O + P\hat{B}O = 90^0 + 90^0 = 180^0$ επομένως το τετράπλευρο PAOB είναι εγγράψιμο.

β)



Γνωρίζουμε ότι η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων άρα $A\hat{P}O = \frac{A\hat{P}B}{2} = \frac{60^0}{2} = 30^0$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAP η γωνία P_1 ισούται λόγω του (β) ερωτήματος με 30^0, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας,

άρα $OA = \frac{OP}{2}$ ή $OP = 2 \cdot OA = 2 \cdot 4 = 8$ cm.

12704

ΘΕΜΑ 2

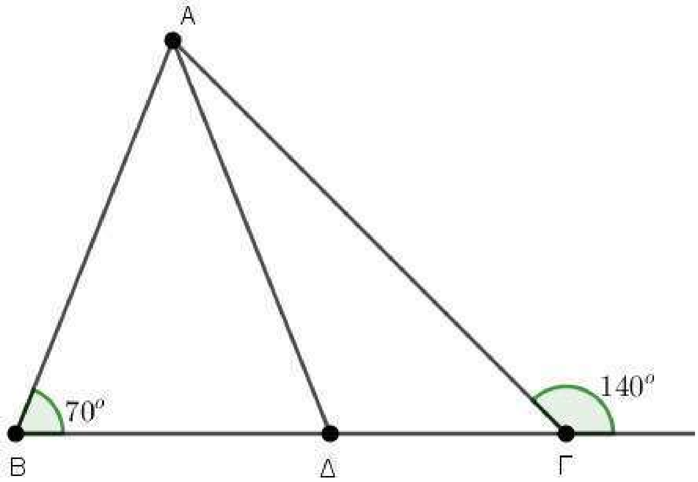
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{B}}=70^{o}$ και $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi\omega\tau}=140^{o}$.

Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ, ώστε ΑΔ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

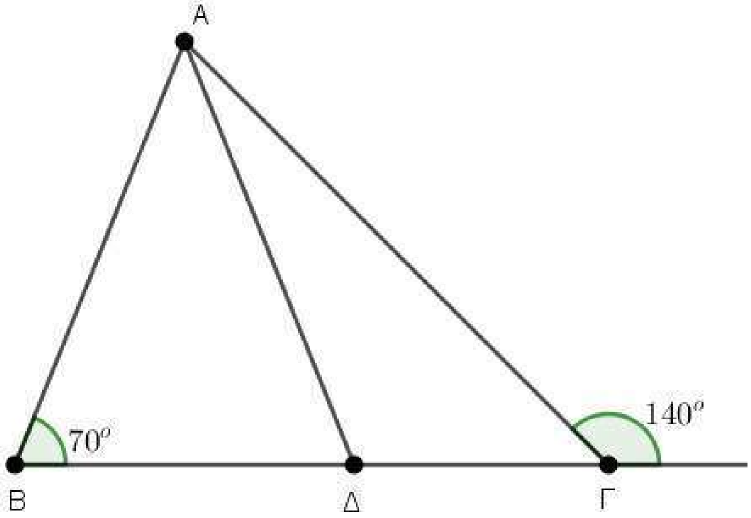
α) $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta=40^{o}$. (Μονάδες 9)

β) $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\Gamma = 110^{0}$. (Μονάδες 7)

γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)



12704-Λύση



α) Από την υπόθεση έχουμε ΑΔ = ΑΒ, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

Θα είναι $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Δ}$ = $\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Β}$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα. Άρα $\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Β}$=70°.

Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι: $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Δ}+\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Δ}+\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Β}=180^o$.

Άρα $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Δ}+70^o+70^o=180^o$, δηλαδή $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Δ}=180^o-140^o = 40^o$.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΔ ισχύει ότι η εξωτερική γωνία $\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Γ}=\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Δ}+\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Δ} = 70^o + 40^o = 110^o$.

γ) $\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Β}=180^o- 140^o = 40^o$, ως παραπληρωματική της $\hat{\Gamma}_{εξωτ}$.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\text{Β}\hat{\text{Α}}\Gamma+\text{Α}\hat{\text{Β}}\Gamma+\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Β} = 180^o$.

Επομένως η γωνία $\text{Β}\hat{\text{Α}}\Gamma= 180^o - \text{Α}\hat{\text{Β}}\Gamma - \text{Α}\hat{\Gamma}\text{Β} = 180^o - 70^o - 40^o = 70^o$.

Άρα $\text{Β}\hat{\text{Α}}\Gamma=70^o=\text{Α}\hat{\text{Β}}\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί έχει δύο γωνίες ίσες.

12705

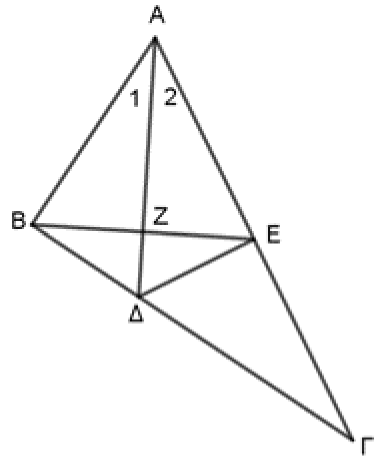
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε ΑΓ = 2ΑΒ. Η διχοτόμος του ΑΔ τέμνει την διάμεσο ΒΕ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}$. (Μονάδες 7)

β) ΔΒ = ΔΕ. (Μονάδες 8)

γ) $AZ \perp BE$ (Μονάδες 10)



12705-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η ΒΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, επομένως, ΑΕ = $\frac{ΑΓ}{2}$. Όμως ΑΒ = $\frac{ΑΓ}{2}$.

Άρα, ΑΒ = ΑΕ = $\frac{ΑΓ}{2}$.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΔ έχουν:

- ΑΒ = ΑΕ σύμφωνα με το ερώτημα (α)
- ΑΔ κοινή πλευρά
- $\widehat{Α}_1 = \widehat{Α}_2$, η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α

Επομένως, από το κριτήριο ισότητας Π-Γ Π, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΔ είναι ίσα.

Άρα, απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{Α}_1, \widehat{Α}_2$ έχουμε αντίστοιχα ίσες πλευρές δηλαδή

ΔΒ = ΔΕ.

γ) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΕ και η ΑΖ είναι διχοτόμος του.

Επομένως, η ΑΖ είναι και ύψος. Άρα, ΑΖ $\perp$ ΒΕ.

12707

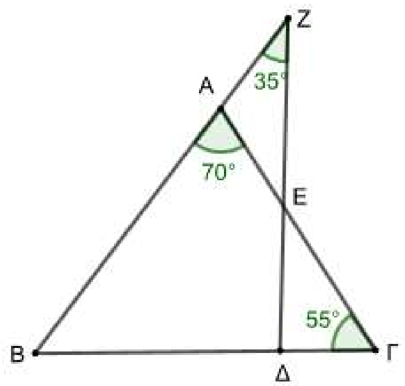
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=70°$ και $\hat{\Gamma}=55°$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το σημείο Α και παίρνουμε στην προέκταση σημείο Ζ ώστε $B\hat{Z}\Delta=35°$, όπου Δ εσωτερικό σημείο της ΒΓ. Η ΖΔ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) $Z\hat{\Delta}B=90°$. (Μονάδες 8)

γ) το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



12707-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για τις γωνίες Α, Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180°$.

Όμως, $\widehat{A}$ =70° και $\widehat{\Gamma}$ =55°, επομένως $70° + \widehat{B} + 55° = 180°$ ή ισοδύναμα

$\widehat{B} = 180° - 70° - 55°$ και τελικά $\widehat{B} = 55°$.

Άρα $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 55°$ και συνεπώς το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ.

β) Στο τρίγωνο ΒΖΔ έχουμε $\widehat{B} + B\widehat{Z}\Delta + Z\widehat{\Delta}B = 180°$ ή ισοδύναμα

$55° + 35° + Z\widehat{\Delta}B = 180°$ οπότε $Z\widehat{\Delta}B = 180° - 90° = 90°$.

γ) Η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΖΕ. Επομένως,

$\widehat{A} = A\widehat{E}Z + A\widehat{Z}E$ ή ισοδύναμα $70° = A\widehat{E}Z + 35°$, οπότε $A\widehat{E}Z = 35° = A\widehat{Z}E$. Άρα το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές.

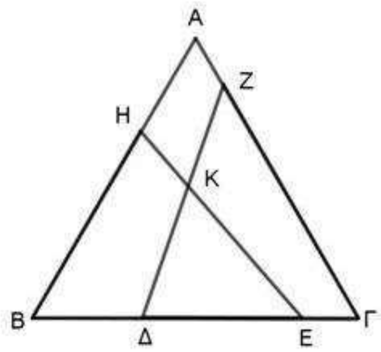
12708

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΒΓ και ΓΑ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα ώστε ΒΕ = ΓΖ. Στις πλευρές ΑΒ και ΓΒ θεωρούμε σημεία Η και Δ αντίστοιχα ώστε ΒΗ = ΓΔ. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΖ και ΕΗ τέμνονται στο σημείο Κ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΗ = ΔΖ και $B\hat{H}E = \Gamma\hat{\Delta}Z$. (Μονάδες 12)

β) τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΚΕΔ έχουν ίσες γωνίες μία προς μία. (Μονάδες 13)



12708-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΓΖΔ έχουν:

- ΒΕ = ΓΖ, από την υπόθεση
- ΒΗ = ΓΔ, από την υπόθεση
- $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 60°$, αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Από το κριτήριο ισότητας Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, επομένως, ΕΗ = ΖΔ και απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ, ΓΖ βρίσκονται αντίστοιχα οι ίσες γωνίες ΒΗΕ, ΓΔΖ.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΒΕΗ και ΓΖΔ προκύπτει ότι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ και ΓΖ βρίσκονται ίσες γωνίες, δηλαδή $\hat{H} = \hat{\Delta}$.

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι τα τρίγωνα ΚΕΔ και ΒΕΗ έχουν τη γωνία $\hat{E}$ κοινή και $\hat{\Delta} = \hat{H}$.

Επομένως, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή, $\Delta\hat{K}E = \hat{B}$

12709

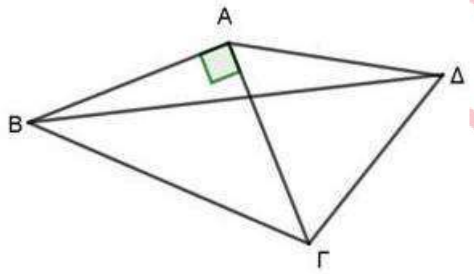
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\widehat{A} = 90°$. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΑΒΔ. (Μονάδες 12)



12709-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\widehat{A}$ =90°, οπότε $\widehat{B}$ + $\widehat{Γ}$= 90° και επειδή είναι και ισοσκελές έχουμε $\widehat{B} = \widehat{Γ}$. Άρα 2$\widehat{B}$ = 90° ή $\widehat{B}$ = 45°, οπότε και $\widehat{Γ}$ = 45°.

β) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο οπότε ΑΓ = ΑΔ = ΔΓ.

Έχουμε ΑΒ = ΑΓ και ΑΓ = ΑΔ, οπότε ΑΒ = ΑΔ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

γ) Επειδή το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο έχουμε Δ$\widehat{A}$Γ =60°.

Οπότε Β$\widehat{A}$Δ = Β$\widehat{A}$Γ + Δ$\widehat{A}$Γ = 90° + 60° = 150°.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε Α$\widehat{B}$Δ = Α$\widehat{Δ}$Β διότι ΑΒ = ΑΔ, οπότε από το άθροισμα των γωνιών του προκύπτει Α$\widehat{B}$Δ + Α$\widehat{Δ}$Β +Β$\widehat{A}$Δ = 180° ή 2Α$\widehat{B}$Δ + 150° = 180° ή 2Α$\widehat{B}$Δ = 30° ή Α$\widehat{B}$Δ = 15°.

12710

ΘΕΜΑ 2

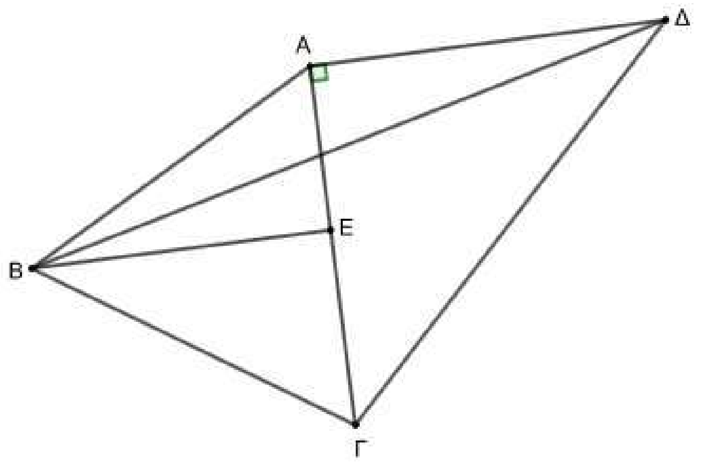
Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΒΕ. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με υποτείνουσα τη ΓΔ έτσι, ώστε τα σημεία Β και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ // ΑΔ. (Μονάδες 10)

β) οι γωνίες ΕΒΔ και ΑΔΒ είναι ίσες. (Μονάδες 7)

γ) το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)



12710-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, οπότε η διχοτόμος ΒΕ είναι και ύψος, δηλαδή η ΒΕ είναι κάθετη στην ΑΓ.

Το τρίγωνο ΓΑΔ είναι ορθογώνιο στην κορυφή Α , οπότε η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΓ.

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ και ΑΔ είναι κάθετα στην ΑΓ, οπότε είναι μεταξύ τους παράλληλα.

β) Οι γωνίες ΕΒΔ και ΑΔΒ είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΕ και ΑΔ που τέμνονται από την ΒΔ, άρα είναι ίσες.

γ) Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ και από το ισοσκελές τρίγωνο ΓΑΔ έχουμε ΑΓ = ΑΔ, οπότε ΑΒ = ΑΔ, επομένως το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές.

13441

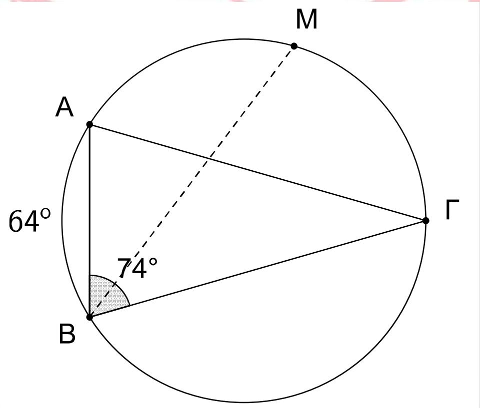
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο με $\hat{B} = 74^o$. Το μέτρο του τόξου ΑΒ που δεν περιέχει το σημείο Γ ισούται με 64^o και Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΓ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

β) Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η ΒΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. (Μονάδες 5)



13441-Λύση

α) Η $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο τόξο ΑΒ, συνεπώς το μέτρο της ισούται με το μισό του μέτρου του τόξου αυτού. Άρα $\hat{\Gamma} = \frac{64^o}{2} = 32^o$.

Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$.

Όμως $\hat{B} = 74^o$ από τα δεδομένα και $\hat{\Gamma} = 32^o$, οπότε έχουμε

$\hat{A} + 74^o + 32^o = 180^o$ ή $\hat{A} = 74^o$.

β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί έχει δύο ίσες γωνίες, τις $\hat{A} = \hat{B} = 74^o$.

γ) Το σημείο Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΓ, άρα τα τόξα ΑΜ και ΜΓ είναι ίσα. Οι γωνίες $A\hat{B}M$ και $\Gamma\hat{B}M$ είναι ίσες, γιατί είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στα ίσα τόξα ΑΜ και ΜΓ αντίστοιχα. Από την ισότητα $A\hat{B}M = \Gamma\hat{B}M$ συμπεραίνουμε ότι η ΒΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.

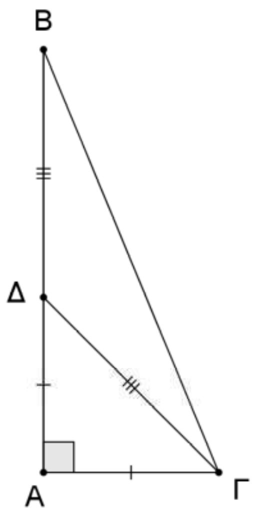
13442

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}} = 90^{o}$. Στην πλευρά του ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{\Delta\Gamma}$ και $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{A\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\Gamma = 45^{o}$. (Μονάδες 12)

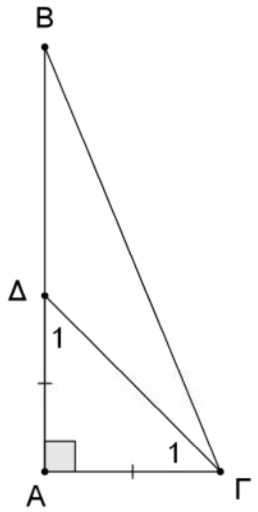
β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\mathrm{B}}$. (Μονάδες 13)



13442-Λύση

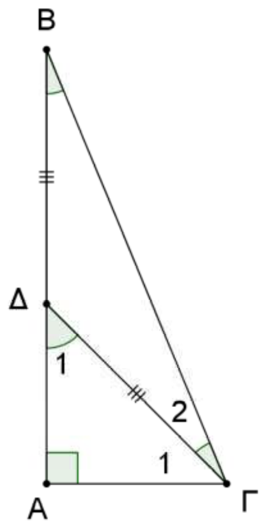
α) Έστω $\hat{\Delta}_1 = \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$. Από τα δεδομένα έχουμε $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A\Delta}$, άρα το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$ (1).

Όμως οι γωνίες $\hat{\Gamma}_1, \hat{\Delta}_1$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ είναι συμπληρωματικές. Χρησιμοποιώντας την ισότητα (1) προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_1 = 90^o$ ή $\hat{\Delta}_1 = 45^o$.



β) Από τα δεδομένα έχουμε $\mathrm{B\Delta} = \Delta\Gamma$, άρα το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}_2$ (2).

Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΒΓΔ άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}_2$. Έτσι λόγω του ερωτήματος α) και της ισότητας (2) θα είναι $\hat{\mathrm{B}} + \hat{\mathrm{B}} = 45^o$ ή $\hat{\mathrm{B}} = 22{,}5^o$.



13443

ΘΕΜΑ 2

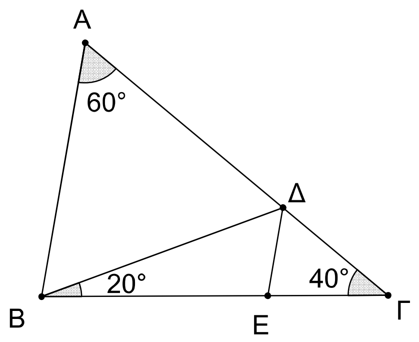
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 60^o$ και $\widehat{\Gamma} = 40^o$. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ, ώστε $\Gamma\widehat{B}\Delta = 20^o$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β) Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

i. $B\widehat{\Delta}E = 60^o$. (Μονάδες 8)

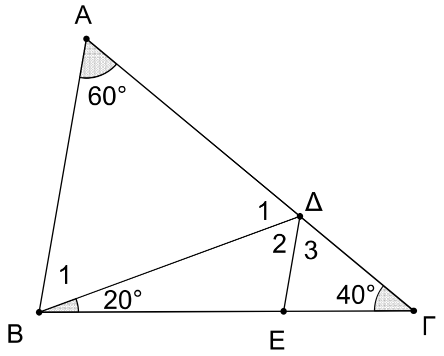
ii. Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\widehat{\Delta}\Gamma$. (Μονάδες 7)



13443-Λύση

α) Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΒΓΔ, άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 = \Gamma\hat{B}\Delta + \hat{\Gamma} = 20^o + 40^o = 60^o$.

Από την υπόθεση και το ερώτημα α) έχουμε ότι οι γωνίες $\hat{A}, \hat{\Delta}_1$ του τριγώνου ΑΒΔ είναι 60^o. Αυτό σημαίνει ότι και η τρίτη γωνία $\hat{B}_1$ θα είναι 60^o, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.



β) i. Είναι $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_2$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ με τέμνουσα την ΒΔ. Όμως από το ερώτημα α) είναι $\hat{B}_1 = 60^o$, άρα $\hat{\Delta}_2 = 60^o$ ή $B\hat{\Delta}E = 60^o$.

ii. Είναι $\hat{A} = \hat{\Delta}_3$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ με τέμνουσα την ΑΓ. Όμως $\hat{A} = 60^o$, άρα $\hat{\Delta}_3 = 60^o$.

Αφού $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_3 = 60^o$, η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Delta}\Gamma$.

13444

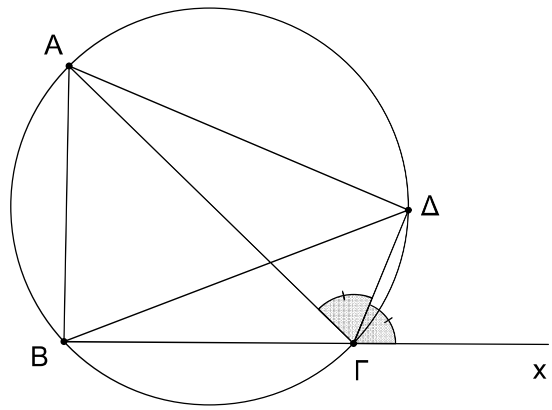
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ. Η γωνία $\Delta\hat{\Gamma}x$ είναι εξωτερική γωνία του τετραπλεύρου και η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}x$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\hat{A}\Delta = \frac{1}{2}A\hat{\Gamma}x$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές και να προσδιορίσετε τις ίσες πλευρές του. (Μονάδες 10)

γ) Αν η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $A\hat{\Gamma}B$ και $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι συμπληρωματικές. (Μονάδες 5)

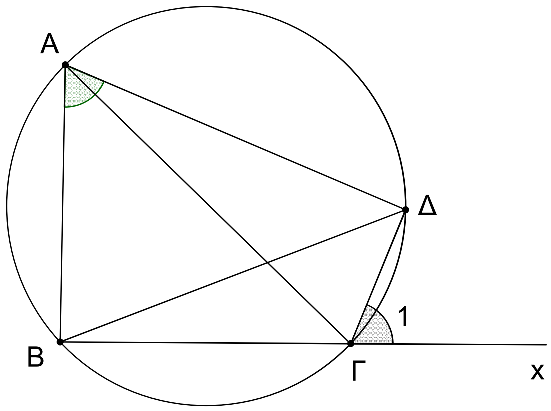


13444-Λύση

α) Η γωνία $\hat{\Gamma}_1$ είναι εξωτερική του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, συνεπώς ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του, δηλαδή $\hat{\Gamma}_1 = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ (1).

Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$, άρα $\hat{\Gamma}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$ (2).

Από τις ισότητες (1), (2) προκύπτει ότι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$ (3).

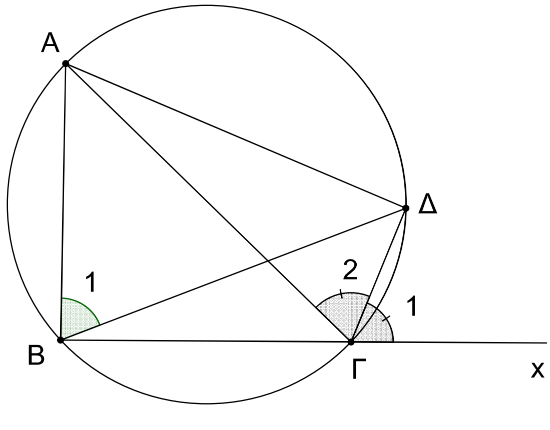


β) Είναι $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\Gamma}_2$ (4),
ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΑΔ.

Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$, άρα $\hat{\Gamma}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$ (5).

Από τις σχέσεις (4), (5) προκύπτει ότι $\hat{\mathrm{B}}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{x}$ (6).

Από τις σχέσεις (3), (6) προκύπτει ότι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \hat{\mathrm{B}}_1$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές αφού έχει δύο ίσες γωνίες. Ίσες πλευρές του τριγώνου είναι οι ΔΒ και ΔΑ, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες του $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\hat{\mathrm{B}}_1$ αντίστοιχα.

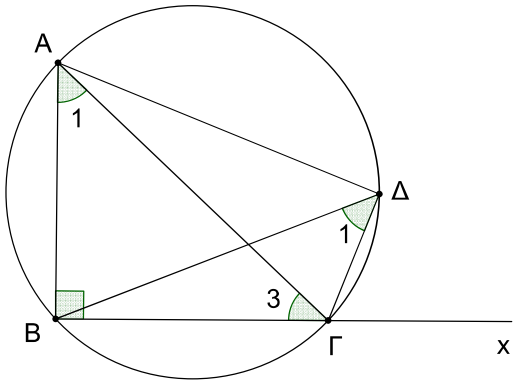


γ) Αν η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου, τότε το τόξο ΑΔΓ είναι ημικύκλιο, οπότε η γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ είναι ορθή ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Οι οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι συμπληρωματικές, δηλαδή
$\hat{\Gamma}_3 + \hat{\mathrm{A}}_1 = 90^{\circ}$ (7).

13444-Λύση

Οι γωνίες $\widehat{A}_1, \widehat{\Delta}_1$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΒΓ, άρα $\widehat{A}_1 = \widehat{\Delta}_1$ (8).

Από τις ισότητες (7), (8) προκύπτει ότι $\widehat{\Gamma}_3 + \widehat{\Delta}_1 = 90^o$, άρα οι γωνίες $A\widehat{\Gamma}B$ και $B\widehat{\Delta}\Gamma$ είναι συμπληρωματικές.



13497

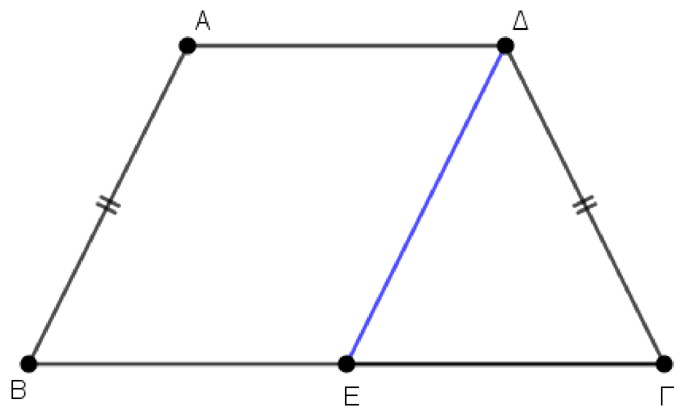
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με ΒΓ > ΔΓ.

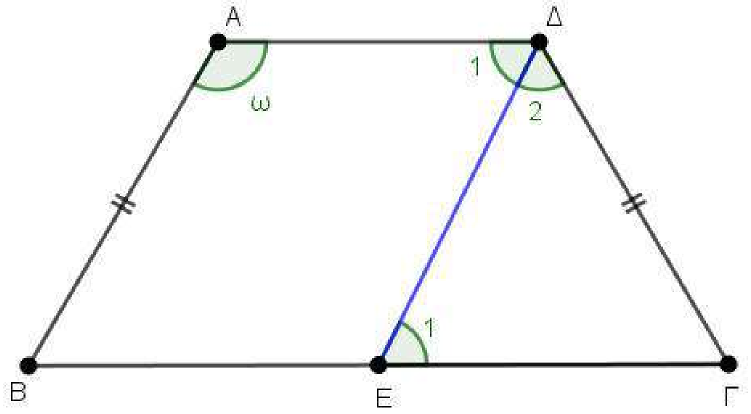
Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε σημείο Ε, τέτοιο ώστε ΓΕ = ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\Gamma$. (Μονάδες 12)

β) Αν $\widehat{\mathrm{A}}=120^{o}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)



13497-Λύση



α) $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\mathrm{E}}_1$ (1), γιατί είναι γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ με τέμνουσα την ΔΕ.

$\widehat{\Delta}_2 = \widehat{\mathrm{E}}_1$ (2), γιατί είναι γωνίες προσκείμενες στη βάση ΔΕ του ισοσκελούς τριγώνου ΔΓΕ.

Από (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$, άρα η ΔΕ είναι διχοτόμος της $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\Gamma$.

β) Αν $\widehat{\mathrm{A}} = 120^o$, τότε, επειδή το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές, θα είναι $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\Gamma = 120^o$.

Επειδή αποδείξαμε στο α) ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\Gamma$,

θα είναι $\widehat{\Delta}_2 = 60^o$ και λόγω της σχέσης (2), $\widehat{\mathrm{E}}_1 = 60^o$.

Άρα, το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισόπλευρο, γιατί έχει δύο γωνίες 60^o, οπότε και η τρίτη γωνία $\widehat{\Gamma}$ θα είναι 60^o.

13499

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$) με $AB < A\Gamma$ και ΑΗ το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε $\Delta B = AB$ και $\Gamma E = \Gamma A$. Αν ΔΖ και ΕΘ είναι οι αποστάσεις των Δ και Ε από τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\widehat{A}\Delta = \Delta\widehat{A}H$ και $E\widehat{A}B = H\widehat{A}E$.

(Μονάδες 14)

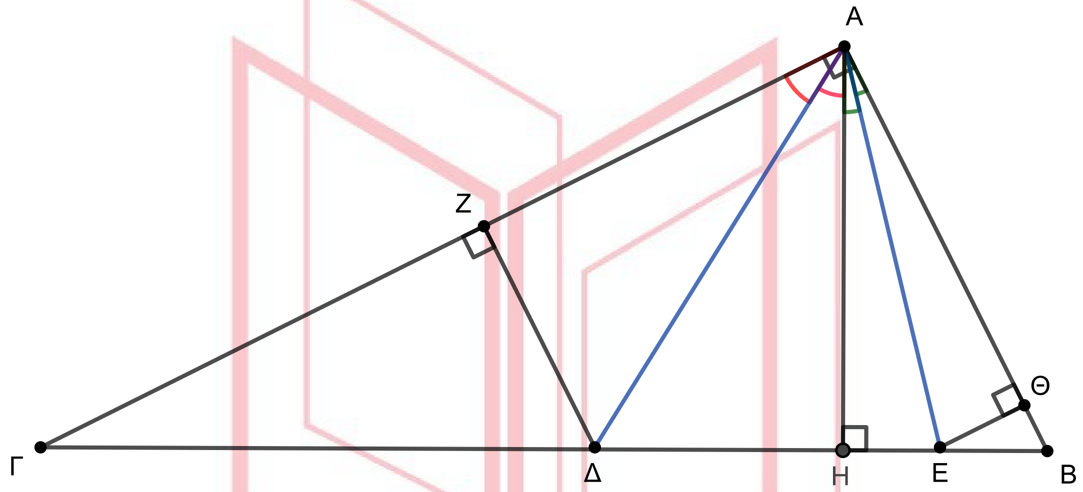
β) $\Delta E = \Delta Z + E\Theta$.

(Μονάδες 11)

13499-Λύση

ΛΥΣΗ

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}=90^o$) με $AB < A\Gamma$ και ΑΗ το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε $\Delta B = AB$ και $\Gamma E = \Gamma A$. Φέρουμε τις αποστάσεις ΔΖ και ΕΘ των Δ και Ε από τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.



α) Από το σχήμα έχουμε ότι: $\Gamma\widehat{A}\Delta = \Gamma\widehat{A}B - \Delta\widehat{A}B = 90^o - \Delta\widehat{A}B$ (1).

Οι γωνίες $\Delta\widehat{A}H$ και $A\widehat{\Delta}H$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΗ είναι συμπληρωματικές, οπότε: $\Delta\widehat{A}H = 90^o - A\widehat{\Delta}H$ (2).

Αφού $B\Delta = BA$, το τρίγωνο ΒΔΑ θα είναι ισοσκελές με βάση ΔΑ, οπότε οι γωνίες $\Delta\widehat{A}B$ και $A\widehat{\Delta}H$ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση, δηλαδή $\Delta\widehat{A}B = A\widehat{\Delta}H$ (3).

Άρα, από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\Gamma\widehat{A}\Delta = \Delta\widehat{A}H$ (4).

Έχουμε, επίσης, ότι: $E\widehat{A}B = \Gamma\widehat{A}B - \Gamma\widehat{A}E = 90^o - \Gamma\widehat{A}E$ (5).

Οι γωνίες $H\widehat{A}E$ και $A\widehat{E}H$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΕΗ είναι συμπληρωματικές, οπότε: $H\widehat{A}E = 90^o - A\widehat{E}H$ (6).

Αφού $\Gamma E = \Gamma A$, το τρίγωνο ΓΕΑ θα είναι ισοσκελές με βάση ΕΑ, οπότε οι γωνίες $\Gamma\widehat{A}E$ και $A\widehat{E}H$ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση, δηλαδή $\Gamma\widehat{A}E = A\widehat{E}H$ (7).

Άρα, από τις σχέσεις (5), (6) και (7) προκύπτει ότι $E\widehat{A}B = H\widehat{A}E$ (8).

β) Από (α) ερώτημα ισχύει ότι $E\widehat{A}B = H\widehat{A}E$, οπότε η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $H\widehat{A}B$ του τριγώνου ΑΗΒ.

Άρα, το σημείο Ε ισαπέχει από τις πλευρές ΑΗ και ΑΒ κι επομένως είναι $EH = E\Theta$.

Από (α) ερώτημα ισχύει, επίσης, ότι $\Gamma\widehat{A}\Delta = \Delta\widehat{A}H$, οπότε η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $H\widehat{A}\Gamma$ του τριγώνου ΑΗΓ.

13499-Λύση

Άρα, το σημείο Δ ισαπέχει από τις πλευρές ΑΗ και ΑΓ κι επομένως είναι $ΔΗ = ΔΖ$.

Συνεπώς, $ΔΕ = ΔΗ + ΕΗ = ΔΖ + ΕΘ$.

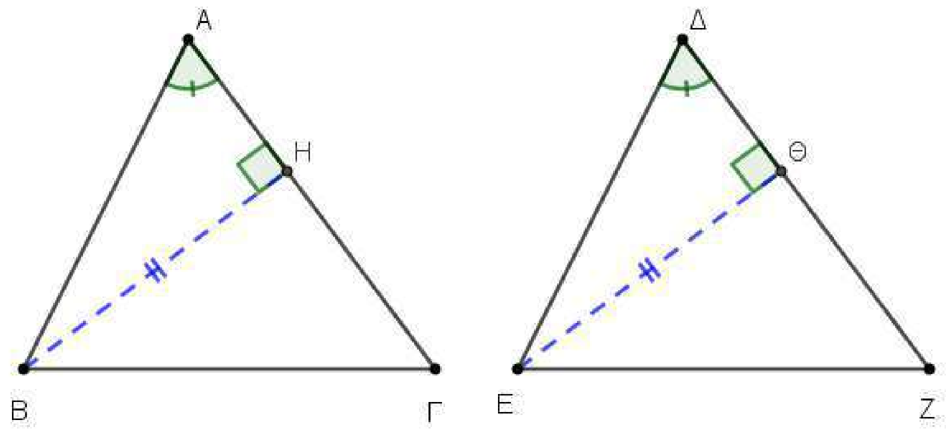
13517

ΘΕΜΑ 2

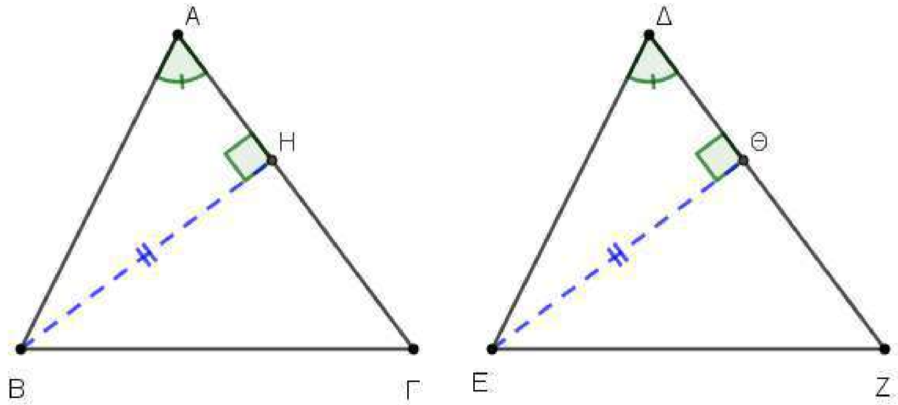
Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με $\widehat{A}=\widehat{\Delta}$, $A\widehat{B}\Gamma = \Delta\widehat{E}Z$. Αν τα ύψη τους ΒΗ και ΕΘ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ = ΔΕ. (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα . (Μονάδες 12)



13517-Λύση



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΔΕΘ. Αυτά έχουν:

ΒΗ = ΕΘ, από υπόθεση,

$\widehat{\mathrm{A}}=\widehat{\Delta}$, από υπόθεση,

$\widehat{\mathrm{H}} = \widehat{\Theta} = 90^{o}$.

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΔΕΘ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν μια κάθετη πλευρά τους και την απέναντι οξεία γωνία τους αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Επομένως, θα έχουν τις υποτείνουσες ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΔΕ (1).

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

ΑΒ =ΔΕ, από (1),

$\widehat{\mathrm{A}}=\widehat{\Delta}$, από υπόθεση,

$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = \Delta\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$, από υπόθεση.

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

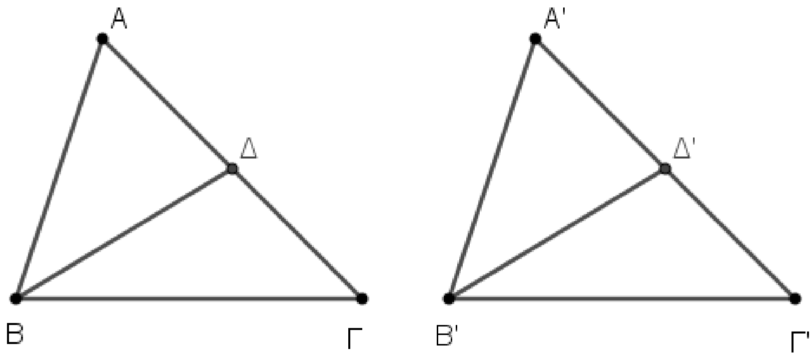
13518

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ του σχήματος με ΑΓ = Α΄Γ΄ και ΑΒ = Α΄Β΄. Αν οι διάμεσοι ΒΔ και Β΄Δ΄ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{A}=\widehat{A}'$ (Μονάδες 15)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα. (Μονάδες 10)



13518-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄ έχουν:

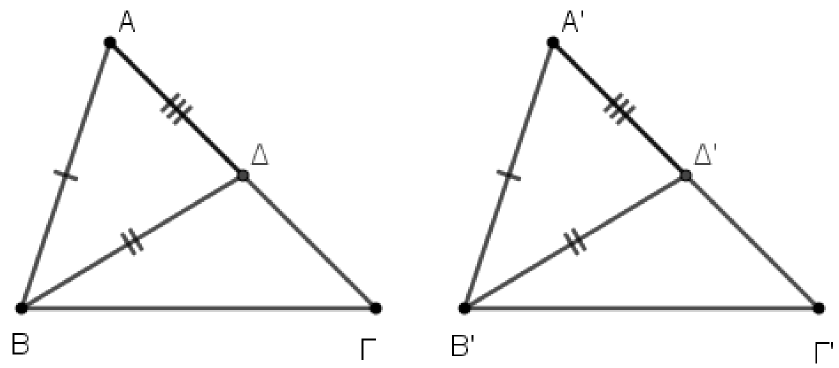
ΒΔ = Β΄Δ΄, από υπόθεση,

ΑΒ = Α΄Β΄, από υπόθεση,

ΑΔ = Α΄Δ΄, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΓ και Α΄Γ΄ αντίστοιχα.

Επομένως, τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Άρα, $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{A}}'$ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΔ και Β΄Δ΄ αντίστοιχα.



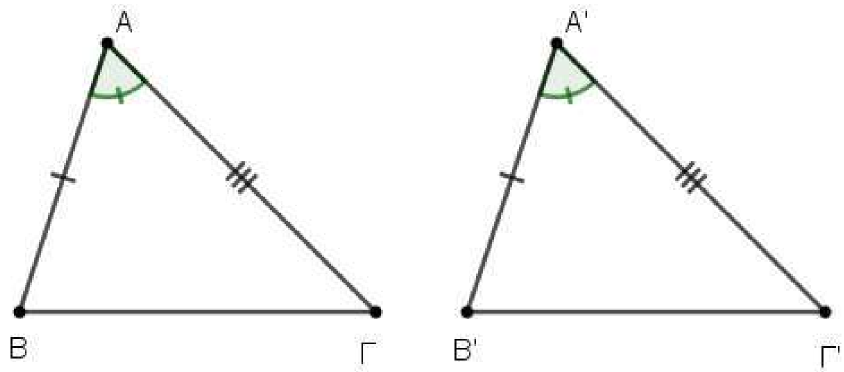
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:

ΑΒ = Α΄Β΄, από υπόθεση,

ΑΓ = Α΄Γ΄, από υπόθεση,

$\widehat{\mathrm{A}}=\widehat{\mathrm{A}}'$, από το προηγούμενο ερώτημα.

Επομένως, τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.



