16097

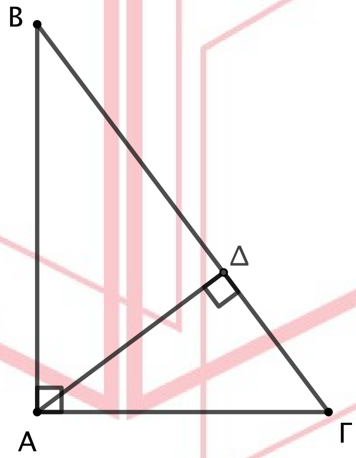
ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.

ii. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Στο σχήμα, η προβολή της πλευράς ΑΒ στην υποτείνουσα ΒΓ είναι το τμήμα ΓΔ.



iv. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

v. Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

(Μονάδες 15)

16097-Λύση

ΛΥΣΗ

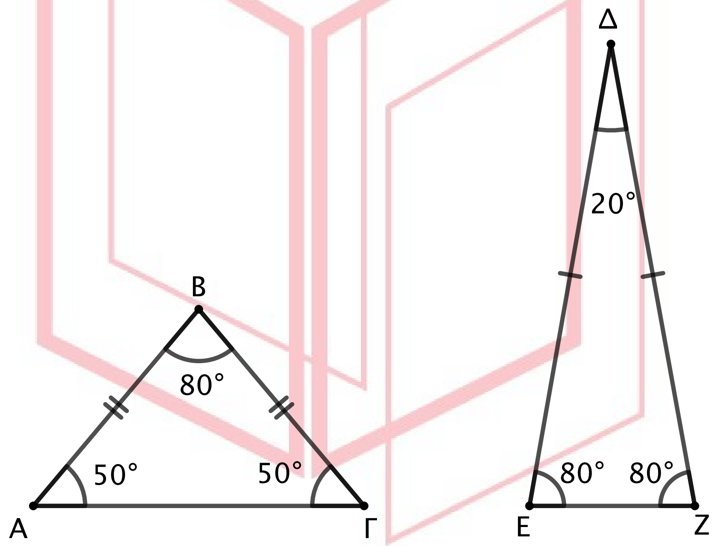
α)

i. Σωστό

Πόρισμα, σελίδα 15 σχολικό βιβλίο.

ii. Λάθος

Για παράδειγμα, τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΒΓ) και ΕΔΖ (ΕΔ = ΔΖ) του σχήματος έχουν $\hat{B} = \hat{E} = 80^{o}$. Ωστόσο, δεν είναι όμοια, αφού δεν έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.



iii. Λάθος

Η προβολή της πλευράς ΑΒ στην υποτείνουσα ΒΓ είναι το τμήμα ΒΔ.

iv. Λάθος

Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

v. Σωστό

Θεώρημα Ι, σελίδα 91 σχολικό βιβλίο.

β) §10.3, Θεώρημα Ι (απόδειξη), σελίδα 72 σχολικό βιβλίο (Σχήμα 7).

16818

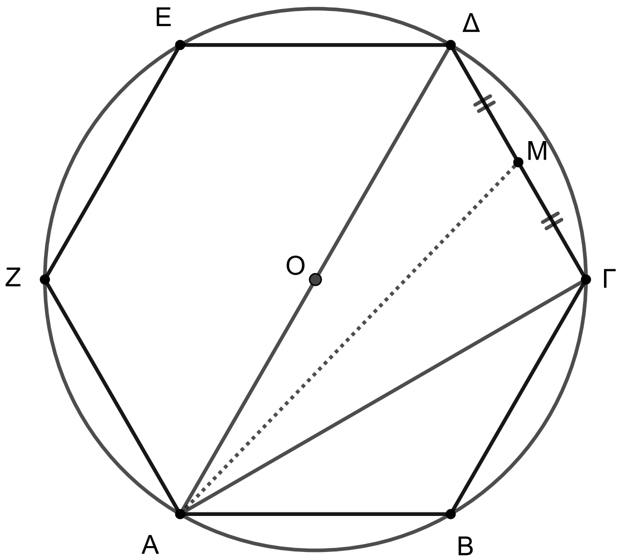
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ και ΑΜ, όπου το σημείο Μ είναι το μέσο του ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

β) ΑΓ = $R \cdot \sqrt{3}$ (Μονάδες 9)

γ) (ΑΜΓ) = $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ (Μονάδες 9)



16818-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Ο,R) και ισχύει ΑΔ = 2R. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΔ αφού η γωνία $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

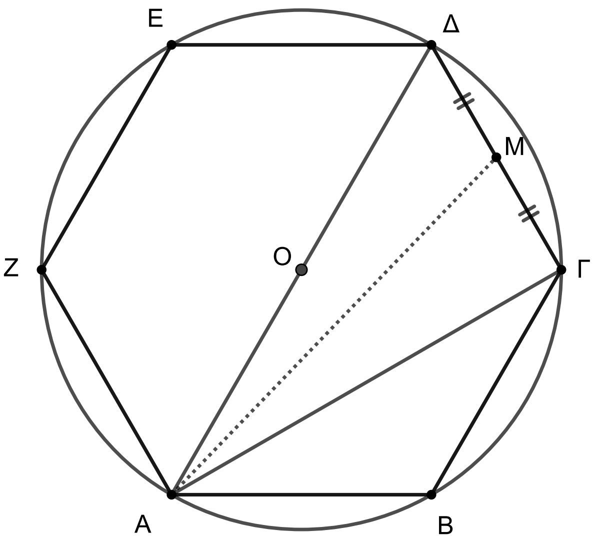
β) Η κάθετη πλευρά ΓΔ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ ισούται με λ_6=R. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε: $A\Delta^2 = A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$ ή

$A\Gamma^2 = A\Delta^2 - \Gamma\Delta^2$ ή $A\Gamma^2 = (2R)^2 - R^2$ ή

$A\Gamma^2 = 4R^2 - R^2$ ή $A\Gamma^2 = 3R^2$ ή $A\Gamma = R \cdot \sqrt{3}$.

γ) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΓΜ ισούται με:

(ΑΓΜ)= $\frac{1}{2} \cdot \mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{\Gamma M} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{R} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\mathrm{R}}{2} = \frac{\mathrm{R}^2\sqrt{3}}{4}$



16820

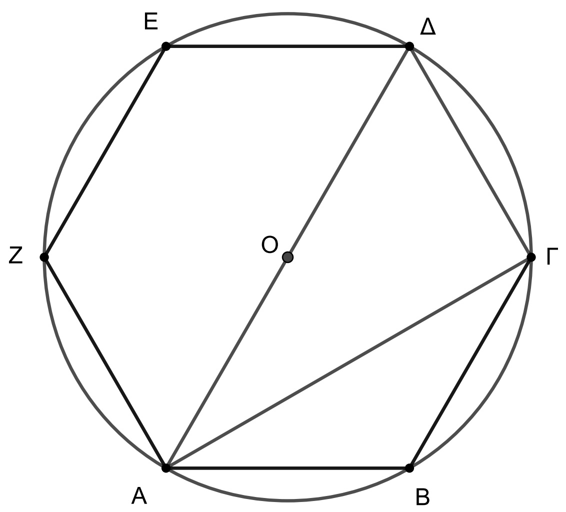
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε το τμήμα ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο (Μονάδες 7)

β) ΑΓ = $R \cdot \sqrt{3}$ (Μονάδες 9)

γ) (ΑΒΓΔΕΖ) = $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ (Μονάδες 9)



16820-Λύση

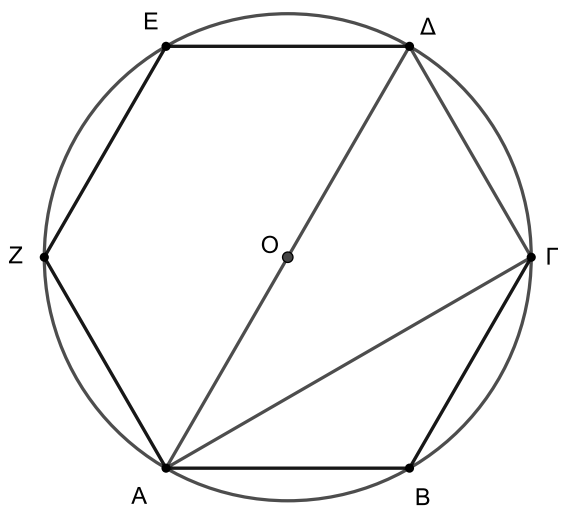
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Φέρουμε το τμήμα ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο (Μονάδες 7)

β) ΑΓ = $R \cdot \sqrt{3}$ (Μονάδες 9)

γ) (ΑΒΓΔΕΖ) = $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ (Μονάδες 9)



16928

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος με μήκος 10.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος P_3 ενός ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον παραπάνω κύκλο είναι ίση με $\frac{15\cdot\sqrt{3}}{\pi}$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο P_6 κανονικού εξαγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο. (Μονάδες 08)

γ) Έστω ένα κανονικό δωδεκάγωνο με περίμετρο P_{12} και ένα κανονικό εικοσιτετράγωνο με περίμετρο P_{24} που είναι εγγεγραμμένα στον παραπάνω κύκλο. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{30}{\pi}$, $\frac{15\sqrt{3}}{\pi}$, P_{12} , P_{24} και 10. (Μονάδες 07)

16928-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αν είναι R η ακτίνα του κύκλου μήκους $L=10$, τότε:

$$L=10 \text{ ή } 2\pi R=10 \text{ ή } R=\frac{10}{2\pi} \text{ ή } R=\frac{5}{\pi}$$

Η πλευρά λ_3 ενός ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι $\lambda_3=R\sqrt{3}$.