13519

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ>ΑΔ. Στην ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε ΑΕ = ΑΔ. Από το μέσο Μ της ΔΕ φέρουμε παράλληλη προς την ΔΓ που τέμνει την ΒΓ στο Κ.

α) Να αποδείξετε ΑΜ $\perp$ ΔΕ. (Μονάδες 7)

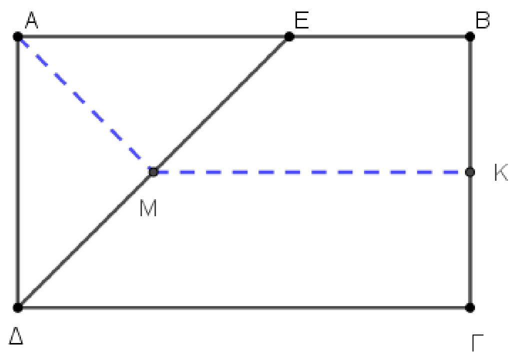
β) Να αποδείξετε ότι 2ΜΚ = 2ΑΒ - ΑΔ. (Μονάδες 9)

γ) Φέρνουμε την ΕΚ που τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο Ζ.

Να αποδείξετε ότι ΓΖ = ΑΒ – ΑΔ. (Μονάδες 9)

13519-Λύση

Κατασκευάζουμε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ > ΑΔ. Στην ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε, τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΕ. Από το μέσο Μ της ΔΕ φέρουμε παράλληλη προς την ΔΓ που τέμνει την ΒΓ στο Κ.



α) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, γιατί ΑΔ = ΑΕ.

Επομένως, η διάμεσος ΑΜ που αντιστοιχεί στην βάση θα είναι και ύψος.

Άρα, $AM \perp \Delta E$.

β) Αν η ΔΕ ήταν παράλληλη στην ΒΓ, θα είχαμε από το Δ δύο παράλληλες, τις ΔΑ και ΔΕ προς την ΒΓ, που είναι άτοπο λόγω του 1ου αιτήματος παραλληλίας. Επομένως, η ΔΕ δεν είναι παράλληλη προς την ΒΓ. Άρα, το ΕΒΓΔ είναι τραπέζιο γιατί ΕΒ//ΔΓ και η ΔΕ δεν είναι παράλληλη με την ΒΓ.

Από το μέσο Μ της ΔΕ φέραμε ΜΚ//ΔΓ, άρα το Κ είναι το μέσο πλευράς ΒΓ.

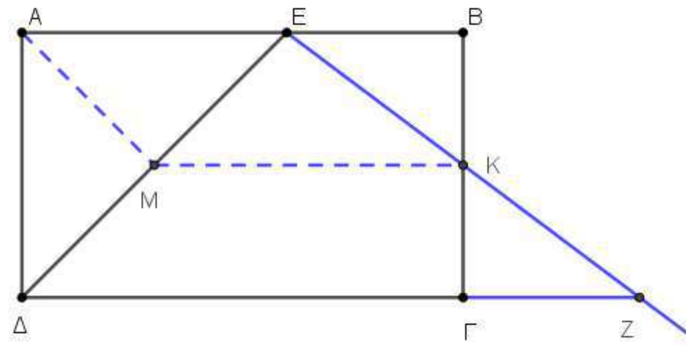
Η διάμεσος ΜΚ του τραπεζίου ΕΒΓΔ θα ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων, δηλαδή $MK = \frac{\Delta\Gamma + EB}{2}$ ή $2MK = \Delta\Gamma + EB$ (1).

Όμως ΔΓ=ΑΒ (2), ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και ΑΔ = ΑΕ (3), από υπόθεση. Επίσης, ΕΒ = ΑΒ-ΑΕ (4).

Από (1), (2), (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι 2ΜΚ = ΑΒ + ΑΒ – ΑΕ = 2ΑΒ – ΑΔ (5).

γ) Προεκτείνουμε την ΕΚ που τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο Ζ.

13519-Λύση



Στο τρίγωνο ΔΕΖ το Μ είναι μέσο της ΔΕ και ΜΚ//ΔΖ, άρα η ΜΚ διέρχεται από το μέσο Κ της ΕΖ. Επομένως:

$ΜΚ = \frac{ΔΖ}{2} \Leftrightarrow 2ΜΚ = ΔΖ \Leftrightarrow$(από (5)) $2ΑΒ - ΑΔ = ΔΓ + ΓΖ \Leftrightarrow$

$2ΑΒ-ΑΔ=ΑΒ+ΓΖ \Leftrightarrow ΓΖ = ΑΒ – ΑΔ.$

13520

ΘΕΜΑ 4

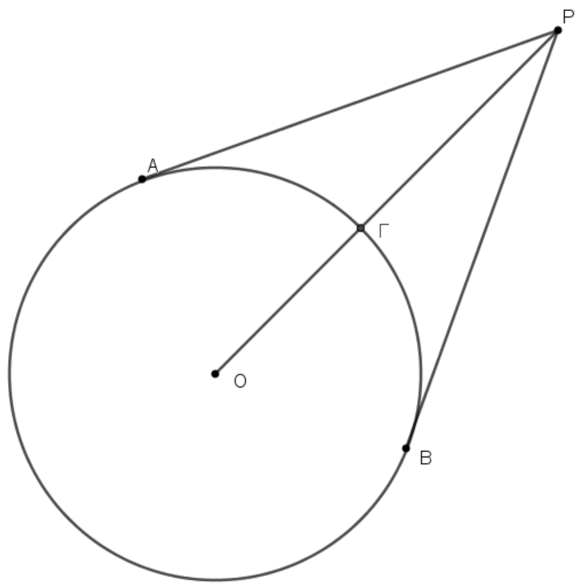
Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και σημείο Ρ εκτός του κύκλου. Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Η ΡΟ τέμνει το μικρότερο του ημικυκλίου τόξο ΑΒ στο Γ και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{P}}\mathrm{B}=60^{o}$. Να αποδείξετε ότι:

α) ΟΡ = 2ρ. (Μονάδες 10)

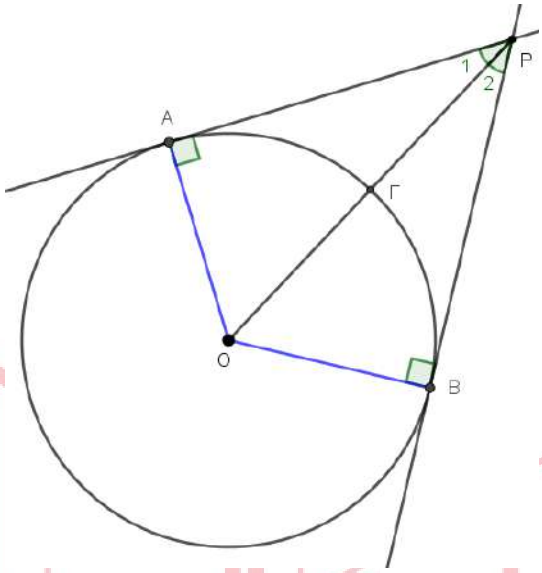
β) $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}=120^{o}$. (Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι ρόμβος.

Συμφωνείτε μαζί του; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 05)



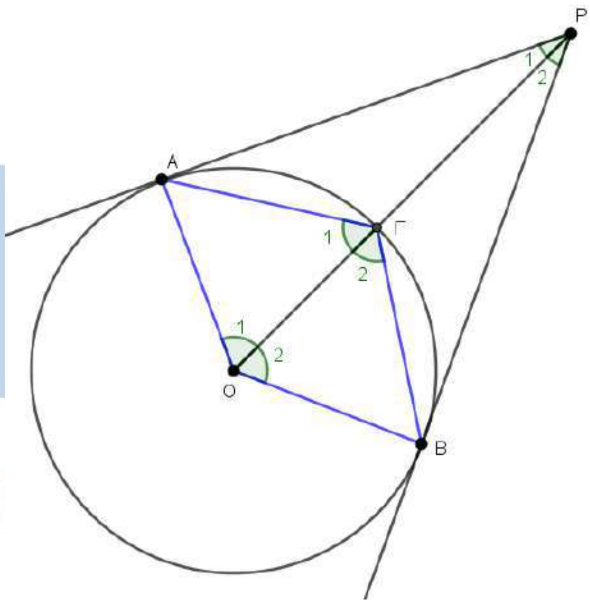
13520-Λύση



α) Φέρουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ που είναι κάθετες στα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Επομένως τα τρίγωνα ΟΑΡ και ΟΒΡ είναι ορθογώνια.

Η ΡΟ είναι διχοτόμος της $\mathrm{A\hat{P}B} = 60^o$, οπότε $\hat{\mathrm{P}}_1 = \hat{\mathrm{P}}_2 = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΡ είναι $\hat{\mathrm{P}}_1 = 30^o$, οπότε η απέναντι της γωνίας κάθετη πλευρά ΟΑ = $\frac{\mathrm{PO}}{2}$, δηλαδή ΡΟ = 2ρ, αφού ΟΑ = ΟΒ = ρ.



β) Στο τρίγωνο ΟΡΑ: $\hat{\mathrm{O}}_1 + \mathrm{O\hat{A}P} + \mathrm{O\hat{P}A}$ = 180°. Άρα, $\hat{\mathrm{O}}_1 =$ 180° – 90° – 30° = 60°.

ΟΑ = ΟΓ = ρ, οπότε το τρίγωνο ΟΓΑ είναι ισοσκελές με μία γωνία 60°, άρα είναι ισόπλευρο. Επομένως $\hat{\Gamma}_1 = 60^o$ (1).

Στο τρίγωνο ΟΡΒ: $\hat{\mathrm{O}}_2 + \mathrm{O\hat{B}P} + \mathrm{O\hat{P}B}$ = 180°. Άρα $\hat{\mathrm{O}}_2 =$ 180° – 90° – 30° = 60°.

13520-Λύση

ΟΒ = ΟΓ = ρ, οπότε το τρίγωνο ΟΓΒ είναι ισοσκελές με μία γωνία 60^o, άρα ισόπλευρο. Επομένως, $\hat{\Gamma}_2=60^o$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε ότι $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 60^o+60^o = 120^o$.

γ) Στο β) ερώτημα αποδείξαμε ότι τα τρίγωνα ΟΓΑ και ΟΓΒ είναι ισόπλευρα.

Επομένως, ΑΓ = ΟΑ = ΟΓ = ΓΒ = ΟΒ. Το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι ρόμβος γιατί έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

13522

ΘΕΜΑ 4

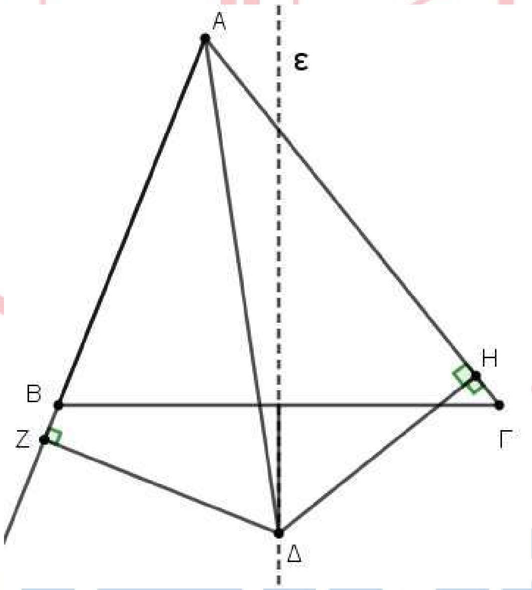
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει την μεσοκάθετο (ε) της ΒΓ στο Δ. Από το Δ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΔΖ και ΔΗ προς τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΔ. (Μονάδες 08)

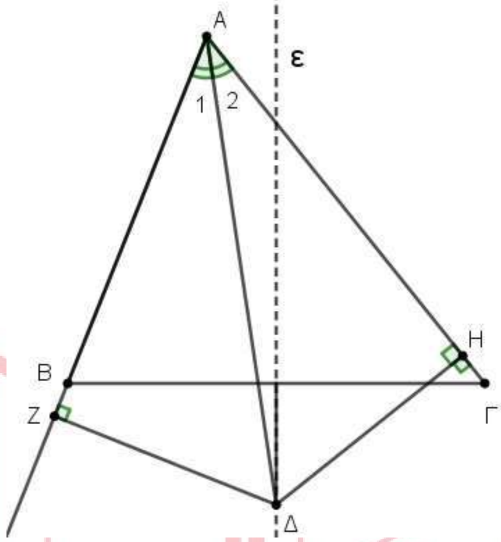
β) Να αποδείξετε ότι ΒΖ = ΗΓ. (Μονάδες 09)

γ) Αν η γωνία Α = 60^o και Μ το μέσο ης ΑΔ, να αποδείξετε ότι ΗΜ = ΖΔ.

(Μονάδες 08)



13522-Λύση



α) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΔ έχουν:

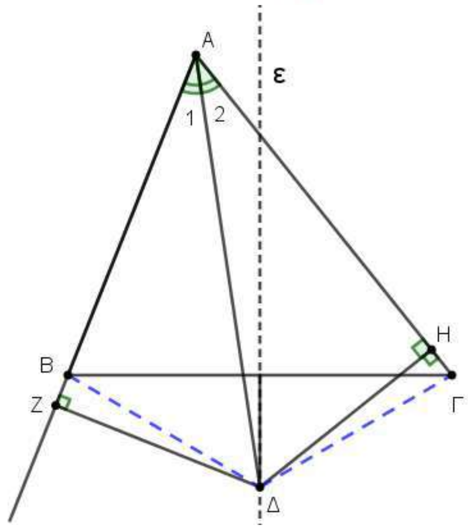
ΑΔ κοινή πλευρά,

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, επειδή ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α.

$A\widehat{Z}\Delta = A\widehat{H}\Delta$ = 90°, επειδή οι ΔΖ, ΔΗ είναι κάθετες στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΔ είναι ίσα, επειδή έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

β) Φέρνουμε τις ΔΒ, ΔΓ. Επειδή το Δ ανήκει στην μεσοκάθετο της ΒΓ θα ισαπέχει από τα Β και Γ, άρα ΒΔ = ΓΔ (1).



Τα τρίγωνα ΒΖΔ και ΓΗΔ έχουν:

$A\widehat{Z}\Delta = A\widehat{H}\Delta$ = 90°, επειδή οι ΔΖ, ΔΗ είναι κάθετες στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

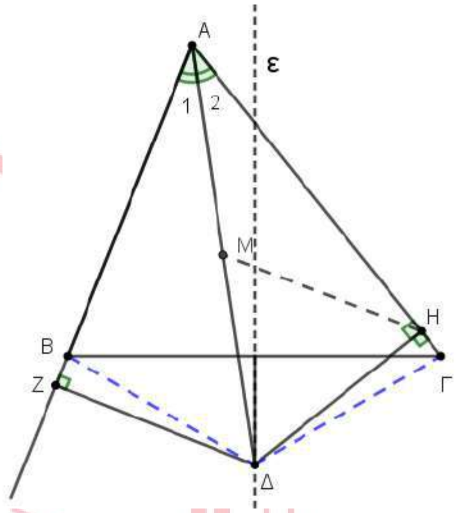
ΒΔ = ΓΔ, από (1).

ΔΖ = ΗΔ (2), επειδή είναι πλευρές των ίσων τριγώνων ΑΖΔ και ΑΗΔ, που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}_1, \widehat{A}_2$ αντίστοιχα.

13522-Λύση

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια με μία κάθετη πλευρά και υποτείνουσα αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Άρα, ΖΒ = ΗΓ.

γ) Έστω ότι η γωνία Α = 60^o και το Μ είναι μέσο της ΑΔ. Τότε θα έχουμε ότι η γωνία $Α_2 = 30^o$.



Στο ορθογώνιο ΑΔΗ, η γωνία $Α_2 = 30^o$, οπότε η απέναντι κάθετος ΗΔ = $\frac{ΑΔ}{2}$ (3).

Στο ορθογώνιο ΑΗΔ, η ΗΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε θα είναι

ΗΜ = $\frac{ΑΔ}{2}$ (4).

Από (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι ΗΜ = ΗΔ (5).

Από (5) και (2) έχουμε ότι ΗΜ = ΔΖ.

13523

ΘΕΜΑ 4

Ο χαρταετός του σχήματος είναι ένα εξάγωνο με ίσες πλευρές και ίσες γωνίες.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΕ = ΒΔ. (Μονάδες 07)

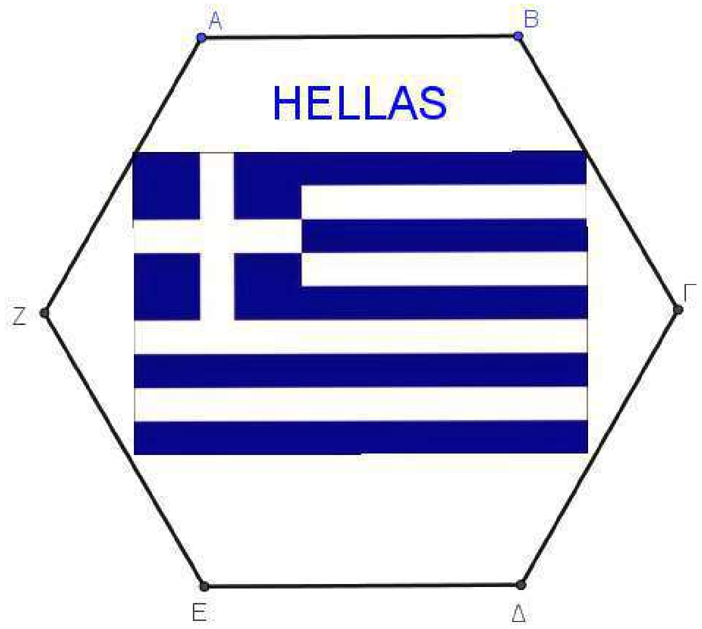
β) Να αποδείξετε ότι ΑΕ $\perp$ ΕΔ. (Μονάδες 08)

γ) i. Αν οι ΑΔ και ΒΕ τέμνονται στο Ο, τότε να αποδείξετε ότι 2ΒΟ = ΑΔ.

(Μονάδες 05)

ii. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι υπάρχει κύκλος με διάμετρο την ΑΔ που διέρχεται από το Β. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

(Μονάδες 05)



13523-Λύση

α) Στο εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ οι πλευρές και οι γωνίες του είναι ίσες. Έστω λ το μήκος της πλευράς του εξαγώνου και φ η γωνία του.

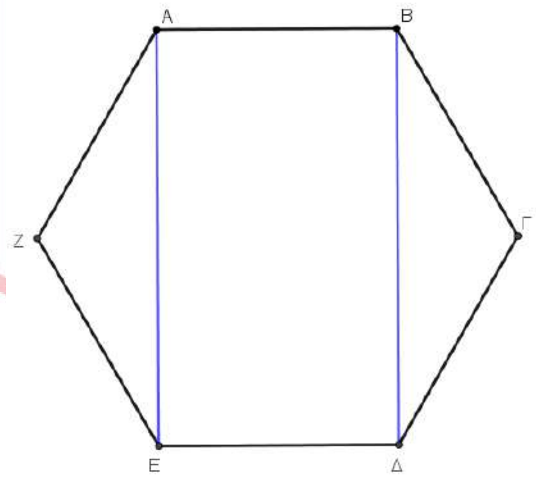
Τα τρίγωνα ΑΖΕ και ΒΓΔ έχουν:

ΑΖ = ΒΓ = λ, από την υπόθεση,

ΖΕ= ΓΔ = λ, από την υπόθεση,

$\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{E} = \mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta = \phi$, από την υπόθεση,

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΖΕ και ΒΓΔ είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες. Άρα, ΑΕ = ΒΔ, γιατί είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{E}$ και $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta$ αντίστοιχα.

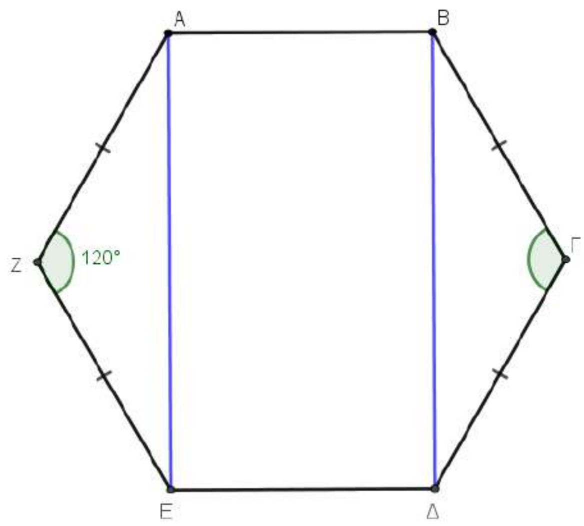


β) Το άθροισμα των γωνιών του εξάγωνου είναι (2ν-4)ορθές, δηλαδή

$(2 \cdot 6 - 4) \cdot 90^o = 720^o$. Επειδή όλες οι γωνίες ίσες, η κάθε μία θα είναι

$720^o : 6 = 120^o$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΖΕ (ΑΖ=ΖΕ) οι γωνίες της βάσης $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$ και $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A}$ θα είναι ίσες.



Στο τρίγωνο ΑΖΕ ισχύει:

13523-Λύση

$\hat{Z} + Z\hat{A}E + Z\hat{E}A$ = 180° ή $Z\hat{A}E + Z\hat{E}A$ = 180° -$\hat{Z}$ ή $2Z\hat{E}A$ = 180° – 120°

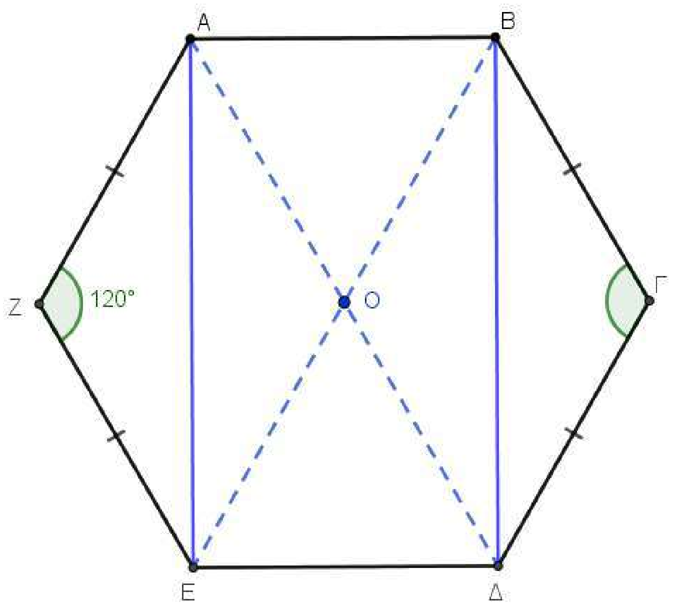
ή $2Z\hat{E}A$ = 60° . Άρα, $Z\hat{E}A$ = 30°.

Έτσι $A\hat{E}\Delta = Z\hat{E}\Delta - Z\hat{E}A$ = 120° – 30° = 90°, οπότε ΑΕ⊥ΕΔ.

γ) i. Επειδή ΑΒ = ΕΔ και ΑΕ = ΒΔ, το ΑΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες. Επιπλέον, λόγω του (β), το ΑΕΔΒ έχει μία γωνία ορθή (γωνία ΑΕΔ = 90°), άρα είναι ορθογώνιο. Οι διαγώνιες του ΑΔ και ΒΕ είναι ίσες και διχοτομούνται, επομένως ΒΟ = $\frac{BE}{2} = \frac{A\Delta}{2}$. Άρα, 2ΒΟ = ΑΔ.

ii. Στο ερώτημα i) αποδείξαμε ότι ΒΟ = ΑΟ = ΟΔ. Επομένως, τα Α, Β, Δ ισαπέχουν από το Ο. Άρα, βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΒ.

Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.



13533

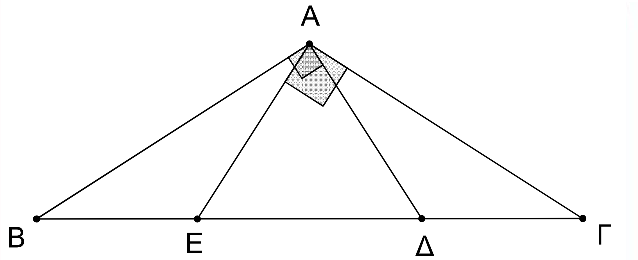
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Η κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ και η κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

γ) ΒΕ = ΓΔ. (Μονάδες 8)



13533-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

- $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta = \Gamma\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 90^o$, γιατί η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και η ΑΕ κάθετη στην ΑΓ.
- $\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma$, από τα δεδομένα.
- $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$, γιατί είναι προσκείμενες γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ προκύπτει ότι $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{AE}$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους $\widehat{\mathrm{B}}, \widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

γ) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουμε ότι $\mathrm{B}\Delta = \Gamma\mathrm{E}$ (1) ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$ αντίστοιχα.

Λόγω της (1) είναι $\mathrm{BE} = \mathrm{B}\Delta - \Delta\mathrm{E} = \Gamma\mathrm{E} - \Delta\mathrm{E} = \Gamma\Delta$.

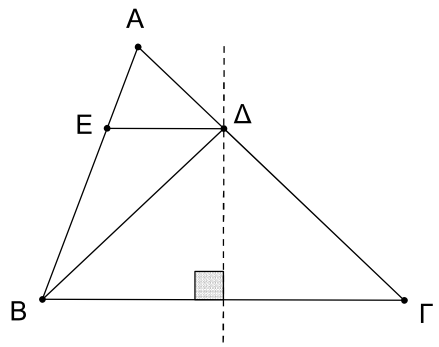
13534

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

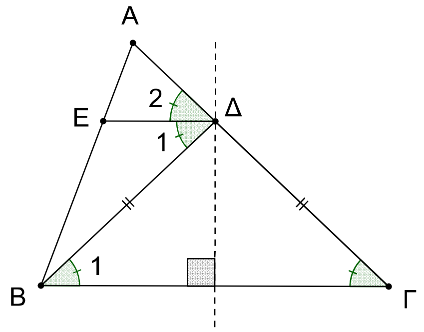
β) η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $Α\hat{Δ}Β$. (Μονάδες 13)



13534-Λύση

α) Το σημείο Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ, άρα ισαπέχει από τα άκρα του, δηλαδή $ΔΒ = ΔΓ$. Συνεπώς το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές.

β)



Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

- $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$ (1) ως προσκείμενες γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΒΓΔ.
- $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ (2) ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΒΓ, ΔΕ που τέμνονται από τη ΒΔ.
- $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2$ (3) ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΒΓ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΓ.

Από τις ισότητες (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, οπότε η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $Α\hat{Δ}Β$.

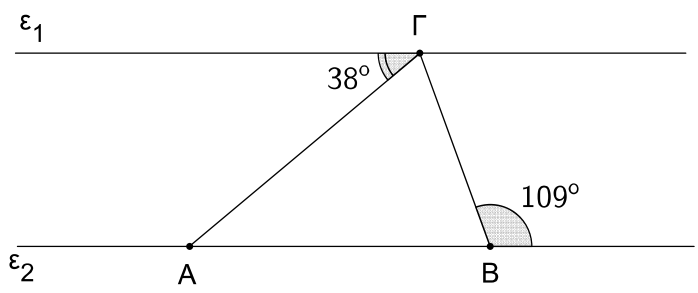
13535

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία $ε_1$ διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου ΑΒΓ και είναι παράλληλη στην ευθεία $ε_2$ που ορίζεται από τις κορυφές του Α και Β. Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 15)

β) να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του. (Μονάδες 10)



13535-Λύση

α) Είναι $\widehat{A} = 38^o$ (1) ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ε_1, ε_2 που τέμνονται από την ΑΓ.

Οι γωνίες $\widehat{B}$ και 109^o είναι παραπληρωματικές, άρα $\widehat{B} + 109^o = 180^o$ ή $\widehat{B} = 71^o$ (2). Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o$. Χρησιμοποιώντας τις ισότητες (1) και (2) έχουμε ότι $38^o + 71^o + \widehat{\Gamma} = 180^o$ ή $\widehat{\Gamma} = 180^o - 109^o$ ή $\widehat{\Gamma} = 71^o$.

β) Από το ερώτημα α) έχουμε ότι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 71^o$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί δύο γωνίες του είναι ίσες. Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου είναι οι ΑΓ, ΑΒ, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

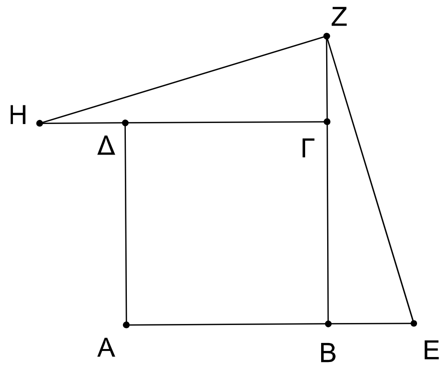
13536

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ προς το Β, ΒΓ προς το Γ και ΓΔ προς το Δ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε $ΒΕ = ΓΖ = ΔΗ$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΖΕ = ΖΗ$. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι $Ε\hat{Ζ}Η = 90^o$. (Μονάδες 10)

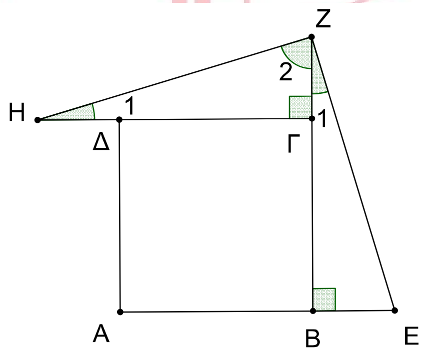


13536-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΓΖΗ έχουν:

- $\text{Ε}\hat{\text{Β}}\text{Ζ} = \text{Ζ}\hat{\Gamma}\text{Η} = 90^o$ ως παραπληρωματικές γωνίες των ορθών γωνιών $\hat{\text{Β}}$, $\hat{\Gamma}$ του τετραγώνου ΑΒΓΔ.
- $\text{ΒΕ} = \Gamma\text{Ζ}$, από τα δεδομένα.
- $\text{ΒΖ} = \Gamma\text{Η}$ ως άθροισμα των ίσων τμημάτων ΒΓ, ΓΔ (πλευρές τετραγώνου) και ΒΕ, ΓΖ (δεδομένο).

Τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΓΖΗ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Άρα θα είναι $\text{ΖΕ} = \text{ΖΗ}$, γιατί είναι οι πλευρές απέναντι από τις ορθές γωνίες.



β) Από την ισότητα των τρίγωνων ΒΕΖ και ΓΖΗ έχουμε ότι $\hat{\text{Ζ}}_1 = \hat{\text{Η}}_1$ (1), γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ, ΓΖ αντίστοιχα. Οι γωνίες $\hat{\text{Η}}_1, \hat{\text{Ζ}}_2$ είναι συμπληρωματικές, γιατί είναι οι οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΓΖΗ, άρα $\hat{\text{Η}}_1 + \hat{\text{Ζ}}_2 = 90^o$ (2). Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{\text{Ζ}}_1 + \hat{\text{Ζ}}_2 = 90^o$ ή $\text{Ε}\hat{\text{Ζ}}\text{Η} = 90^o$.

13537

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$, σημείο Δ της πλευράς ΑΓ, ώστε $ΑΔ = ΒΔ = ΒΓ$ και σημείο Ε της πλευράς ΑΒ, ώστε $ΑΕ = ΓΔ$.

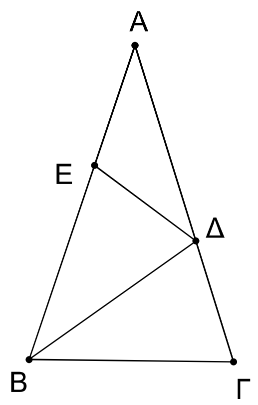
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{Γ} = 2\hat{Α}$. (Μονάδες 6)

ii. $\hat{Α} = 36^o$. (Μονάδες 6)

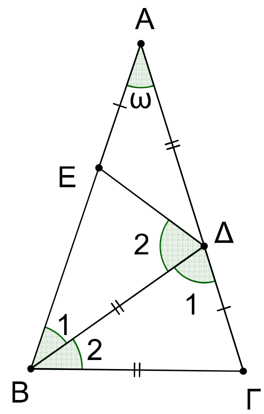
iii. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Στην προέκταση της ΔΕ προς το Ε θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε $ΔΖ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)



13537-Λύση

α) Έστω $\widehat{A} = \omega$ (1).



i. Γνωρίζουμε ότι $A\Delta = B\Delta$, άρα το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση AB, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{B}_1 = \omega$ (2).

Η γωνία $\widehat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $AB\Delta$, άρα είναι $\widehat{\Delta}_1 = 2\omega$ (3).

Είναι $B\Gamma = B\Delta$ (από τα δεδομένα), άρα το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση $\Gamma\Delta$, οπότε οι προσκείμενες στη βάση του γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}_1$, οπότε λόγω της σχέσης (3) θα είναι $\widehat{\Gamma} = 2\omega$ (4).

Από τις σχέσεις (1), (4) προκύπτει ότι $\widehat{\Gamma} = 2\widehat{A}$.

ii. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ (από τα δεδομένα), οπότε και οι προσκείμενες στη βάση $B\Gamma$ γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, άρα θα είναι και $\widehat{B} = 2\omega$ (5) λόγω της σχέσης (4).

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^o$. Αξιοποιώντας τις σχέσεις (1), (4) και (5) θα είναι $\omega + 2\omega + 2\omega = 180^o$ ή $\omega = 36^o$. Άρα $\widehat{A} = 36^o$.

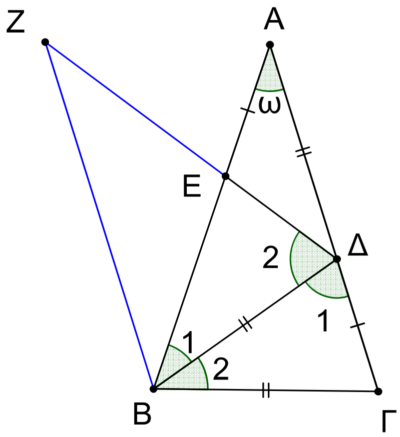
iii. Ένας τρόπος να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές είναι να αποδείξουμε ότι $AE = \Delta E$. Όμως από τα δεδομένα είναι $AE = \Delta\Gamma$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $\Delta E = \Delta\Gamma$. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $BE\Delta$ τα οποία έχουν:

- $B\Delta = B\Delta$, κοινή πλευρά.
- $B\Gamma = BE$, γιατί $B\Gamma = A\Delta$ από τα δεδομένα και $BE = A\Delta$ ως διαφορές των ίσων τμημάτων $AB = A\Gamma$ και $AE = \Gamma\Delta$.
- $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, αφού $\widehat{B}_1 = \omega = 36^o$ και $\widehat{B}_2 = \widehat{B} - \widehat{B}_1 = 2\omega - \omega = 36^o$.

Τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $BE\Delta$ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ). Άρα θα είναι ίσες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}_1, \widehat{B}_2$, δηλαδή $\Delta E = \Delta\Gamma$.

13537-Λύση

β)



Στην ισότητα των τριγώνων ΒΓΔ και ΒΕΔ έχουμε αποδείξει ότι $ΒΓ = ΒΕ$, οπότε και οι αντίστοιχες γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$. Από τη σχέση (3) έχουμε ότι $\hat{Δ}_1 = 72^o$, άρα $\hat{Δ}_2 = 72^o$.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΒΔ έχουν:

- $ΒΓ = ΒΔ$, από τα δεδομένα.
- $ΑΓ = ΖΔ$, από το δεδομένο του ερωτήματος.
- $\hat{Γ} = \hat{Δ}_2 = 72^o$.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΒΔ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ). Όμως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, οπότε και το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.

13538

ΘΕΜΑ 4

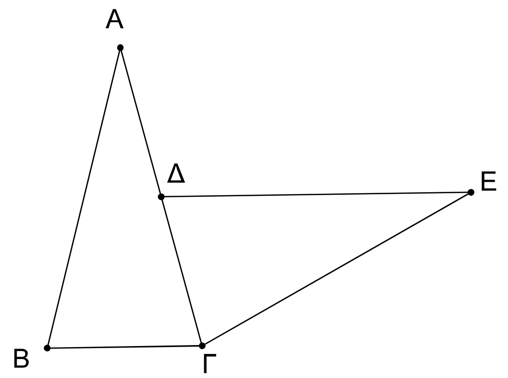
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ με $ΑΒ = ΑΓ = ΕΓ = ΕΔ$, όπου Δ είναι το μέσο της ΑΓ και $ΒΓ = \frac{ΑΒ}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Αν η προέκταση της ΕΔ προς το Δ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο Ζ είναι το μέσο της ΑΒ. (Μονάδες 8)

ii. $Ε\hat{Α}Γ = Ε\hat{Ζ}Γ$. (Μονάδες 7)



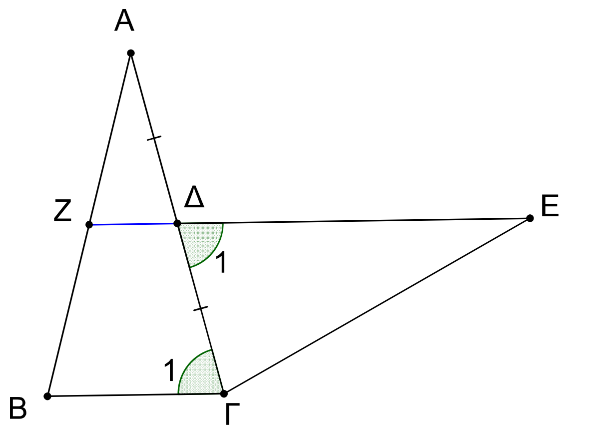
13538-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ έχουν:

- ΑΒ = ΕΓ, από τα δεδομένα.
- ΑΓ = ΕΔ, από τα δεδομένα.
- ΒΓ = ΓΔ, γιατί $ΒΓ = \frac{ΑΒ}{2}$ και $ΓΔ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΑΒ}{2}$, αφού το Δ είναι το μέσο της ΑΓ.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ είναι ίσα, γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (κριτήριο ΠΠΠ).

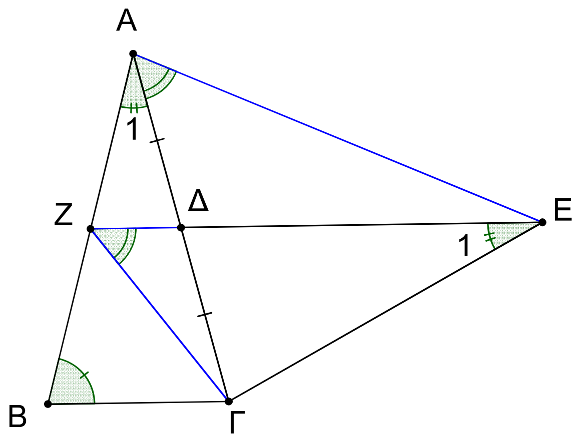
β)



i. Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΕΓΔ προκύπτει ότι $\hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1$, γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ, ΕΓ αντίστοιχα.

Οι ΒΓ και ΔΕ τεμνόμενες από την ΑΓ σχηματίζουν ίσες τις εντός εναλλάξ γωνίες τους $\hat{Γ}_1$ και $\hat{Δ}_1$, άρα η ΒΓ είναι παράλληλη στη ΔΕ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Δ είναι το μέσο της ΑΓ και η ΔΖ είναι παράλληλη στη ΒΓ, άρα το Ζ είναι το μέσο της ΑΒ.



ii. Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΕΓΔ προκύπτει ότι $\hat{Α}_1 = \hat{Ε}_1$, γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα. Άρα το τετράπλευρο ΑΕΓΖ

13538-Λύση

είναι εγγράψιμο, αφού η πλευρά του ΓΖ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Α και Ε υπό ίσες γωνίες. Έτσι στο εγγράψιμο ΑΕΓΖ η πλευρά ΓΕ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Α και Ζ υπό ίσες γωνίες, άρα θα είναι $E\widehat{A}\Gamma = E\widehat{Z}\Gamma$.

13539

ΘΕΜΑ 4

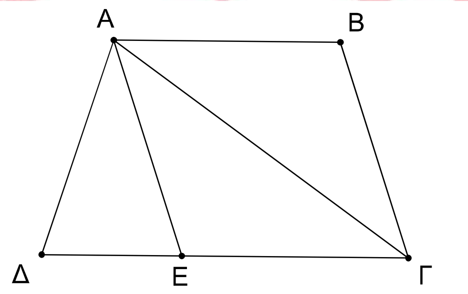
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και $\widehat{A} = 108^o$. Στη βάση ΓΔ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε οι ΑΓ, ΑΕ να τριχοτομούν τη γωνία $\widehat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 10)

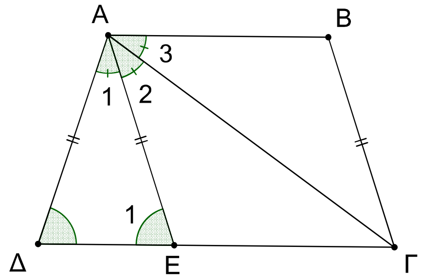
β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

ii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)



13539-Λύση



α) Αφού τα τμήματα ΑΓ, ΑΕ να τριχοτομούν τη γωνία $\widehat{Α} = 108^o$, θα είναι

$\widehat{Α}_1 = \widehat{Α}_2 = \widehat{Α}_3 = \frac{\widehat{Α}}{3} = \frac{108^o}{3} = 36^o$.

Οι γωνίες $\widehat{Α}$ και $\widehat{Δ}$ του τραπεζίου είναι παραπληρωματικές, γιατί είναι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ. Άρα $\widehat{Δ} = 180^o - \widehat{Α} = 180^o - 108^o = 72^o$.

Είναι $\widehat{Ε}_1 = Β\widehat{Α}Ε$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΕ. Άρα $\widehat{Ε}_1 = Β\widehat{Α}Ε = \widehat{Α}_2 + \widehat{Α}_3 = 36^o + 36^o = 72^o$.

β) i. Από το ερώτημα α) έχουμε ότι $\widehat{Δ} = \widehat{Ε}_1 = 72^o$ (1), συνεπώς το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με $ΑΔ = ΑΕ$ (2), γιατί έχει δύο γωνίες ίσες.

ii. Οι προσκείμενες γωνίες $Β\widehat{Γ}Δ$ και $\widehat{Δ}$ στη βάση ΓΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι ίσες, γιατί το τραπέζιο είναι ισοσκελές. Άρα $Β\widehat{Γ}Δ = \widehat{Δ}$ (3).

Από τις ισότητες (1) και (3) προκύπτει ότι $Β\widehat{Γ}Δ = \widehat{Ε}_1$, οπότε οι ΑΕ, ΒΓ είναι παράλληλες, γιατί τεμνόμενες από τη ΓΔ σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.

Είναι $ΑΔ = ΒΓ$ (4), γιατί το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές. Από τις ισότητες (2) και (4) προκύπτει ότι $ΑΕ = ΒΓ$. Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του ΑΕ, ΒΓ είναι ίσες και παράλληλες. Όμως η ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $Β\widehat{Α}Ε$, αφού από το ερώτημα α) έχουμε ότι $\widehat{Α}_2 = \widehat{Α}_3 = 36^o$. Συνεπώς το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι ρόμβος, γιατί είναι παραλληλόγραμμο και η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί τη γωνία του $Β\widehat{Α}Ε$.

13653

ΘΕΜΑ 2

Σχεδιάζουμε γωνία $x\widehat{O}y = 60^o$ και παίρνουμε σημείο Α επί της πλευράς Ox, τέτοιο ώστε $AO = 2$. Φέρουμε τη διχοτόμο Οδ της γωνίας $x\widehat{O}y$ και θεωρούμε σημείο Μ στην Οδ, τέτοιο ώστε $AM = AO$. Να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία $\delta\widehat{O}y$.

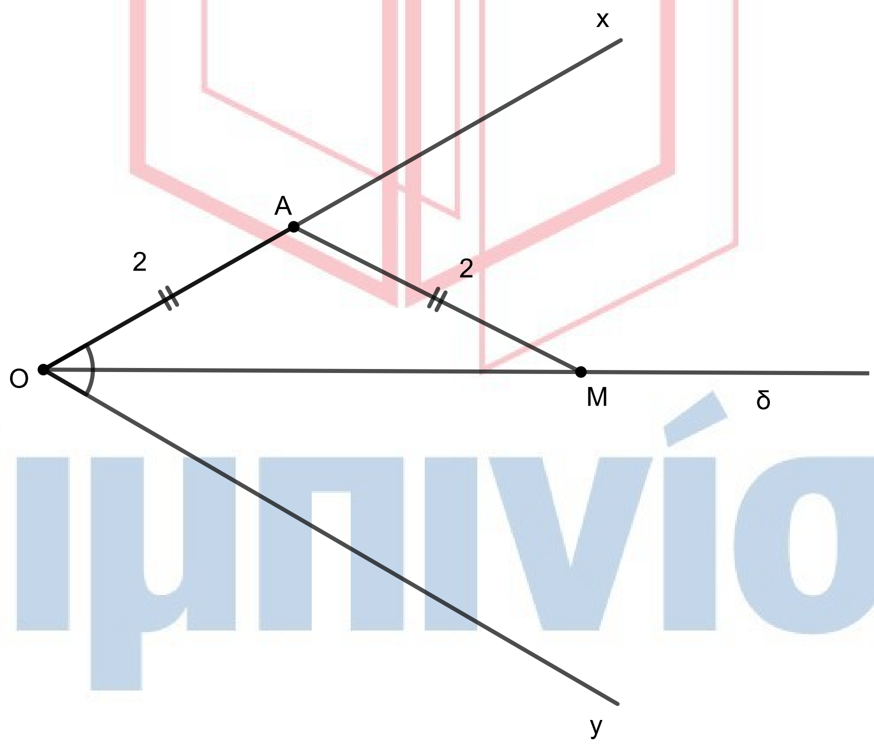
(Μονάδες 6)

β) Τις γωνίες του τριγώνου ΑΟΜ.

(Μονάδες 9)

γ) Το μήκος του ύψους ΑΒ που αντιστοιχεί στη βάση ΟΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΜ.

(Μονάδες 10)



13653-Λύση

α) Η ημιευθεία Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\widehat{O}y$, οπότε οι γωνίες $x\widehat{O}\delta$ και $\delta\widehat{O}y$ θα είναι ίσες.

Άρα, $x\widehat{O}\delta = \delta\widehat{O}y = 60^o \div 2 = 30^o$.

β) Είναι $A\widehat{O}M = x\widehat{O}\delta = 30^o$.

Το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ισοσκελές με βάση ΟΜ, αφού $AO = AM$.

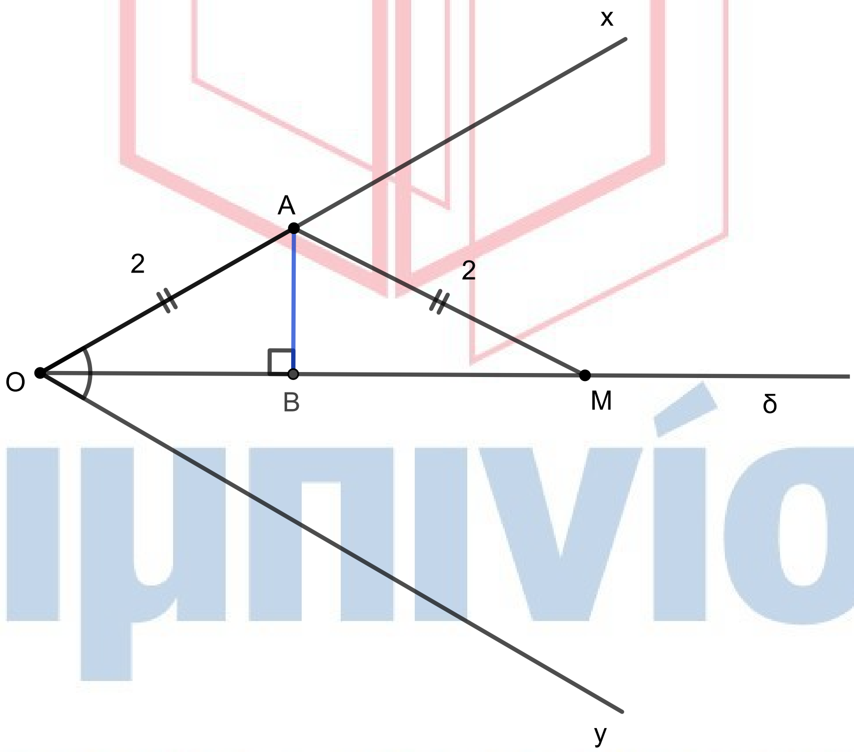
Επομένως, οι γωνίες $A\widehat{O}M$ και $A\widehat{M}O$ είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση.

Άρα, $A\widehat{O}M = A\widehat{M}O = 30^o$.

Στο τρίγωνο ΑΟΜ ισχύει:

$A\widehat{O}M + A\widehat{M}O + M\widehat{A}O = 180^o$ ή $30^o + 30^o + M\widehat{A}O = 180^o$. Άρα, $M\widehat{A}O = 120^o$.

γ) Φέρουμε το ύψος ΑΒ που αντιστοιχεί στη βάση ΟΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΜ.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ είναι $A\widehat{O}B = 30^o$. Οπότε, η απέναντι κάθετη πλευρά, δηλαδή η ΑΒ, ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΟΑ.

Άρα, $AB = \frac{OA}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

13654

ΘΕΜΑ 2

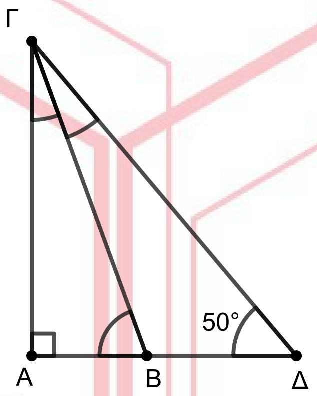
Στο ακόλουθο σχήμα είναι $\widehat{Α} = 90^{o}$, $Α\widehat{Β}Γ - Α\widehat{Γ}Β = 50^{o}$ και $Α\widehat{Δ}Γ = 50^{o}$.

α) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες $Α\widehat{Β}Γ$ και $Α\widehat{Γ}Β$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $Α\widehat{Γ}Δ$.

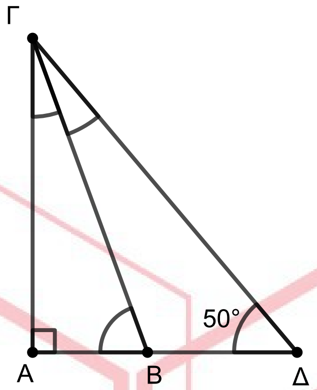
(Μονάδες 15)



13654-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



Σύμφωνα με την υπόθεση είναι $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B + 50^o$.

Για τις οξείες γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}B$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει:

$A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B = 90^o$ ή $A\hat{\Gamma}B + 50^o + A\hat{\Gamma}B = 90^o$ ή $2A\hat{\Gamma}B = 40^o$.

Άρα, $A\hat{\Gamma}B = 20^o$ κι επομένως $A\hat{B}\Gamma = 20^o + 50^o = 70^o$.

β) Η γωνία $\Delta\hat{B}A$ είναι ευθεία, οπότε:

$\Delta\hat{B}\Gamma + \Gamma\hat{B}A = 180^o$ ή $\Delta\hat{B}\Gamma + 70^o = 180^o$.

Άρα, $\Delta\hat{B}\Gamma = 180^o - 70^o = 110^o$.

Στο τρίγωνο ΔΒΓ ισχύει:

$\Gamma\hat{\Delta}B + \Delta\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o$ ή $50^o + 110^o + B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o$.

Άρα, $B\hat{\Gamma}\Delta = 180^o - 50^o - 110^o = 20^o$.

Αφού $A\hat{\Gamma}B = B\hat{\Gamma}\Delta = 20^o$, συμπεραίνουμε ότι η ΓΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$.

13670

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 2ΑΒ. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΒΓ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΔ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΖΔ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο ΖΑΔΕ είναι εγγράψιμο.

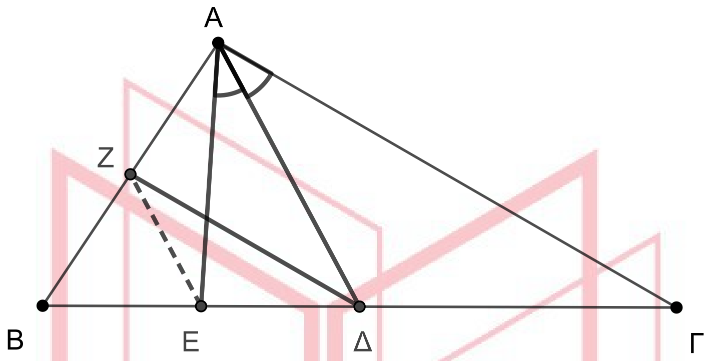
(Μονάδες 5)

γ) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΕΑΓ}$.

(Μονάδες 10)

13670-Λύση

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 2ΑΒ. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΒΓ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΔ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Ζ.



α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο προς την πλευρά ΑΓ και το Δ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ. Επομένως, το Ζ θα είναι μέσο της πλευράς ΑΒ.

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΒΖ έχουν:

ΑΒ = ΒΔ, ως μισά του ΒΓ, αφού ΒΓ = 2ΑΒ (υπόθεση) και ΒΓ = 2ΒΔ (το Δ είναι μέσο του ΒΓ).

ΒΕ = ΒΖ, ως μισά των ίσων τμημάτων ΒΔ και ΑΒ αντίστοιχα.

$\hat{B}$ κοινή γωνία.

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΒΖ είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (Π-Γ-Π).

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΕ και ΒΖΔ προκύπτει ότι $B\hat{A}E = B\hat{\Delta}Z$ (1), ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ και ΒΖ αντίστοιχα.

Το τετράπλευρο ΖΑΔΕ είναι εγγράψιμο διότι η πλευρά ΖΕ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Α και Δ υπό τις ίσες γωνίες $B\hat{A}E$ και $B\hat{\Delta}Z$ αντίστοιχα.

γ) Το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΒΔ, οπότε $B\hat{A}\Delta = B\hat{\Delta}A$ (2), ως προσκείμενες στη βάση ΑΔ.

Αφαιρώντας τις ισότητες (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$B\hat{A}\Delta - B\hat{A}E = B\hat{\Delta}A - B\hat{\Delta}Z$ ή $E\hat{A}\Delta = Z\hat{\Delta}A$ (3).

Επίσης, $Z\hat{\Delta}A = \Delta\hat{A}\Gamma$ (4), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΖ και ΑΓ τεμνόμενων από την ΑΔ.

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε $E\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma$, άρα η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{A}\Gamma$.

13671

ΘΕΜΑ 4

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{B} < \hat{\Gamma}$) θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Έστω Η η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) $HE = E\Gamma$ και $HZ = Z\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) $Z\hat{\Delta}E = Z\hat{H}E$.

(Μονάδες 10)

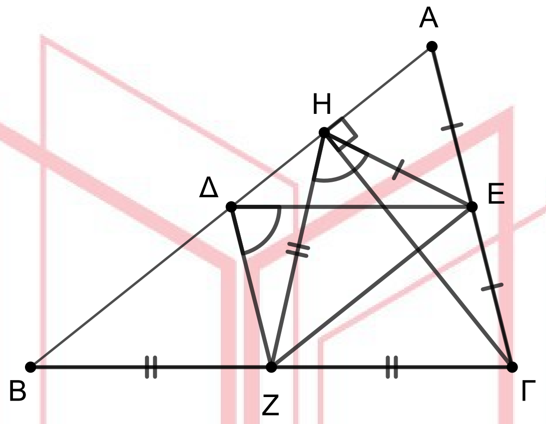
γ) Το τετράπλευρο ΖΔΗΕ είναι εγγράψιμο.

(Μονάδες 5)

13671-Λύση

ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ και σημειώνουμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Φέρουμε την προβολή Η της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά ΑΒ, οπότε ΓΗ ⊥ ΑΒ.



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΑΓ ($\Gamma\hat{H}A = 90^o$), η ΗΕ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΑΓ, οπότε $HE = E\Gamma = EA = \frac{A\Gamma}{2}$.

Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΒΓ ($\Gamma\hat{H}B = 90^o$), η ΗΖ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΓ, οπότε $HZ = Z\Gamma = ZB = \frac{B\Gamma}{2}$.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, τα σημεία Δ και Ζ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Επομένως, ΔΖ//ΑΓ και $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2} = E\Gamma$.

Άρα, το τετράπλευρο ΖΔΕΓ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ΔΖ και ΕΓ ίσες και παράλληλες, οπότε $Z\hat{\Delta}E = E\hat{\Gamma}Z$ (1).

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΗΕΓ είναι $\Gamma\hat{H}E = H\hat{\Gamma}E$ (2), αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΕΓ και ΗΕ αντίστοιχα.

Επίσης, στο ισοσκελές τρίγωνο ΗΖΓ είναι $Z\hat{H}\Gamma = H\hat{\Gamma}Z$ (3), αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΖΓ και ΗΖ αντίστοιχα.

Προσθέτοντας τις ισότητες (2) και (3) κατά μέλη, έχουμε:

$Z\hat{H}\Gamma + \Gamma\hat{H}E = H\hat{\Gamma}Z + H\hat{\Gamma}E$ και άρα $Z\hat{H}E = E\hat{\Gamma}Z$ (4).

Από τις ισότητες (1) και (4) προκύπτει τελικά ότι $Z\hat{\Delta}E = Z\hat{H}E$.

γ) Το τετράπλευρο ΖΔΗΕ είναι εγγράψιμο διότι η πλευρά ΖΕ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Δ και Η υπό τις ίσες γωνίες $Z\hat{\Delta}E$ και $Z\hat{H}E$ αντίστοιχα.

13672

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^o$ και ΑΒ $>$ ΑΓ. Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε κάθετη στη ΒΓ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία τέμνει τη διχοτόμο ΑΗ της γωνίας $\widehat{A}$ στο σημείο Ε. Έστω ΑΖ το ύψος στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\widehat{A}Z = \Delta\widehat{A}B$.

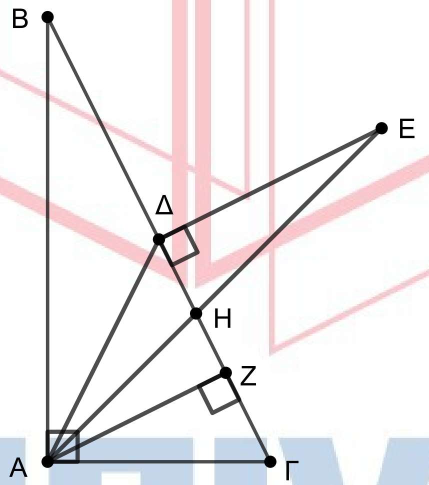
(Μονάδες 8)

β) ΑΔ $=$ ΔΕ.

(Μονάδες 9)

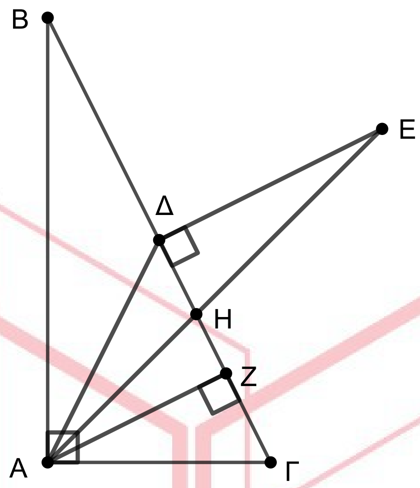
γ) $Z\widehat{A}\Delta = \widehat{\Gamma} - \widehat{B}$.

(Μονάδες 8)



13672-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΑΔ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΓ, οπότε $ΑΔ = ΔΒ = ΔΓ$.

Οι οξείες γωνίες $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι συμπληρωματικές, οπότε:

$$\hat{Β} = 90^o - \hat{Γ} \quad (1)$$

Οι οξείες γωνίες $Γ\hat{Α}Ζ$ και $\hat{Γ}$ του ορθογωνίου τριγώνου ΖΑΓ είναι συμπληρωματικές, οπότε:

$$Γ\hat{Α}Ζ = 90^o - \hat{Γ} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $Γ\hat{Α}Ζ = \hat{Β}$.

Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με $ΑΔ = ΔΒ$, οπότε θα είναι $Δ\hat{Α}Β = \hat{Β}$.

Επομένως, οι γωνίες $Γ\hat{Α}Ζ$ και $Δ\hat{Α}Β$ θα είναι ίσες, δηλαδή $Γ\hat{Α}Ζ = Δ\hat{Α}Β$ (3).

β) Η ΑΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$, οπότε $Γ\hat{Α}Η = Η\hat{Α}Β$ (4).

Με αφαίρεση των σχέσεων (3) και (4) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$Γ\hat{Α}Η - Γ\hat{Α}Ζ = Η\hat{Α}Β - Δ\hat{Α}Β$ ή $Ζ\hat{Α}Η = Η\hat{Α}Δ$ (5).

Επίσης, ΑΖ//ΔΕ διότι είναι κάθετες στη ΒΓ.

Άρα, $Ζ\hat{Α}Η = \hat{Ε}$ (6), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΖ και ΔΕ τεμνόμενων από την ΑΕ.

Από τις ισότητες (5) και (6) προκύπτει ότι $Η\hat{Α}Δ = \hat{Ε}$, οπότε θα είναι ίσες και οι απέναντι πλευρές τους ΔΕ και ΑΔ αντίστοιχα στο τρίγωνο ΑΔΕ, δηλαδή $ΔΕ = ΑΔ$.

γ) Είναι $Γ\hat{Α}Ζ + Ζ\hat{Α}Δ + Δ\hat{Α}Β = \hat{Α}$, οπότε:

13672-Λύση

$Z\widehat{A}\Delta = \widehat{A} - \Gamma\widehat{A}Z - \Delta\widehat{A}B = 90^o - \widehat{B} - \widehat{B} = \widehat{\Gamma} - \widehat{B}$, αφού είναι $\Gamma\widehat{A}Z = \Delta\widehat{A}B = \widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma} = 90^o - \widehat{B}$.

13687

ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία $A\widehat{O}B = 40^o$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε $A\Gamma = OA$ και $B\Delta = OB$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $O\widehat{A}B = O\widehat{B}A = 70^o$.

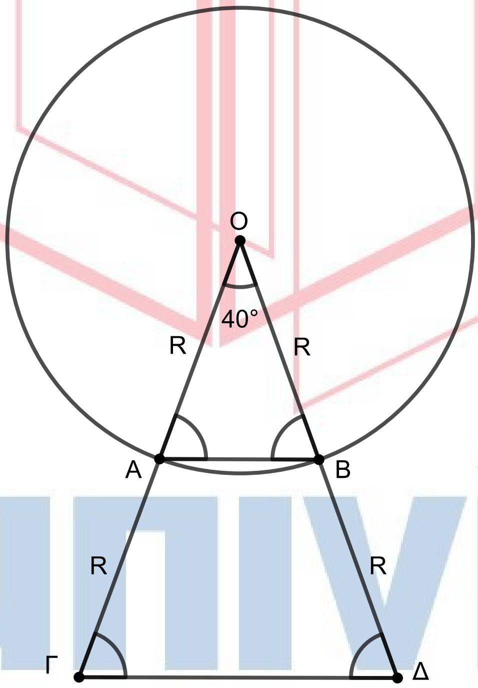
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $O\widehat{\Gamma}\Delta$ και $O\widehat{\Delta}\Gamma$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι $AB /\!/ \Gamma\Delta$.

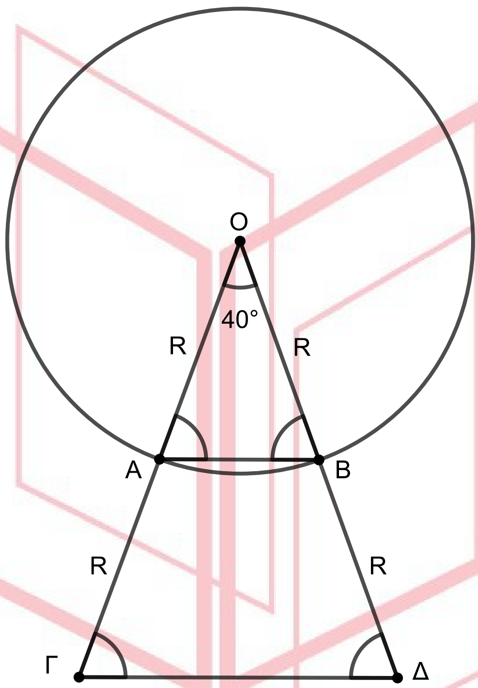
(Μονάδες 5)



13687-Λύση

ΛΥΣΗ

Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία $A\widehat{O}B = 40^o$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε $A\Gamma = OA$ και $B\Delta = OB$.



α) Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, αφού οι πλευρές ΟΑ και ΟΒ είναι ίσες με την ακτίνα R.

Επομένως, οι γωνίες $O\widehat{A}B$ και $O\widehat{B}A$ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση ΑΒ.

Στο τρίγωνο ΟΑΒ ισχύει:

$\widehat{O} + O\widehat{A}B + O\widehat{B}A = 180^o$ ή $40^o + 2O\widehat{A}B = 180^o$ ή $2O\widehat{A}B = 140^o$.

Άρα, $O\widehat{A}B = 70^o$ και $O\widehat{B}A = 70^o$.

β) Τα τμήματα ΟΓ και ΟΔ είναι ίσα ως αθροίσματα ίσων τμημάτων, αφού $O\Gamma = OA + A\Gamma = 2R$ και $O\Delta = OB + B\Delta = 2R$. Επομένως, το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ.

Στο τρίγωνο ΟΓΔ ισχύει:

$\widehat{O} + O\widehat{\Gamma}\Delta + O\widehat{\Delta}\Gamma = 180^o$ ή $40^o + 2O\widehat{\Gamma}\Delta = 180^o$ ή $2O\widehat{\Gamma}\Delta = 140^o$.

Άρα, $O\widehat{\Gamma}\Delta = 70^o$ και $O\widehat{\Delta}\Gamma = 70^o$.

γ) Οι ΑΒ και ΓΔ τέμνονται από την ΑΓ και σχηματίζουν τις εκτός εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους $O\widehat{A}B$ και $O\widehat{\Gamma}\Delta$ ίσες. Επομένως, ΑΒ//ΓΔ.

13697

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα ΑΕ, ΒΖ, ΒΔ και ΓΕ αναπαριστάνουν τέσσερεις ίσους ράβδους μήκους 40 cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου.

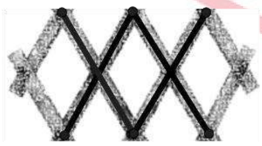
Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή ΑΕ // ΒΔ και ΒΖ // ΓΕ, και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή Κ κοινό μέσο των ΑΕ, ΒΖ και Λ κοινό μέσο των ΒΔ, ΓΕ. Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι ΑΕ και ΒΖ με κορυφή το κοινό τους μέσο Κ, η γωνία $B\widehat{K}E$, είναι ίση με 120^0.

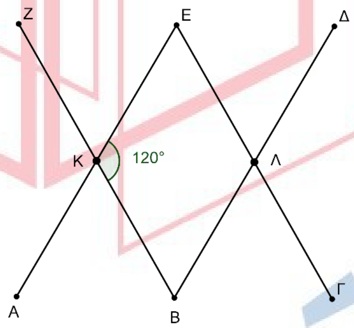
α) Να αποδείξετε ότι $A\widehat{K}B = K\widehat{B}\Lambda = B\widehat{\Lambda}\Gamma = 60^0$. (Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ είναι ίσα και ισόπλευρα. Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία. (Μονάδες 6)





13697-Λύση

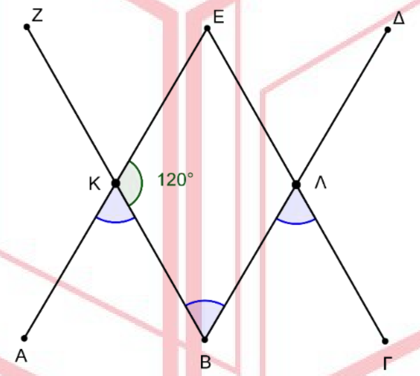
ΛΥΣΗ

α) Οι γωνίες $A\widehat{K}B$ και $B\widehat{K}E$ είναι παραπληρωματικές, οπότε ισχύει $A\widehat{K}B + B\widehat{K}E = 180^0$ και αφού $B\widehat{K}E = 120^0$ τότε $A\widehat{K}B + 120^0 = 180^0$ ή $A\widehat{K}B = 180^0 - 120^0$ ή $A\widehat{K}B = 60^0$ (1)

Είναι $A\widehat{K}B = K\widehat{B}\Lambda$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΕ και ΒΔ με τέμνουσα την ΒΖ και αφού είναι $A\widehat{K}B = 60^0$ από τη σχέση (1), θα είναι και $K\widehat{B}\Lambda = 60^0$ (2).

Είναι $K\widehat{B}\Lambda = B\widehat{\Lambda}\Gamma$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΖ και ΓΕ με τέμνουσα την ΒΔ και αφού είναι $K\widehat{B}\Lambda = 60^0$ από σχέση (2), θα είναι και $B\widehat{\Lambda}\Gamma = 60^0$ (3)

Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $A\widehat{K}B = K\widehat{B}\Lambda = B\widehat{\Lambda}\Gamma = 60^0$ (4).



β) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ έχουν:

- ΑΚ = ΒΛ = 20 cm, ως μισά των ίσων τμημάτων ΑΕ και ΒΔ μήκους 40 cm όπου Κ και Λ τα μέσα τους.
- ΚΒ = ΛΓ = 20 cm, ως μισά των ίσων τμημάτων ΒΖ και ΓΕ μήκους 40 cm όπου Κ και Λ τα μέσα τους.
- $A\widehat{K}B = B\widehat{\Lambda}\Gamma = 60^0$, από σχέση (4)

Επομένως τα τρίγωνα θα είναι ίσα, γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες. Οπότε θα είναι $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ και $\widehat{B}_2 = \widehat{\Gamma}_2$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΚΒ, ΛΓ και ΚΑ, ΛΒ αντίστοιχα.

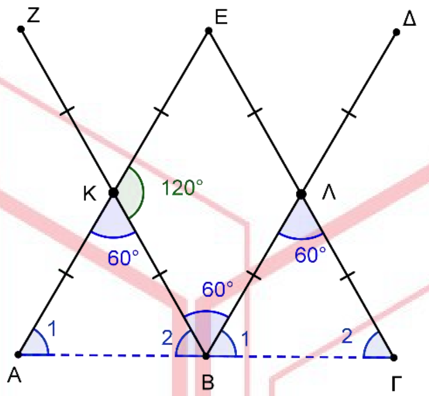
Επειδή είναι ΑΚ= ΚΒ = 20 cm, το τρίγωνο ΑΚΒ θα είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, οπότε θα έχει τις προσκείμενες στη βάση του γωνίες ίσες, δηλαδή $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2$ (5).

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΚΒ ισχύει ότι $\widehat{A}_1 + A\widehat{K}B + \widehat{B}_2 = 180^0$ και αφού είναι $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2$ από σχέση (5) και $A\widehat{K}B = 60^0$ τότε $2\widehat{A}_1 + 60^0 = 180^0$ ή $2\widehat{A}_1 = 180^0 - 60^0$ ή $2\widehat{A}_1 = 120^0$ ή $\widehat{A}_1 = 60^0$ (6).

Από σχέσεις (4), (5) και (6) προκύπτει ότι $A\widehat{K}B = \widehat{A}_1 = \widehat{B}_2 = 60^0$.

13697-Λύση

Συνεπώς, το τρίγωνο ΑΚΒ θα είναι ισόπλευρο γιατί έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, οπότε και το ίσο του τρίγωνο ΒΛΓ θα είναι και αυτό ισόπλευρο, οπότε κάθε γωνία του θα είναι ίση με 60^0, δηλαδή $B\widehat{\Lambda}\Gamma = \widehat{\Gamma}_2 = \widehat{B}_1 = 60^0$.



γ) Για να είναι τα Α, Β και Γ σημεία της ίδιας ευθείας, αρκεί να δειχθεί ότι η γωνία $A\widehat{B}\Gamma$ είναι ευθεία γωνία ή ότι $A\widehat{B}\Gamma = 180^0$.

Είναι $A\widehat{B}\Gamma = \widehat{B}_2 + K\widehat{B}\Lambda + \widehat{B}_1 = 3\cdot 60^0 = 180^0$, αφού είναι $\widehat{B}_2 = \widehat{B}_1 = 60^0$ ως γωνίες ισοπλεύρων τριγώνων ΑΚΒ και ΒΛΓ. Επομένως, τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

13699

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται δυο κύκλοι (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α. Έστω ότι μια ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους Β και Γ αντίστοιχα και ότι η εσωτερική εφαπτομένη (ζ) των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α τέμνει την ευθεία (ε) σε σημείο Μ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι ευθείες ΚΒ και ΛΜ τέμνονται σε σημείο, έστω Δ. (Μονάδες 10)

ii. το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

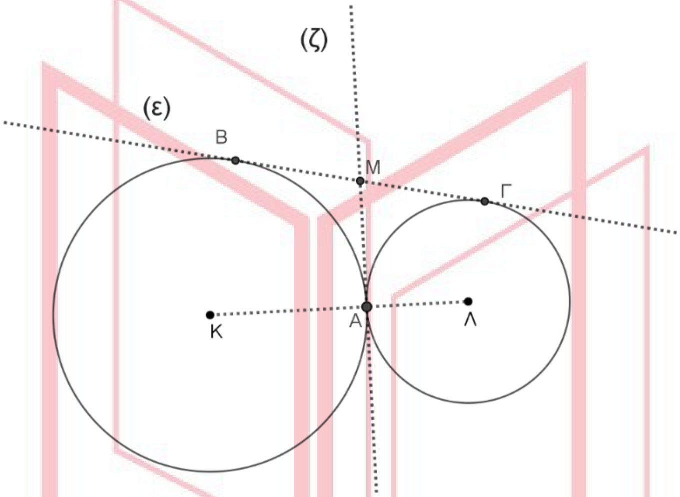
γ) Με ποια σχέση πρέπει να συνδέονται οι ακτίνες ρ_1 και ρ_2 των δύο κύκλων ώστε το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

13699-Λύση

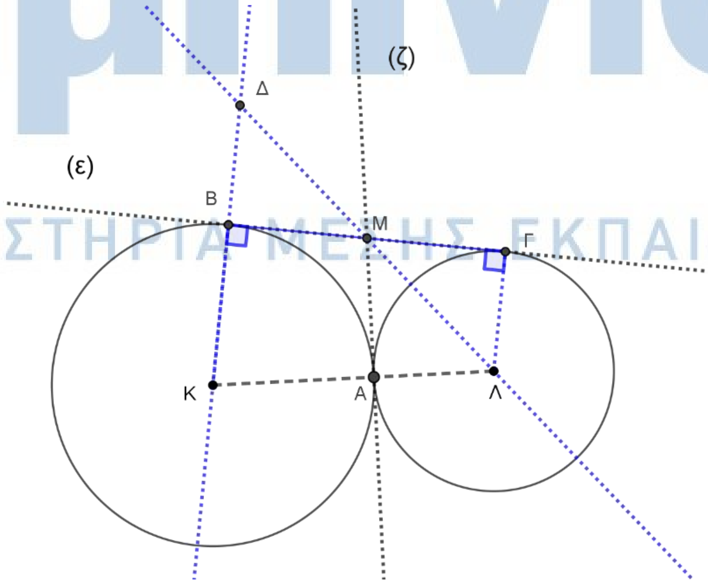
ΛΥΣΗ

Έστω οι κύκλοι (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α, (ε) η ευθεία η οποία εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους Β και Γ αντίστοιχα. Έστω (ζ) η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α και Μ το σημείο τομής της με την ευθεία (ε).



α) Έστω ΚΒ και ΛΓ οι ακτίνες των δυο κύκλων (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) στα σημεία επαφής Β και Γ αντίστοιχα. Τότε τα ΚΒ και ΛΓ θα είναι κάθετα στην (ε), οπότε θα είναι ΚΒ // ΛΓ ως κάθετες στην ίδια ευθεία (ε).

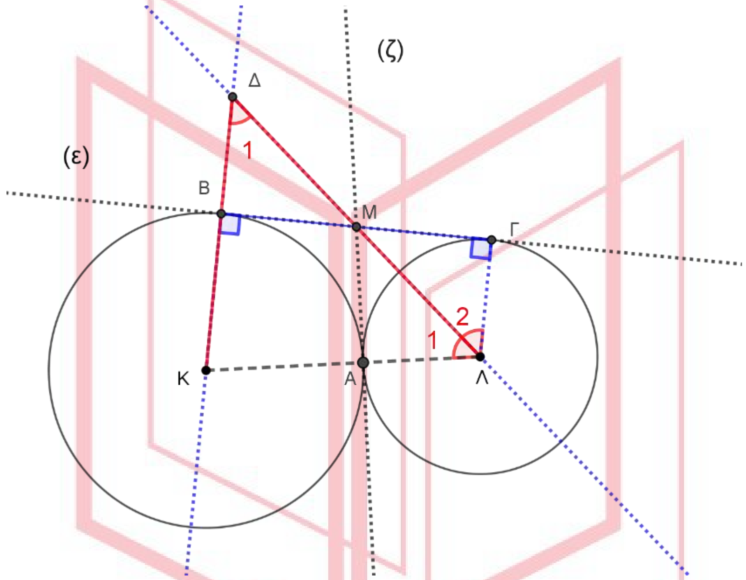
Η ΛΜ δεν είναι κάθετη στην (ε), γιατί αν η ΛΜ ήταν κάθετη στη (ε) τότε από το σημείο Λ θα άγονταν δυο κάθετες στην (ε), η ΛΜ και η ΛΓ ως ακτίνα στο σημείο επαφής Γ του κύκλου (Λ, ρ_2) με την ευθεία (ε), που είναι άτοπο, και αφού η ΛΜ τέμνει την ΛΓ στο Λ θα τέμνει και την παράλληλή της την ΚΒ έστω σε σημείο Δ.



β) Είναι ΚΔ // ΛΓ και τις τέμνει η ΛΔ, οπότε $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Lambda}_2$ (1) ως γωνίες εντός εναλλάξ.

13699-Λύση

Η ΔΛ είναι διακεντρική ευθεία του σημείου Μ στον κύκλο (Λ, $ρ_2$), οπότε θα διχοτομεί τη γωνία $Γ\widehat{Λ}Α$ των ακτίνων στα σημεία επαφής Γ και Α, δηλαδή είναι $\widehat{Λ}_2 = \widehat{Λ}_1$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\widehat{Δ}_1 = \widehat{Λ}_1$. Οπότε το τρίγωνο ΔΚΛ έχει δυο γωνίες ίσες, άρα θα είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΚΛ και ΚΔ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{Δ}_1$ και $\widehat{Λ}_1$ αντίστοιχα.



γ) Το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ με ίσες πλευρές τις ΚΛ, ΚΒ θα είναι ορθογώνιο όταν $Δ\widehat{Κ}Λ = 90^0$ Αν $Δ\widehat{Κ}Λ = 90^0$ τότε η ΚΛ είναι κάθετη στην ΚΔ. Αν η ΚΛ είναι κάθετη στην ΚΔ, τότε η ΚΛ θα είναι παράλληλη με την ευθεία (ε) ως κάθετες στην ίδια ευθεία ΚΔ, οπότε και το τετράπλευρο ΚΛΓΒ θα είναι ορθογώνιο γιατί θα είχε τρεις ορθές γωνίας, τις $Δ\widehat{Κ}Λ$, $Κ\widehat{Β}Γ$ και $Λ\widehat{Γ}Β$. Αν το ΚΛΓΒ είναι ορθογώνιο τότε θα ισχύει ΚΒ = ΛΓ ή $ρ_1 = ρ_2$. Επομένως, αν οι κύκλοι είναι ίσοι, τότε το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ θα είναι ορθογώνιο.

13702

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται δυο κύκλοι (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Αν η εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α τέμνει την ευθεία (ε) σε σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

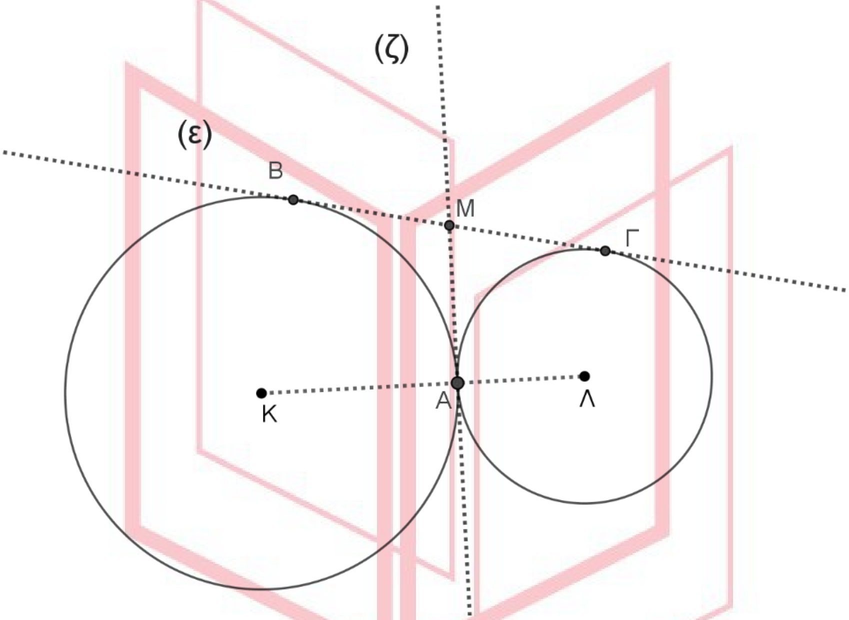
α) τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 12)

β) ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ εφάπτεται στη διάκεντρο ΚΛ των κύκλων (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2). (Μονάδες 13)

13702-Λύση

ΛΥΣΗ

Έστω οι κύκλοι (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α, (ε) η ευθεία η οποία εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους Β και Γ αντίστοιχα, (ζ) η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α και Μ το σημείο στο οποίο τέμνει την ευθεία (ε).