Συνεπώς η περίμετρός του είναι $P_3=3\cdot\lambda_3=3R\sqrt{3}$.

Επομένως, η περίμετρος του ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο μήκους 10 είναι $P_3=3\cdot\frac{5}{\pi}\cdot\sqrt{3}=\frac{15\sqrt{3}}{\pi}$.

β) Η πλευρά λ_6 του κανονικού εξαγώνου είναι $\lambda_6=R$, όπου R είναι η ακτίνα του κύκλου.

Επομένως $\lambda_6=\frac{5}{\pi}$. Η περίμετρος του κανονικού εξαγώνου είναι $P_6=6\cdot\lambda_6=6\cdot\frac{5}{\pi}=\frac{30}{\pi}$.

γ) Θεωρούμε τα κανονικά πολύγωνα που είναι εγγεγραμμένα στον κύκλο με μήκος 10. Γνωρίζουμε ότι η περίμετρος κάθε τέτοιου κανονικού πολυγώνου είναι μικρότερη από το μήκος του κύκλου στον οποίο είναι εγγεγραμμένο, δηλαδή του 10. Επίσης, εφόσον το πλήθος των πλευρών διπλασιάζεται η τιμή της περιμέτρου είναι όλο και μεγαλύτερη, αλλά παραμένει μικρότερη από το 10.

Άρα $P_3<P_6<P_{12}<P_{24}<10$ ή $\frac{15\sqrt{3}}{\pi}<\frac{30}{\pi}<P_{12}<P_{24}<10$.

17600

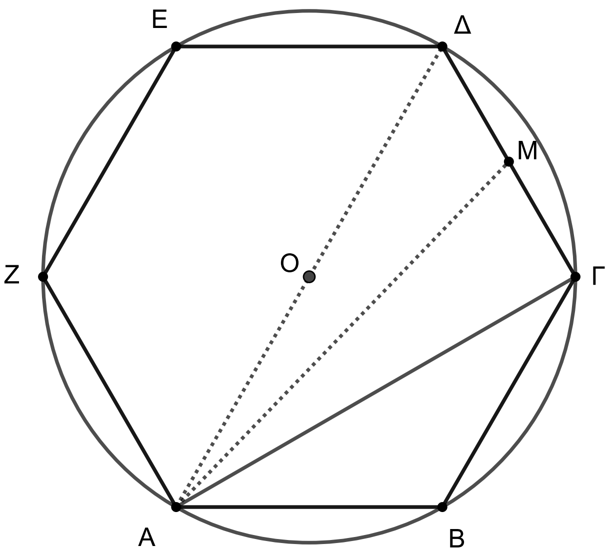
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ, ΑΔ και ΑΜ, όπου το σημείο Μ είναι το μέσο του ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) (ΑΒΓΔΕΖ) = $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ (Μονάδες 7)

β) (ΑΜΓ) = $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ (Μονάδες 6)

γ) (ΑΜΔΕΖ) = $R^2\sqrt{3}$ (Μονάδες 12)



17600-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R και η πλευρά του είναι $λ_6$ = R. Το εμβαδόν κανονικού εξαγώνου δίνεται από τον τύπο:

$E_6 = \frac{1}{2} \cdot P_6 \cdot α_6$, όπου P_6 η περίμετρος του κανονικού εξαγώνου, άρα $P_6 = 6\,λ_6 = 6\,R$

και $α_6$ το απόστημα του κανονικού εξαγώνου, δηλαδή $α_6 = \frac{R \cdot \sqrt{3}}{2}$. Το εμβαδόν θα ισούται με: (ΑΒΓΔΕΖ) $= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot λ_6 \cdot α_6 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot R \cdot \frac{R \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

β) Η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Ο,R) και ισχύει ΑΔ = 2R. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΔ αφού η γωνία Γ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Η κάθετη πλευρά ΓΔ ισούται με $λ_6$=R. Από πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $AΔ^2 = AΓ^2 + ΓΔ^2$ ή $AΓ^2 = AΔ^2 - ΓΔ^2$ ή $AΓ^2 = (2R)^2 - R^2$ ή $AΓ^2 = 4\,R^2 - R^2$ ή $AΓ^2 = 3\,R^2$ ή $AΓ = R \cdot \sqrt{3}$. Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ ισούται με: (ΑΓΔ)$= \frac{1}{2} \cdot AΓ \cdot ΓΔ = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \sqrt{3} \cdot R = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$

Η ΑΜ διάμεσος του τριγώνου ΑΓΔ συνεπώς ξέρουμε ότι χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, δηλαδή: (ΑΜΔ) = (ΑΜΓ) $= \frac{(AΓΔ)}{2} = \frac{\frac{R^2\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

γ) (ΑΜΔΕΖ) = (ΑΔΕΖ) + (ΑΜΔ) Αλλά το εμβαδόν του ΑΔΕΖ ισούται με το μισό του εμβαδού του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ, δηλαδή (ΑΔΕΖ) $= \frac{(ΑΒΓΔΕΖ)}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

και από το β) έχουμε: (ΑΜΔ) $= \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$,

(ΑΜΔΕΖ) = (ΑΔΕΖ) + (ΑΜΔ) $= \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\,R^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$

18043

ΘΕΜΑ 4

Σε κύκλο (Ο,ρ) θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Η πλευρά ΑΔ είναι ίση με την πλευρά λ_6 κανονικού εξάγωνου εγγεγραμμένου στον κύκλο.

α) Αν η πλευρά ΑΒ ισούται με την πλευρά λ_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο και το τόξο ΒΓ = 120^o :

i. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΓΔ ως συνάρτηση της ακτίνας.

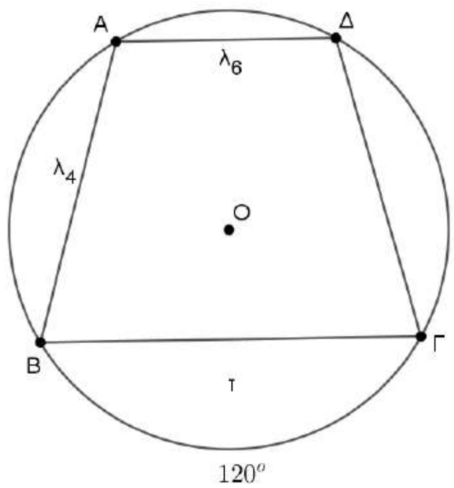
(Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος που περικλείεται από την κυρτή γωνία $B\hat{O}\Gamma$.

(Μονάδες 10)

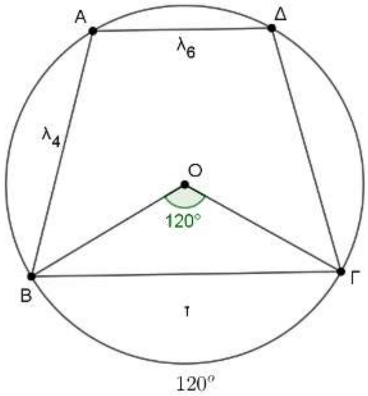
β) Κρατάμε τα σημεία Α και Δ σταθερά και μετακινούμε την χορδή ΒΓ παράλληλα προς την ΑΔ ώστε να διέρχεται από το Ο. Ποιο θα είναι το μήκος του τόξου ΑΒ;

(Μονάδες 07)



18043-Λύση

ΛΥΣΗ



α)

i. ΑΒ = λ_4, επομένως το τόξο ΑΒ = $\frac{360^o}{4}=90^o$ γιατί αντιστοιχεί σε τόξο τετραγώνου.

ΑΔ = λ_6, επομένως το τόξο ΑΔ = $\frac{360^o}{6}=60^o$ γιατί αντιστοιχεί σε τόξο κανονικού εξάγωνου.

Επομένως $\widehat{\Delta\Gamma}=360^o-\widehat{AB}-\widehat{B\Gamma}-\widehat{A\Delta}=360^o-90^o-120^o-60^o$ = 90^o.

Επειδή το τόξο ΔΓ είναι 90^o, η χορδή ΔΓ = λ_4, δηλαδή ισούται με $\rho\sqrt{2}$.

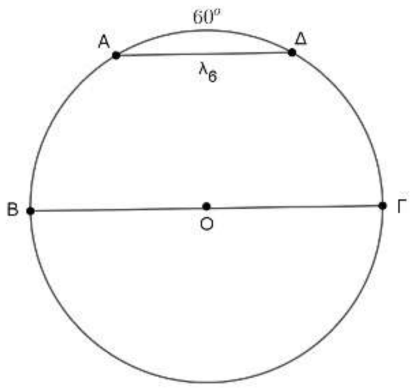
ii. Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος (τ) θα βρεθεί αν από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $\widehat{OB\Gamma}$ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου (ΟΒΓ).

($\widehat{OB\Gamma}$)= $\frac{\pi\rho^2 120^o}{360^o}=\frac{\pi\rho^2}{3}$ (1)

(ΟΒΓ) = $\frac{1}{2}OB\cdot O\Gamma\cdot \eta\mu 120^o=\frac{1}{2}\rho\cdot\rho\cdot\eta\mu 60^o=\frac{1}{2}\rho\cdot\rho\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\rho^2\sqrt{3}}{4}$ (2)

Οπότε: (τ) = $\frac{\pi\rho^2}{3}-\frac{\rho^2\sqrt{3}}{4}$

β)



Αφού η ΒΓ διέρχεται από το Ο, τότε θα είναι διάμετρος παράλληλη στην ΑΔ.