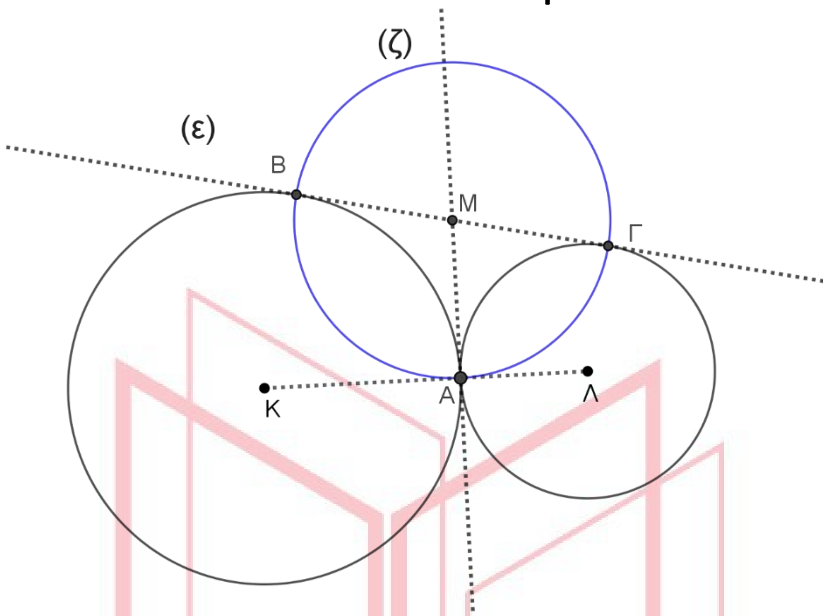


α) Το σημείο Α είναι σημείο της διακέντρου ΚΛ και τα Β, Γ είναι σημεία επαφής της κοινής εξωτερικής εφαπτομένης των δυο κύκλων με αυτούς, οπότε τα τρία σημεία Α, Β και Γ δεν είναι συνευθειακά. Άρα τα σημεία Α, Β και Γ θα είναι σημεία ενός μοναδικού κύκλου.

Το σημείο Μ είναι εξωτερικό σημείο των κύκλων (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) ως σημείο τομής των κοινών εφαπτομένων τους από τα δεδομένα.

Είναι ΜΒ = ΜΑ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου (Κ, ρ_1) από το σημείο Μ. Επίσης είναι ΜΑ = ΜΓ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου (Λ, ρ_2) από το σημείο Μ. Οπότε θα είναι ΜΒ = ΜΑ = ΜΓ (= κ). Άρα ο κύκλος που ζητείται να κατασκευαστεί θα έχει κέντρο το σημείο Μ και ακτίνα ίση με κ.

13702-Λύση



β) Επειδή οι κύκλοι (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο Α, η κοινή εφαπτομένη τους (ζ) είναι κάθετη στην ακτίνα ΚΑ και κάθετη στην ακτίνα ΛΑ αντίστοιχα. Και επειδή το σημείο Α είναι σημείο της διακέντρου ΚΛ, η εφαπτομένη (ζ) των δυο κύκλων στο Α θα είναι κάθετη στη διάκεντρο ΚΛ.

Η ακτίνα ΜΑ (=κ) του κύκλου που σχεδιάζεται με κέντρο το Μ έχει ως φορέα την εφαπτομένη (ζ) των δυο κύκλων στο σημείο επαφής τους Α, οπότε η ακτίνα ΜΑ θα είναι κάθετη στη διάκεντρο ΚΛ. Άρα ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ θα εφάπτεται της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Α.

13704

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

ii. Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών του και μικρότερη από τη διαφορά τους.

iii. Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

iv. Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

v. Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι: *αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή*.

(Μονάδες 15)

13704-Λύση

α) i. Σωστό (σελ. 45)

ii. Λάθος. Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα: Κάθε πλευρά τριγώνου είναι **μικρότερη** από το άθροισμα των δύο άλλων και **μεγαλύτερη** από τη διαφορά τους.

iii. Λάθος, γιατί δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη είναι παράλληλες αν σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες **παραπληρωματικές**.

iv. Σωστό (σελ. 113)

v. Σωστό (σελ. 136)

β) Θεώρημα ΙΙ, σελ. 114

13740

ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε μια τυχαία χορδή του ΑΒ, την οποία προεκτείνουμε προς το μέρος του Β κατά ίσο τμήμα ΒΓ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο της Β που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΑ = ΔΓ. (Μονάδες 12)

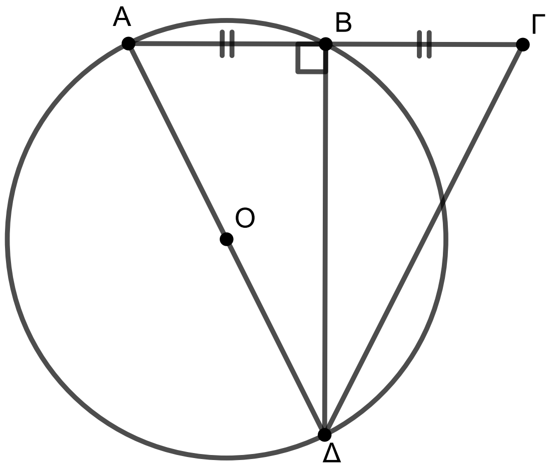
β) Η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 13)

13740-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΔΑΓ, το τμήμα ΔΒ είναι διάμεσος της πλευράς ΑΓ, αφού ΑΒ = ΒΓ από την υπόθεση. Επίσης το τμήμα ΔΒ είναι και ύψος, αφού ΔΒ $\perp$ ΑΓ από την υπόθεση. Στο τρίγωνο ΔΑΓ το τμήμα ΔΒ είναι διάμεσος και ύψος, άρα το ΔΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, επομένως ΔΑ = ΔΓ.

β) Τα σημεία Α, Β και Δ είναι σημεία του κύκλου, άρα η γωνία $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη και επειδή είναι ορθή, θα βαίνει σε ημικύκλιο. Δηλαδή η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου.



13742

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Μ το μέσο της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε ΒΚ ⊥ ΒΓ έτσι ώστε ΒΚ = ΑΓ (το σημείο Κ είναι στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α).

α) Να αποδείξετε ότι ΑΜ//ΒΚ και ΑΒ = ΒΚ. (Μονάδες 8)

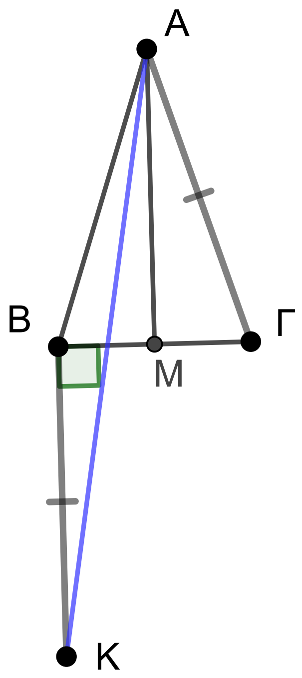
β) Να δείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΜ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι $B\widehat{K}A = 45^o - \frac{\widehat{\Gamma}}{2}$ (Μονάδες 6)

δ) Μπορεί το τετράπλευρο ΑΒΚΜ να είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

13742-Λύση

Έστω το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο Μ της πλευράς του ΒΓ. Φέρουμε ΒΚ⊥ΒΓ στο σημείο Β και θεωρούμε τμήμα ΒΚ=ΑΓ.



α) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, το τμήμα ΑΜ είναι η διάμεσος προς τη βάση του ΒΓ, οπότε το ΑΜ είναι και ύψος και διχοτόμος της γωνίας Α. Δηλαδή ΑΜ ⊥ ΒΓ και επιπλέον οι γωνίες ΒΑΜ και ΓΑΜ είναι ίσες.

Από την κατασκευή ΚΒ ⊥ ΒΓ και επειδή ΑΜ ⊥ ΒΓ, τότε ΑΜ//ΚΒ , ως κάθετες στη ΒΓ σε διαφορετικά σημεία της. Επιπλέον δίνεται ότι ΒΚ = ΑΓ και ξέρουμε ότι οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ είναι ίσες, οπότε ΑΒ = ΒΚ.

β) Δείξαμε στο ερώτημα α) ότι ΑΒ = ΒΚ, άρα το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $B\widehat{A}K = B\widehat{K}A$. Επιπλέον έχουμε ότι ΑΜ//ΒΚ, οπότε οι γωνίες $K\widehat{A}M$ και $B\widehat{K}A$ θα είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των ΑΜ//ΒΚ που τέμνονται από την ΑΚ. Άρα ισχύει ότι $B\widehat{A}K = B\widehat{K}A = K\widehat{A}M$ (1) οπότε η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\widehat{A}M$.

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΚ οι τρεις γωνίες του έχουν άθροισμα 180°, δηλαδή $B\widehat{A}K + K\widehat{B}A + B\widehat{K}A = 180^\circ$. Επιπλέον $K\widehat{B}A = A\widehat{B}\Gamma + 90^\circ$, οπότε λόγω της (1) έχουμε: $2B\widehat{K}A + \widehat{B} + 90^\circ = 180^\circ$ ή αλλιώς $2\,B\widehat{K}A + \widehat{B} = 90^\circ$. Όμως οι γωνίες Β και Γ είναι ίσες ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου, οπότε 2 $B\widehat{K}A$ = 90^o- $\widehat{\Gamma}$. Επομένως $B\widehat{K}A$ = 45^o - $\frac{\widehat{\Gamma}}{2}$.

δ) Το τετράπλευρο ΑΒΚΜ έχει τις δυο απέναντι πλευρές του ΑΜ και ΒΚ παράλληλες. Αν ήταν παραλληλόγραμμο οι ΑΜ και ΒΚ θα ήταν και ίσες. Αν ΑΜ = ΒΚ τότε θα ισχύει ότι ΑΜ = ΑΒ. Όμως τα τμήματα ΑΜ και ΑΒ είναι κάθετο και πλάγιο τμήμα αντίστοιχα προς τη ΒΓ, οπότε ισχύει ότι ΑΜ < ΑΒ . Συνεπώς έχουμε ότι ΑΜ < ΚΒ και το τετράπλευρο ΑΒΚΜ δεν μπορεί να είναι παραλληλόγραμμο.

13743

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ στην πλευρά ΑΒ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ.

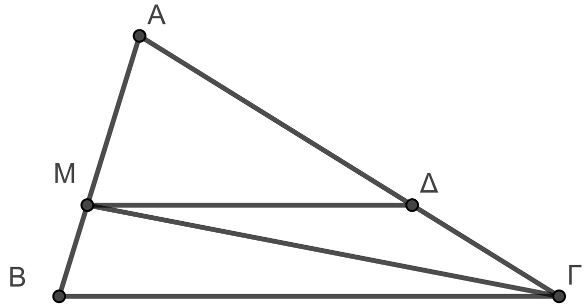
α) Να αποδείξετε ότι $Δ\widehat{M}Γ = Β\widehat{Γ}Μ$. (Μονάδες 05)

β) Αν το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Μ στην ΑΒ ώστε το τρίγωνο ΔΜΓ να είναι ισοσκελές με ΔΜ = ΔΓ και να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς σας. (Μονάδες 10)

γ) Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΓ να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΜΔΕΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

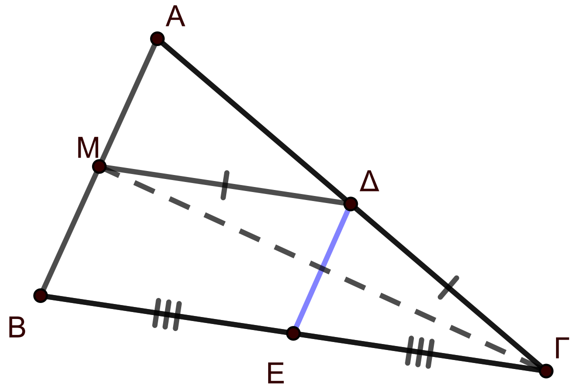
13743-Λύση

α)



Από το σημείο Μ φέρουμε ΜΔ//ΒΓ. Τότε οι γωνίες $\Delta\widehat{M}\Gamma$ και $B\widehat{\Gamma}M$ είναι ίσες, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΜΔ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΜΓ.

β)



Αν το ΔΜΓ είναι ισοσκελές με ΔΜ = ΔΓ, τότε οι γωνίες στη βάση του θα είναι ίσες, δηλαδή $\Delta\widehat{M}\Gamma = \Delta\widehat{\Gamma}M$. Στο ερώτημα α) αποδείξαμε ότι $\Delta\widehat{M}\Gamma = B\widehat{\Gamma}M$, οπότε $\Delta\widehat{\Gamma}M = B\widehat{\Gamma}M$, άρα η ΓΜ θα είναι διχοτόμος της γωνίας Γ. Όμως από την υπόθεση το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσσκελές με βάση ΑΒ, οπότε η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής Γ θα είναι και διάμεσος προς τη βάση του. Δηλαδή το ζητούμενο σημείο Μ είναι το μέσο της ΑΒ.

γ) Το Μ είναι το μέσο της ΑΒ και έχουμε φέρει ΜΔ//ΒΓ, άρα το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΓ. Δίνεται ότι το σημείο Ε είναι μέσο της ΒΓ άρα το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε το ΔΕ είναι παράλληλο στην ΑΒ, ή ΔΕ//ΜΒ. Το τετράπλευρο ΜΔΕΒ έχει τις απέναντι πλευρές του ανά δύο παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

13744

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ προς το Β και προς το Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε ΒΕ = ΓΖ. Αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες $A\hat{E}\Delta$ και $B\hat{Z}A$ είναι ίσες.

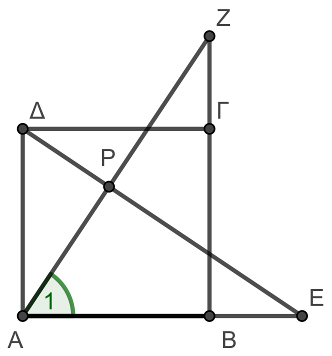
ii. Τα τμήματα ΑΖ και ΔΕ είναι κάθετα.

(Μονάδες 18)

β) Αν γνωρίζετε ότι το σημείο τομής Ρ των ΑΖ και ΔΕ είναι τέτοιο ώστε ΡΒ = ΑΒ, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Ε στην προέκταση του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 07)

13744-Λύση

α)



i. ΑΒ = ΒΓ, ως πλευρές του τετραγώνου, ΒΕ = ΓΖ, από την υπόθεση. Προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες έχουμε ΑΕ=ΒΖ (1), ως αθροίσματα ίσων τμημάτων.

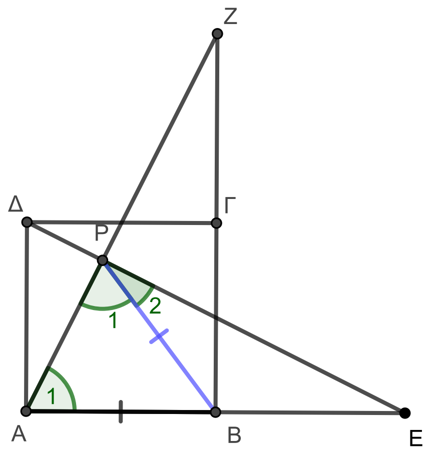
Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΖ:

- ΑΔ = ΑΒ, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ
- ΑΕ = ΒΖ, από τη σχέση (1)
- $\Delta\widehat{A}E = A\widehat{B}Z = 90^o$

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΖ έχουν τις κάθετες πλευρές τους μια προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα. Οι γωνίες $A\widehat{E}\Delta$ και $B\widehat{Z}A$ είναι ίσες γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ το άθροισμα των δύο οξειών γωνιών του είναι 90ᵒ. Δηλαδή ισχύει $\widehat{A}_1 + B\widehat{Z}A = 90^o$, αλλά $B\widehat{Z}A = A\widehat{E}\Delta$, από το α)i. ερώτημα, οπότε $\widehat{A}_1 + A\widehat{E}\Delta = 90^o$ ή $\widehat{A}_1 + A\widehat{E}P = 90^o$ (όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ). Στο τρίγωνο ΑΕΡ το άθροισμα δύο γωνιών του είναι 90^o , οπότε η τρίτη γωνία του θα είναι 90^o. Δηλαδή $A\widehat{P}E = 90^o$, έτσι τα τμήματα ΑΖ και ΔΕ είναι κάθετα.

β)



13744-Λύση

Από την υπόθεση ΡΒ = ΑΒ , άρα το τρίγωνο ΒΑΡ είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{A}_1 = \widehat{P}_1$, ως προσκείμενες γωνίες στη βάση του. Από το προηγούμενο ερώτημα $\widehat{A}_1 + A\widehat{E}P = 90^o$, ως άθροισμα των οξειών γωνιών ορθογωνίου τριγώνου, οπότε $\widehat{P}_1 + A\widehat{E}P = 90^o$ (1). Επιπλέον ισχύει $\widehat{P}_1 + \widehat{P}_2 = 90^o$ (2) επειδή $A\widehat{P}E = 90^o$ από το α)ii. Από τις (1) και (2) έχουμε $A\widehat{E}P = \widehat{P}_2$, ή $B\widehat{E}P = \widehat{P}_2$, άρα το τρίγωνο ΒΕΡ είναι ισοσκελές με ΕΒ = ΡΒ. Όμως ΡΒ = ΑΒ, από υπόθεση, οπότε ΒΕ = ΑΒ και η θέση του σημείου Ε προσδιορίζεται στην προέκταση του ΑΒ ώστε ΒΕ = ΑΒ.

13745

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, το μέσο Μ της βάσης ΒΓ και τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στη βάση του.

α) Αν από το μέσο Μ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

i. ΜΕ = ΜΖ. (Μονάδες 6)

ii. Το ΑΕΜΖ είναι ρόμβος με περίμετρο ίση με 2ΑΒ. (Μονάδες 7)

β) Αν πάρουμε τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, διαφορετικό από το μέσο Μ, και φέρουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, τότε:

i. Ποιο είναι το είδος του τετράπλευρου ΑΚΔΛ;

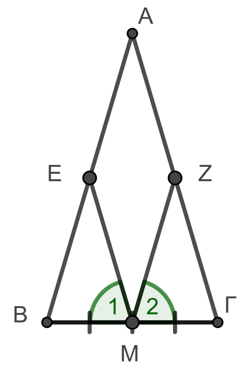
ii. Να συγκρίνετε την περίμετρο του τετράπλευρου ΑΚΔΛ με την περίμετρο του ρόμβου ΑΕΜΖ του ερωτήματος α ii) και να διατυπώστε λεκτικά το συμπέρασμα που προκύπτει.

(Μονάδες 12)

13745-Λύση

ΛΥΣΗ

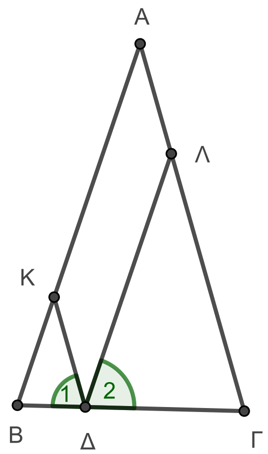
α) Έστω Μ το μέσο της βάσης ΒΓ στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ τότε :



i. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε ΜΕ//ΑΓ, οπότε το Ε θα είναι μέσο της ΑΒ και $ΜΕ = \frac{ΑΓ}{2}$ (1), ομοίως επειδή από το μέσο Μ φέρουμε ΜΖ//ΑΒ θα είναι Ζ μέσο της ΑΓ και $ΜΖ = \frac{ΑΒ}{2}$ (2). Επιπλέον δίνεται ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, οπότε από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ΜΕ = ΜΖ.

ii. Από την υπόθεση είναι ΜΕ//ΑΓ ή ΜΕ//ΑΖ και ΜΖ//ΑΒ ή ΜΖ//ΑΕ, οπότε το τετράπλευρο ΑΕΜΖ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές του ΜΕ και ΜΖ είναι ίσες από το α)i. ερώτημα, οπότε το ΑΕΜΖ είναι ρόμβος. Η περίμετρος του ρόμβου αυτού είναι ίση με $ΑΕ + ΕΜ + ΜΖ + ΑΖ = 4\,ΑΕ = 4\,\frac{ΑΒ}{2} = 2ΑΒ$. Διότι το τετράπλευρο είναι ρόμβος οπότε οι τέσσερις πλευρές του είναι ίσες με ΑΕ και $ΑΕ= \frac{ΑΒ}{2}$, αφού Ε μέσο της ΑΒ.

β) Αν το Δ είναι τυχαίο σημείο στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου, όπως στο σχήμα



13745-Λύση

i. Από την κατασκευή οι απέναντι πλευρές του τετράπλευρου ΑΚΔΛ είναι παράλληλες, αφού ΔΚ//ΑΓ ή ΔΚ//ΑΛ και ΔΛ//ΑΒ ή ΔΛ//ΑΚ. Άρα το ΑΚΔΛ είναι παραλληλόγραμμο. Θα αποδείξουμε ότι το ΑΚΔΛ, όταν το Δ δεν είναι το μέσο του ΒΓ δε μπορεί να είναι ρόμβος.

   Οι γωνίες $\widehat{\Gamma}$ και $\widehat{\Delta}_1$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΚ και ΑΓ με τέμνουσα την ΒΓ, οπότε $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Gamma}$, άρα $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{B}$, (αφού οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι ίσες ως γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου) . Οπότε το ΒΚΔ είναι ισοσκελές τρίγωνο με ΚΔ = ΚΒ (1). Όμοια οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Delta}_2$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΛ και ΑΒ με τέμνουσα την ΒΓ, οπότε $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{B}$, άρα $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{\Gamma}$. Άρα το τρίγωνο ΔΛΓ είναι ισοσκελές με ΛΔ = ΛΓ (2). Επειδή $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{B}$, $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{\Gamma}$ και $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, προκύπτει ότι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Δηλαδή τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ έχουν τις γωνίες της βάσης τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες τους, $B\widehat{K}\Delta$ και $\Gamma\widehat{\Lambda}\Delta$, θα είναι μεταξύ τους ίσες. Αν το Δ δεν ταυτίζεται με το μέσο Μ της ΒΓ τα τμήματα ΒΔ και ΔΓ δεν είναι ίσα, οπότε και τα τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ δεν είναι ίσα. (Αν ήταν ίσα θα έπρεπε και οι πλευρές ΒΔ και ΔΓ που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\widehat{K}\Delta$ και $\Gamma\widehat{\Lambda}\Delta$ αντίστοιχα, να είναι ίσες). Οι πλευρές ΔΚ και ΔΛ δεν είναι ίσες, γιατί αν ήταν ίσες, τα τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ θα ήταν ίσα από το κριτήριο ΓΠΓ. Άτοπο, αφού αποδείξαμε ότι τα τρίγωνα ΒΚΔ και ΓΛΔ δεν είναι ίσα.

   Οπότε οι διαδοχικές πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΚΔΛ δεν είναι ίσες , επομένως αυτό δεν είναι πια ρόμβος.

ii. Για την περίμετρο του παραλληλογράμμου ΑΚΔΛ έχουμε ότι είναι ίση με ΑΚ + ΚΔ + ΔΛ + ΛΑ με τη βοήθεια των σχέσεων (1) και (2) του β)i. ερωτήματος η περίμετρος γίνεται ίση με ΑΚ + ΚΒ +ΓΛ + ΛΑ = ΑΒ + ΑΓ = ΑΒ + ΑΒ = 2ΑΒ.

Παρατηρούμε ότι η περίμετρος του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται όταν το Δ είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερή και ίση με 2ΑΒ.

13746

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Στην προέκταση της διαμέσου ΑΔ προς το Δ παίρνουμε σημείο Ε, έτσι ώστε ΑΔ = ΔΕ.

α) Να αποδείξετε ότι :

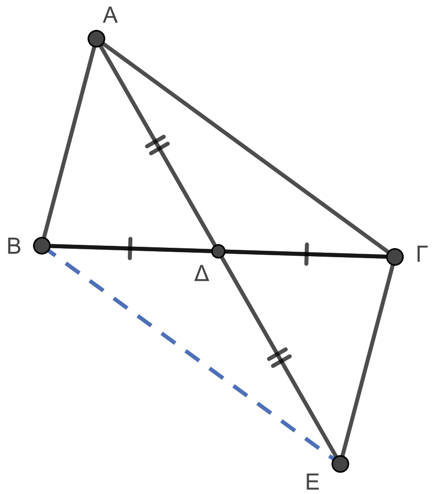
i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 07)

ii. Η διάμεσος ΑΔ είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ που την περιέχουν. (Μονάδες 08)

β) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ το διπλάσιο της διαμέσου ΑΔ ισούται με την πλευρά ΒΓ, να χαρακτηρίσετε το είδος του τετράπλευρου ΑΒΕΓ και το είδος του τριγώνου ΑΒΓ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 10)

13746-Λύση



α)

i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΓΔ έχουν:

- ΑΔ = ΔΕ, από υπόθεση
- ΒΔ = ΔΓ, διότι Δ μέσο της ΒΓ
- $Α\widehat{Δ}Β = Ε\widehat{Δ}Γ$ ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές, ίσες, οπότε από το κριτήριο ΠΓΠ είναι ίσα. Επομένως θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες, δηλαδή ΑΒ=ΓΕ (1).

i. Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΓΕ έχουμε : ΑΕ <ΑΓ + ΓΕ και με τη βοήθεια της σχέσης (1) προκύπτει ΑΕ < ΑΓ + ΑΒ. Όμως ΑΕ = 2ΑΔ, οπότε έχουμε ότι 2ΑΔ < ΑΒ + ΑΓ ή $ΑΔ < \frac{ΑΒ+ΑΓ}{2}$.

Δηλαδή η διάμεσος ΑΔ είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ που την περιέχουν.

β) Δίνεται ότι 2ΑΔ = ΒΓ ή ΑΕ = ΒΓ. Δηλαδή στο τετράπλευρο ΑΒΕΓ οι διαγώνιές του είναι ίσες. Επιπλέον έχουμε ότι ΑΔ = ΔΕ από την κατασκευή και ότι ΒΔ = ΔΓ, αφού Δ μέσο της ΒΓ. Δηλαδή οι διαγώνιες του τετράπλευρου ΑΒΕΓ διχοτομούνται, οπότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο και επιπλέον είναι ίσες, άρα το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Τότε στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{Α} = 90^o$, αφού το ΑΒΕΓ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, άρα το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

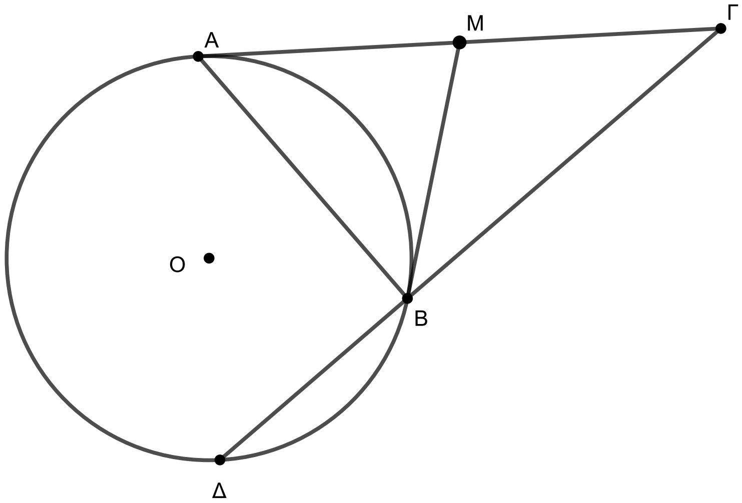
13747

ΘΕΜΑ 2

Από σημείο Μ εξωτερικό ενός κύκλου κέντρου Ο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΑΜ προς το μέρος του Μ και παίρνουμε τμήμα ΜΓ = ΑΜ. Από το σημείο Γ φέρουμε την τέμνουσα ΓΒΔ του κύκλου. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Τα σημεία Α και Δ είναι αντιδιαμετρικά. (Μονάδες 12)

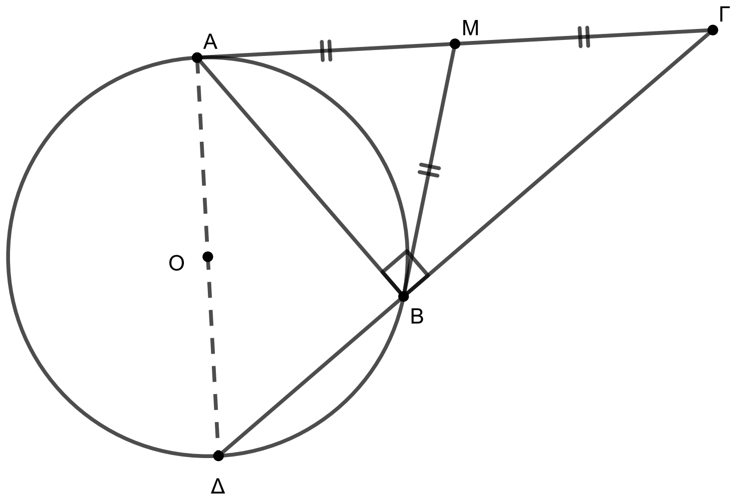


13747-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Τα τμήματα ΜΑ και ΜΒ είναι ίσα γιατί είναι εφαπτόμενα τμήματα από σημείο εκτός του κύκλου. Από την υπόθεση έχουμε ότι ΜΓ=ΑΜ, άρα ΜΑ = ΜΒ = ΜΓ. Δηλαδή η ΒΜ, που είναι διάμεσος προς την πλευρά ΑΓ στο τρίγωνο ΒΑΓ, ισούται με το μισό της ΑΓ. Οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά ΑΓ και $A\hat{B}\Gamma = 90^{o}$.

β) $A\hat{B}\Gamma = 90^{o}$, οπότε και $A\hat{B}\Delta = 90^{o}$. Τα σημεία Α, Β, Δ είναι σημεία του κύκλου, άρα η $A\hat{B}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη γωνία και επειδή είναι ορθή θα βαίνει σε ημικύκλιο. Δηλαδή η ΑΔ είναι διάμετρος επομένως τα σημεία Α, Δ είναι αντιδιαμετρικά.



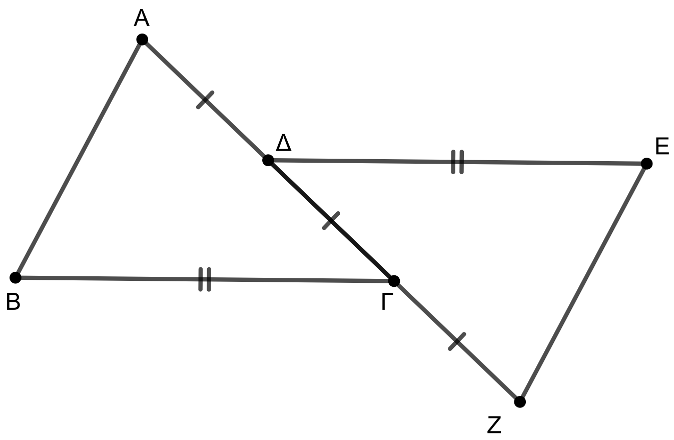
13748

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς ΑΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΒΓ όπως φαίνεται στο σχήμα. Προεκτείνουμε την ΑΓ προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΓΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΔ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

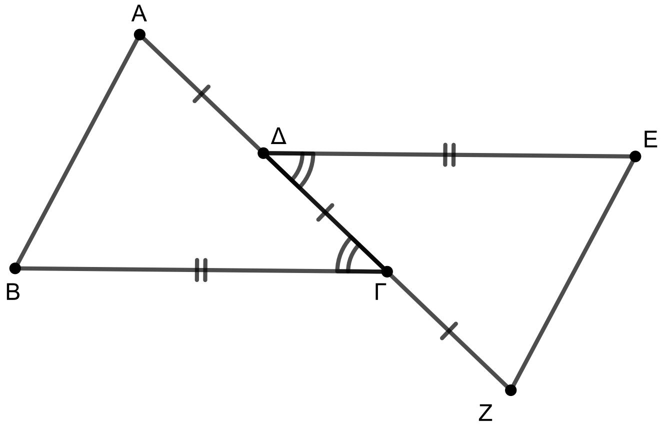
β) ΑΒ // ΕΖ. (Μονάδες 15)



13748-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



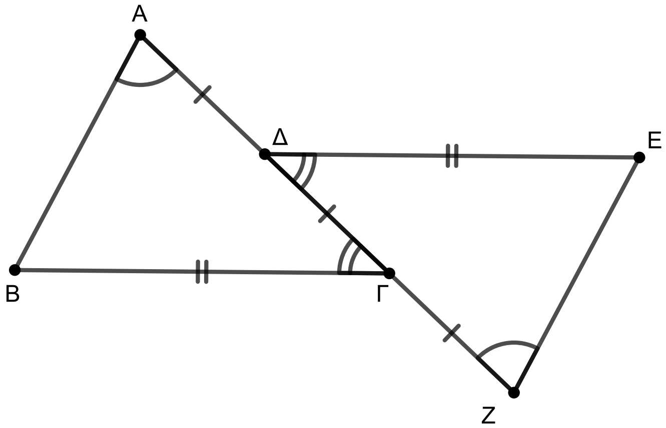
Για το τμήμα ΔΖ έχουμε: ΔΖ = ΔΓ + ΓΖ = 2ΔΓ. Όμως το Δ είναι το μέσο του ΑΓ, άρα 2ΔΓ =ΑΓ, οπότε θα είναι ΔΖ = ΑΓ (1).

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΔ έχουν:

- ΒΓ = ΔΕ, από την υπόθεση
- ΑΓ = ΔΖ, από τη σχέση (1)
- $A\hat{\Gamma}B = Z\hat{\Delta}E$, ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΓ και ΔΕ που τέμνονται από την ΔΓ.

Άρα είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες από το κριτήριο ΠΓΠ.

β)



Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΖΕΔ, προκύπτει ότι $B\hat{A}\Gamma = E\hat{Z}\Delta$ γιατί είναι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΓ και ΕΔ αντίστοιχα. Όμως, είναι γωνίες εντός εναλλάξ των ΑΒ και ΕΖ που τέμνονται από την ΑΖ, άρα ΑΒ // ΕΖ.

13749

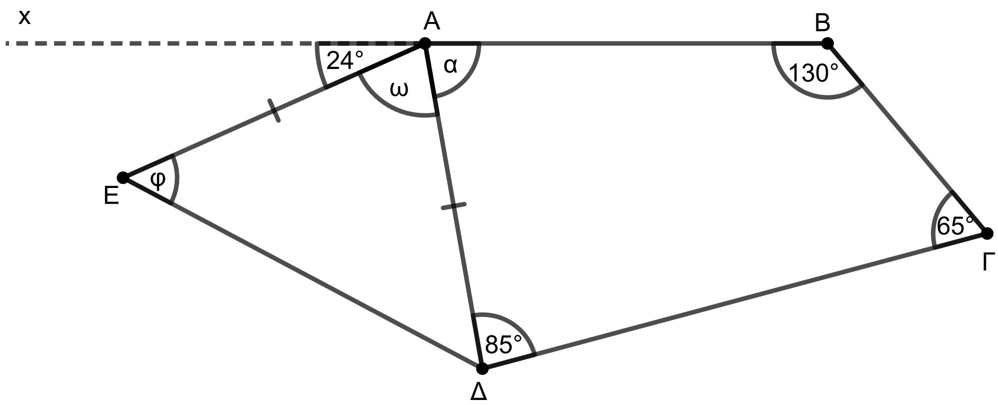
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔΕ είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος ΑΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ και η ημιευθεία Αx είναι προέκταση της ΒΑ προς το Α. Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

α) Τη γωνία $\widehat{\alpha}$. (Μονάδες 08)

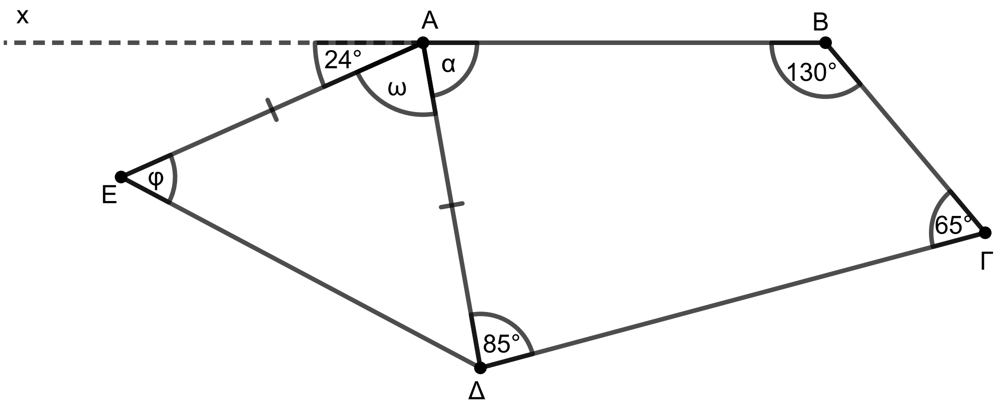
β) Τη γωνία $\widehat{\omega}$. (Μονάδες 08)

γ) Τη γωνία $\widehat{\varphi}$. (Μονάδες 09)



13749-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου ισούται με 360^o, οπότε επειδή η γωνία $\widehat{\alpha}$ είναι η $4^η$ γωνία του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ έχουμε:

$\widehat{\alpha} + 130^o + 65^o + 85^o = 360^o$ ή $\widehat{\alpha} = 360^o - 280^o$. Άρα $\widehat{\alpha} = 80^o$.

β) Η γωνία των 24^o με τη γωνία $\widehat{\omega}$ και τη γωνία $\widehat{\alpha}$ που υπολογίσαμε στο α) ερώτημα σχηματίζουν ευθεία γωνία. Άρα $24^o + \widehat{\omega} + \widehat{\alpha} = 180^o$ ή $24^o + \widehat{\omega} + 80^o = 180^o$. Άρα $\widehat{\omega} = 76^o$.

γ) Η διαγώνιος ΑΔ του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ, άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΕΔ. Η γωνία $\widehat{\varphi}$ είναι ίση με τη γωνία $Α\widehat{Δ}Ε$, ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΔΕ, του οποίου η γωνία της κορυφής είναι η $\widehat{\omega}$ με $\widehat{\omega} = 76^o$ από το β) ερώτημα. Επομένως $\widehat{\varphi} = \frac{180° - ω}{2} = \frac{180° - 76°}{2} = 52^o$.

13750

ΘΕΜΑ 4

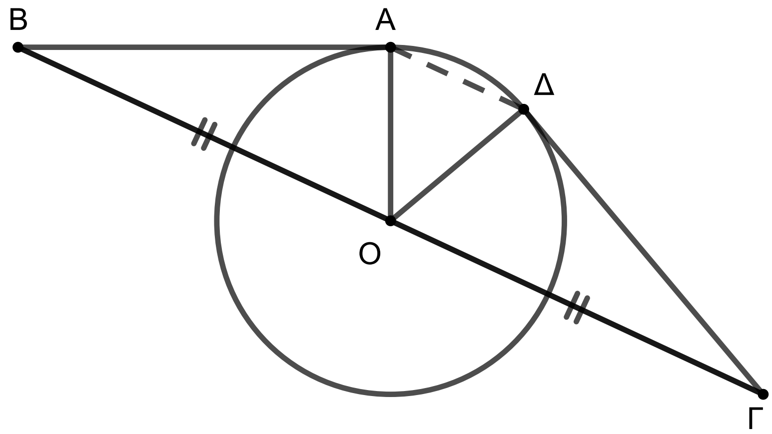
Από σημείο Β εξωτερικό ενός κύκλου (Ο,R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ. Ενώνουμε το σημείο Β με το κέντρο Ο του κύκλου και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΟΓ = ΒΟ. Από το σημείο Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ, όπως στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΑΒ = ΔΓ (Μονάδες 08)

ii. ΑΔ // ΒΓ (Μονάδες 10)

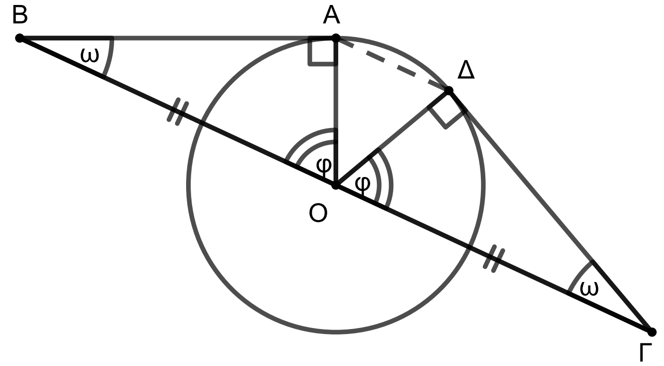
β) Αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΒΑ είναι ίσο με την ακτίνα R, τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο ΑΟΔ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)



13750-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



i. ΟΑ ⊥ ΑΒ και ΟΔ ⊥ ΔΓ διότι ΟΑ και ΟΔ είναι ακτίνες στα σημεία επαφής Α και Δ αντίστοιχα.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ, τα οποία έχουν:

- ΟΑ = ΟΔ, ακτίνες του κύκλου
- ΟΒ = ΟΓ, από την υπόθεση
- $O\hat{A}B = O\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$, αφού ΟΑ ⊥ ΑΒ και ΟΔ ⊥ ΔΓ

Τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Άρα θα έχουν ίσες και τις άλλες κάθετες πλευρές τους, δηλαδή ΑΒ = ΔΓ.

ii. Από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων του α) i. ερωτήματος προκύπτει ότι $O\hat{B}A = O\hat{\Gamma}\Delta = \omega$, γιατί είναι οξείες γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΟΑ και ΟΔ αντίστοιχα. Επίσης είναι $A\hat{O}B = \Delta\hat{O}\Gamma = \varphi$ ως οξείες γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, με $\omega + \varphi = 90^o$ (1), ως άθροισμα οξειών γωνιών ορθογωνίων τριγώνων.

Για τη γωνία $A\hat{O}\Delta$ έχουμε: $A\hat{O}\Delta = 180^o - 2\varphi = 2(90^o - \varphi) = 2\omega$ λόγω της (1). Το τρίγωνο ΑΟΔ είναι ισοσκελές, αφού ΟΑ = ΟΔ = R. Για τις ίσες του γωνίες $O\hat{A}\Delta$ και $O\hat{\Delta}A$ έχουμε: $O\hat{A}\Delta = O\hat{\Delta}A = \frac{180^\circ - A\hat{O}\Delta}{2} = \frac{180^\circ - 2\omega}{2} = 90^o - \omega = \varphi$, λόγω της (1).

Άρα $O\hat{A}\Delta = A\hat{O}B = \varphi$ και είναι γωνίες εντός εναλλάξ των ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΟΑ, οπότε ΑΔ//ΒΓ.

β) Αν το μήκος του ΒΑ είναι ίσο με R, τότε από το α) ερώτημα τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ θα είναι και ισοσκελή, αφού ΟΑ = ΑΒ = ΟΔ = ΔΓ = R. Επομένως οι γωνίες ω και φ θα είναι ίσες και η καθεμία θα ισούται με 45^o. Τότε $A\hat{O}\Delta = 180^o - 2\varphi = 90^o$, οπότε το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΔ έχει τη γωνία της κορυφής του ορθή, άρα είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

13751

ΘΕΜΑ 4

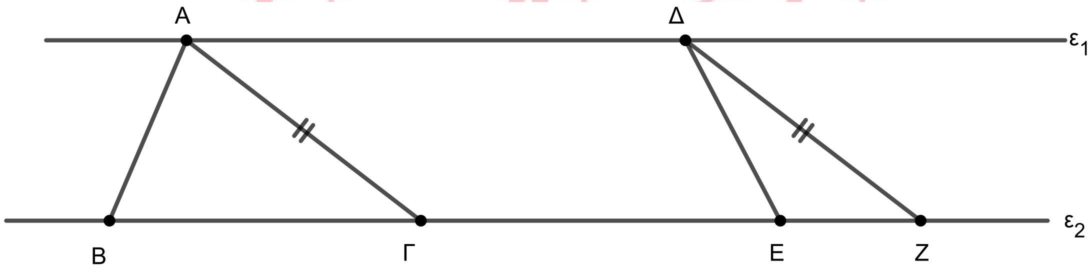
Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, ενώ το ΔΕΖ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{E} > 90^o$. Ισχύει επίσης ότι ΑΓ = ΔΖ.

α)

i. Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων από τις κορυφές Α και Δ ονομάζοντάς τα ΑΗ και ΔΘ αντίστοιχα. (Μονάδες 05)

ii. Να αποδείξετε ότι ΗΓ = ΘΖ. (Μονάδες 12)

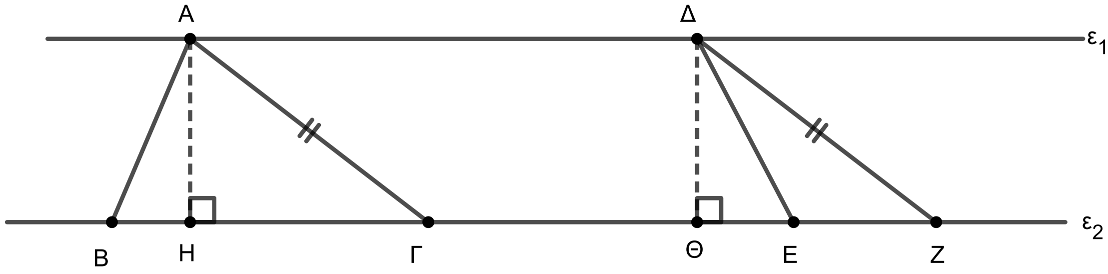
β) Να δικαιολογήσετε γιατί ΕΖ < ΒΓ. (Μονάδες 08)



13751-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



i. Έστω ΑΗ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ και ΔΘ το ύψος του τριγώνου ΔΕΖ.

ii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΔΘΖ, τα οποία έχουν:

- ΑΗ = ΔΘ, ως αποστάσεις παραλλήλων ευθειών
- ΑΓ = ΔΖ, από την υπόθεση
- $\widehat{Η} = \widehat{Θ} = 90^o$, αφού ΑΗ και ΔΘ ύψη

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Οπότε και οι άλλες κάθετες πλευρές τους θα είναι ίσες, δηλαδή ΗΓ = ΘΖ.

β) Το σημείο Η είναι εσωτερικό του τμήματος ΒΓ γιατί το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, οπότε ΗΓ < ΒΓ. Το σημείο Θ είναι εξωτερικό του τμήματος ΕΖ γιατί η γωνία $\hat{Ε}$ είναι αμβλεία, οπότε ΕΖ < ΘΖ. Από το α) ii. ερώτημα βρήκαμε ότι ΗΓ = ΘΖ.

Άρα ΕΖ < ΘΖ, ΘΖ = ΗΓ και ΗΓ < ΒΓ, επομένως ΕΖ < ΒΓ.

13752

ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{B} < 90^o$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΒΓ και από το σημείο Ε φέρουμε τμήμα ΕΖ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

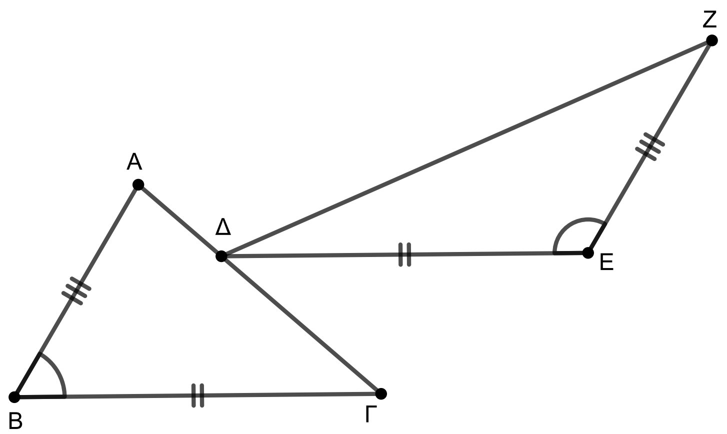
α) Ένας μαθητής κάνει τους παρακάτω διαδοχικούς συλλογισμούς. Να χαρακτηρίσετε Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) κάθε έναν από αυτούς.

1. Οι γωνίες $\Delta\widehat{E}Z$ και $A\widehat{B}\Gamma$ είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες.
2. Οπότε $\Delta\widehat{E}Z = A\widehat{B}\Gamma$.
3. Τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΑΒΓ είναι ίσα.
4. Το τμήμα ΔΖ είναι ίσο με το τμήμα ΑΓ.

(Μονάδες 08)

β) Να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς σας (Σ ή Λ) που αφορούν τους ισχυρισμούς 2. και 3. (Μονάδες 10)

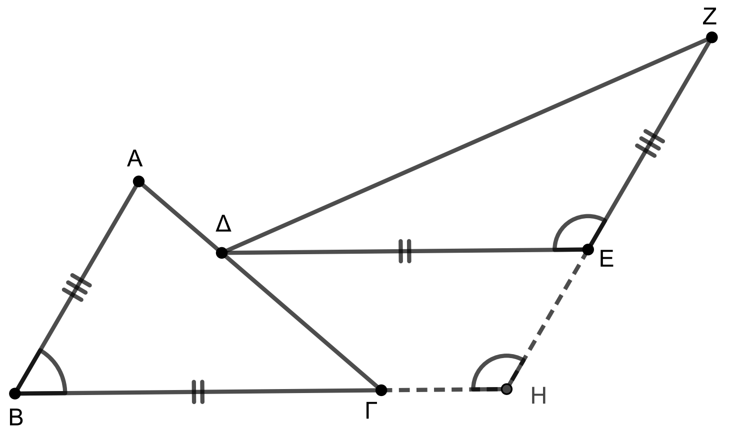
γ) Αν στα δεδομένα παραλείψουμε τη συνθήκη $\widehat{B} < 90^o$, να συγκρίνετε τα τμήματα ΑΓ και ΔΖ για τα διάφορα είδη της γωνίας $\widehat{B}$ και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 07)



13752-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



1. Σ
2. Λ
3. Λ
4. Λ

β) Η απάντηση στον συλλογισμό 2. είναι λάθος.

Προεκτείνουμε την ΖΕ και τη ΒΓ και έστω Η το σημείο τομής τους. Τότε:

$Z\hat{E}\Delta = E\hat{H}\Gamma$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες των παραλλήλων ΔΕ και ΒΗ που τέμνονται από την ΖΗ.

$E\hat{H}\Gamma + A\hat{B}\Gamma = 180^o$ γιατί είναι γωνίες εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και ΖΗ που τέμνονται από την ΒΗ. Άρα $Z\hat{E}\Delta + A\hat{B}\Gamma = 180^o$, δηλαδή είναι παραπληρωματικές γωνίες και αφού $\hat{B} < 90^o$ από την υπόθεση, τότε $Z\hat{E}\Delta > 90^o$. Άρα δεν είναι ίσες.

Η απάντηση στο συλλογισμό 3. είναι λάθος, γιατί τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μία, τις ΔΕ, ΒΓ και τις ΖΕ, ΑΒ, αλλά οι περιεχόμενες γωνίες αυτών των πλευρών δεν είναι ίσες αλλά παραπληρωματικές, όπως δικαιολογήθηκε παραπάνω.

γ) Οι γωνίες $Z\hat{E}\Delta$ και $A\hat{B}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές.

- Αν $A\hat{B}\Gamma < 90^o$, τότε $Z\hat{E}\Delta > 90^o$ και τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές άνισες. Οπότε, θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ομοίως άνισες. Δηλαδή, αφού $A\hat{B}\Gamma < Z\hat{E}\Delta$ τότε $A\Gamma < \Delta Z$.
- Αν $A\hat{B}\Gamma > 90^o$, τότε $Z\hat{E}\Delta < 90^o$ και τα τρίγωνα όπως προηγουμένως θα έχουν τις τρίτες πλευρές τους ομοίως άνισες. Δηλαδή, αφού $A\hat{B}\Gamma > Z\hat{E}\Delta$ τότε $A\Gamma > \Delta Z$.

13752-Λύση

- Αν $A\widehat{B}\Gamma = 90^o$, τότε και $Z\widehat{E}\Delta = 90^o$ και τα τρίγωνα είναι ορθογώνια με ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε θα είναι ίσα και συνεπώς θα έχουν ίσες και τις υποτείνουσές τους. Δηλαδή, αφού $A\widehat{B}\Gamma = Z\widehat{E}\Delta = 90^o$ τότε $A\Gamma = \Delta Z$.

Άρα η μόνη περίπτωση στην οποία τα τμήμα ΔΖ είναι ίσο με το τμήμα ΑΓ είναι όταν οι γωνίες $Z\widehat{E}\Delta$ και $A\widehat{B}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές και ίσες, δηλαδή ορθές.

13755

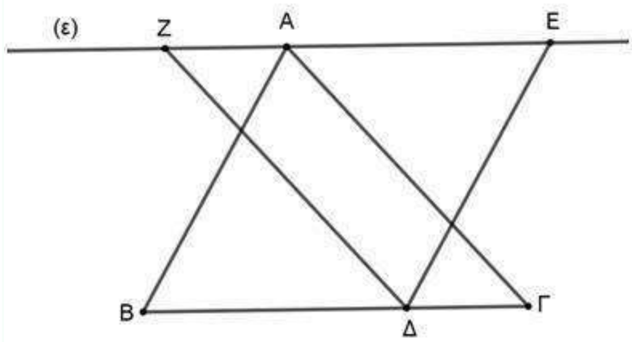
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τη ΒΓ. Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τις παράλληλες προς την ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α) τα τετράπλευρα ΖΑΓΔ και ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



13755-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Επειδή η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στη ΒΓ, προκύπτει ΖΑ // ΔΓ.

Από την υπόθεση έχουμε ΖΔ // ΑΓ.

Άρα το τετράπλευρο ΖΑΓΔ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στη ΒΓ, προκύπτει ΑΕ // ΒΔ.

Από την υπόθεση έχουμε ΔΕ // ΒΑ.

Άρα το τετράπλευρο ΑΒΔΕ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

- ΑΒ = ΔΕ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΔΕ
- ΑΓ = ΔΖ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΖΑΓΔ
- ΒΓ = ΖΕ, διότι ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ και ΖΕ = ΖΑ + ΑΕ και ΒΔ = ΑΕ, ΔΓ =ΖΑ ως απέναντι πλευρές των παραλληλογράμμων ΖΑΓΔ, ΑΒΔΕ αντίστοιχα.

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

13756

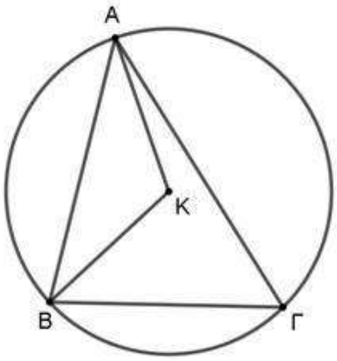
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ, ρ). Να αποδείξετε ότι:

α) $A\hat{K}B = 2\, A\hat{\Gamma}B$. (Μονάδες 7)

β) το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

γ) $K\hat{A}B + A\hat{\Gamma}B = 90°$. (Μονάδες 13)



13756-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η γωνία ΑΚΒ είναι επίκεντρη και βαίνει στο τόξο ΑΒ.

Η γωνία ΑΓΒ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο ΑΒ.

Άρα η επίκεντρη γωνία ΑΚΒ είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης γωνίας ΑΓΒ, δηλαδή $A\hat{K}B = 2\, A\hat{\Gamma}B$.

β) Είναι ΚΑ = ΚΒ διότι είναι ακτίνες του κύκλου (Κ, ρ), άρα το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές.

γ) Στο τρίγωνο ΚΑΒ για το άθροισμα των γωνιών του έχουμε :

$K\hat{A}B + A\hat{B}K + A\hat{K}B = 180°$ (1).

Από το ερώτημα (α) έχουμε $A\hat{K}B = 2\, A\hat{\Gamma}B$ (2).

Από το ερώτημα (β), έχουμε $K\hat{A}B = A\hat{B}K$ (3), γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΚΒ.

Λόγω των σχέσεων (2), (3) η (1) γράφεται $2K\hat{A}B + 2A\hat{\Gamma}B = 180°$ ή $K\hat{A}B + A\hat{\Gamma}B = 90°$.

13757

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,2) και (Λ,5).

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά. (Μονάδες 6)

γ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν ο κύκλος (Κ,2) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (Λ,5); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

δ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

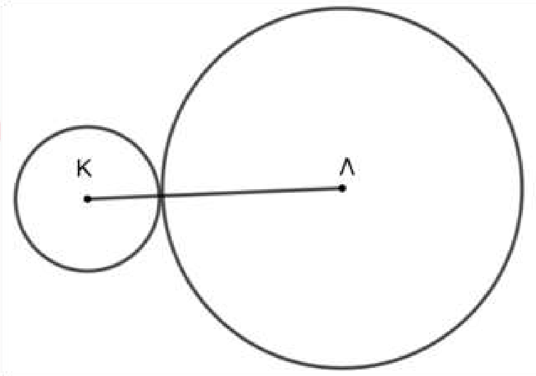
13757-Λύση

ΛΥΣΗ

Έστω R = 5 και ρ = 2.

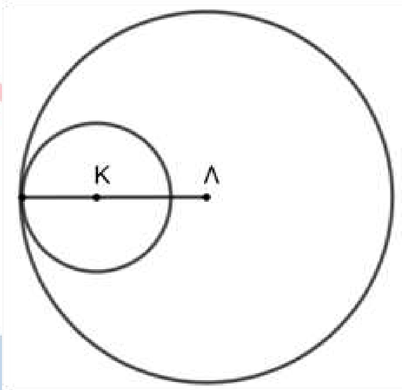
α) Αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, τότε για τη διάκεντρο ΚΛ έχουμε :

ΚΛ = R + ρ = 5 + 2 = 7.

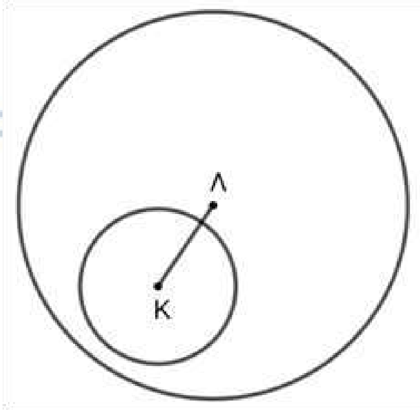


β) Αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, τότε για τη διάκεντρο ΚΛ έχουμε :

ΚΛ = R - ρ = 5 - 2 = 3.

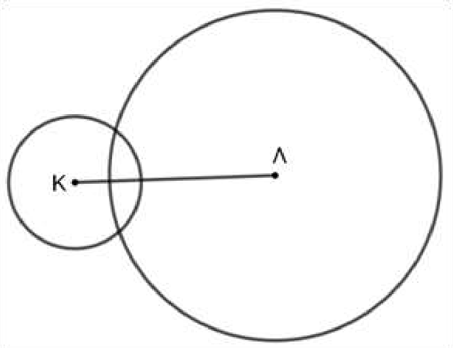


γ) Για να είναι ο κύκλος (Κ,2) στο εσωτερικό του κύκλου (Λ,5) θα πρέπει ΚΛ < R –ρ, δηλαδή ΚΛ < 5- 2 ή ΚΛ < 3.



δ) Για να τέμνονται οι κύκλοι θα πρέπει R- ρ < ΚΛ < R + ρ, δηλαδή 5 – 2 < ΚΛ < 5 + 2 ή 3 < ΚΛ < 7.

13757-Λύση



13758

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,3) και (Λ,8). Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:

α) ΚΛ = 13. (Μονάδες 5)

β) ΚΛ = 2. (Μονάδες 5)

γ) ΚΛ = 5. (Μονάδες 5)

δ) ΚΛ = 11. (Μονάδες 5)

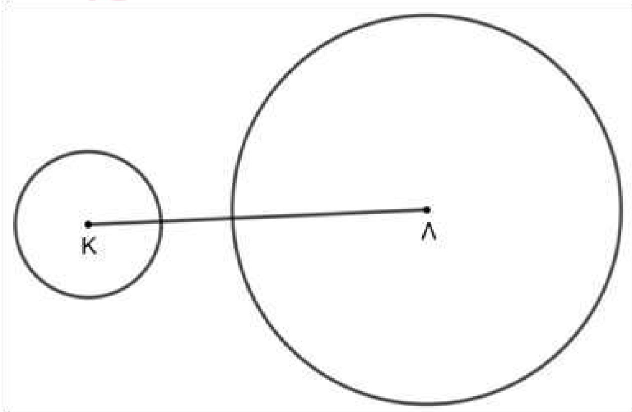
ε) ΚΛ = 9. (Μονάδες 5)

13758-Λύση

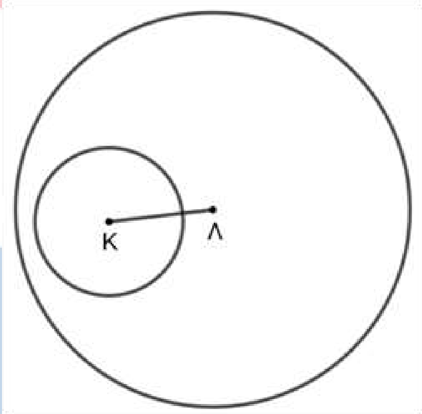
ΛΥΣΗ

Έστω R = 8 και ρ = 3. Υπολογίζουμε τη διαφορά και το άθροισμα των δύο ακτίνων, δηλαδή R - ρ = 8 - 3 = 5 και R + ρ = 8 + 3 = 11.

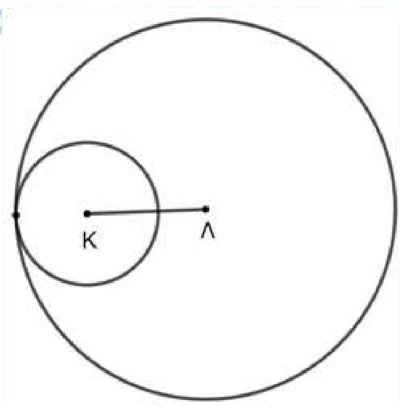
α) Επειδή η διάκεντρος ΚΛ = 13 έχει μεγαλύτερο μήκος από το άθροισμα των δύο ακτίνων R + ρ = 11, ο κύκλος (Λ,8) βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου (Κ,3).



β) Επειδή η διάκεντρος ΚΛ = 2 έχει μικρότερο μήκος από τη διαφορά των δύο ακτίνων R - ρ = 5, ο κύκλος (Κ,3) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (Λ,8).

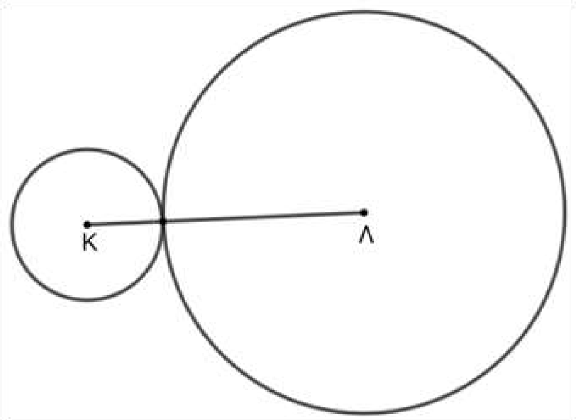


γ) Επειδή η διάκεντρος ΚΛ = 5 έχει ίσο μήκος με τη διαφορά των δύο ακτίνων R - ρ = 5, οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

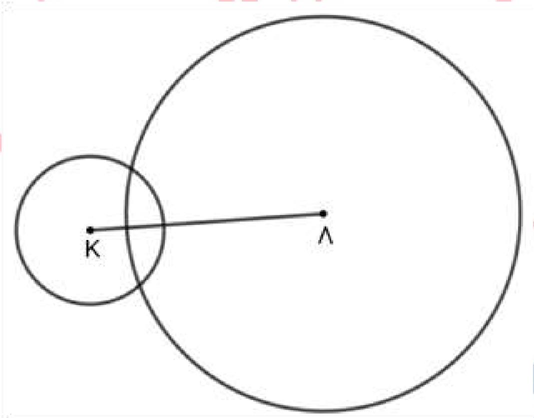


13758-Λύση

δ) Επειδή η διάκεντρος ΚΛ = 11 έχει ίσο μήκος με το άθροισμα των δύο ακτίνων R + ρ = 11, οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.



ε) Επειδή η διάκεντρος ΚΛ = 9 έχει μήκος μεταξύ της διαφοράς R - ρ = 5 και του αθροίσματος των δύο ακτίνων R + ρ = 11, οι κύκλοι τέμνονται.



13759

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ = 6. Έστω d η απόσταση του κέντρου Ο του κύκλου από μια ευθεία (ε). Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις:

α) d = 3. (Μονάδες 9)

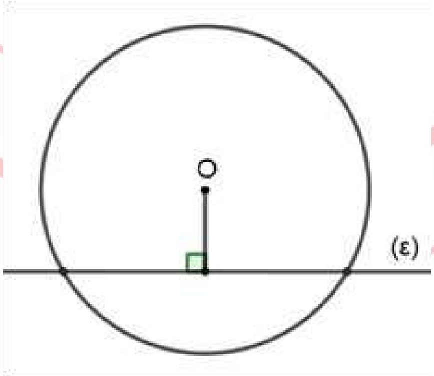
β) d = 6. (Μονάδες 8)

γ) d = 9. (Μονάδες 8)

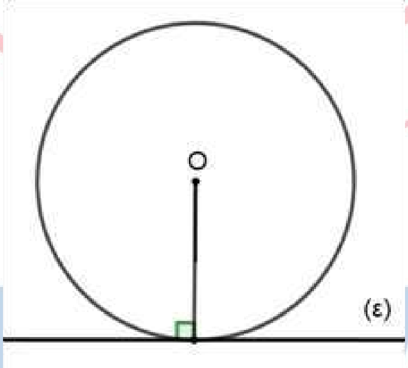
13759-Λύση

ΛΥΣΗ

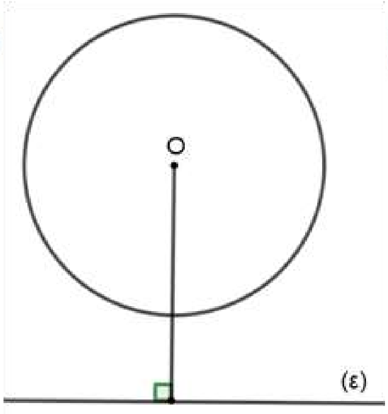
α) Επειδή η απόσταση d = 3 του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μικρότερη από την ακτίνα ρ = 6 του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι τέμνουσα του κύκλου.



β) Επειδή η απόσταση d = 6 του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι ίση με την ακτίνα ρ = 6 του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, δηλαδή είναι εφαπτόμενη του κύκλου.



γ) Επειδή η απόσταση d = 9 του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα ρ = 6 του κύκλου, η ευθεία (ε) δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι εξωτερική του κύκλου.



13767

ΘΕΜΑ 2

Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ έτσι ώστε ΑΒ = ΒΓ. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{ΔΒΕ}$.

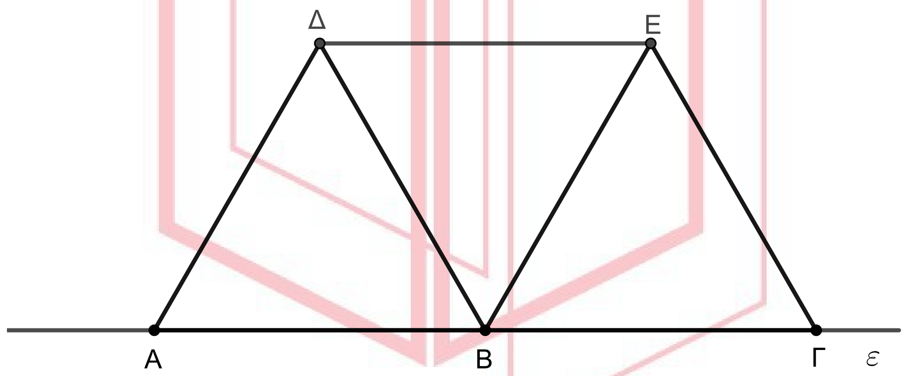
(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι ρόμβος.

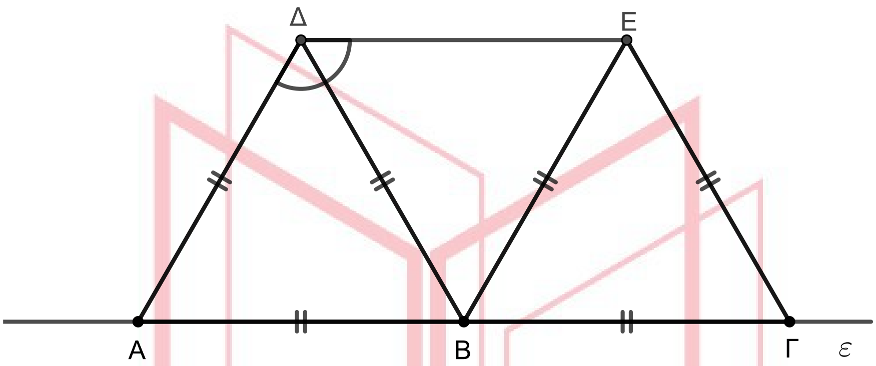
(Μονάδες 8)



13767-Λύση

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ πάνω σε ευθεία ε έτσι ώστε ΑΒ = ΒΓ και κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε.



α) Οι γωνίες των ισόπλευρων τριγώνων ΑΒΔ και ΒΓΕ είναι 60° καθεμιά.

Η γωνία $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$ είναι ευθεία, οπότε:

$\mathrm{A\hat{B}\Delta} + \mathrm{\Delta\hat{B}E} + \mathrm{E\hat{B}\Gamma} = 180^\circ$ ή $60^\circ + \mathrm{\Delta\hat{B}E} + 60^\circ = 180^\circ$

Άρα, $\mathrm{\Delta\hat{B}E} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

β) Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΔ ισχύει:

$$\mathrm{AB = A\Delta = B\Delta} \quad (1)$$

Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΒΓΕ ισχύει:

$$\mathrm{B\Gamma = BE = \Gamma E} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ΒΔ = ΒΕ, αφού ΑΒ = ΒΓ από υπόθεση. Επομένως, το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με βάση ΔΕ, οπότε οι γωνίες που είναι προσκείμενες στη βάση θα είναι ίσες. Συνεπώς, $\mathrm{B\hat{\Delta}E} = \mathrm{B\hat{E}\Delta}$ (3).

Στο τρίγωνο ΒΔΕ ισχύει:

$\mathrm{B\hat{\Delta}E} + \mathrm{B\hat{E}\Delta} + \mathrm{\Delta\hat{B}E} = 180^\circ$ ή $\mathrm{B\hat{\Delta}E} + \mathrm{B\hat{\Delta}E} + 60^\circ = 180^\circ$ ή $2\mathrm{B\hat{\Delta}E} = 120^\circ$

Άρα, $\mathrm{B\hat{\Delta}E} = 60^\circ$ και $\mathrm{B\hat{E}\Delta} = 60^\circ$ λόγω της σχέσης (3).

Αφού οι γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ είναι ίσες με 60° καθεμιά, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο.

γ) Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΒΔΕ ισχύει:

$$\mathrm{\Delta E = BE = B\Delta} \quad (4)$$

Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, αφού ΑΔ = ΑΒ = ΒΕ = ΔΕ από τις σχέσεις (1), (2) και (4), οπότε είναι ρόμβος.

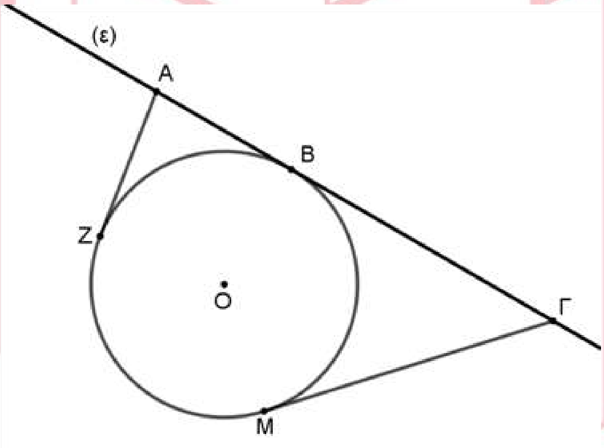
13817

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Β του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε). Θεωρούμε στην ευθεία (ε) δύο σημεία Α και Γ εκατέρωθεν του Β έτσι ώστε ΒΑ < ΒΓ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΖ και ΓΜ στον κύκλο.

α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = ΑΖ + ΜΓ. (Μονάδες 10)



13817-Λύση

ΛΥΣΗ

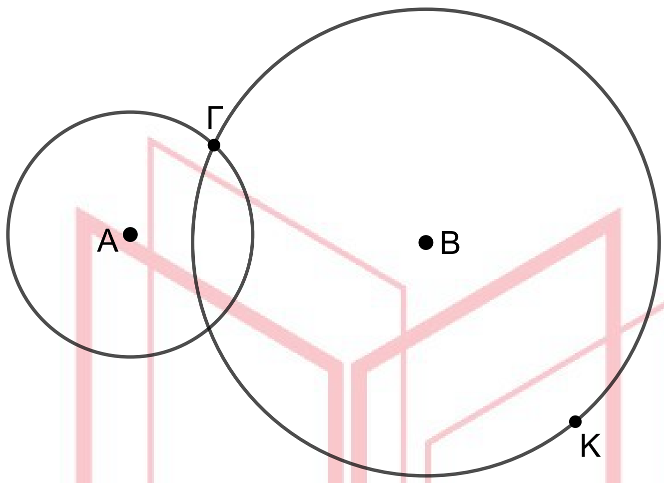
α) Από τα δεδομένα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΖ είναι εφαπτόμενα στον κύκλο από σημείο εκτός αυτού, άρα είναι ίσα, δηλαδή ΑΒ = ΑΖ. Όμοια από το σημείο Γ που είναι εκτός του κύκλου τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΒ,ΓΜ είναι εφαπτόμενα σε αυτόν, άρα ΓΒ =ΓΜ

β) Λόγω του ερωτήματος (α) έχουμε ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ = ΑΖ + ΜΓ.

13823

ΘΕΜΑ 4

α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) ισχύει $\rho < R$ και ΑΒ = 6.



i. Να αποδείξετε ότι $BK - A\Gamma < AB < BK + A\Gamma$.

ii. Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2. Ποιο σημείο από τα Κ και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;

Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το Β.»

Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει ρ από το Α.»

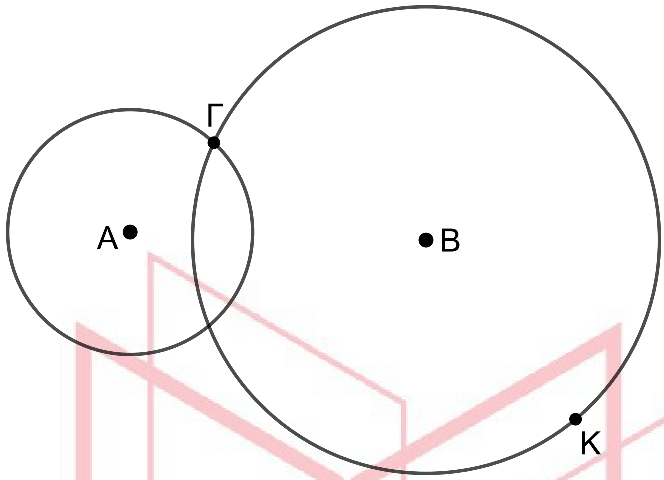
Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 16)

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία Α και Β, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το Α του χάρτη και 2 από το Β του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό;

(Μονάδες 9)

13823-Λύση

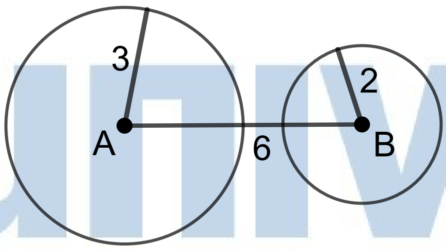


α) i. Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι.

Άρα ισχύει $R-\rho<\delta<R+\rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Α, R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο Β και δ η διάκεντρός τους. Όμως η διάκεντρος είναι η ΑΒ και επίσης $\rho=A\Gamma$ και $R=BK$. Επομένως $BK-A\Gamma<AB<BK+A\Gamma$.

ii. Το σημείο Κ έχει μόνο την ιδιότητα 1, γιατί είναι σημείο του κύκλου (Β, R) και όχι του κύκλου (Α, ρ). Το σημείο Γ έχει και τις δύο ιδιότητες γιατί είναι σημείο και των δύο κύκλων, δηλαδή απέχει ρ από το Α και R από το Β.

β) Έστω Α και Β τα δύο σημεία του χάρτη.



Σύμφωνα με την οδηγία το σημείο του θησαυρού ανήκει σε ένα κύκλο κέντρου Α και ακτίνας 3 και σε κύκλο κέντρου Β και ακτίνας 2. Επειδή απέχει 3 από το Α και 2 από το Β θα είναι το σημείο τομής των δύο αυτών κύκλων, αν υπάρχει.

Όμως η απόσταση των σημείων Α και Β που είναι η διάκεντρος των κύκλων (Α,3) και (Β,2) είναι 6, δηλαδή είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των ακτίνων τους. Αυτό σημαίνει ότι οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και μάλιστα ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου.

Συνεπώς η οδηγία δεν είναι σωστή, γιατί δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου (άρα και του χάρτη) για το οποίο να ισχύει αυτό που περιγράφει η οδηγία.

13824

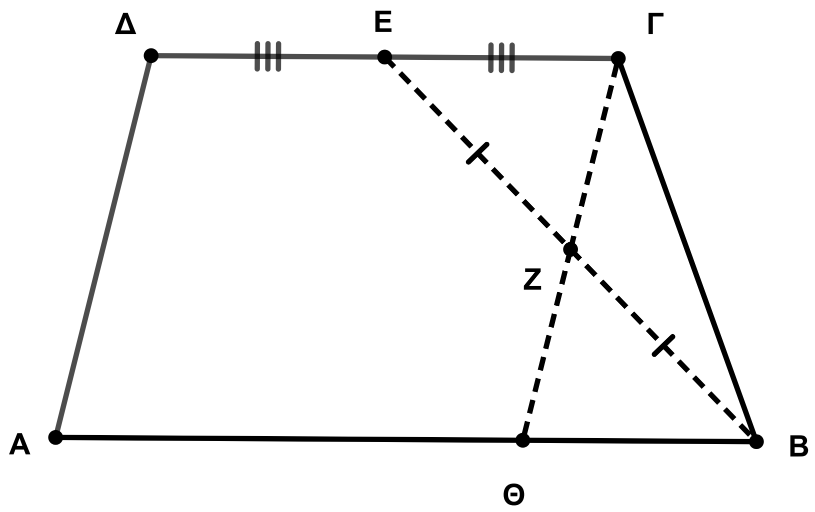
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ. Αν Ε και Ζ τα μέσα των ΓΔ και ΒΕ αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της ΑΒ και της προέκτασης της ΓΖ, να αποδείξετε ότι:

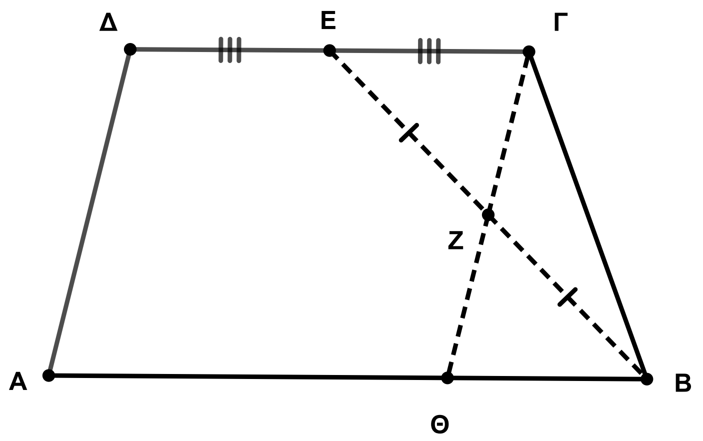
α) Τα τρίγωνα ΓΕΖ, ΘΒΖ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) ΕΓ=ΘΒ. (Μονάδες 5)

γ) Το τετράπλευρο ΕΒΘΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



13824-Λύση



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΓΕΖ και ΘΖΒ τα οποία έχουν:

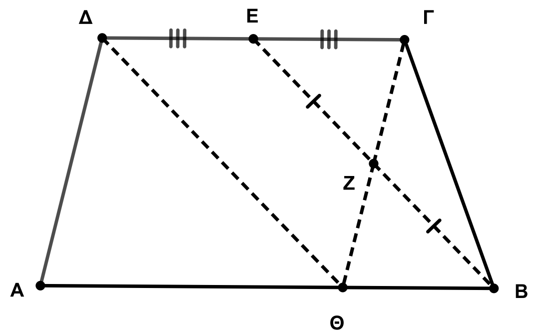
i. ΕΖ=ΖΒ (από υπόθεση)

ii. $Z\hat{E}\Gamma = Z\hat{B}\Theta$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΓΕ και ΘΒ που τέμνονται από την ΒΕ)

iii. $E\hat{Z}\Gamma = \Theta\hat{Z}B$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

β) από την ισότητα των τριγώνων ΓΕΖ και ΘΖΒ έχουμε ότι ΕΓ=ΘΒ ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $E\hat{Z}\Gamma = \Theta\hat{Z}B$, πλευρές.



γ) ΔΕ//ΒΘ ως τμήματα των βάσεων ΓΔ και ΑΒ του τραπεζίου ΑΒΓΔ. Από το ερώτημα β) έχουμε ΕΓ=ΒΘ, επίσης Ε μέσο της πλευράς ΓΔ άρα ΕΓ=ΔΕ άρα ΒΘ=ΔΕ, άρα το τετράπλευρο ΕΒΘΔ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΔΕ και ΘΒ, παράλληλες και ίσες.

13826

ΘΕΜΑ 2

Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ του σχήματος έχουν ΑΒ = ΓΔ = ΑΚ= ΓΛ και $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ίσα και ότι έχουν ΒΚ = ΔΛ.