18043-Λύση

Τα τόξα $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ θα είναι ίσα γιατί περιέχονται μεταξύ παραλλήλων χορδών.

$\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{A\Delta} + \overset{\frown}{\Delta\Gamma} = 180^o$ ή $2\overset{\frown}{BA} + 60^o = 180^o$ ή $\overset{\frown}{BA} = \frac{180^o - 60^o}{2} = 60^o$.

Άρα το μήκος του τόξου AB θα είναι:

$$L_{\overset{\frown}{AB}} = \pi\rho\frac{\mu}{180^o} = \pi\rho\frac{60^o}{180^o} = \frac{\pi\rho}{3}$$

18097

ΘΕΜΑ 2

Τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R, όπως φαίνεται στο σχήμα.

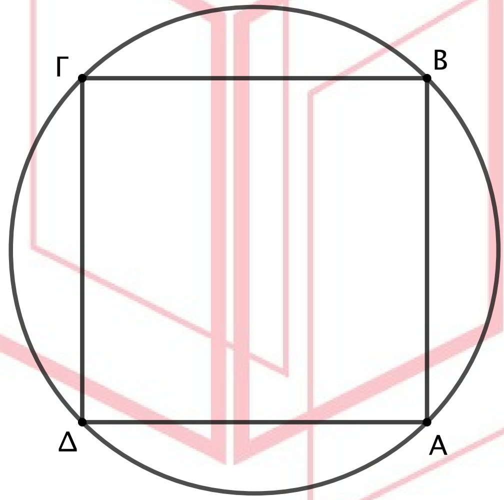
Αν το εμβαδόν του τετραγώνου είναι ίσο με 4, τότε:

α) Να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου.

(Μονάδες 13)

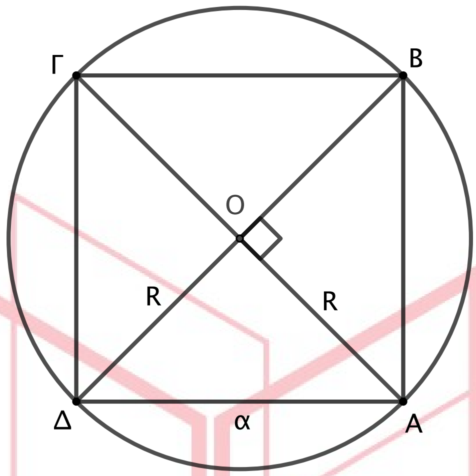
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του τετραγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι ίσο με $2\pi - 4$.

(Μονάδες 12)



18097-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του τετραγώνου είναι κάθετες και το σημείο τομής τους είναι το κέντρο Ο του περιγεγραμμένου κύκλου. Έστω α η πλευρά του τετραγώνου. Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο τρίγωνο ΟΔΑ έχουμε:

$$\alpha^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$$

Από την υπόθεση, το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E_\tau = \alpha^2 = 4$, οπότε προκύπτει:

$$2R^2 = 4 \text{ ή } R^2 = 2$$

Άρα, $R = \sqrt{2}$.

β) Το εμβαδόν του κύκλου είναι:

$$E_\kappa = \pi R^2 = 2\pi$$

Επομένως, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του τετραγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι:

$$E = E_\kappa - E_\tau = 2\pi - 4$$

18098

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $\alpha = 4$. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα $\rho = 2$ σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του, όπως φαίνεται στο σχήμα.

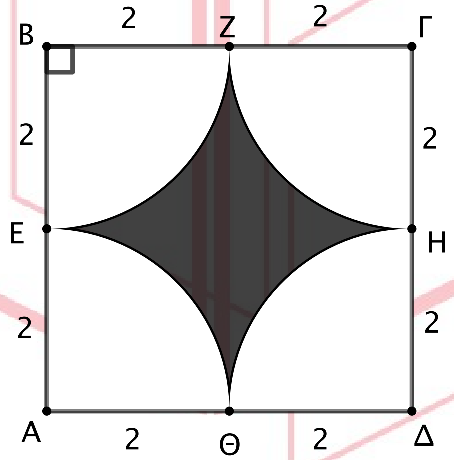
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι

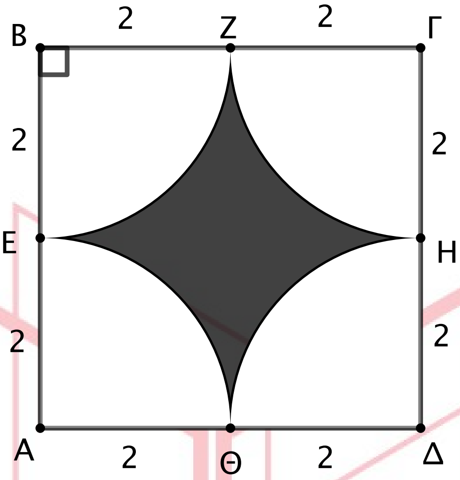
$$E = 4(4 - \pi)$$

(Μονάδες 12)



18098-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Τα τόξα ΘΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ είναι τόξα ίσων κύκλων ακτίνας $\rho = 2$ και αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες 90^o. Επομένως, οι κυκλικοί τομείς $\mathrm{A}\widehat{\Theta\mathrm{E}}$, $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{EZ}}$, $\Gamma\widehat{\mathrm{ZH}}$, $\Delta\widehat{\mathrm{H}\Theta}$ έχουν καθένας εμβαδόν ίσο με

$$(\mathrm{A}\widehat{\Theta\mathrm{E}}) = (\mathrm{B}\widehat{\mathrm{EZ}}) = (\Gamma\widehat{\mathrm{ZH}}) = (\Delta\widehat{\mathrm{H}\Theta}) = \frac{\pi\rho^2 90^o}{360^o} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 90^o}{360^o} = \pi$$

β) Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι

$$E_\tau = \alpha^2 = 4^2 = 16$$

Οπότε, το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι:

$$E = E_\tau - 4(\mathrm{A}\widehat{\Theta\mathrm{E}}) = 16 - 4\pi = 4(4 - \pi)$$

18099

ΘΕΜΑ 2

Κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $R = 2\sqrt{3}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά και το απόστημα του κανονικού εξαγώνου.

(Μονάδες 10)

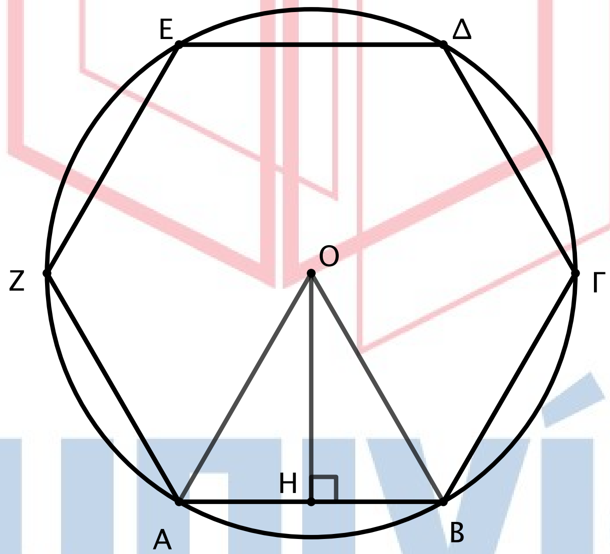
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του κανονικού εξαγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του ισούται με

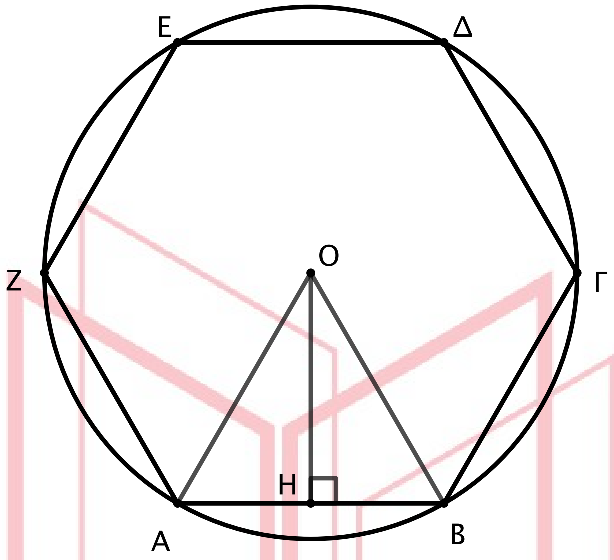
$$E = 6(2\pi - 3\sqrt{3})$$

(Μονάδες 7)



18099-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Για την πλευρά λ_6 και το απόστημα α_6 κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R ισχύουν:

$$\lambda_6 = R$$

$$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Αφού δίνεται ότι $R = 2\sqrt{3}$, τότε θα είναι:

$$\lambda_6 = 2\sqrt{3}$$

$$\alpha_6 = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = 3$$

β) Το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου είναι

$$E_6 = \frac{1}{2}P_6\alpha_6$$

όπου P_6 είναι η περίμετρος.