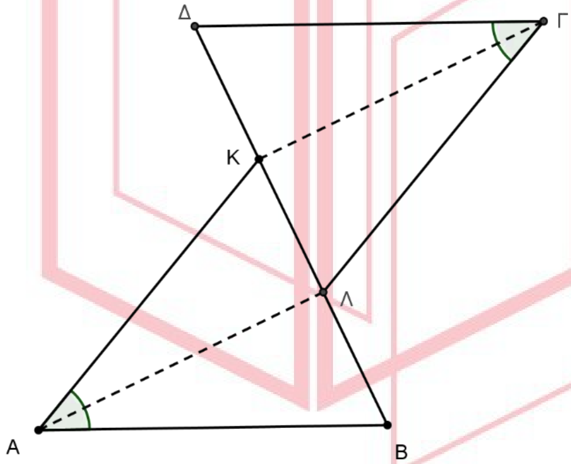
(Μονάδες 12)

β) Έστω ότι Λ και Κ είναι τα μέσα των ΒΚ και ΔΛ αντίστοιχα:

i. Να εξετάσετε αν τα τμήματα ΒΛ, ΛΚ και ΚΔ είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

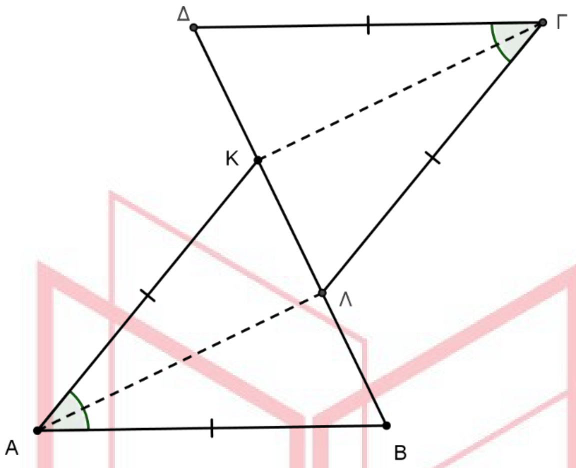
ii. Να αποδείξετε ότι οι ΑΛ και ΓΚ είναι κάθετες στην ευθεία ΚΛ.

(Μονάδες 8)



13826-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ισοσκελή με ΑΒ = ΑΚ και ΓΔ = ΓΛ αντίστοιχα (από τα δεδομένα), έχουν ίσες τις ίσες πλευρές τους και ίσες τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$ (από τα δεδομένα). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες. Οπότε, ως συμπέρασμα της ισότητας των τριγώνων θα είναι ΒΚ = ΔΛ, γιατί είναι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$.

β)

i. Αφού Λ και Κ είναι μέσα των ΒΚ και ΓΔ αντίστοιχα, τότε θα ισχύει ότι ΒΛ = ΛΚ και ΛΚ = ΚΔ, οπότε θα είναι ΒΛ = ΛΚ = ΚΔ.

ii. Αφού τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ισοσκελή με ΑΒ = ΑΚ και ΓΔ = ΓΛ και Λ, Κ τα μέσα των βάσεων τους ΒΚ, ΔΛ αντίστοιχα, τότε τα ΑΛ και ΓΚ είναι διάμεσοι στις βάσεις τους, οπότε θα είναι και ύψη και ως ύψη θα είναι κάθετα σε αυτές, δηλαδή το ΑΛ είναι κάθετο στο ΒΚ και το ΓΚ είναι κάθετα στο ΔΛ. Οπότε οι ΑΛ και ΓΚ είναι κάθετες στην ευθεία ΚΛ την οποία ορίζουν τα σημεία Κ, Λ.

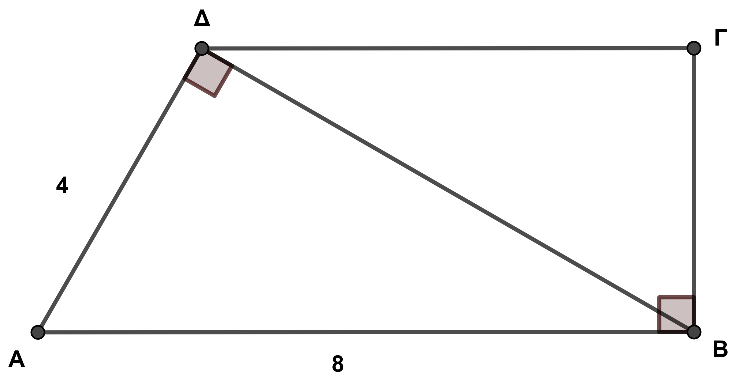
13828

ΘΕΜΑ 2

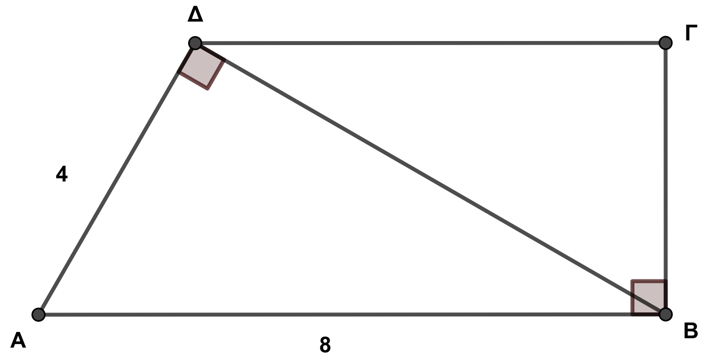
Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΔ και η πλευρά ΓΒ κάθετη στη βάση ΑΒ. Αν ΑΔ=4 και ΑΒ=8 τότε:

α) Να υπολογιστεί η γωνία $\Delta\widehat{A}B$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ. (Μονάδες 13)



13828-Λύση



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσα ΑΒ είναι διπλάσια της κάθετης πλευράς ΑΔ άρα η οξεία γωνία $\Delta\widehat{B}A$ ισούται με 30^o δηλαδή $\Delta\widehat{B}A=30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $\Delta\widehat{A}B+\widehat{\Delta}+\Delta\widehat{B}A=180^o$ ή $\Delta\widehat{A}B=60^o$.

β) Οι βάσεις ΑΒ και ΔΓ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι κάθετες στην ΒΓ άρα το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο στο Γ. Οι γωνίες $A\widehat{B}\Delta$ και $B\widehat{\Delta}\Gamma$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ, άρα $A\widehat{B}\Delta=B\widehat{\Delta}\Gamma=30^o$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΒ η κάθετη πλευρά ΒΓ βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία 30^o άρα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΔ, δηλαδή $B\Gamma=\frac{B\Delta}{2}$ ή $B\Delta=2B\Gamma$.

13829

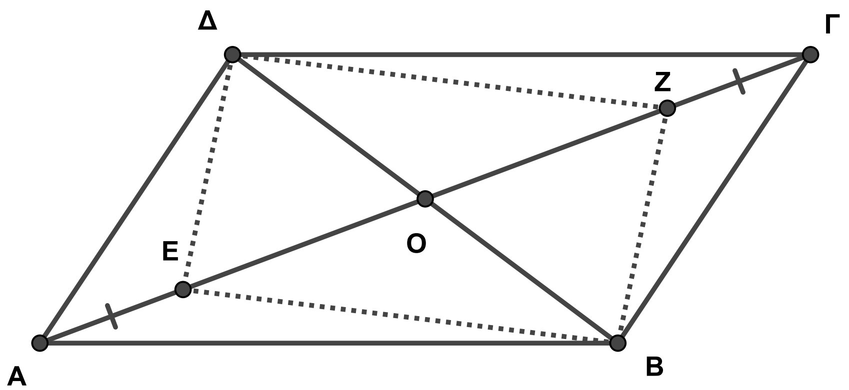
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ των τμημάτων ΑΟ και ΓΟ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΕ=ΓΖ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΖΒ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

13829-Λύση



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΖΒ που έχουν:

i. ΑΕ=ΓΖ (από υπόθεση)
ii. ΑΔ=ΒΓ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου)
iii. $E\hat{A}\Delta = Z\hat{\Gamma}B$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ)

Τα οποία είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες.

β) ΟΕ=ΟΑ-ΑΕ και ΟΖ=ΟΓ-ΖΓ. Όμως ΟΑ=ΟΓ αφού το σημείο Ο είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και ΑΕ=ΖΓ από υπόθεση. Άρα ΟΕ=ΟΖ ως διαφορές ίσων τμημάτων. Επιπλέον ΒΟ=ΟΔ αφού το σημείο Ο είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, επομένως οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΔΕΒΖ διχοτομούνται και το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

13833

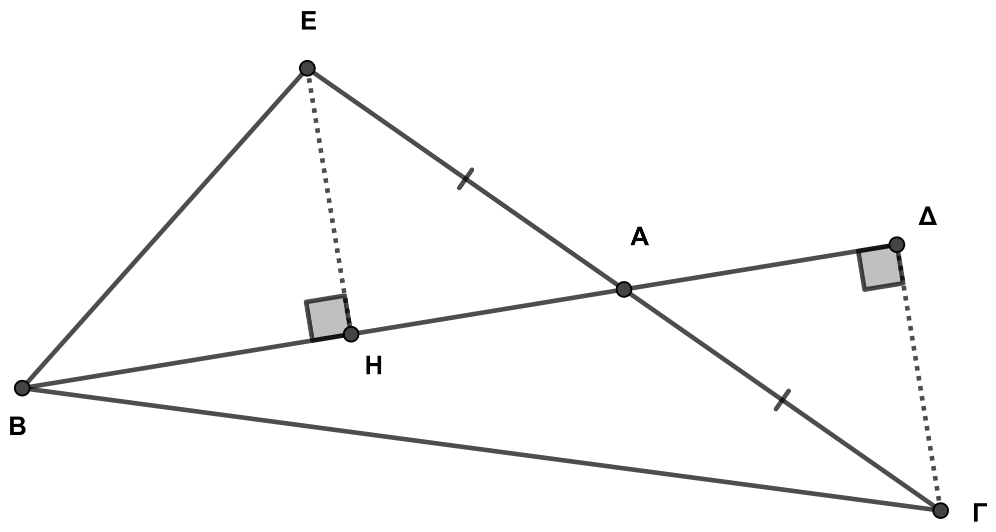
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το ΓΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, το ΕΗ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΕ και η ΒΑ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΕΓ.

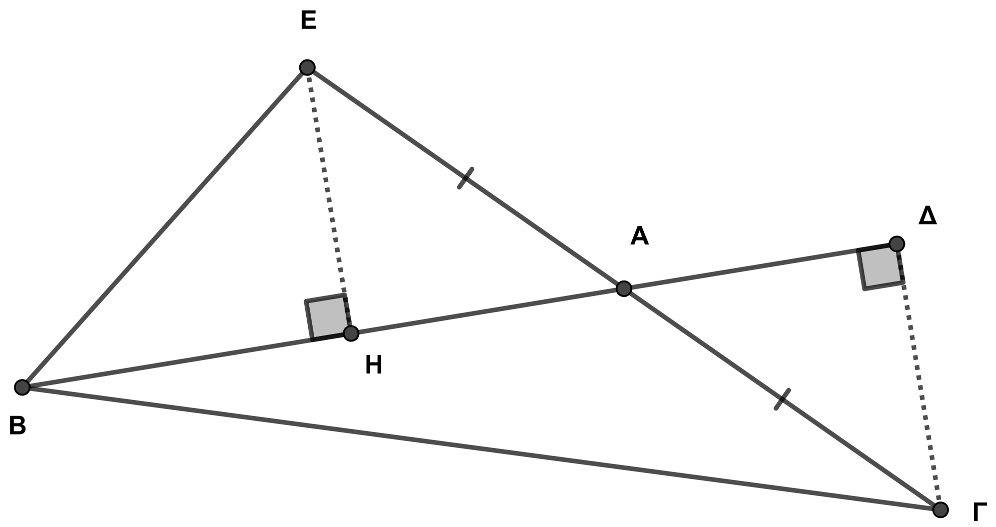
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΕΗ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ΑΗ=ΑΔ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΓΔΕΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



13833-Λύση



α) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΕΗ που έχουν:

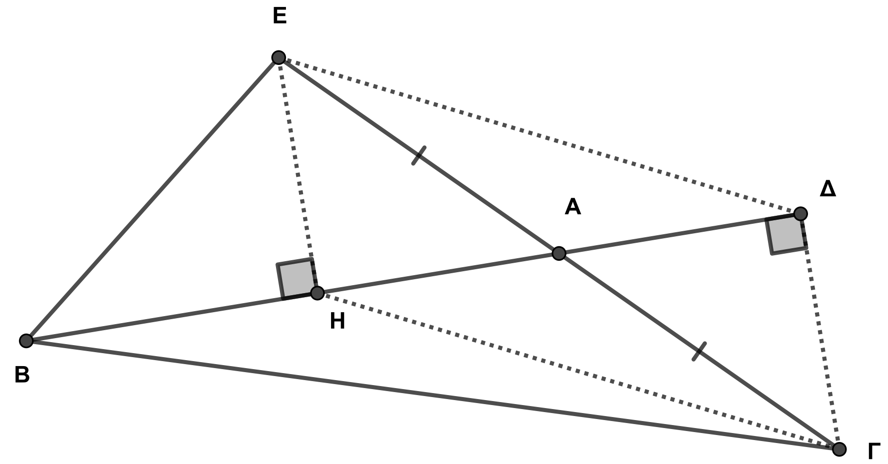
i. $\widehat{H}=\widehat{\Delta}=90^o$ (γιατί ΓΔ και ΕΗ ύψη)

ii. ΑΓ=ΑΕ (γιατί ΒΑ διάμεσος από υπόθεση)

iii. $\Delta\widehat{A}\Gamma=E\widehat{A}H$ (ως κατακορυφήν)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΑΕΗ του προηγούμενου ερωτήματος προκύπτει ότι $A\widehat{E}H=A\widehat{\Gamma}\Delta$ άρα και ΑΗ=ΑΔ ως πλευρές ίσων τριγώνων απέναντι από ίσες γωνίες.



13833-Λύση

γ) Από υπόθεση έχουμε ότι ΒΑ διάμεσος του τριγώνου ΕΒΓ άρα ΕΑ=ΑΓ και από το β) ερώτημα αποδείξαμε ότι ΑΗ=ΑΔ, άρα το τετράπλευρο ΓΔΕΗ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι του ΕΓ και ΔΗ διχοτομούνται.

13834

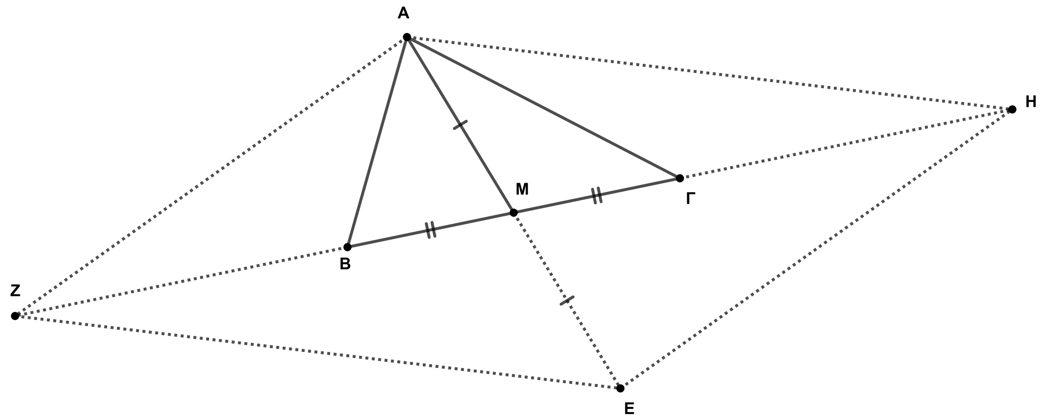
ΘΕΜΑ 2

Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το μέρος του Β κατά τμήμα ΒΖ=ΒΓ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓΗ=ΒΓ, επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΜΕ=ΑΜ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΜΖ και ΕΜΗ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΗΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

13834-Λύση



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΜΖ και ΕΜΗ που έχουν:

i. ΑΜ=ΜΕ (υπόθεση)

ii. ΜΖ=ΜΗ (άθροισμα ίσων τμημάτων ΜΒ+ΒΖ και ΜΓ+ΓΗ)

iii. $A\widehat{M}Z=E\widehat{M}H$ (ως κατακορυφήν)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

β) Από υπόθεση έχουμε ΑΜ=ΜΕ (1) και όπως χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη σύγκριση έχουμε ΜΖ=ΜΗ (2). Επομένως στο τετράπλευρο ΑΗΕΖ οι διαγώνιοι ΑΕ και ΖΗ διχοτομούνται στο σημείο Μ, άρα το τετράπλευρο ΑΗΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

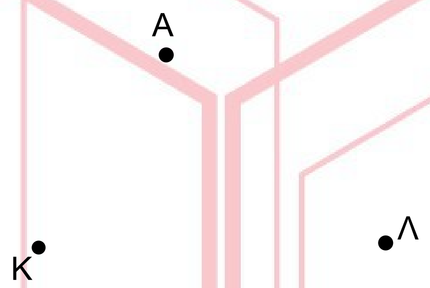
13835

ΘΕΜΑ 2

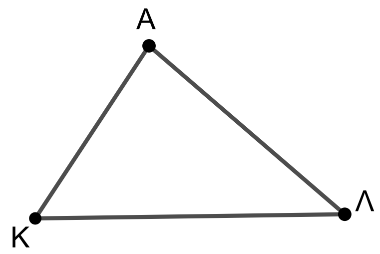
Τα σημεία Α, Κ και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο Α απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.

α) Να αποδείξετε ότι $1 < ΚΛ < 9$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ένα σημείο Β του επιπέδου διαφορετικό από το Α, που να απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ. (Μονάδες 13)



13835-Λύση

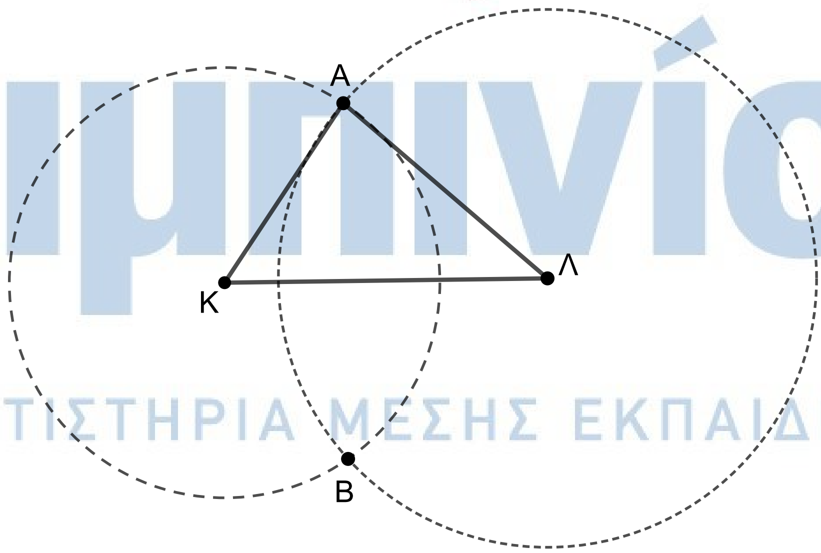


α) Τα τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Κ και Λ ορίζουν το τρίγωνο ΑΚΛ. Λόγω της τριγωνικής ανισότητας ισχύει ότι $ΑΛ - ΑΚ < ΚΛ < ΑΛ + Α$.

Άρα $5 - 4 < ΚΛ < 5 + 4$ ή $1 < ΚΛ < 9$.

β) Το ζητούμενο σημείο είναι σημείο του κύκλου (Κ, 4) και του κύκλου (Λ, 5). Σχεδιάζουμε δύο κύκλους: ο ένας έχει κέντρο το Κ και ακτίνα 4 και ο άλλος έχει κέντρο το Β και ακτίνα 5. Από το α)ερώτημα για τη διάκεντρο των κύκλων έχουμε ότι:

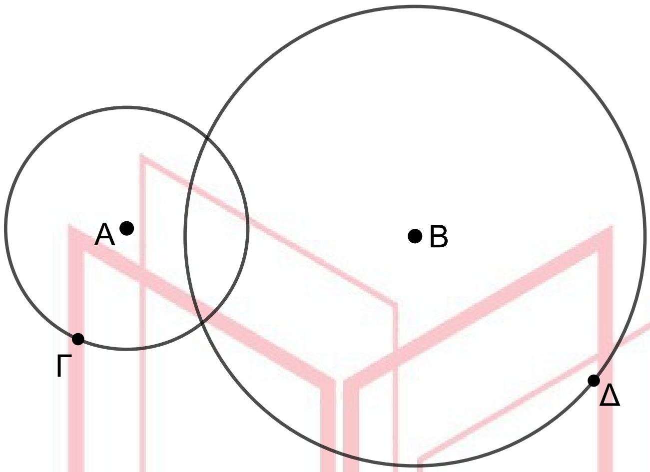
$ΑΛ - ΑΚ < ΚΛ < ΑΛ + ΑΚ$ ή $R - \rho < ΚΛ < R + \rho$, όπου R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Λ και ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Κ. Άρα οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία. Το ένα είναι το Α και το άλλο είναι το Β, που είναι και το ζητούμενο σημείο.



13836

ΘΕΜΑ 2

α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$.

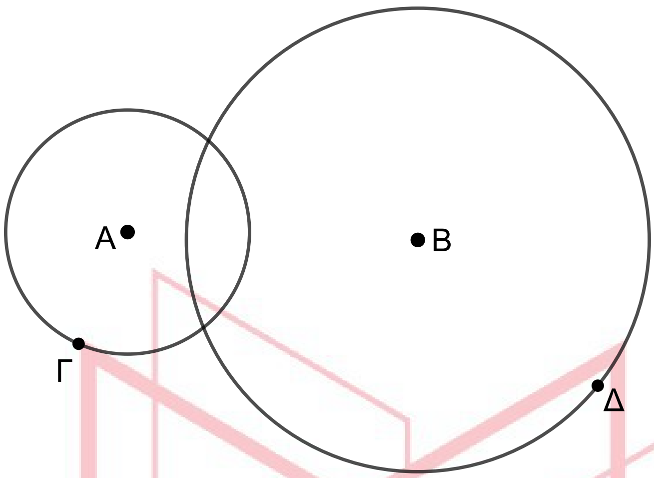


Να αποδείξετε ότι $B\Delta - A\Gamma < AB < A\Gamma + B\Delta$. (Μονάδες 10)

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 5 από το B του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;

(Μονάδες 15)

13836-Λύση

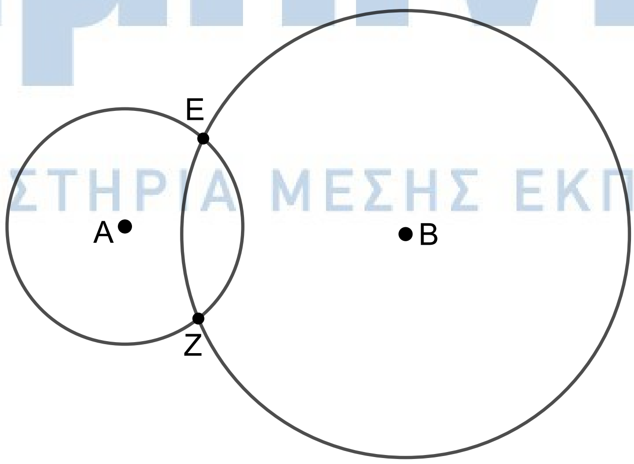


α) Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι.

Άρα ισχύει $R-\rho<\delta<R+\rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Α, R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο Β και δ η διάκεντρός τους. Όμως η διάκεντρος είναι η ΑΒ και επιπλέον ισχύουν ΑΓ = ρ και ΒΔ = R. Επομένως $B\Delta - A\Gamma < AB < B\Delta + A\Gamma$.

β) Ο θησαυρός, επειδή απέχει 3 από το Α και 5 από το Β είναι σε σημείο του κύκλου με κέντρο το Α και ακτίνα 3 και σε σημείο του κύκλου με κέντρο το Β και ακτίνα 5. Σχεδιάζουμε δύο κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) με ρ = 3 και R = 5. Τότε η ΑΒ = 6 είναι η διάκεντρος του κύκλου και ισχύει $R-\rho<AB<R+\rho$ γιατί αντικαθιστώντας έχουμε $5-3<6<5+3$, που είναι αληθές.

Επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι δηλαδή έχουν δύο κοινά σημεία τα Ε και Ζ. Αυτά τα σημεία έχουν την ιδιότητα να απέχουν 3 από το Α και 5 από το Β, άρα είναι τα σημεία που μπορεί να κρύβεται ο θησαυρός.



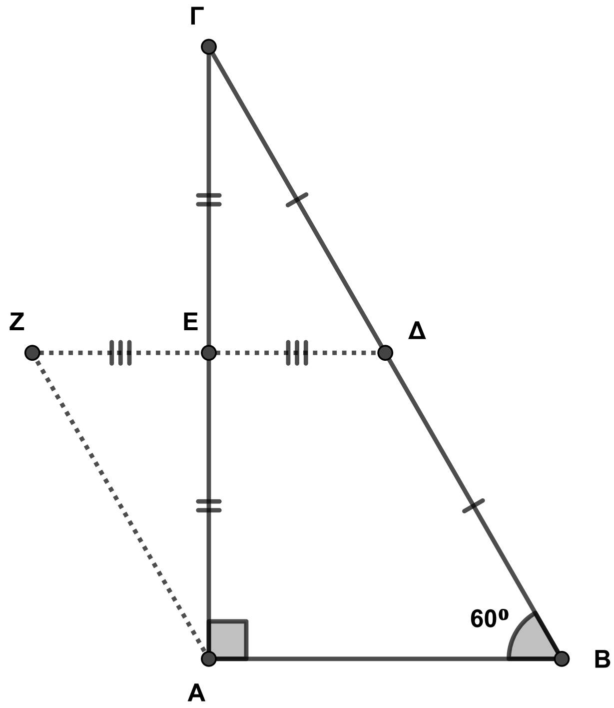
13837

ΘΕΜΑ 2

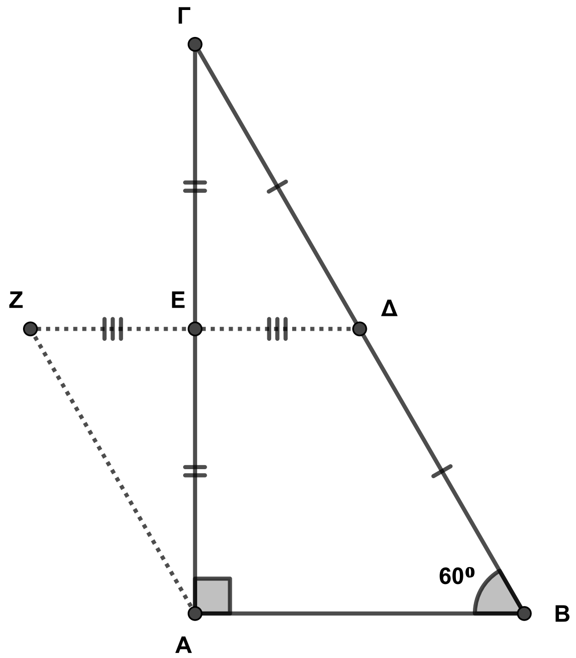
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}=90^o$ και $\widehat{B}=60^o$. Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε που είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ=ΔΕ.

α) Να αποδείξετε ότι ΓΔ=ΑΖ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)



13837-Λύση



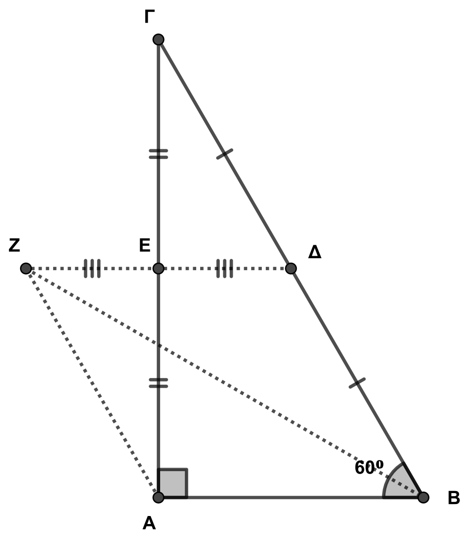
α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΓΕΔ που έχουν:

i. ΑΕ=ΕΓ (από υπόθεση)

ii. ΕΖ=ΕΔ (από υπόθεση)

iii. $Α\hat{Ε}Ζ$=$Γ\hat{Ε}Δ$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες, άρα ΑΖ=ΓΔ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών $Α\hat{Ε}Ζ$=$Γ\hat{Ε}Δ$.



β) ΑΖ=ΓΔ από το α) ερώτημα και ΓΔ=ΔΒ επειδή το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ. Άρα ΑΖ = ΔΒ = $\frac{ΒΓ}{2}$. Από το άθροισμα των γωνιών του ορθογωνίου

13837-Λύση

τριγώνου ΑΒΓ έχουμε ότι $\hat{\Gamma}=30^o$, συνεπώς η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΒ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΓ, δηλαδή $AB = \frac{B\Gamma}{2}$. Άρα ΑΖ = ΑΒ και το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

13839

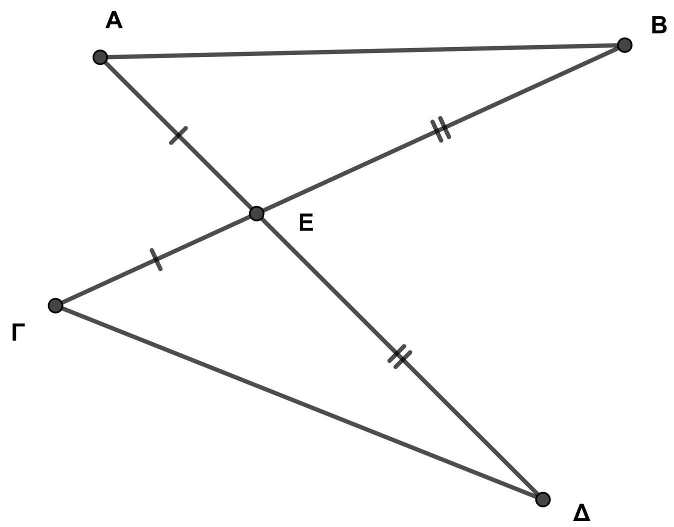
ΘΕΜΑ 4

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΓΕ και ΒΕ=ΕΔ.

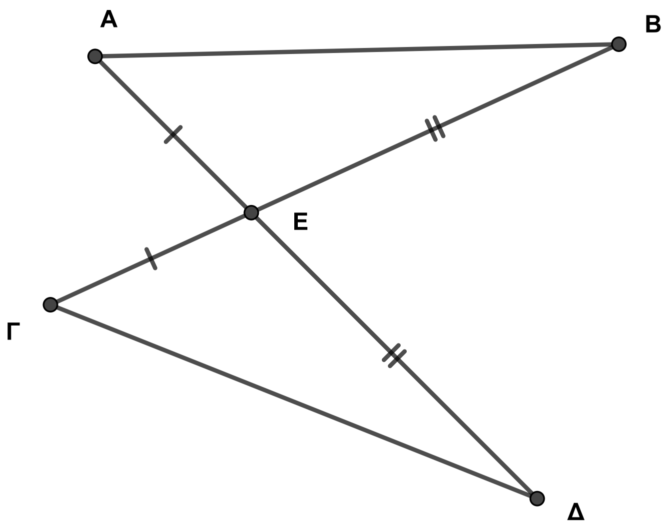
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις ΕΗ και ΕΘ του σημείου Ε από τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ, αντίστοιχα, είναι ίσες. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ και ΓΔ προς τα Α και Γ αντίστοιχα τέμνονται στο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)



13839-Λύση



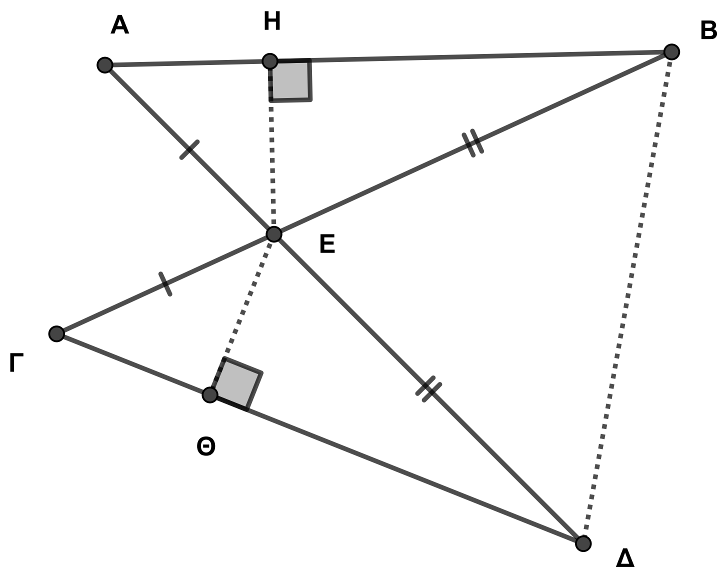
α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ που έχουν:

i. ΑΕ=ΓΕ (υπόθεση)

ii. ΒΕ=ΔΕ (υπόθεση)

iii. $Α\hat{Ε}Β=Γ\hat{Ε}Δ$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.



β) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΕΗ και ΓΕΘ τα οποία έχουν:

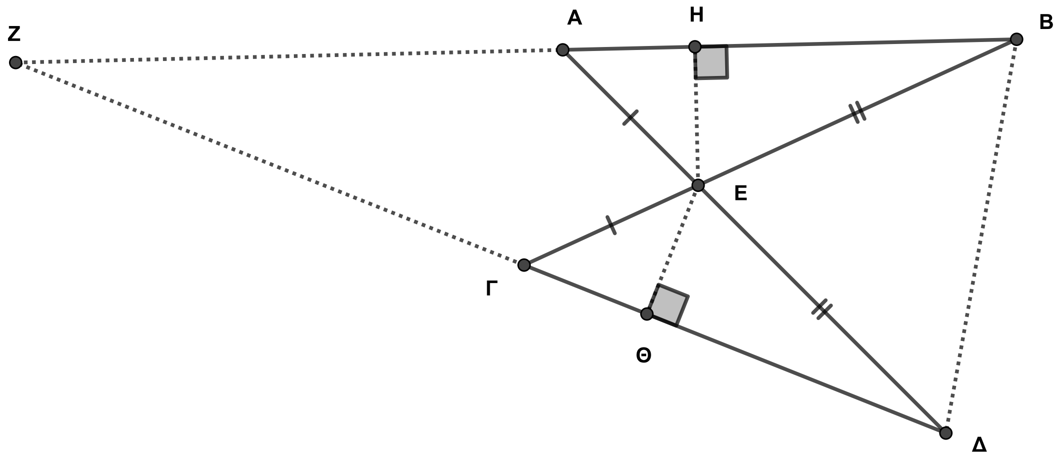
i. ΑΕ=ΓΕ (υπόθεση)

ii. $\hat{Η} = \hat{Θ} = 90^{o}$

13839-Λύση

iii. $E\widehat{A}H=E\widehat{\Gamma}\Theta$ (από σύγκριση ερωτήματος α) αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΕΒ και ΕΔ)

Τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα και ΕΗ=ΕΘ ως πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες $E\widehat{A}H$ και $E\widehat{\Gamma}\Theta$ αντίστοιχα.



γ) Από την ισότητα των τριγώνων του α) ερωτήματος έχουμε ότι $A\widehat{B}E=\Gamma\widehat{\Delta}E$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΕ και ΕΓ αντίστοιχα. Από υπόθεση έχουμε ΕΒ=ΕΔ άρα το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισοσκελές με βάση ΒΔ συνεπώς οι προσκείμενες στη βάση γωνίες θα είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή $E\widehat{B}\Delta=E\widehat{\Delta}B$. Το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΔ αφού οι προσκείμενες στη βάση γωνίες, $Z\widehat{B}\Delta$ και $Z\widehat{\Delta}B$, είναι ίσες μεταξύ τους ως άθροισμα ίσων γωνιών: $A\widehat{B}E+E\widehat{B}\Delta=\Gamma\widehat{\Delta}E+E\widehat{\Delta}B$ ή $Z\widehat{B}\Delta=Z\widehat{\Delta}B$.

13840

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (O,R) και μία ευθεία x΄x η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο Α. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ της ημιευθείας Αx. Αν για κάποιο σημείο Β του κύκλου ισχύει η σχέση ΜΑ = ΜΒ, να αποδείξετε ότι:

α) το ΜΒ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O,R). (Μονάδες 7)

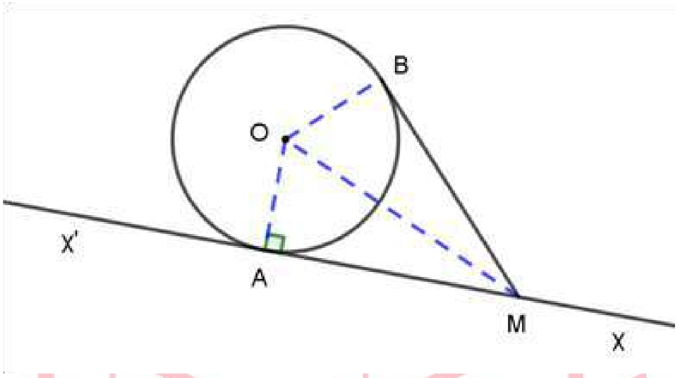
β) η διχοτόμος της γωνίας ΒΜx είναι κάθετη στη ΜΟ. (Μονάδες 6)

γ) το τετράπλευρο ΑΟΒΜ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 6)

δ) το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας ΒΜx. (Μονάδες 6)

13840-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Η ευθεία x΄x έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο Α. Επομένως, η ευθεία x΄x είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Άρα $ΟΑ \perp ΜΑ$.

Τα τρίγωνα ΜΟΒ και ΜΟΑ έχουν:

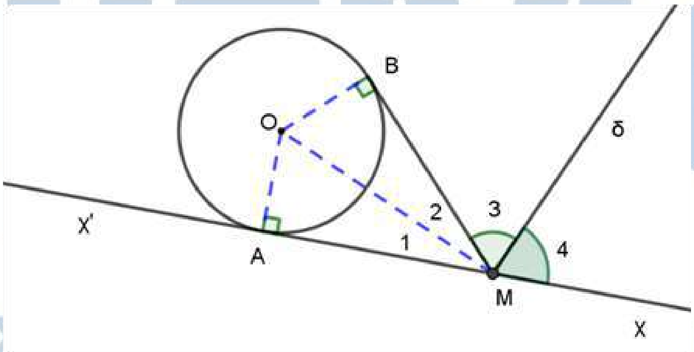
- ΜΟ, κοινή πλευρά
- ΟΒ = ΟΑ, ως ακτίνες του κύκλου (Ο,R)
- ΜΒ = ΜΑ, από την υπόθεση

Επομένως, τα τρίγωνα από το κριτήριο ισότητας Π-Π-Π είναι ίσα. Απέναντι από την πλευρά ΟΜ βρίσκονται αντίστοιχα ίσες γωνίες, οπότε $\hat{Α} = \hat{Β}$.

Επειδή $\hat{Α} = 90°$ συμπεραίνουμε ότι $\hat{Β} = 90°$.

Άρα, το ΜΒ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (Ο,R).

β)



Έστω Μδ η διχοτόμος της γωνίας ΒΜx.

Τα τμήματα ΜΑ και ΜΒ είναι εφαπτόμενα του κύκλου (Ο,R). Η ΜΟ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ, οπότε $\hat{Μ}_1 = \hat{Μ}_2$. Επειδή Μδ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΒΜx έχουμε $\hat{Μ}_3 = \hat{Μ}_4$.

$Α\hat{Μ}x = 180°$ οπότε $\hat{Μ}_1 + \hat{Μ}_2 + \hat{Μ}_3 + \hat{Μ}_4 = 180°$,ή $2\hat{Μ}_2 + 2\hat{Μ}_3 = 180°$,

ή $\hat{Μ}_2 + \hat{Μ}_3 = 90°$, δηλαδή $Ο\hat{Μ}δ = 90°$. Άρα η Μδ είναι κάθετη στη ΜΟ.

13840-Λύση

γ) Στο τετράπλευρο ΑΟΒΜ έχουμε $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$ οπότε $\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$. Επομένως δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές οπότε το ΑΟΒΜ είναι εγγράψιμο.

δ) Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ και η διχοτόμος Μδ τέμνονται από το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από 180°, οπότε το ΟΒ και η Μδ θα τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας ΟΜ που βρίσκονται οι γωνίες.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ σχηματίζει με το ΟΜ τη γωνία ΒΟΜ .

Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ σχηματίζει με τη διχοτόμο Μδ τη γωνία ΟΜδ.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $B\widehat{O}M + O\widehat{M}\delta < 180°$.

Η γωνία ΒΟΜ είναι οξεία γωνία του ορθογωνίου τριγώνου ΟΒΜ, οπότε $B\widehat{O}M < 90°$.

Η γωνία ΟΜδ είναι ίση με το άθροισμα των γωνιών M_2 και M_3, όμως από το ερώτημα (β) έχουμε $\widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 90°$, οπότε $O\widehat{M}\delta = \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 90°$.

Έχουμε $B\widehat{O}M + O\widehat{M}\delta = B\widehat{O}M + 90° < 90° + 90°$, δηλαδή $B\widehat{O}M + O\widehat{M}\delta < 180°$.

13841

ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β και Μ το μέσο της. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Αν η ΕΜ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ζ τότε:

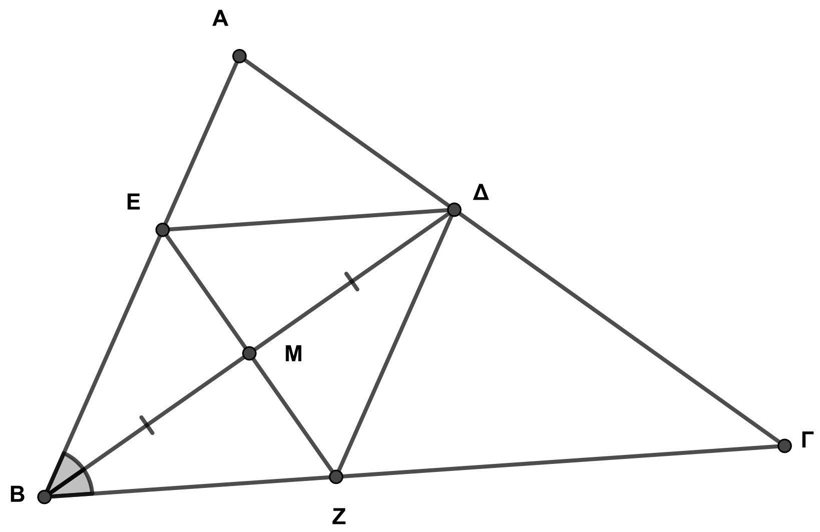
α) Να αποδείξετε ότι ΒΕ=ΕΔ. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι ΒΕ//ΖΔ. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι ρόμβος. (Μονάδες 5)

δ) Ποιο θα έπρεπε να είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ώστε το τετράπλευρο ΔΕΒΖ να είναι τετράγωνο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

13841-Λύση



α) Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι ΔΕ//ΒΓ άρα $\Delta\widehat{B}Z=E\widehat{\Delta}B$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΔ και ΒΖ που τέμνονται από την ΒΔ. Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$, άρα $\Delta\widehat{B}Z=\Delta\widehat{B}E$. Συνεπώς $E\widehat{\Delta}B = \Delta\widehat{B}E$ ως ίσες με την $\Delta\widehat{B}Z$, άρα το τρίγωνο ΒΕΔ είναι ισοσκελές με ΒΕ=ΕΔ.

β) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΜΖ και ΔΜΕ τα οποία έχουν:

i. ΒΜ=ΜΔ (υπόθεση)
ii. $\Delta\widehat{B}Z=E\widehat{\Delta}B$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΔ και ΒΖ που τέμνονται από την ΒΔ)
iii. $B\widehat{M}Z=\Delta\widehat{M}E$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα ΒΜΖ, ΔΜΕ είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, άρα και ΒΖ=ΔΕ ως απέναντι πλευρές από τις ίσες γωνίες $B\widehat{M}Z$ και $\Delta\widehat{M}E$.

Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις πλευρές του ΒΖ και ΔΕ παράλληλες και ίσες άρα και ΒΕ//ΖΔ (ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου).

γ) Από το α) ερώτημα έχουμε ΒΕ=ΕΔ, άρα το παραλληλόγραμμο ΔΕΒΖ είναι ρόμβος αφού έχει δυο διαδοχικές πλευρές του ίσες.

δ) Για να είναι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ τετράγωνο, εφόσον είναι ρόμβος, πρέπει η γωνία $\widehat{B}$ να είναι ορθή. Όταν η γωνία $\widehat{B}$ είναι ορθή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β.

13843

ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι οι ευθείες x΄x και y΄y εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα μιας διαμέτρου του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) οι ευθείες x΄x και y΄y είναι παράλληλες. (Μονάδες 4)

β) οι διχοτόμοι των γωνιών ΒΑx και ΑΒy τέμνονται σε σημείο Μ. (Μονάδες 6)

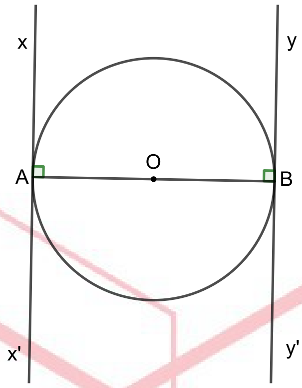
γ) το σημείο Μ είναι το μέσο του ημικυκλίου ΑΒ. (Μονάδες 10)

δ) αν η διχοτόμος της γωνίας ΒΑx τέμνει την y΄y στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας ΑΒy τέμνει την x‘x στο σημείο Δ, τότε ΜΓ = ΜΔ. (Μονάδες 5)

13843-Λύση

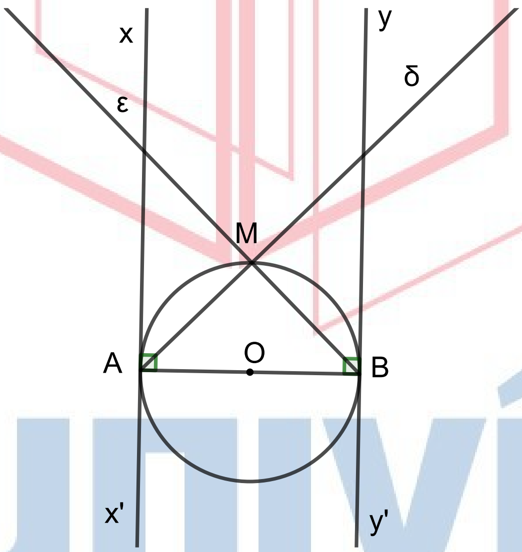
ΛΥΣΗ

α)



Οι ευθείες x΄x και y΄y εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα της διαμέτρου του AB, επομένως, είναι κάθετες στην AB και συνεπώς είναι μεταξύ τους παράλληλες.

β)



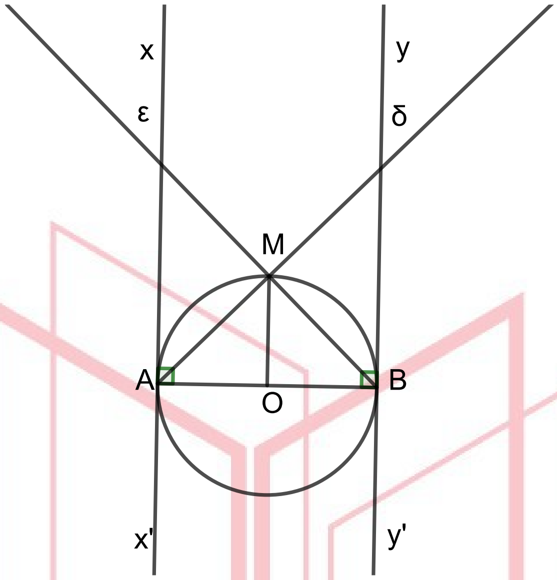
Έστω Aδ και Bε οι διχοτόμοι των γωνιών BAx και ABy αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται από τη διάμετρο AB. Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από 180°, οπότε η Aδ και η Bε θα τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας AB που βρίσκονται οι γωνίες.

Πράγματι, έχουμε ότι $B\hat{A}\delta + A\hat{B}\varepsilon = \frac{90°}{2} + \frac{90°}{2} = 90° < 180°$.

Άρα, οι Aδ και Bε τέμνονται σε σημείο M του ημιεπιπέδου στο οποίο βρίσκονται οι γωνίες.

13843-Λύση

γ)



Από το ερώτημα (β) έχουμε $B\hat{A}M$ = $B\hat{A}\delta$ = $45°$ και $A\hat{B}M$ = $A\hat{B}\varepsilon$ = $45°$.

Επομένως, το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές με ΜΑ = ΜΒ.

Άρα, το σημείο Μ ανήκει στη μεσοκάθετο της διαμέτρου ΑΒ.

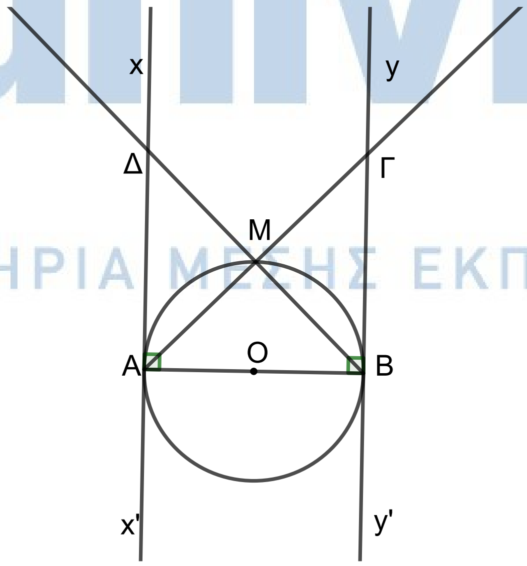
Το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ορθογώνιο διότι ΜΟ μεσοκάθετος της ΑΒ, οπότε $A\hat{O}M$ = $90°$.

Στο τρίγωνο ΑΟΜ έχουμε $O\hat{A}M$ = $45°$ επομένως, $O\hat{M}A$ = $90°$-$45° = 45°$.

Το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ισοσκελές με ΟΜ = ΟΑ = R.

Δηλαδή, το σημείο Μ είναι σημείο του κύκλου (Ο,R) και επειδή ανήκει στη μεσοκάθετο της ΑΒ συμπεραίνουμε ότι το σημείο είναι το μέσο του ημικυκλίου ΑΒ.

δ)



Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΒΜΓ έχουν :

- ΑΜ = ΒΜ, από το ερώτημα (γ)

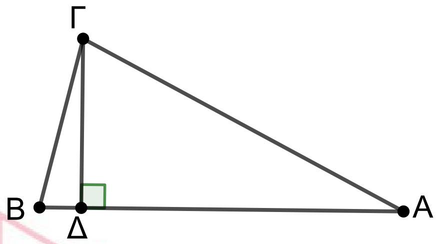
13843-Λύση

- $A\widehat{M}\Delta = B\widehat{M}\Gamma$, ως κατακορυφήν
- $M\widehat{A}\Delta = M\widehat{B}\Gamma = 45°$

Από το κριτήριο ισότητας Γ-Π-Γ τα τρίγωνα είναι ίσα. Απέναντι από τις ίσες γωνίες ΜΑΔ και ΜΒΓ βρίσκονται αντίστοιχα ίσες πλευρές, δηλαδή ΜΔ = ΜΓ

13844

ΘΕΜΑ 2

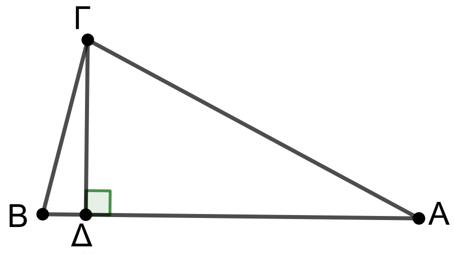


Στο παραπάνω σχήμα ισχύει ότι ΒΔ < ΑΔ, ΑΒ = ΑΓ και $A\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΓ > ΒΓ. (Μονάδες 10)

β) Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

13844-Λύση



α) Από το σημείο Γ που είναι εκτός της ευθείας ΑΒ έχουμε το κάθετο τμήμα ΓΔ και τα πλάγια τμήματα ΓΒ και ΓΑ. Το Δ είναι το ίχνος της καθέτου ΓΔ στην ΑΒ.

Το ίχνος της ΑΓ στην ΑΒ είναι το Α, ενώ το ίχνος της ΒΓ στην ΑΒ είναι το Β.

Εφόσον ΑΔ>ΒΔ, το ίχνος της ΑΓ (δηλαδή το Α) απέχει από το ίχνος της καθέτου (δηλαδή το Δ) περισσότερο από όσο απέχει το ίχνος της ΒΓ (δηλαδή το Β). Άρα ΑΓ>ΒΓ.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\hat{B}$ βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, ενώ η γωνία $\hat{A}$ βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ. Εφόσον ΑΓ>ΒΓ, ομοίως άνισες είναι και οι απέναντι γωνίες, άρα $\hat{B} > \hat{A}$.

Επιπλέον, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ. Επομένως για τις γωνίες της βάσης του, ΒΓ ισχύει ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Άρα $\hat{\Gamma} > \hat{A}$.

Συνεπώς η μικρότερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ είναι η $\hat{A}$.

13845

ΘΕΜΑ 4

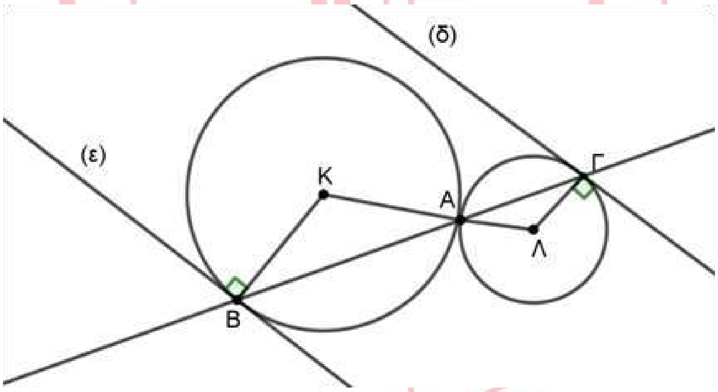
Οι κύκλοι (Κ,R), (Λ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το Α και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία Β και Γ. Φέρουμε τις εφαπτόμενες (ε) και (δ) στα σημεία Β και Γ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $K\hat{B}A = \Lambda\hat{\Gamma}A$. (Μονάδες 8)

β) (ε) // (δ). (Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο ΚΓΛΒ θα είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 7)



13845-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές με ΚΒ = ΚΑ, ως ακτίνες του κύκλου (Κ,R).

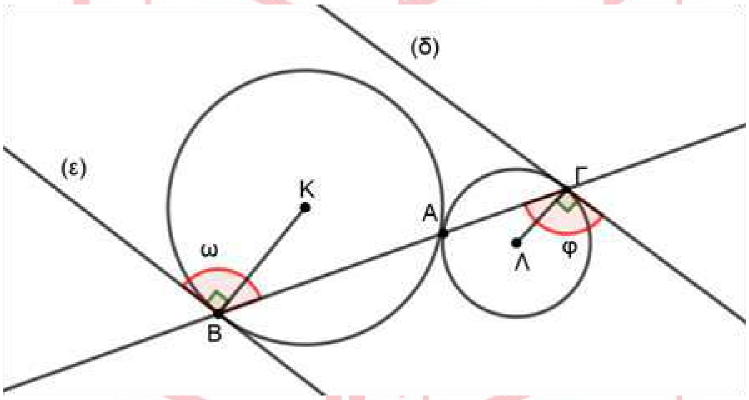
Άρα $K\hat{B}A = K\hat{A}B$ (1).

Το τρίγωνο ΑΛΓ είναι ισοσκελές με ΛΑ = ΛΓ, ως ακτίνες του κύκλου (Λ,ρ).

Άρα $\Lambda\hat{A}\Gamma = \Lambda\hat{\Gamma}A$ (2).

Οι γωνίες ΚΑΒ και ΛΑΓ είναι κατακορυφήν, οπότε είναι ίσες. Άρα από τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει $K\hat{B}A = \Lambda\hat{\Gamma}A$.

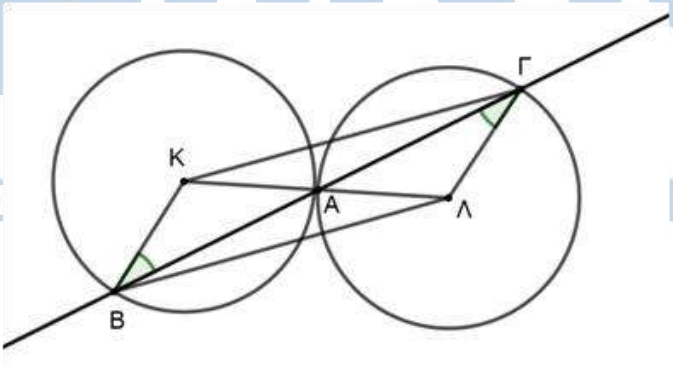
β)



Έστω ω και φ οι γωνίες όπως φαίνονται στο σχήμα. Για τις γωνίες ω, φ έχουμε $\hat{\omega} = 90° + K\hat{B}A$ και $\hat{\varphi} = 90° + \Lambda\hat{\Gamma}A$. Από το ερώτημα (α) οι γωνίες ΚΒΑ και ΛΓΑ είναι ίσες, έτσι και οι γωνίες ω, φ είναι ίσες.

Οι ίσες γωνίες ω και φ είναι εντός εναλλάξ των ευθειών (ε) και (δ) που τέμνονται από τη ΒΓ, συνεπώς (ε) // (δ).

γ)



Για να είναι το τετράπλευρο ΚΓΛΒ παραλληλόγραμμο, θα πρέπει οι απέναντι πλευρές του ΚΒ και ΓΛ να είναι ίσες και παράλληλες.

Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι οι εντός εναλλάξ γωνίες ΚΒΑ και ΛΓΑ των ΚΒ και ΓΛ που τέμνονται από τη ΒΓ είναι ίσες. Άρα προκύπτει ότι ΚΒ // ΓΛ.

13845-Λύση

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΒ και ΓΛ είναι ακτίνες των δύο κύκλων, οπότε για να είναι ίσα θα πρέπει οι κύκλοι να είναι ίσοι μεταξύ τους.

Άρα για να είναι το τετράπλευρο ΚΓΛΒ παραλληλόγραμμο θα πρέπει R = ρ.

13846

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το παρακάτω σχήμα με τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) με R > ρ. Επίσης ΑΒ = 9.

α) Να αποδείξετε ότι $R + \rho < 9$. (Μονάδες 7)

β) Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΚΛΜ με ΚΛ να είναι ίση με ρ και η πλευρά ΛΜ να είναι ίση με R. Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από 9.

(Μονάδες 10)

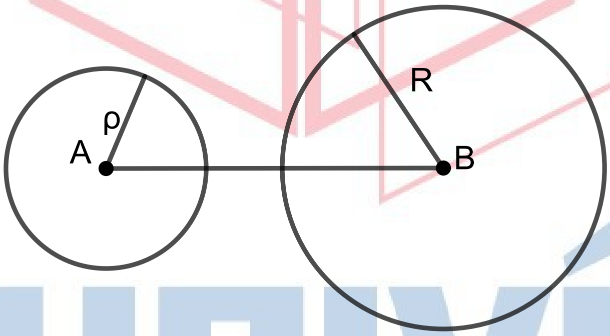
γ) Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που σχεδιάσατε στο β) ερώτημα. Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες Ι1 και Ι2 που περιγράφονται παρακάτω;

Ι1: «Η απόσταση των σημείων από το Κ είναι ίση με ρ».

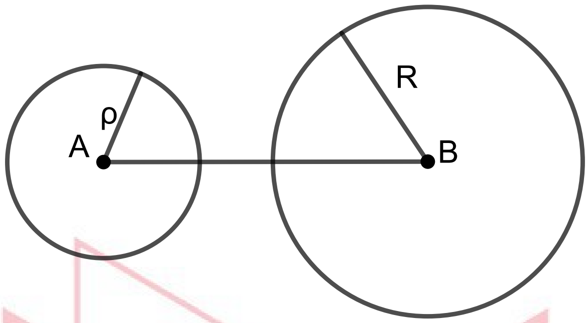
Ι2: «Η απόσταση των σημείων από το Μ είναι ίση με R».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

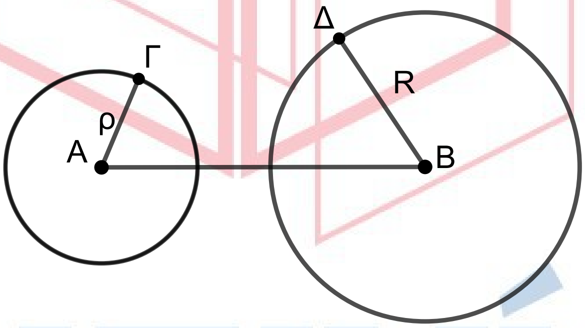


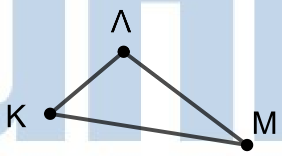
13846-Λύση



α) Οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και είναι ο ένας στο εξωτερικό του άλλου και η διάκεντρός τους είναι το ευθύγραμμο ΑΒ. Άρα ισχύει $R + \rho < AB$ ή $R + \rho < 9$.

β) Έστω Γ σημείο του κύκλου με κέντρο Α και ακτίνα ρ και Δ σημείο του κύκλου με κέντρο Β και ακτίνα R, όπως στο παρακάτω σχήμα. Με το διαβήτη «μεταφέρουμε» τα ΑΓ=ρ και ΒΔ=R έτσι ώστε να σχηματίζονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΛ και ΛΜ. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε και την ΚΜ.





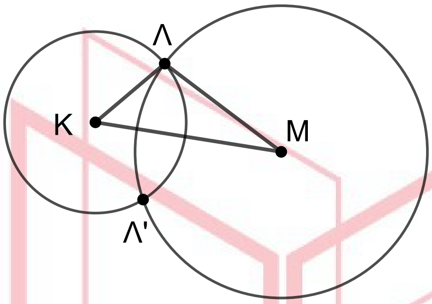
Ισχύει ότι $\mathrm{\Lambda M} > \mathrm{K\Lambda}$, γιατί $\mathrm{R} > \rho$. Άρα από την τριγωνική ανισότητα για το τρίγωνο ΚΛΜ έχουμε ότι $\Lambda M - K\Lambda < KM < \Lambda M + K\Lambda$ ή $R - \rho < KM < R + \rho$.

Όμως από το α) έχουμε ότι $R + \rho < 9$. Άρα $KM < 9$. Δηλαδή η τρίτη πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη από 9.

γ) Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που έχουμε σχεδιάσει. Τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα Ι1 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο Κ και ακτίνα ρ, ενώ τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα Ι2 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο Μ και ακτίνα R. Επομένως, τα σημεία του επιπέδου που έχουν και τις δύο ιδιότητες Ι1 και Ι2 είναι εκείνα που βρίσκονται και στους δύο αυτούς κύκλους. Δηλαδή είναι τα κοινά σημεία των δύο κύκλων.

13846-Λύση

Όπως έχουμε αποδείξει στο β) ερώτημα ισχύει $R-\rho<KM<R+\rho$, όπου ΚΜ είναι η διάκεντρος των δύο κύκλων. Επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι και έχουν δύο σημεία τομής. Άρα δύο είναι τα σημεία του επιπέδου που έχουν και τις δύο ιδιότητες: τα σημεία τομής των κύκλων (Κ, ρ) και (Μ, R), δηλαδή τα Λ και Λ΄.



13847

ΘΕΜΑ 4

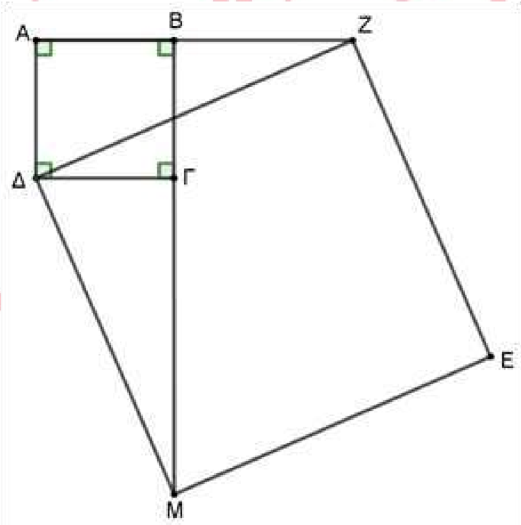
Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ προς το Β κατά τμήμα ΒΖ. Επίσης προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΜ = ΑΖ. Στη συνέχεια, θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΔΜΕΖ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα. (Μονάδες 5)

β) το τετράπλευρο ΔΜΕΖ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 9)

γ) το τετράπλευρο ΒΖΕΜ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 6)

δ) οι γωνίες ΒΜΖ και ΒΕΖ είναι ίσες. (Μονάδες 5)



13847-Λύση

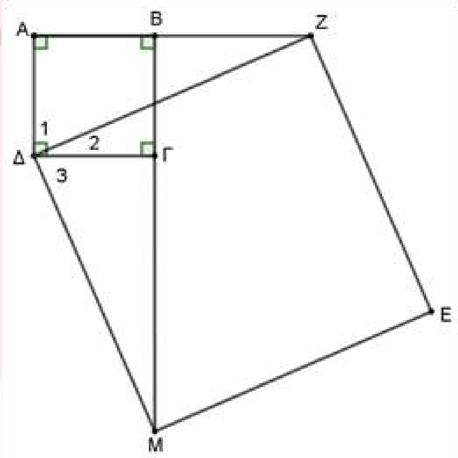
ΛΥΣΗ

α) Για τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ έχουμε:

- ΑΔ = ΔΓ, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ
- ΑΖ = ΓΜ, από τα δεδομένα

Άρα έχουν μία προς μία ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε είναι ίσα.

β)



Για να είναι το τετράπλευρο ΔΜΕΖ τετράγωνο, γνωρίζοντας ότι είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

Έχουμε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_3$ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΖ και ΓΜ των ίσων τριγώνων ΑΔΖ και ΓΔΜ.

Άρα $M\hat{\Delta}Z = \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_3 = \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 90°$, δηλαδή το παραλληλόγραμμο ΔΜΕΖ είναι και Ορθογώνιο διότι έχει μία ορθή γωνία.

Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα θα έχουν και τις υποτείνουσες αντίστοιχα ίσες, οπότε ΔΖ = ΔΜ. Άρα το ορθογώνιο ΔΜΕΖ είναι και ρόμβος, διότι έχει δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες. Άρα είναι τετράγωνο.

γ) Για να είναι το τετράπλευρο ΒΖΕΜ εγγράψιμο αρκεί να αποδείξουμε ότι οι απέναντι γωνίες του ΖΒΜ και ΖΕΜ είναι παραπληρωματικές, δηλαδή

$Z\hat{B}M + Z\hat{E}M = 180°$.

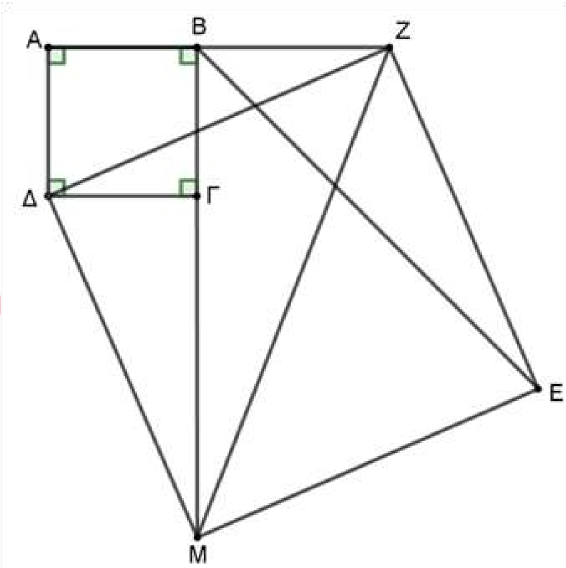
Από το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχουμε $A\hat{B}\Gamma = 90°$ άρα και $Z\hat{B}M = 90°$ ως παραπληρωματική.

Από το τετράγωνο ΔΜΕΖ έχουμε $Z\hat{E}M = 90°$.

Άρα $Z\hat{B}M + Z\hat{E}M = 90° + 90° = 180°$.

13847-Λύση

δ)



Επειδή το τετράπλευρο ΒΖΕΜ είναι εγγράψιμο η πλευρά ΒΖ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Μ και Ε υπό ίσες γωνίες, δηλαδή $B\widehat{M}Z = B\widehat{E}Z$.

13850

ΘΕΜΑ 4

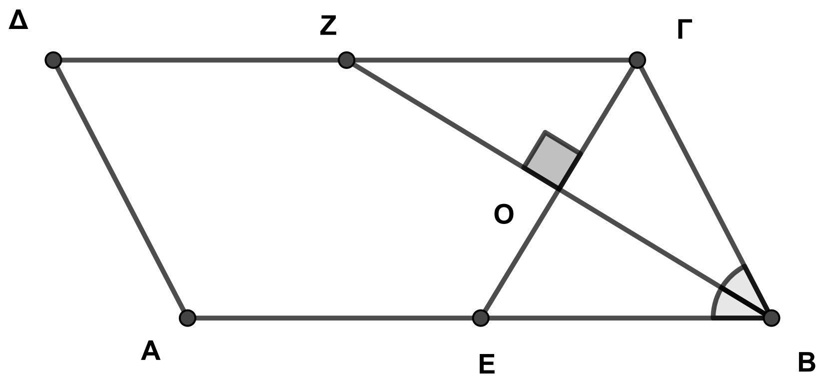
Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος και η ΒΖ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$. Φέρουμε ΓΟ κάθετη στη ΒΖ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

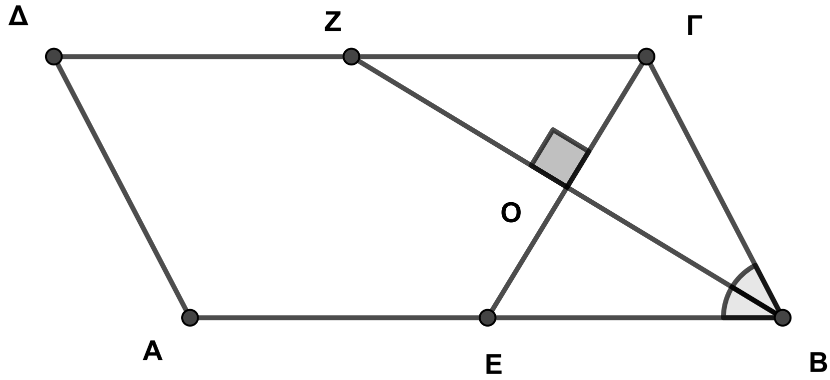
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι ρόμβος (Μονάδες 6)

δ) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας $\widehat{B}$ ώστε το τετράπλευρο ΕΒΓΖ να είναι τετράγωνο; (Μονάδες 4)



13850-Λύση

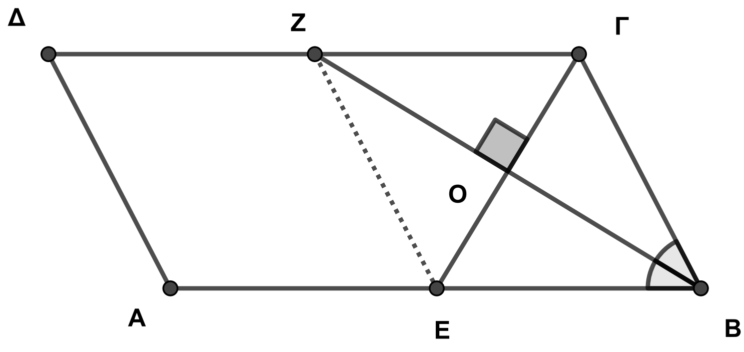


α) Έχουμε ΒΖ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$ και ΒΟ ⊥ ΓΕ από υπόθεση. Συνεπώς το τμήμα ΒΟ στο τρίγωνο ΕΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΕΓ.

β) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ τα οποία έχουν:

i. $Γ\widehat{O}Z=E\widehat{O}B=90^o$
ii. ΟΓ=ΟΕ (Ο μέσο της ΓΕ γιατί το ΒΟ είναι διχοτόμος άρα και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΕΒΓ)
iii. $Z\widehat{Γ}O=B\widehat{E}O$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΕ, ΓΖ που τέμνονται από την ΓΕ)

Τα τρίγωνα ΟΖΓ, ΟΒΕ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.



γ) Από τη σύγκριση στο ερώτημα β) έχουμε ΟΖ=ΟΒ ως πλευρές των ίσων τριγώνων ΖΟΓ και ΒΟΕ απέναντι από τις ίσες γωνίες $Z\widehat{Γ}O$ και $B\widehat{E}O$ και ΟΓ=ΟΕ (Ο μέσο της ΓΕ γιατί το ΒΟ είναι διχοτόμος άρα και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΕΒΓ). Το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι ΓΕ και ΒΖ διχοτομούνται στο σημείο Ο και επειδή είναι και κάθετες από υπόθεση (ΒΖ ⊥ ΓΕ) είναι ρόμβος.

δ) Για να είναι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ τετράγωνο θα πρέπει να είναι εκτός από ρόμβος (ερώτημα γ)) και ορθογώνιο άρα θα πρέπει $\widehat{B}=90^o$.

13852

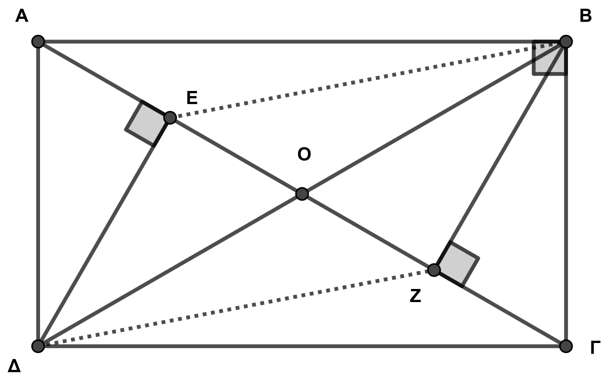
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ>ΑΔ και με κέντρο Ο. Αν ΒΖ και ΔΕ είναι οι αποστάσεις των κορυφών Β και Δ από τη διαγώνιο ΑΓ, τότε:

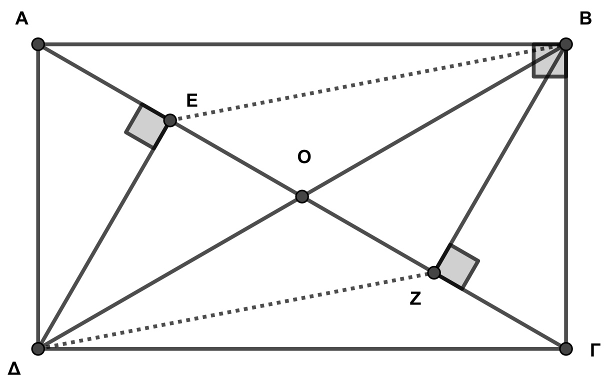
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ είναι ίσα. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

γ) Αν $\Delta\widehat{A}E=60^o$ και ΟΕ=5, να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΔ. (Μονάδες 12)



13852-Λύση



α) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ που έχουν:

i. $Δ\hat{Ε}Ο=Β\hat{Ζ}Ο=90^o$

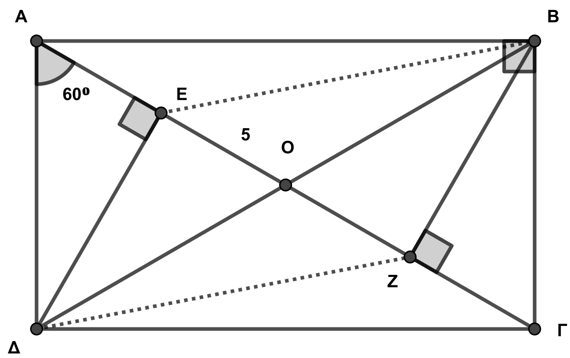
ii. $Ε\hat{Ο}Δ=Ζ\hat{Ο}Β$ (ως κατακορυφήν)

iii. ΔΟ=ΟΒ (Ο μέσο της διαγωνίου ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ)

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β) Στα τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ οι γωνίες $Ο\hat{Δ}Ε$ και $Ο\hat{Β}Ζ$ είναι ίσες ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $Ε\hat{Ο}Δ$ και $Ζ\hat{Ο}Β$.

Από τη σύγκριση του α) ερωτήματος έχουμε ΕΟ=ΖΟ ως πλευρές των ίσων τριγώνων απέναντι από τις ίσες γωνίες $Ο\hat{Δ}Ε$ και $Ο\hat{Β}Ζ$. Το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο διότι οι διαγώνιοι του ΕΖ και ΒΔ διχοτομούνται στο Ο αφού ΕΟ=ΟΖ και ΔΟ=ΟΒ (Ο μέσο της ΒΔ).



γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε $Δ\hat{Α}Γ=60^o$ συνεπώς $Δ\hat{Γ}Α=30^o$. Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ίσες και $\frac{ΑΓ}{2}=\frac{ΒΔ}{2}$ ή ΓΟ=ΔΟ δηλαδή το τρίγωνο ΔΟΓ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ και $Δ\hat{Γ}Α=30^o$, άρα $Δ\hat{Ο}Γ=120^o$ και $Δ\hat{Ο}Α=60^o$ ως

13852-Λύση

παραπληρωματική της $Δ\widehat{Ο}Γ$. Συνεπώς το τρίγωνο ΑΔΟ είναι ισόπλευρο και η ΔΕ είναι ύψος άρα και διάμεσος. Το σημείο Ε είναι το μέσο του τμήματος ΑΟ με ΑΕ=ΕΟ=5. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε $Δ\widehat{Α}Ε=60^o$ συνεπώς $Α\widehat{Δ}Ε=30^o$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΕ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΑΔ, δηλαδή ΑΕ=$\frac{ΑΔ}{2}$ ή ΑΔ=2ΑΕ ή ΑΔ=10.

13854

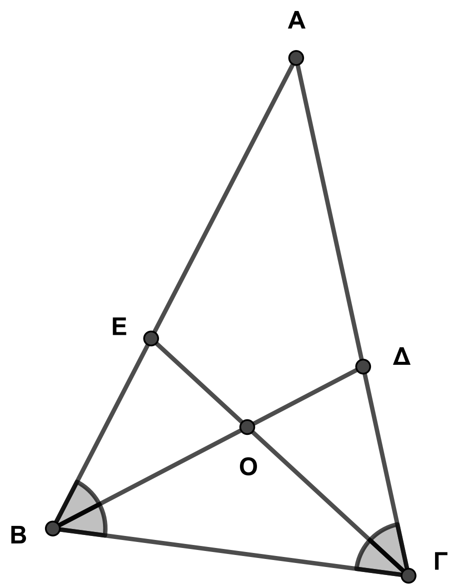
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο Ο.

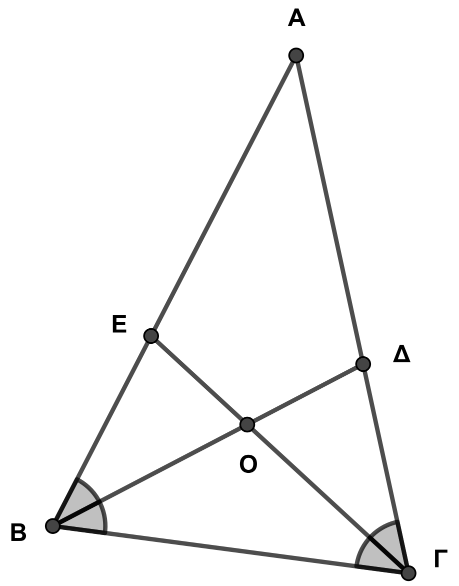
α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ. (Μονάδες 9)

β) Από τα σημεία Ε και Δ φέρνουμε κάθετες ΕΛ και ΔΚ στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: ΔΚ=ΕΛ. (Μονάδες 9)

γ) Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ που η απόστασή του από το σημείο Ε να ισούται με την απόσταση των σημείων Δ και Κ αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



13854-Λύση



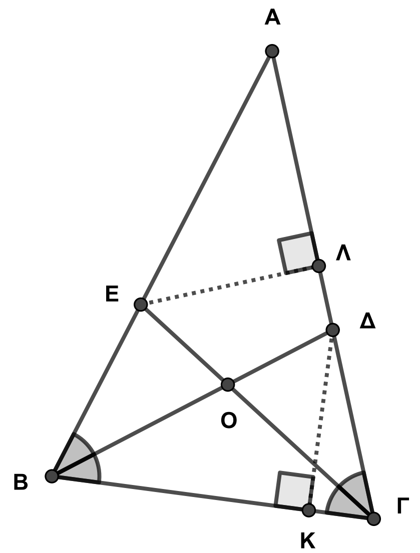
α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΓΕ που έχουν:

i. ΒΓ κοινή πλευρά

ii. $\Gamma\widehat{B}\Delta = B\widehat{\Gamma}E$ (μισά των ίσων γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$)

iii. $\Delta\widehat{\Gamma}B = E\widehat{B}\Gamma$ (ως προσκείμενες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ)

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, άρα ΒΔ=ΓΕ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών $\widehat{\Gamma}$ και $\widehat{B}$.



β) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΚ και ΓΕΛ που έχουν:

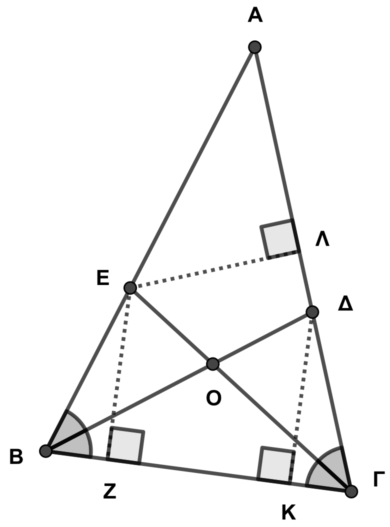
i. $\widehat{K} = \widehat{\Lambda} = 90^o$

ii. ΒΔ=ΓΕ (από ερώτημα α))

13854-Λύση

iii. $K\hat{B}\Delta = \Lambda\hat{\Gamma}E$ (μισά των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$)

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα ΔΚ=ΕΛ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών $K\hat{B}\Delta$ και $\Lambda\hat{\Gamma}E$.