Οπότε:

$$E_6 = \frac{1}{2}6\lambda_6\alpha_6 = 3 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 18\sqrt{3}$$

γ) Το εμβαδόν του κύκλου είναι

$$E_\kappa = \pi R^2 = \pi(2\sqrt{3})^2 = 12\pi$$

Οπότε, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του κανονικού εξαγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι:

$$E = E_\kappa - E_6 = 12\pi - 18\sqrt{3} = 6(2\pi - 3\sqrt{3})$$

18355

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Στην διαγώνιό του ΑΓ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΕΓ = $\frac{1}{4}$ ΑΓ. Με πλευρά την ΑΕ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΙΘΕ όπως φαίνεται στο σχήμα.

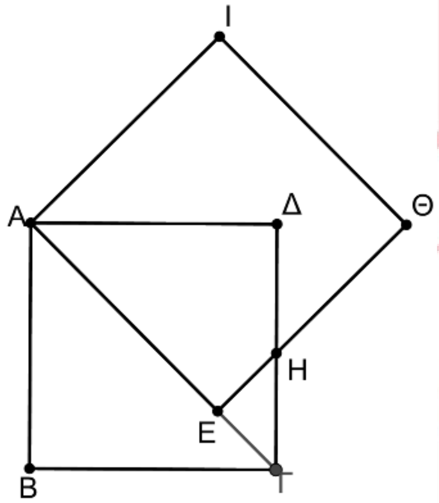
Έστω Η το σημείο τομής της ΔΓ με την ΕΘ.

α)

i. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(\text{ΑΙΘΕ})}{(\text{ΑΒΓΔ})}$. (Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(\text{ΕΓΗ})}{(\text{ΑΓΔ})}$. (Μονάδες 10)

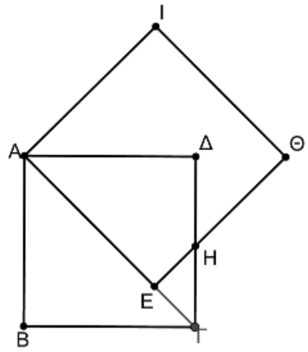
β) Κατασκευάζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του ΑΙΘΕ. Να εξετάσετε αν ο λόγος του εμβαδού του κύκλου αυτού προς το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ εξαρτάται από το μήκος α της πλευράς του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 07)



18355-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



i. ΕΓ = $\frac{1}{4}$ ΑΓ, επομένως ΑΕ = $\frac{3}{4}$ ΑΓ.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2$. Άρα $\mathrm{A\Gamma} = \alpha\sqrt{2}$.

Τα τετράγωνα ΑΙΘΕ και ΑΒΓΔ είναι όμοια, άρα ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

$$\frac{(\mathrm{AI\Theta E})}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})} = \left(\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{3}{4}\alpha\sqrt{2}}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}.$$

ii. Τα τρίγωνα ΕΗΓ και ΑΓΔ έχουν τις γωνίες τους $\hat{\Delta}$ και $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{H}$ ορθές και την γωνία $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{H}$ κοινή. Επομένως είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Οι ανάλογες πλευρές τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{\mathrm{E}} = \hat{\Delta}$	$\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{H} = \mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{H}$	$\mathrm{E}\hat{\mathrm{H}}\Gamma = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΕΗΓ	ΗΓ	ΕΗ	ΕΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΓΔ	ΑΓ	ΑΔ	ΔΓ

Ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, δηλαδή $\frac{(\mathrm{E\Gamma H})}{(\mathrm{A\Gamma\Delta})} = \left(\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\Delta\Gamma}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{4}\mathrm{A\Gamma}}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\frac{\alpha\sqrt{2}}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{8}$.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ: Τα τρίγωνα ΕΗΓ και ΑΓΔ έχουν την γωνία $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{H}$ κοινή. Η διαγώνιος ΑΓ του τετραγώνου διχοτομεί τις γωνίες του, άρα $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{H}$ = 45°. Επομένως

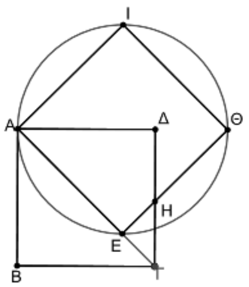
18355-Λύση

τα τρίγωνα ΕΗΓ και ΑΔΓ είναι ορθογώνια και ισοσκελή με ΕΓ = ΕΗ και ΑΔ = ΔΓ. Τα εμβαδά τους θα είναι:

(ΕΓΗ) = $\frac{1}{2}\cdot \mathrm{E\Gamma}\cdot \mathrm{EH} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{E\Gamma}^2$ και (ΑΓΔ) = $\frac{1}{2}\cdot \mathrm{A\Delta}\cdot \Delta\Gamma = \frac{1}{2}\cdot \alpha^2$.

$$\frac{(\mathrm{E\Gamma H})}{(\mathrm{A\Gamma\Delta})} = \frac{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{E\Gamma}^2}{\frac{1}{2}\cdot\alpha^2} = \frac{\left(\frac{1}{4}\cdot \mathrm{A\Gamma}\right)^2}{\alpha^2} = \frac{\frac{1}{16}\left(\alpha\sqrt{2}\right)^2}{\alpha^2} = \frac{1}{16}\frac{\alpha^2\cdot 2}{\alpha^2} = \frac{1}{8}.$$

β)



Σχεδιάζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του ΑΙΘΕ και έστω ρ η ακτίνα του.

Από το α) ερώτημα έχουμε ότι ΑΕ = $\frac{3}{4}$ ΑΓ = $\frac{3}{4}\alpha\sqrt{2}$.

Το τετράγωνο ΑΙΘΕ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο οπότε η πλευρά του ΑΕ είναι πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας ρ, δηλαδή ΑΕ = $\rho\sqrt{2}$.

Άρα $\rho = \frac{\mathrm{AE}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{3}{4}\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\alpha}{4}$.

Επομένως ο ζητούμενος λόγος γίνεται $\frac{\text{εμβαδόν κύκλου}}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})} = \frac{\pi\rho^2}{\alpha^2} = \frac{\pi\left(\frac{3}{4}\alpha\right)^2}{\alpha^2} = \frac{\pi\frac{9}{16}\alpha^2}{\alpha^2} = \pi\frac{9}{16}$,

που είναι ανεξάρτητος του μήκους της πλευράς α του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

20361

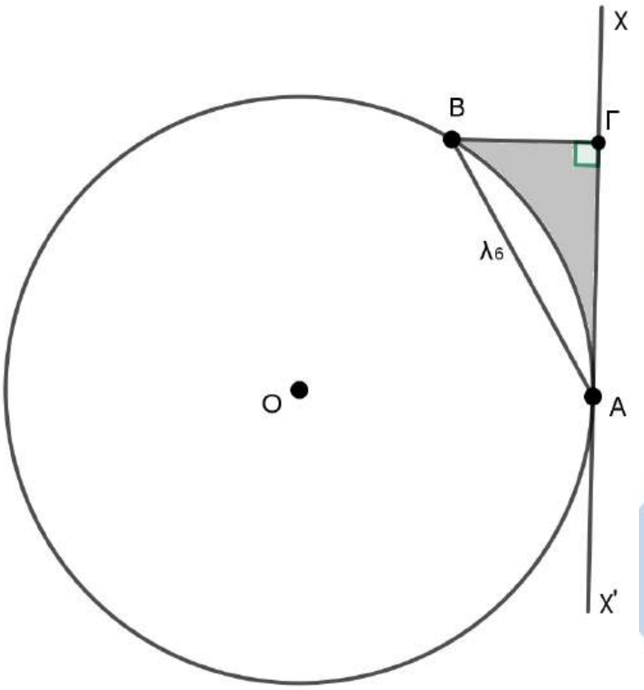
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (O,R) και η χορδή του AB ίση με την πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Στο σημείο A φέρνουμε την εφαπτομένη x’x του κύκλου και από το B την κάθετη στην x’x που την τέμνει στο Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΓ = $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 8)

β) (ΟΑΓΒ) = $\frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$. (Μονάδες 7)

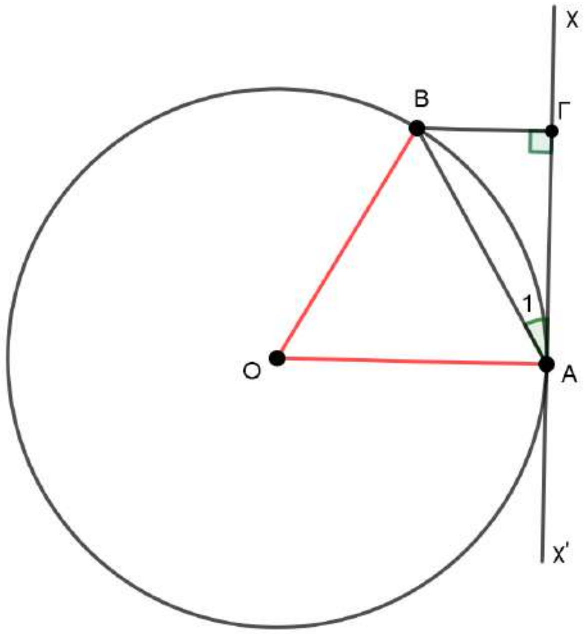
γ) το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα είναι: Ε = $\frac{(9\sqrt{3}-4\pi)R^2}{24}$. (Μονάδες 10)



20361-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



Φέρνουμε τις ακτίνες ΟΑ, ΟΒ.