γ) Αναζητούμε ένα σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ το οποίο να ικανοποιεί τη σχέση ΖΕ=ΔΚ. Από το β) ερώτημα έχουμε ότι ΔΚ=ΕΛ συνεπώς το σημείο Ζ που αναζητούμε θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση ΖΕ=ΕΛ. Το σημείο Ε ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Gamma}$ και ΕΛ είναι η απόστασή του από την πλευρά ΓΑ, η οποία είναι ίση με την απόσταση του σημείο Ε από τη άλλη πλευρά, ΒΓ, της γωνίας. Συνεπώς το ζητούμενο σημείο Ζ θα είναι το ίχνος της κάθετης από το σημείο Ε στην πλευρά ΒΓ.

13856

ΘΕΜΑ 4

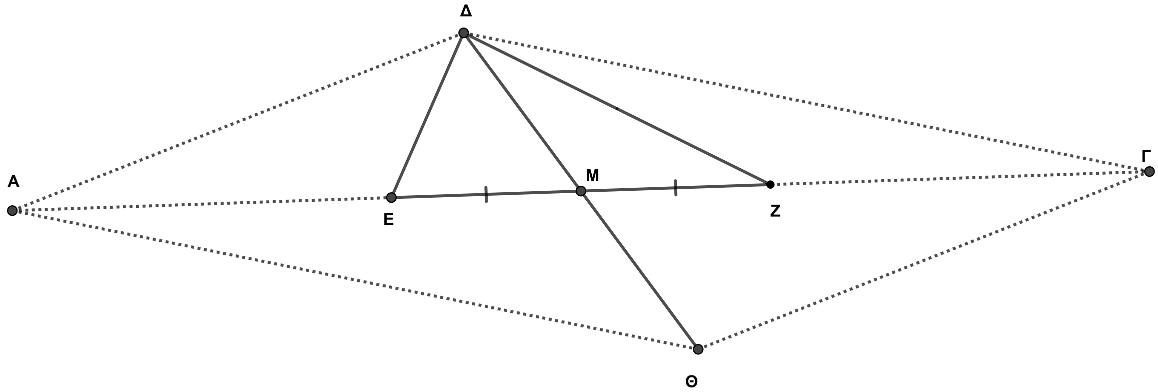
Σε τρίγωνο ΔΕΖ, φέρουμε τη διάμεσο ΔΜ και στην προέκτασή της προς το μέρος του Μ παίρνουμε σημείο Θ έτσι ώστε ΑΜ=ΜΘ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΕΖ προς το Ε κατά τμήμα ΕΑ=ΕΖ και προς το Ζ κατά τμήμα ΖΓ=ΕΖ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΑΜ και ΘΓΜ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΘΑΔΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

γ) Στο σχήμα της άσκησης που κατασκεύασε στο τετράδιό του ο Γιάννης είναι ΑΔ=12. Πόσο θα είναι το μήκος της διαμέσου ΕΗ του τριγώνου ΔΕΖ στο σχήμα του Γιάννη; (Μονάδες 9)

13856-Λύση



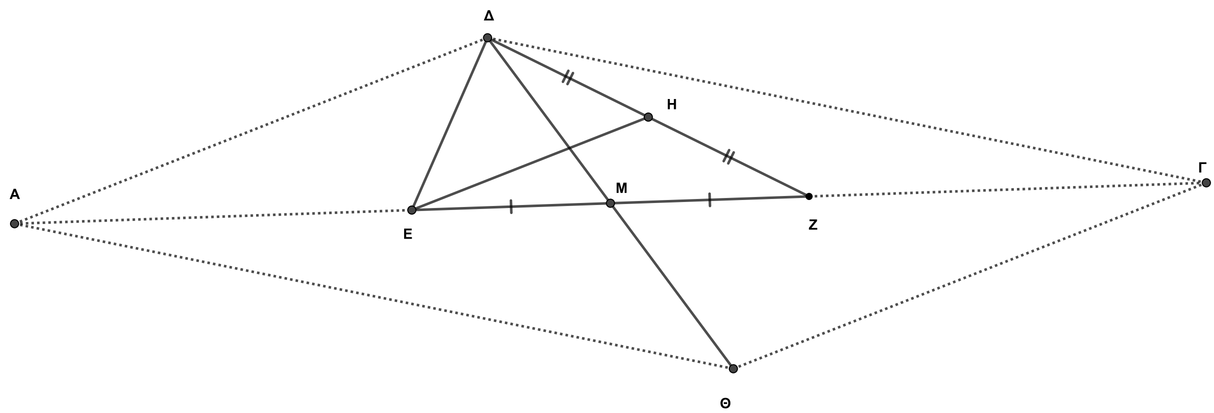
α) Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΕΖ άρα ΜΕ=ΜΖ, επίσης ΕΑ=ΕΖ=ΖΓ (από υπόθεση) άρα: ΜΕ+ΕΑ=ΜΖ+ΖΓ ή ΜΑ=ΜΓ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΑΜ και ΘΓΜ που έχουν:

i. ΔΜ=ΜΘ (από υπόθεση)
ii. ΜΑ=ΜΓ (ως άθροισμα ίσων τμημάτων ΜΕ+ΕΑ και ΜΖ+ΖΓ)
iii. $\Delta\widehat{M}A=\Theta\widehat{M}\Gamma$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

β) Το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος ΔΘ (από υπόθεση) και μέσο του τμήματος ΑΓ (ii στη σύγκριση του ερωτήματος α)). Στο τετράπλευρο ΘΑΔΓ οι διαγώνιοι ΔΘ και ΑΓ διχοτομούνται στο σημείο Μ, άρα το τετράπλευρο ΘΑΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.



γ) Το σημείο Η είναι το μέσο της πλευράς ΔΖ αφού η ΕΗ είναι διάμεσος. Από υπόθεση έχουμε ΕΑ=ΕΖ, άρα το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΖ. Στο τρίγωνο

13856-Λύση

ΑΔΖ τα σημεία Ε και Η είναι μέσα πλευρών άρα ΕΗ=$\frac{ΑΔ}{2}$ ή ΕΗ=$\frac{12}{2}$ ή ΕΗ=6. Στο σχήμα του Γιάννη η διάμεσος ΕΗ του τριγώνου ΔΕΖ θα έχει μήκος 6.

14877

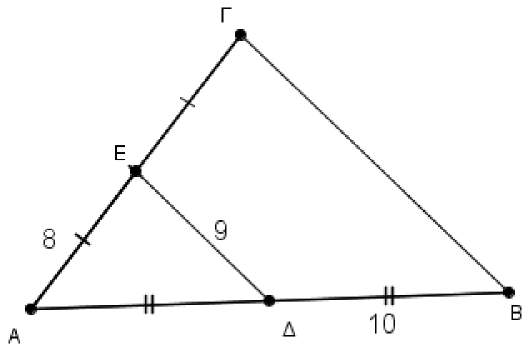
ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ΑΕ=8 , ΕΔ=9 και ΔΒ=10 .

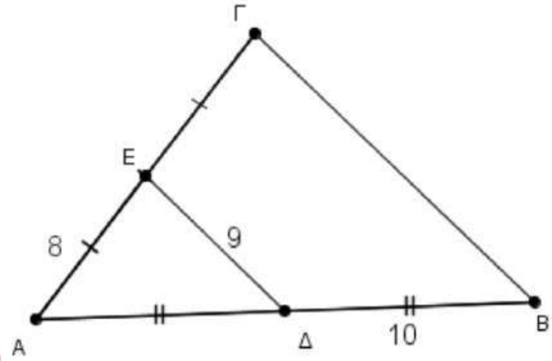
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 8)

γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου ΑΒΓ και του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ. (Μονάδες 9)



14877-Λύση



α) Το ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε:

$$ΔΕ \parallel ΒΓ$$

Επίσης οι προεκτάσεις των πλευρών ΔΒ, ΕΓ, του ΔΕΓΒ, τέμνονται στο Α. Άρα οι ΔΒ και ΕΓ δεν είναι παράλληλες. Επομένως, το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

β) Επίσης, ισχύει $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$, γιατί το ΔΕ ενώνει τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ. Άρα:

$$ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow 9 = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΒΓ = 18$$

γ) Έστω $Π_1$ η περίμετρος του ΑΒΓ και $Π_2$ η περίμετρός του ΔΕΓΒ.

α΄ τρόπος: Ισχύουν ΑΒ = 2ΔΒ και ΑΓ = 2ΑΕ. Για τη περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$$Π_1 = ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ = 2ΔΒ + 18 + 2ΑΕ = 20 + 18 + 16 = 54$$

Για τη περίμετρο του τετραπλεύρου (τραπεζίου) ΔΕΓΒ έχουμε:

$$Π_2 = ΔΕ + ΕΓ + ΓΒ + ΒΔ = 9 + 8 + 18 + 10 = 45$$

Άρα $Π_1 > Π_2$.

β΄ τρόπος: Από την τριγωνική ανισότητα είναι ΑΔ + ΑΕ > ΔΕ.

$Π_1 = ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ = ΑΔ + ΔΒ + ΒΓ + ΑΕ + ΕΓ = ΔΒ + ΒΓ + ΕΓ + (ΑΔ + ΑΕ) > ΔΒ + ΒΓ + ΕΓ + ΔΕ = Π_2$.

Άρα $Π_1 > Π_2$.

14878

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και σημείο Μ εξωτερικό του κύκλου. Από το σημείο Μ φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ του κύκλου και στην προέκταση του ΟΒ παίρνουμε σημείο Γ ώστε ΒΓ = ΟΒ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΜΒΟ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

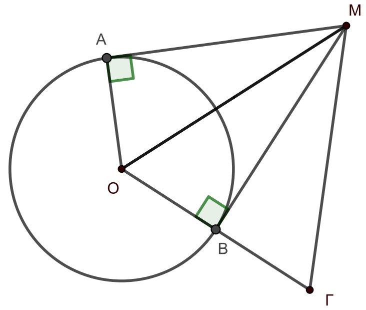
(Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε το κέντρο Λ του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΑΜΒΟ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι ΒΛ //ΜΓ. (Μονάδες 9)

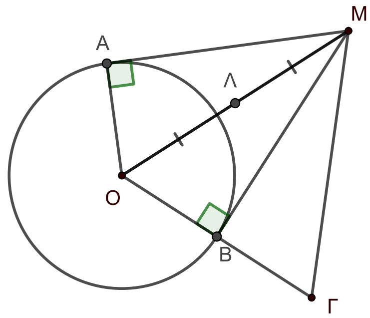
14878-Λύση

α)

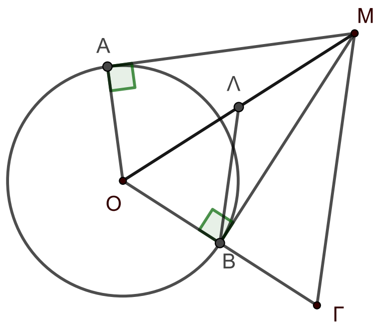


Οι ακτίνες ΟΑ και ΟΒ είναι κάθετες στα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ, δηλαδή: ΟΑ ⊥ ΜΑ και ΟΒ ⊥ ΜΒ.

Τότε, στο τετράπλευρο ΑΜΒΟ ισχύει: $\widehat{A} + \widehat{B} = 90^o + 90^o = 180^o$, δηλαδή δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, οπότε είναι εγγράψιμο.



β) Έστω Λ το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΑΜΒΟ. Οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ θα είναι εγγεγραμμένες γωνίες του κύκλου που περνάει από τις κορυφές του τετράπλευρου ΑΜΒΟ και είναι $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^o$. Άρα οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ βαίνουν σε ημικύκλιο, δηλαδή η ΟΜ είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου. Έτσι το κέντρο Λ του περιγεγραμμένου κύκλου είναι το μέσο του τμήματος ΟΜ.



γ) Στο τρίγωνο ΟΜΓ τα Β, Λ είναι τα μέσα των ΟΓ, ΟΜ αντίστοιχα, άρα το τμήμα ΒΛ είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή ΒΛ // ΜΓ.

14880

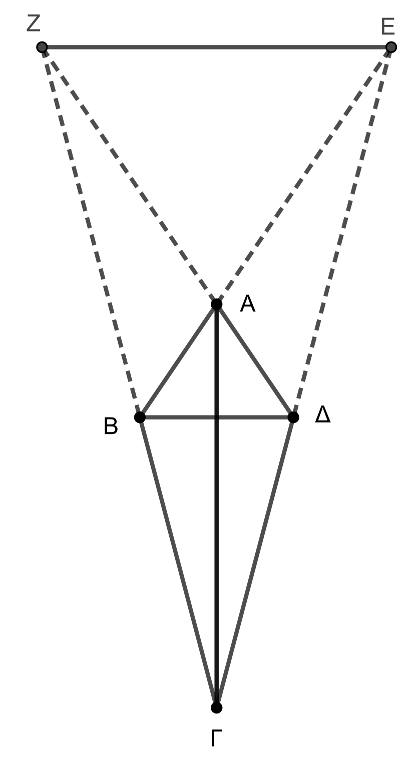
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ = ΑΔ και ΓΒ = ΓΔ. Αν Ε είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΔ και Ζ το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔΑ και ΓΒ να αποδείξετε ότι:

α) Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΓΔ. (Μονάδες 7)

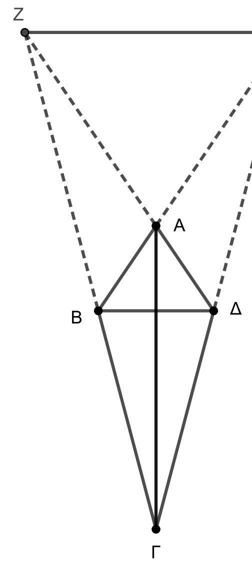
β) ΓΖ = ΓΕ (Μονάδες 9)

γ) ΕΖ // ΒΔ (Μονάδες 9)



14880-Λύση

α)

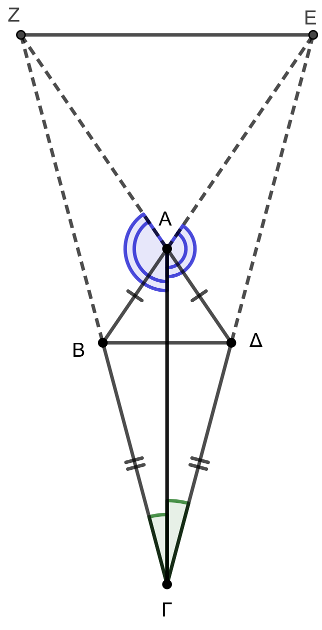


Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ έχουν:

- ΑΒ = ΑΔ, από υπόθεση
- ΓΒ = ΓΔ, από υπόθεση
- ΓΑ κοινή πλευρά

Από το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ίσα, οπότε έχουν $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Gamma}\Delta$ (1), διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα. Άρα η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Gamma}\Delta$.

β)



14880-Λύση

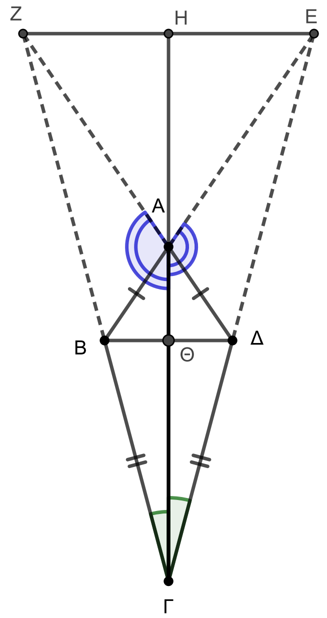
$Z\hat{A}B = E\hat{A}\Delta$ (2) ως κατακορυφήν γωνίες, $B\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}\Gamma$ (3), γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΓΒ και ΓΔ αντίστοιχα, των ίσων τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ του α) ερωτήματος. Από (2) και (3) έχουμε ότι: $Z\hat{A}\Gamma = E\hat{A}\Gamma$ (4) ως αθροίσματα ίσων γωνιών

Τα τρίγωνα ΖΑΓ και ΕΑΓ έχουν:

- $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Gamma}\Delta$, από τη σχέση (1)
- ΑΓ κοινή πλευρά
- $Z\hat{A}\Gamma = E\hat{A}\Gamma$, από τη σχέση (4)

Άρα από το κριτήριο Γ-Π-Γ τα τρίγωνα ΖΑΓ και ΕΑΓ είναι ίσα οπότε ΓΖ=ΓΕ γιατί είναι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $Z\hat{A}\Gamma$, $E\hat{A}\Gamma$ αντίστοιχα.

γ)



Έστω Η και Θ τα σημεία στα οποία το τμήμα ΑΓ τέμνει τα τμήματα ΖΕ και ΒΔ αντίστοιχα. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΒΔ (ΓΒ = ΓΔ), η ΓΘ είναι διχοτόμος, άρα και ύψος. Τότε: $B\Delta \perp \Gamma\Theta$. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΖΕ (ΓΖ = ΓΕ), η ΓΗ είναι διχοτόμος, άρα και ύψος. Τότε: $EZ \perp \Gamma H$ ή $EZ \perp \Gamma\Theta$.

Οπότε συμπεραίνουμε ότι ΕΖ // ΒΔ, ως κάθετα στο ίδιο τμήμα ΓΘ.

14881

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και ΑΜ η διάμεσός του. Από το Μ φέρουμε ΜΚ κάθετη στην ΑΒ και ΜΛ κάθετη στην ΑΓ. Αν Ν, Ρ είναι τα μέσα των ΒΜ και ΓΜ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

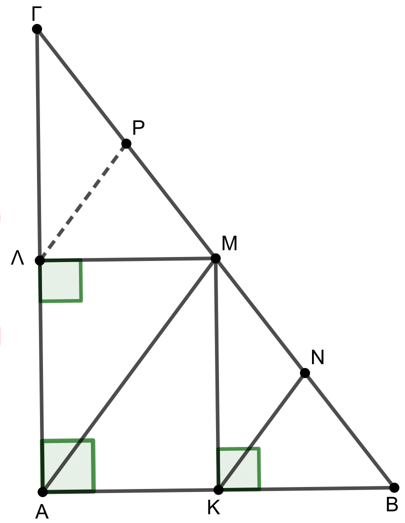
α) $N\widehat{K}M = N\widehat{M}K$ (Μονάδες 7)

β) Η ΜΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΝΜΑ. (Μονάδες 9)

γ) ΑΜ = ΚΝ + ΛΡ. (Μονάδες 9)

14881-Λύση

α)



Το ΜΚΒ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με την $B\widehat{K}M$ ορθή. Η ΚΝ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΜΒ του ορθογωνίου τριγώνου ΜΚΒ. Άρα ΚΝ = $\frac{MB}{2}$ = ΝΜ.

Άρα το τρίγωνο ΚΝΜ είναι ισοσκελές με ΚΝ = ΝΜ και βάση ΜΚ. Επομένως, οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση του ΜΚ είναι ίσες. Δηλαδή $N\widehat{K}M = N\widehat{M}K$.

β) Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα ΑΜ = $\frac{B\Gamma}{2}$ = ΜΒ.

Επομένως το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές, με ΑΜ = ΜΒ και βάση ΑΒ, οπότε το ΜΚ είναι ύψος, άρα και διχοτόμος της γωνίας $N\widehat{M}A$.

γ) Το τρίγωνο ΓΛΜ είναι ορθογώνιο με την $\Gamma\widehat{\Lambda}M$ ορθή. Η ΛΡ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσας ΓΜ του τριγώνου. Άρα ΛΡ = $\frac{\Gamma M}{2}$.

Στο α) έχουμε βρει ότι ΚΝ = $\frac{MB}{2}$.

Όμως το Μ είναι μέσο της ΒΓ, άρα:

- ΜΒ = $\frac{B\Gamma}{2}$, επομένως ΚΝ = $\frac{MB}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$.
- ΜΒ = ΓΜ. Επομένως $\frac{MB}{2} = \frac{\Gamma M}{2}$, άρα ΚΝ = ΛΡ.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ΚΝ + ΛΡ = 2ΚΝ = $2 \cdot \frac{B\Gamma}{4} = \frac{B\Gamma}{2}$. Όμως, έχουμε δείξει ότι ΑΜ = $\frac{B\Gamma}{2}$, άρα ΚΝ + ΛΡ = ΑΜ.

14882

ΘΕΜΑ 4

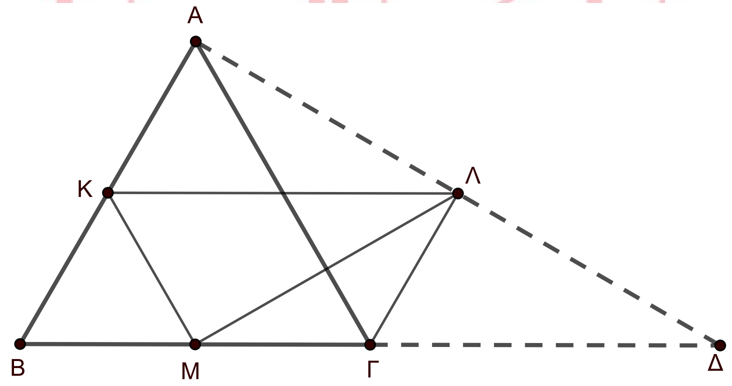
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα ΓΔ = ΒΓ. Αν Μ, Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΔ. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι:

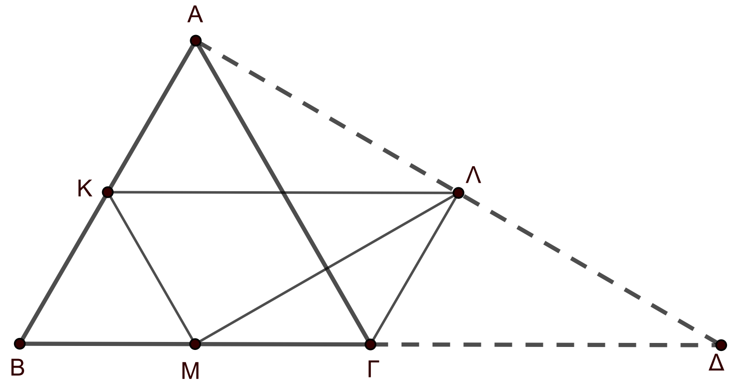
i. Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή. (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)



14882-Λύση

α)



Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι: $B\widehat{A}\Gamma = \widehat{B} = B\widehat{\Gamma}A = 60^o$

Ισχύει ακόμη ότι ΓΔ = ΒΓ και ΒΓ = ΑΓ, άρα ΓΔ = ΑΓ, οπότε το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές, επομένως $\Gamma\widehat{A}\Delta = \widehat{\Delta}$ (1).

Η γωνία $A\widehat{\Gamma}B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΓΔ, άρα $A\widehat{\Gamma}B = \Gamma\widehat{A}\Delta + \widehat{\Delta}$ και λόγω της (1) $60^o = 2\widehat{\Delta}$ ή $\widehat{\Delta} = 30^o$. Οπότε λόγω της (1) είναι και $\Gamma\widehat{A}\Delta = 30^o$. Ισχύει ακόμη ότι:

$B\widehat{A}\Delta = B\widehat{A}\Gamma + \Gamma\widehat{A}\Delta = 60^o + 30^o = 90^o$.

β)

i. Το ΚΛ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, οπότε ΚΛ // ΒΔ ή ΚΛ//ΜΓ.

Επιπλέον το Γ είναι το μέσο της ΒΔ, αφού ΒΓ = ΓΔ από υπόθεση και το Λ είναι το μέσο της ΑΔ, άρα ΛΓ//ΑΒ. Το τμήμα ΚΜ τέμνει τη μία από τις δύο παράλληλες την ΑΒ, άρα θα τέμνει και την άλλη. Δηλαδή τα τμήματα ΚΜ και ΛΓ τέμνονται , οπότε δεν είναι παράλληλα. Έτσι το ΚΛΓΜ είναι τραπέζιο.

Το ΛΓ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα $\Lambda\Gamma = \frac{AB}{2}$ (2)

Το ΚΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $KM = \frac{A\Gamma}{2}$ (3)

Επειδή ΑΒ = ΑΓ, από τις (1), (2) βρίσκουμε ότι ΛΓ = ΚΜ, οπότε το τραπέζιο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές.

Για τις βάσεις του έχουμε $K\Lambda = \frac{B\Delta}{2}$, αφού Κ και Λ τα μέσα των ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα, δηλαδή $K\Lambda = \frac{2\,B\Gamma}{2}$ ή ΚΛ = ΒΓ, ενώ $M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$, αφού το Μ είναι μέσο του ΒΓ. Δηλαδή ΚΛ = ΒΓ και $M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$ και έτσι η μεγάλη βάση του τραπεζίου είναι διπλάσια της μικρής.

14882-Λύση

ii. Ισχύουν τα εξής:

- $B\widehat{K}M = B\widehat{A}\Gamma = 60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη που σχηματίζονται από τις παράλληλες ΚΜ και ΑΓ που τέμνονται από την ΑΒ.
- $A\widehat{K}\Lambda = \widehat{B} = 60^o$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη που σχηματίζονται από τις παράλληλες ΚΛ και ΒΔ που τέμνονται από την ΑΒ.
- $A\widehat{K}\Lambda + \Lambda\widehat{K}M + B\widehat{K}M = 180^o$ ή $60^o + \Lambda\widehat{K}M + 60^o = 180^o$, δηλαδή $\Lambda\widehat{K}M = 60^o$.

Τα τρίγωνα ΜΚΛ και ΑΚΛ έχουν:

- ΚΛ κοινή πλευρά
- $A\widehat{K}\Lambda = \Lambda\widehat{K}M = 60^o$
- ΑΚ = ΚΜ, διότι $AK = \frac{AB}{2}$ και $KM = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB}{2}$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΜΚΛ και ΑΚΛ είναι ίσα, άρα:

$K\widehat{M}\Lambda = K\widehat{A}\Lambda$ δηλαδή $K\widehat{M}\Lambda = 90^o$. Επομένως το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο.

14884

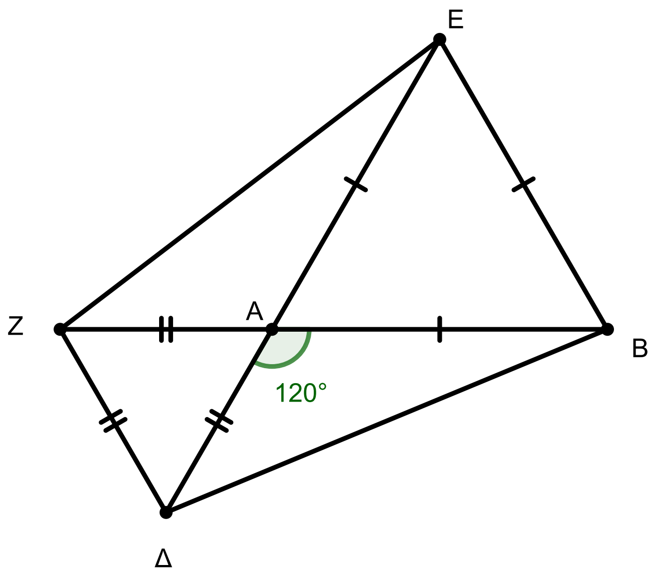
ΘΕΜΑ 2

Έστω τρίγωνο ΑΒΔ με $\widehat{A} = 120^o$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο στο ΒΕ. (Μονάδες 12)



14884-Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ είναι ισόπλευρα, άρα όλες οι γωνίες τους είναι 60^o.

$Z\widehat{A}B = Z\widehat{A}\Delta + \Delta\widehat{A}B = 60^o + 120^o = 180^o$, άρα τα σημεία Ζ, Α, Β είναι συνευθειακά.

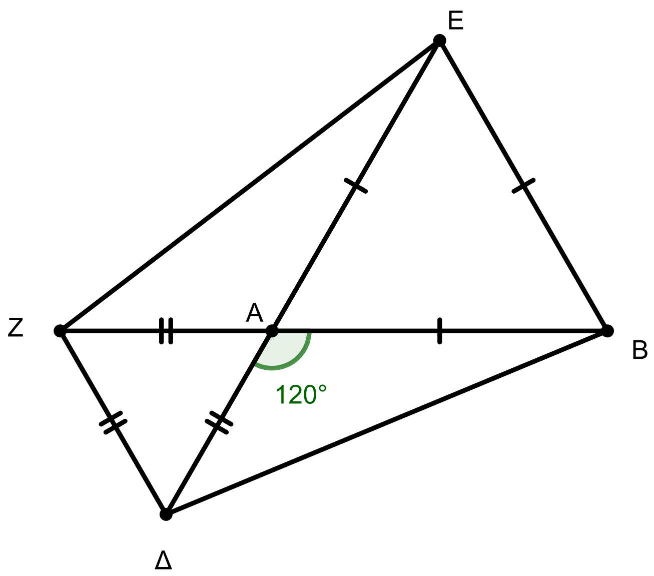
Ομοίως $E\widehat{A}\Delta = E\widehat{A}B + B\widehat{A}\Delta = 60^o + 120^o = 180^o$ και τα σημεία Ε, Α και Δ είναι επίσης συνευθειακά.

Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ έχουν:

- ΑΖ = ΑΔ, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΖΔ
- ΑΒ = ΑΕ, ως πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΕ
- $Z\widehat{A}E = \Delta\widehat{A}B$, ως κατακορυφήν αφού ΖΑΒ και ΕΑΔ ευθείες

Με βάση το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα.

β) $A\widehat{\Delta}Z = A\widehat{E}B = 60^o$ ως γωνίες ισόπλευρων τριγώνων και είναι γωνίες εντός εναλλάξ των ΔΖ και ΒΕ που τέμνονται από την ΔΕ, άρα ΔΖ // ΒΕ.



14885

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΗ κατά τμήμα ΗΔ=ΑΗ και τη διάμεσό του ΑΜ κατά τμήμα ΜΕ=ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:

α)

i. ΑΒ = ΓΕ

ii. ΑΒ = ΒΔ

(Μονάδες 8)

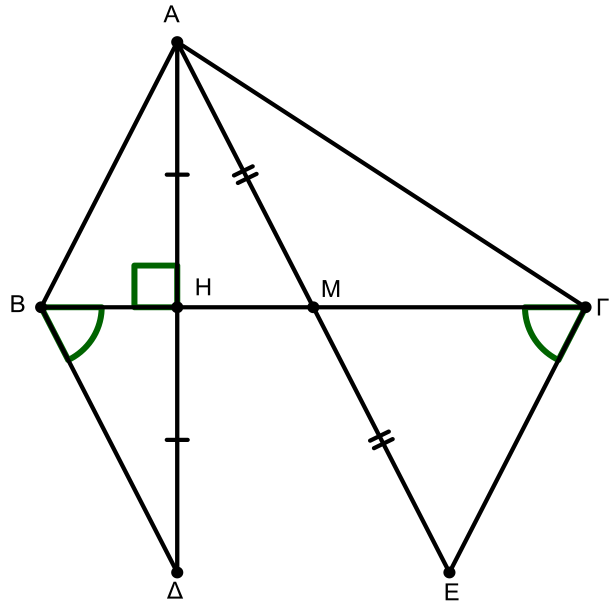
β) $\Gamma\widehat{\mathrm{B}}\Delta = \mathrm{B}\widehat{\Gamma}\mathrm{E}$ (Μονάδες 8)

γ)

i. Εξετάστε αν το τμήμα ΒΔ μπορεί να είναι παράλληλο στο τμήμα ΓΕ.

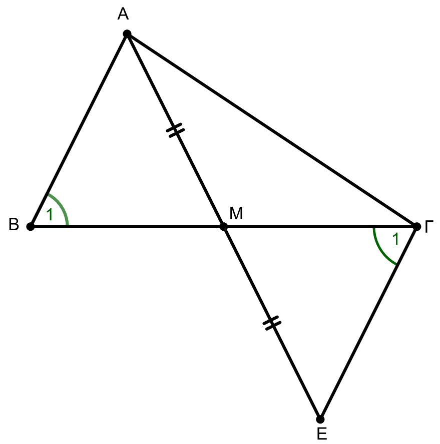
(Μονάδες 5)

ii. Ποιο είναι το είδος του τετραπλεύρου ΒΓΕΔ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)



α)

14885-Λύση

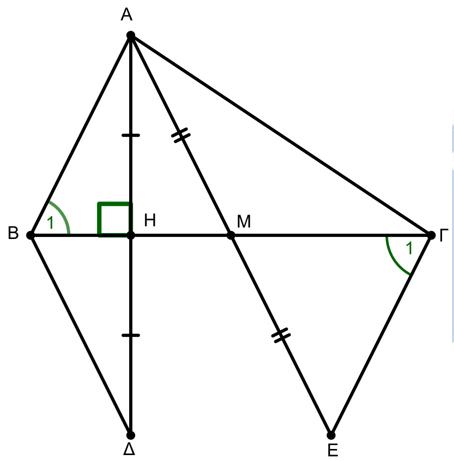


i. Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΕΓΜ έχουν:

- ΑΜ = ΕΜ, από υπόθεση
- ΒΜ = ΓΜ, το Μ είναι μέσο του ΒΓ
- $A\widehat{M}B = E\widehat{M}\Gamma$, ως κατακορυφήν γωνίες ίσες

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΕΓΜ είναι ίσα, οπότε έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΓΕ.

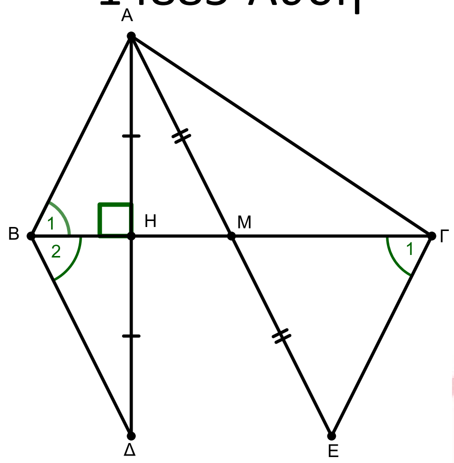
ii.



Από την υπόθεση έχουμε ότι ΑΗ ⊥ ΒΓ αφού ΑΗ ύψος, άρα ΒΗ ⊥ ΑΔ (1). Επίσης ΑΗ = ΗΔ από κατασκευή, άρα το σημείο Η είναι μέσο του τμήματος ΑΔ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι στο τρίγωνο ΑΒΔ το τμήμα ΒΗ είναι ύψος και διάμεσος, επομένως το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση ΑΔ και ΑΒ = ΒΔ.

β)

14885-Λύση

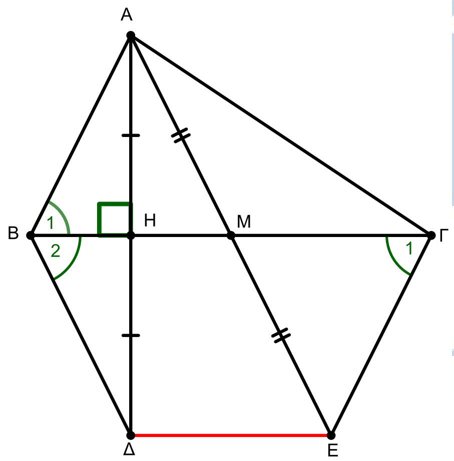


Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΔ του α) ii. ερωτήματος το τμήμα ΒΗ θα είναι και διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{B}\Delta$, άρα $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$. Στα ίσα τρίγωνα ΑΒΜ και ΕΓΜ του α) i. ερωτήματος απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΜ και ΜΕ θα βρίσκονται ίσες γωνίες, δηλαδή $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1$. Οπότε τελικά $\widehat{B}_2 = \widehat{\Gamma}_1$ ή $\Gamma\widehat{B}\Delta = B\widehat{\Gamma}E$.

γ)

i. Από την ισότητα των γωνιών $\widehat{B}_1$ και $\widehat{\Gamma}_1$ που είναι γωνίες εντός εναλλάξ των των ΑΒ και ΓΕ τεμνομένων από το ΑΒ συμπεραίνουμε ότι ΑΒ // ΓΕ. Επειδή το τμήμα ΒΔ τέμνει το τμήμα ΑΒ, θα τέμνει και το παράλληλό του τμήμα ΓΕ. Άρα το ΒΔ δεν μπορεί να είναι παράλληλο στο ΓΕ.

ii.



Στο τρίγωνο ΑΔΕ το Η είναι μέσο του τμήματος ΑΔ και το Μ είναι μέσο του τμήματος ΑΕ από κατασκευή. Άρα το τμήμα ΗΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του, οπότε είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά, δηλαδή ΗΜ // ΔΕ ή ΒΓ // ΔΕ. Άρα το τετράπλευρο ΒΓΕΔ έχει δύο μόνο πλευρές παράλληλες, αφού δείξαμε ότι στο γ) i. ερώτημα ότι η ΒΔ δεν μπορεί να είναι παράλληλη στην ΓΕ, άρα είναι τραπέζιο. Συγχρόνως από το β) ερώτημα οι γωνίες της βάσης του ΒΓ είναι ίσες, αφού $\Gamma\hat{B}\Delta = B\hat{\Gamma}E$, άρα το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

14887

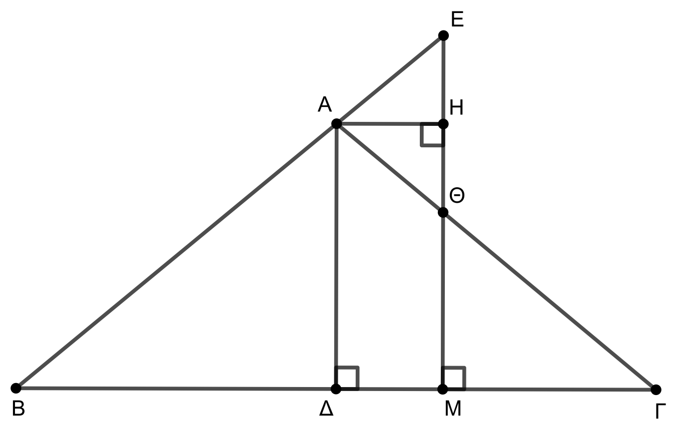
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), και τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το σημείο Μ φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Θ αντίστοιχα. Αν ΑΔ και ΑΗ τα ύψη των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΘΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

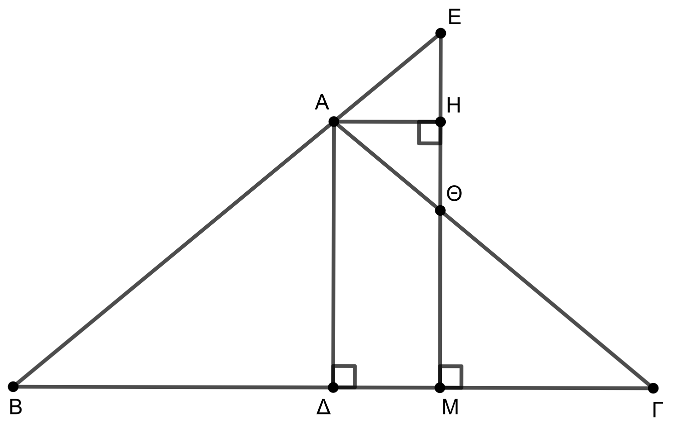
α) $\Delta\widehat{A}H = 90^o$. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) ΜΘ+ΜΕ = 2ΑΔ. (Μονάδες 9)



14887-Λύση



α) Το τετράπλευρο ΔΜΗΑ έχει τρείς ορθές γωνίες οπότε είναι ορθογώνιο. Άρα $\Delta\widehat{A}H = 90^o$.

β) Το τμήμα ΑΗ είναι παράλληλο στην ΒΓ, καθώς και τα δύο είναι κάθετα στην ΕΜ. Ισχύει ότι $\Gamma\widehat{A}H = A\widehat{\Gamma}B$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΗ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ. Επίσης, $A\widehat{B}\Gamma = E\widehat{A}H$ ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΗ και ΒΓ που τέμνονται από την ΒΕ. Όμως, λόγω του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, με βάση ΒΓ, είναι $A\widehat{B}\Gamma = A\widehat{\Gamma}B$. Άρα τελικά $\Gamma\widehat{A}H = E\widehat{A}H$ και η ΑΗ είναι διχοτόμος στο τρίγωνο ΑΘΕ. Επιπλέον το ΑΗ είναι και ύψος, οπότε το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΑΘ και ΘΕ.

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΘΕ το ύψος ΑΗ θα είναι και διάμεσος, άρα ΘΗ = ΗΕ και ΘΕ = 2ΘΗ.

Για το τμήμα ΜΕ έχουμε: ΜΕ = ΜΘ + ΘΕ = ΜΘ + 2ΘΗ (1).

Άρα λόγω της (1) έχουμε: ΜΘ + ΜΕ = ΜΘ + ΜΘ + 2ΘΗ = 2ΜΘ + 2ΘΗ = 2(ΜΘ + ΘΗ) = 2ΜΗ.

Επιπλέον είναι ΑΔ = ΜΗ διότι είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΔΜΗΑ από το α) ερώτημα, επομένως ΜΘ + ΜΕ = 2ΑΔ.