Από τα δεδομένα, η ΑΒ είναι πλευρά κανονικού 6-γώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο οπότε το τόξο ΑΒ θα ισούται με $\frac{360^0}{6} = 60^0$. Άρα και η επίκεντρη γωνία ΑΟΒ θα ισούται με 60^0 επομένως το τρίγωνο ΟΑΒ θα είναι ισόπλευρο πλευράς R. Δηλαδή ΑΒ = R = ΟΑ = ΟΒ και επιπλέον θα έχει όλες του τις γωνίες ίσες με 60^0.

Η ΟΑ ως ακτίνα που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής, είναι κάθετη στην εφαπτομένη x’x, επομένως η γωνία ΟΑΓ είναι ορθή.

Άρα η γωνία $Α_1$ θα ισούται με 30^0, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΒΓ = $\frac{AB}{2} = \frac{R}{2}$.

Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 - ΒΓ^2$ ή $ΑΓ^2 = R^2 - (\frac{R}{2})^2$ ή $ΑΓ^2 = R^2 - \frac{R^2}{4}$ ή $ΑΓ^2 = \frac{3R^2}{4}$, οπότε $ΑΓ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

β) Λόγω του ερωτήματος (α), οι ΟΑ, ΒΓ ως κάθετες στην x’x, θα είναι μεταξύ τους παράλληλες. Άρα το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι τραπέζιο με βάσεις ΟΑ, ΒΓ και ύψος ΑΓ.

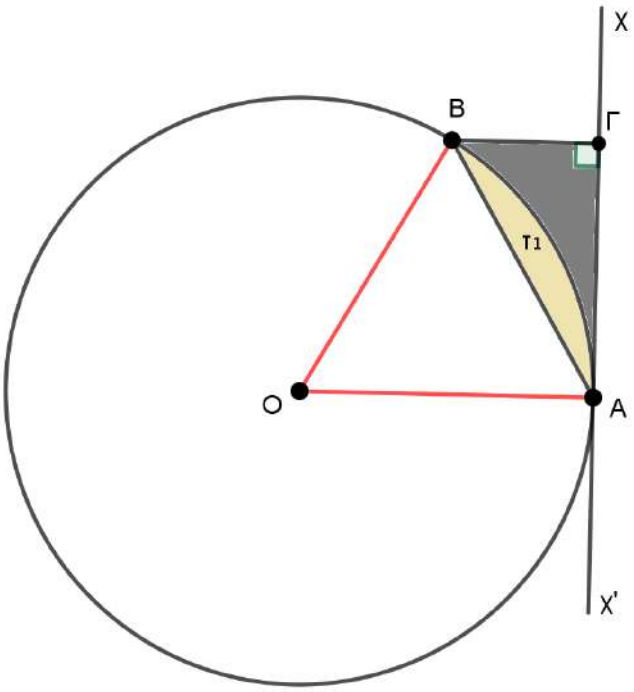
Οπότε $(ΟΑΓΒ) = \frac{ΟΑ+ΒΓ}{2} \cdot ΑΓ = \frac{R+\frac{R}{2}}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{4} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$.

γ) Το ζητούμενο εμβαδό θα βρεθεί αν από το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ, αφαιρέσουμε το εμβαδό του κυκλικού τμήματος $τ_1$. Δηλαδή $Ε = (ΑΒΓ) - (τ_1)$(1).

20361-Λύση

Λόγω του ερωτήματος (α) έχουμε:

(ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}\cdot$ΒΓ$\cdot$ΑΓ = $\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}=\frac{R^2\sqrt{3}}{8}$.



(τ_1) = (Ο $\overset{\frown}{AB}$) − (ΟΑΒ) = $\frac{\pi R^2 \mu}{360}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi R^2\cdot 60^0}{360}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi R^2}{6}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}=\frac{2\pi R^2-3\sqrt{3}R^2}{12}$.

Έτσι η (1) δίνει: Ε = $\frac{R^2\sqrt{3}}{8}-\frac{2\pi R^2-3\sqrt{3}R^2}{12}=\frac{3\sqrt{3}R^2-4\pi R^2+6\sqrt{3}R^2}{24}=\frac{9\sqrt{3}R^2-4\pi R^2}{24}=\frac{(9\sqrt{3}-4\pi)R^2}{24}$.

Εναλλακτικά: Το ζητούμενο εμβαδό είναι: Ε = (ΟΑΓΒ) – (Ο $\overset{\frown}{AB}$).

Λόγω του ερωτήματος (β) το (ΟΑΓΒ) = $\frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$.

Επίσης: (Ο $\overset{\frown}{AB}$) = $\frac{\pi R^2\mu}{360}=\frac{\pi R^2\cdot 60^0}{360}=\frac{\pi R^2}{6}$.

Έτσι Ε = $\frac{3\sqrt{3}R^2}{8}-\frac{\pi R^2}{6}=\frac{9\sqrt{3}R^2-4\pi R^2}{24}=\frac{(9\sqrt{3}-4\pi)R^2}{24}$.

20363

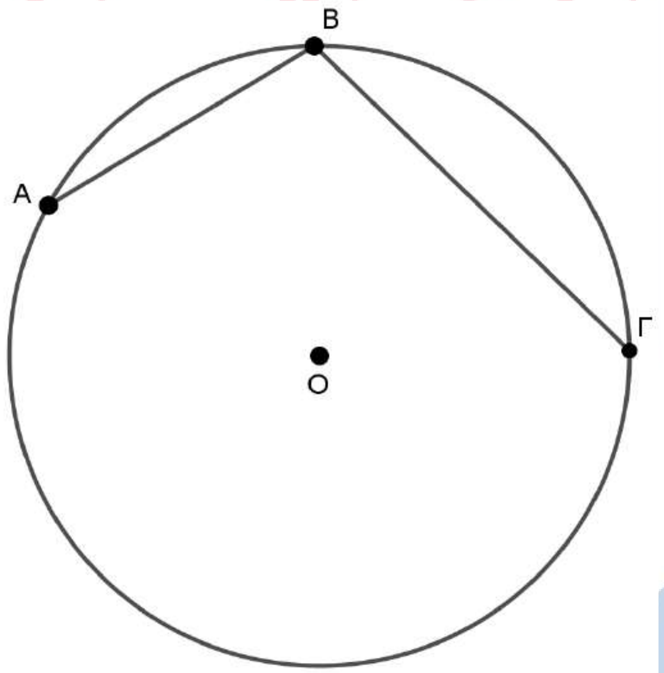
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο κύκλος (Ο,R) και τα σημεία του Α, Β, Γ όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, ώστε ΑΒ= R και ΒΓ= R$\sqrt{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 60^0$ και $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}} = 90^0$. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R, τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$. (Μονάδες 8)

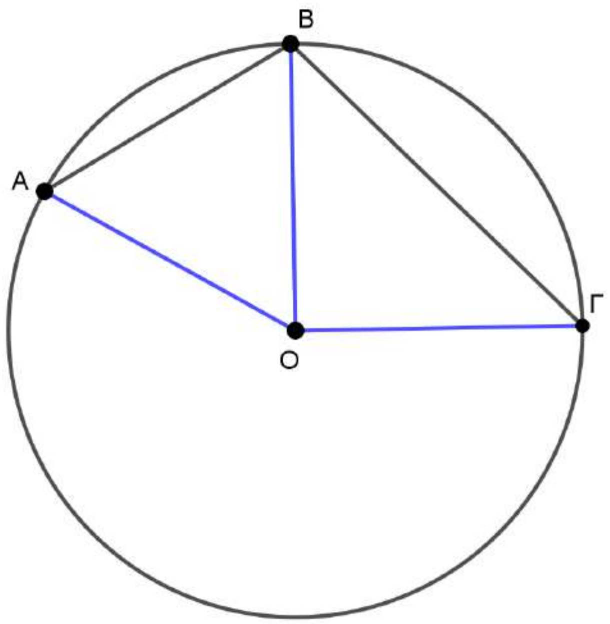
γ) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R, το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ($\mathrm{O}\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$) που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\Gamma$. (Μονάδες 10)



20363-Λύση

ΘΕΜΑ 2

α)



Γνωρίζουμε ότι η πλευρά κανονικού 6-γώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου. Επομένως έχουμε: ΑΒ = R και το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρα (κάθε πλευρά του είναι ίση με R), οπότε η γωνία ΑΟΒ ισούται με 60^0, όσο και το τόξο ΑΒ. Δηλαδή $\overset{\frown}{AB} = 60^0$.

Επίσης γνωρίζουμε ότι η πλευρά 4-γώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι ίση με $R\sqrt{2}$. Επομένως έχουμε: $ΒΓ = R\sqrt{2}$ και το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ορθογώνιο (οι διαγώνιες στο 4-γωνο τέμνονται κάθετα), οπότε η γωνία ΒΟΓ ισούται με 90^0, όσο και το τόξο ΒΓ. Δηλαδή $\overset{\frown}{BΓ} = 90^0$.

β) Λόγω του ερωτήματος (α), το μήκος ℓ_1 του τόξου ΑΒ, ισούται με $\ell_1 = \frac{\pi R \mu}{180}$, όπου $\mu = 60^0$ το μέτρο του τόξου ΑΒ σε μοίρες. Άρα $\ell_1 = \frac{\pi R \cdot 60}{180} = \frac{\pi R}{3}$.

Επίσης, το μήκος ℓ_2 του τόξου ΒΓ, ισούται με $\ell_2 = \frac{\pi R \mu}{180}$, όπου $\mu = 90^0$, το μέτρο του τόξου ΒΓ σε μοίρες. Άρα $\ell_2 = \frac{\pi R \cdot 90}{180} = \frac{\pi R}{2}$.

γ) Λόγω του ερωτήματος (α) είναι: $A\widehat{O}Γ = A\widehat{O}B + B\widehat{O}Γ = 60^0 + 90^0 = 150^0$.

20363-Λύση

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι: $(\mathrm{O}\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}) = \dfrac{\pi R^2 \mu}{360}$, όπου μ = 150^0, το μέτρο του τόξου ΑΓ σε μοίρες. Άρα $(\mathrm{O}\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}) = \dfrac{\pi R^2 \cdot 150}{360} = \dfrac{5\pi R^2}{12}$.

20638

ΘΕΜΑ 2

Δύο κανονικά πολύγωνα έχουν πλήθος πλευρών ν_1 και ν_2 , κεντρικές γωνίες ω_1 και ω_2 και γωνίες φ_1 και φ_2 , αντίστοιχα. Αν ο λόγος του ν_1 προς το ν_2 είναι ίσος με $\frac{1}{2}$, τότε:

α) Να υπολογίσετε τον λόγο των αντίστοιχων κεντρικών γωνιών ω_1 και ω_2 αυτών των πολυγώνων.

(Μονάδες 10)

β) Αν το πλήθος των πλευρών ενός από τα δύο κανονικά πολύγωνα είναι $\nu_1 = 5$, να υπολογίσετε τον λόγο των γωνιών των τους $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$.

(Μονάδες 15)

20638-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Επειδή τα δύο κανονικά πολύγωνα με πλήθος πλευρών ν_1 και ν_2 έχουν λόγο ίσο με $\frac{1}{2}$, ισχύει $\frac{\nu_1}{\nu_2}=\frac{1}{2}$ ή $\nu_2=2\nu_1$, τότε ο λόγος των αντίστοιχων κεντρικών γωνιών ω_1 και ω_2 αυτών των πολυγώνων είναι:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{\frac{360^o}{\nu_1}}{\frac{360^o}{\nu_2}}=\frac{360^o\cdot\nu_2}{360^o\cdot\nu_1}=\frac{\nu_2}{\nu_1}=\frac{2\nu_1}{\nu_1}=2$$

β) Επειδή $\nu_2=2\nu_1$ και $\nu_1=5$, τότε το πλήθος των πλευρών ν_2 του άλλου κανονικού πολυγώνου είναι: $\nu_2=2\nu_1=2\cdot5=10$, τότε ο λόγος των γωνιών τους $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ είναι:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2}=\frac{180^o-\frac{360^o}{\nu_1}}{180^o-\frac{360^o}{\nu_2}}=\frac{180^o-\frac{360^o}{5}}{180^o-\frac{360^o}{10}}=\frac{108^o}{144^o}=\frac{3}{4}$$

20672

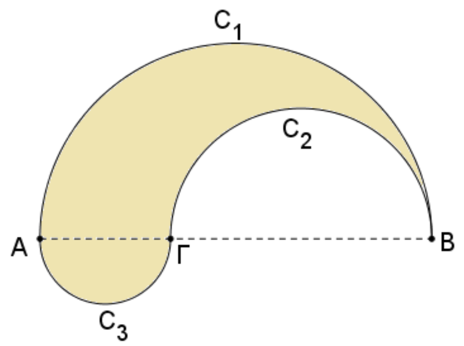
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $AB = 6$, και σημείο του Γ, ώστε $BΓ = 4$. Στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΒ σχεδιάζουμε τα ημικύκλια C_1 και C_2 με διαμέτρους ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα και στο άλλο ημιεπίπεδο σχεδιάζουμε ημικύκλιο C_3 με διάμετρο ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των ημικυκλίων C_1, C_2 και C_3 είναι $\frac{9\pi}{2}$, 2π και $\frac{\pi}{2}$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου. (Μονάδες 10)



20672-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η ακτίνα του ημικυκλίου C_1 είναι $R_1 = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$ και το εμβαδόν του ισούται με

$$E_1 = \frac{\pi R_1^2}{2} = \frac{9\pi}{2}.$$

Η ακτίνα του ημικυκλίου C_2 είναι $R_2 = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4}{2} = 2$ και το εμβαδόν του ισούται με

$$E_2 = \frac{\pi R_2^2}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi\,.$$

Η ακτίνα του ημικυκλίου C_3 είναι $R_3 = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{2}{2} = 1$ και το εμβαδόν του ισούται με

$$E_3 = \frac{\pi R_3^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

β) Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου ισούται με

$$E_1 - E_2 + E_3 = \frac{9\pi}{2} - \frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{6\pi}{2} = 3\pi.$$

21069

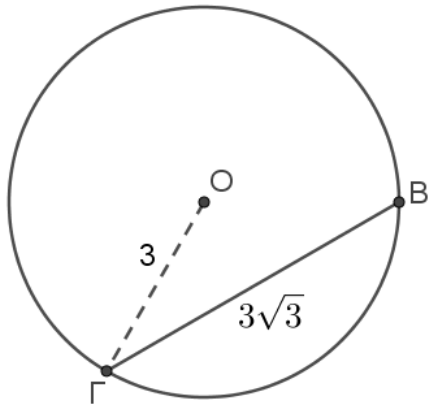
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ = 3. Θεωρούμε την χορδή ΒΓ = $3\sqrt{3}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{ΒΓ}$ είναι 120^o. (Μονάδες 08)

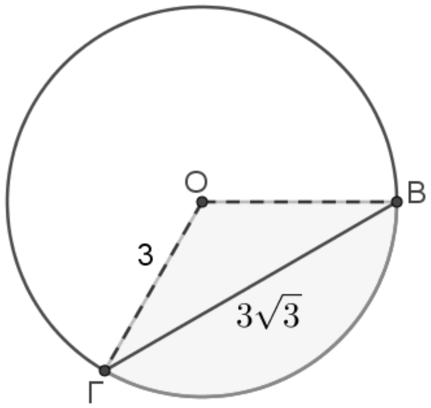
β) Να υπολογισθεί το μήκος του κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{ΒΓ}$. (Μονάδες 08)

γ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κυκλικού τομέα Ο $\overset{\frown}{ΒΓ}$. (Μονάδες 09)



21069-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Το μήκος της χορδής ΒΓ είναι ΒΓ = 3 $\sqrt{3}$ = ρ $\sqrt{3}$, επομένως πρόκειται για πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Άρα, το μέτρο του κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{ΒΓ}$ θα είναι 120°.

β) Το μήκος ενός τόξου μ° ισούται με $\frac{\pi\rho\mu^o}{180^o}$. Για το κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$ θα έχουμε ότι το μήκος του θα είναι $\frac{\pi\cdot 3\cdot 120^o}{180^o}=2\pi$.

γ) Το εμβαδόν κυκλικού τομέα μ° ισούται με $\pi\rho^2\frac{\mu^o}{360^o}$.

Οπότε, το εμβαδόν του κυκλικού τομέα Ο $\overset{\frown}{ΒΓ}$ θα είναι ίσο με $\pi\rho^2\frac{\mu^o}{360^o}=\pi\cdot 3^2\frac{120^o}{360^o}=3\pi$.

21075

ΘΕΜΑ 2

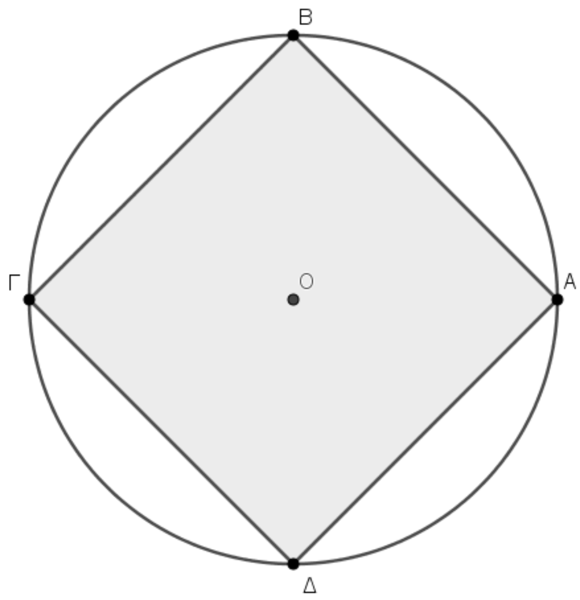
Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο, ακτίνα ρ και εμβαδόν ίσο με 16π.

α) Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου. (Μονάδες 07)

β) Αν η ακτίνα ρ του κύκλου είναι 4 να υπολογίσετε:

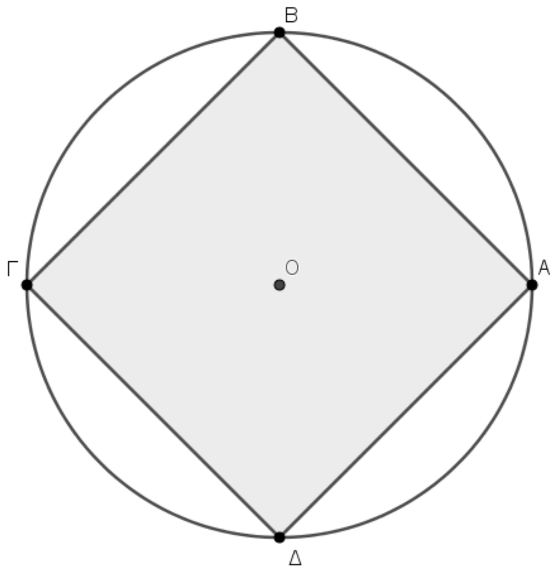
i. Την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον κύκλο. (Μονάδες 09)

ii. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο τετράγωνο και στον κύκλο. (Μονάδες 09)



21075-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Το εμβαδόν του κύκλου δίνεται από τον τύπο Ε = $\pi\rho^2$. Επομένως $16\pi = \pi\rho^2$, άρα ρ = 4.

β)

i. Η πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με ακτίνα ρ ισούται με $\rho\sqrt{2}$. Επομένως για ρ = 4 έχουμε ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι ΑΒ = $\rho\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

ii. Το εμβαδόν του κύκλου είναι 16π, ενώ το εμβαδόν του τετραγώνου είναι Ε = $ΑΒ^2$ = $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 16 \cdot 2 = 32$. Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το τετράγωνο θα είναι ίσο με 16π – 32.

21103

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α και με διαμέτρους τις ΒΓ και ΒΑ φτιάχνουμε εξωτερικά του τετραγώνου ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα.

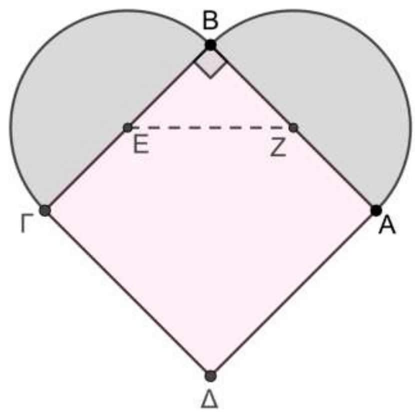
α) Να αποδείξετε ότι το μήκος κάθε ημικυκλίου ισούται με π·α. (Μονάδες 07)

β)

i. Αν η περίμετρος της καρδιάς είναι 2π+4, να υπολογίσετε το α. (Μονάδες 06)

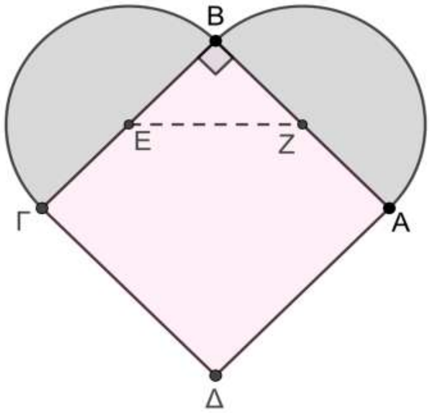
ii. Αν α = 1 να βρείτε το μήκος του τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο ημικυκλίων. (Μονάδες 06)

γ) Αν (τ) είναι το άθροισμα των εμβαδών των δυο ημικυκλίων να συγκρίνετε τον λόγο $\frac{(\tau)}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}$ με την μονάδα. Να αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 06)



21103-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Το κάθε ημικύκλιο έχει ακτίνα ρ ίση με το μισό της πλευράς του τετραγώνου, δηλαδή

ρ = $\frac{2\alpha}{2}=\alpha$. Το μήκος τόξου μ° θα είναι $\frac{\pi\rho\mu^o}{180^o}$, δηλαδή $\frac{\pi\alpha 180^o}{180^o}=\pi\alpha$.

β)

i. Η περίμετρος της καρδιάς αποτελείται από τα δύο ημικύκλια και τις πλευρές ΑΔ και ΔΓ. Από το α) ερώτημα το κάθε ημικύκλιο έχει μήκος πα οπότε η περίμετρος θα ισούται με πα + πα + 2α + 2α = 2πα + 4α. Από υπόθεση έχουμε ότι η περίμετρος είναι 2π + 4, οπότε 2πα + 4α = 2π + 4 ή (2π + 4)α = 2π + 4, άρα α = 1.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΖ ($\widehat{B}=90^o$) έχουμε ΒΕ = ΒΖ = α. Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα: $EZ^2=BE^2+BZ^2=\alpha^2+\alpha^2=2\alpha^2$ ή $EZ=\alpha\sqrt{2}$. Για α = 1 έχουμε $EZ=\sqrt{2}$.

γ) Τα δύο ημικύκλια είναι ίσα γιατί έχουν την ίδια ακτίνα α, οπότε το άθροισμά τους θα είναι ένας κυκλικός δίσκος με ακτίνα α. Το εμβαδόν του θα είναι (τ) = $\pi\rho^2=\pi\alpha^2$.

Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει εμβαδόν $(AB)^2=(2\alpha)^2=4\alpha^2$.

Ο ζητούμενος λόγος $\frac{(\tau)}{(AB\Gamma\Delta)}=\frac{\pi\alpha^2}{4\alpha^2}=\frac{\pi}{4}$.

Επειδή π < 4 το κλάσμα $\frac{\pi}{4}$ θα είναι μικρότερο της μονάδας, το ίδιο και ο ζητούμενος λόγος.

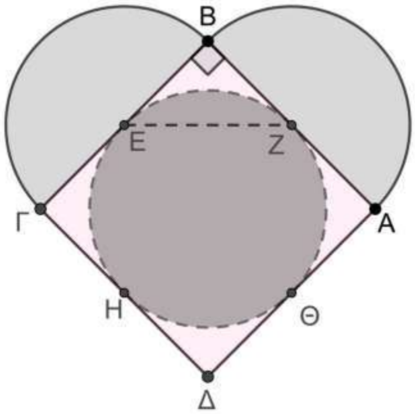
Εναλλακτική λύση γ).

Το εμβαδόν των δύο ημικυκλίων θα είναι ίσο με το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου του τετραγώνου, διότι τα ημικύκλια έχουν ακτίνα α και ο εγγεγραμμένος στο τετράγωνο κύκλος έχει και αυτός ακτίνα α (η διάμετρος ισούται με 2α). Επειδή ο κύκλος είναι

21103-Λύση

εγγεγραμμένος στο τετράγωνο (σχήμα) το εμβαδόν του είναι μικρότερο από αυτό του τετραγώνου, οπότε το κλάσμα

$$\frac{(\tau)}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}<1$$



21121

ΘΕΜΑ 2

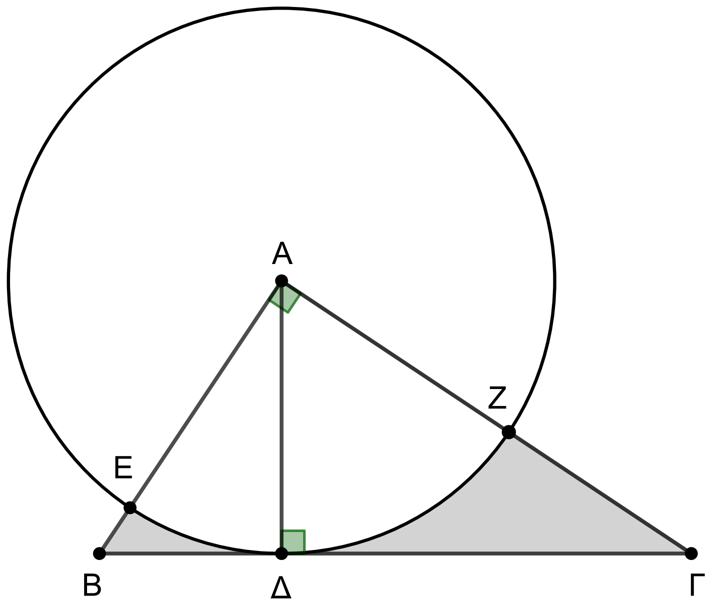
Στο παρακάτω σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχει υποτείνουσα $ΒΓ = 13$ και αντίστοιχο ύψος $ΑΔ = 6$. Με κέντρο το $Α$ και ακτίνα $ΑΔ$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$, στα σημεία $Ε$ και $Ζ$ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά:

i. του κυκλικού τομέα $\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{E\Delta Z}}$, (Μονάδες 9)

ii. του σκιασμένου χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου $ΑΒΓ$ και εξωτερικά του κύκλου, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. (Μονάδες 8)



21121-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι $ΒΓ = 13$ και $ΑΔ = 6$, επομένως το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot ΒΓ \cdot ΑΔ \quad \text{ή} \quad (ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 \quad \text{ή} \quad (ΑΒΓ) = 39.$$

β) i) Ο κυκλικός τομέας $\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{E}\Delta\mathrm{Z}}$ είναι γωνίας $\mu = \hat{A} = 90°$ και ακτίνας $R = \mathrm{A}\Delta = 6$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$$\left(\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{E}\Delta\mathrm{Z}}\right) = \frac{\pi R^2 \mu}{360°} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 90°}{360°} = 9\pi \,.$$

ii) Το εμβαδόν E του χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου $ΑΒΓ$ και εξωτερικά του κύκλου είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών του τριγώνου $ΑΒΓ$ και του κυκλικού τομέα $\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{E}\Delta\mathrm{Z}}$. Επομένως είναι

$$E = (ΑΒΓ) - \left(\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{E}\Delta\mathrm{Z}}\right) = 39 - 9\pi \,.$$

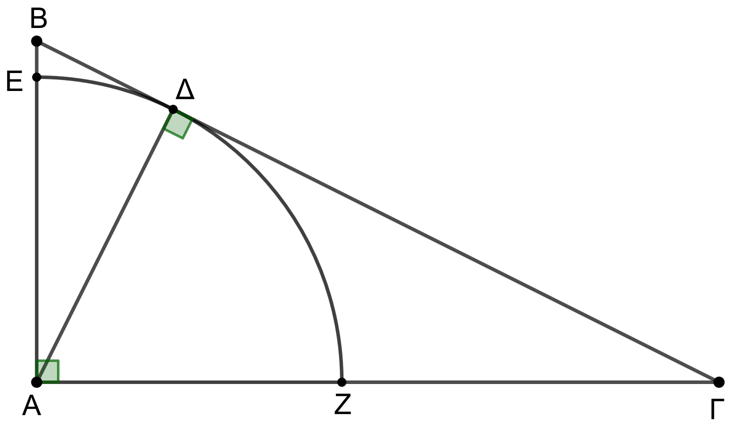
21122

ΘΕΜΑ 2

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ του σχήματος, το $Δ$ είναι η προβολή της κορυφής $Α$ στην υποτείνουσα $ΒΓ$ και είναι $ΒΔ = 1$ και $ΔΓ = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = 2$. (Μονάδες 12)

β) Με κέντρο το $Α$ και ακτίνα $ΑΔ$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$, στα σημεία $Ε$ και $Ζ$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου $\widehat{ΕΔΖ}$. (Μονάδες 13)



21122-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα. Επομένως είναι

$AΔ^2 = BΔ \cdot ΔΓ$ ή $AΔ^2 = 1 \cdot 4$ ή $AΔ^2 = 2^2$ ή $AΔ = 2$.

β) Το τόξο $\widehat{\mathrm{EΔZ}}$ είναι $\mu = 90°$ (επειδή $\hat{A} = 90°$) και είναι σε κύκλο ακτίνας $R = AΔ = 2$. Επομένως το μήκος του είναι $l = \frac{\pi R \mu}{180°} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 90°}{180°} = \pi$.

21123

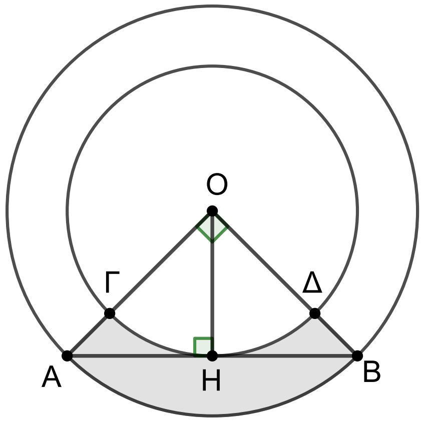
ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο OAB του σχήματος είναι $\mathrm{A\hat{O}B} = 90°$, $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 2$ και το OH είναι το ύψος του από την κορυφή O. Με κέντρο το O και ακτίνες $\mathrm{R} = \mathrm{OA}$ και $\rho = \mathrm{OH}$ γράφουμε δυο ομόκεντρους κύκλους. Ο κύκλος (O, ρ) τέμνει τις OA και OB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{OH} = \sqrt{2}$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των κυκλικών τομέων $\mathrm{O}\,\widehat{\mathrm{AB}}$ και $\mathrm{O}\,\widehat{\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους που περικλείεται από τα τόξα $\widehat{\mathrm{AB}}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ και τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{B\Delta}$. (Μονάδες 5)



21123-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $\mathrm{A\hat{O}B} = 90°$, το ΟΗ είναι το απόστημα τετραγώνου πλευράς ΑΒ, εγγεγραμμένου στον κύκλο $(\mathrm{O, R})$, οπότε $\mathrm{OH} = \dfrac{\mathrm{R}\sqrt{2}}{2}$. Όμως $\mathrm{R} = \mathrm{OA} = 2$, άρα $\mathrm{OH} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2}$ ή $\mathrm{OH} = \sqrt{2}$.

Εναλλακτικά: Επειδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο με $\mathrm{A\hat{O}B} = 90°$ και ισοσκελές με $\mathrm{OA} = \mathrm{OB}$, θα είναι $\mathrm{O\hat{A}H} = 45°$, άρα και το τρίγωνο ΟΑΗ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $\mathrm{AH} = \mathrm{OH}$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα τότε έχουμε

$$\mathrm{AH}^2 + \mathrm{OH}^2 = \mathrm{OA}^2 \text{ ή } 2\mathrm{OH}^2 = 2^2 \text{ ή } \mathrm{OH}^2 = 2 \text{ ή } \mathrm{OH} = \sqrt{2}.$$

β) Ο κυκλικός τομέας $\mathrm{O}\,\widehat{\mathrm{AB}}$ είναι γωνίας $\mu = \mathrm{A\hat{O}B} = 90°$ και ακτίνας $\mathrm{R} = 2$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$$\left(\mathrm{O}\,\widehat{\mathrm{AB}}\right) = \frac{\pi \mathrm{R}^2 \mu}{360°} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 90°}{360°} = \pi.$$

Ο κυκλικός τομέας $\mathrm{O}\,\widehat{\Gamma\Delta}$ είναι γωνίας $\mu = \Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta = 90°$ και ακτίνας $\rho = \mathrm{OH} = \sqrt{2}$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$$\left(\mathrm{O}\,\widehat{\Gamma\Delta}\right) = \frac{\pi \rho^2 \mu}{360°} = \frac{\pi \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot 90°}{360°} = \frac{\pi \cdot 180°}{360°} = \frac{\pi}{2}.$$

γ) Το εμβαδόν Ε του σκιασμένου μέρους, είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των κυκλικών τομέων $\mathrm{O}\,\widehat{\mathrm{AB}}$ και $\mathrm{O}\,\widehat{\Gamma\Delta}$. Επομένως έχουμε

$$\mathrm{E} = \left(\mathrm{O}\,\widehat{\mathrm{AB}}\right) - \left(\mathrm{O}\,\widehat{\Gamma\Delta}\right) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

21127

ΘΕΜΑ 4

Ο κυκλικός δίσκος του παρακάτω σχήματος έχει κέντρο O και ακτίνα R. Έστω AB μια χορδή του κύκλου και M η προβολή του O στην AB. Αν η MO προεκταθεί προς το O, τέμνει τον κύκλο στο σημείο N. Δίνεται ότι $\mathrm{MN} = \frac{3R}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

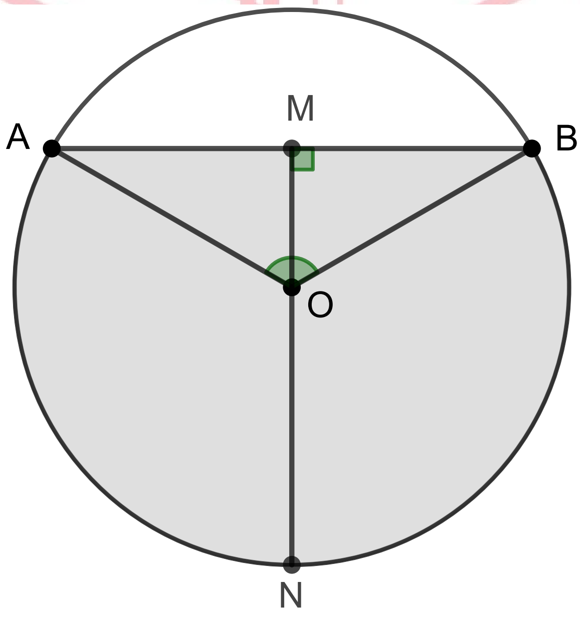
i. $\mathrm{AB} = \mathrm{R}\sqrt{3}$, (Μονάδες 6)

ii. $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{B} = 120°$. (Μονάδες 6)

β) Υποθέστε ότι η διατομή ενός αγωγού μεταφοράς νερού είναι ο κυκλικός δίσκος του σχήματος που έχει δοθεί με $\mathrm{R} = 10$ cm. Η στάθμη του νερού που ρέει στον αγωγό είναι στη χορδή AB και το $\mathrm{MN} = 15$ cm. Να βρείτε:

i. το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους του σχήματος που περικλείεται από την χορδή AB και το τόξο $\widehat{\mathrm{ANB}}$, (Μονάδες 7)

ii. το μήκος του τόξου $\widehat{\mathrm{ANB}}$. (Μονάδες 6)



21127-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Είναι $MN = \frac{3R}{2}$ και $ON = R$, άρα $OM = MN - ON = \frac{3R}{2} - R = \frac{R}{2}$.

Επειδή η AB έχει απόστημα $OM = \frac{R}{2}$, είναι ίση με την πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O, R) οπότε θα είναι $AB = R\sqrt{3}$.

ii) Η γωνία $A\hat{O}B$ είναι ίση με την κεντρική γωνία ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O, R) , άρα θα είναι $A\hat{O}B = \frac{360°}{3} = 120°$.

β) i) Είναι $R = 10$ cm, οπότε $AB = R\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ cm και $OM = \frac{R}{2} = 5$ cm.

Το εμβαδόν του τριγώνου AOB είναι $E_1 = \frac{1}{2} AB \cdot OM = \frac{1}{2} 10\sqrt{3} \cdot 5 = 25\sqrt{3}\, cm^2$.

Ο κυκλικός τομέας $O\,\widehat{\mathrm{ANB}}$ είναι γωνίας $\mu = 360° - A\hat{O}B = 360° - 120° = 240°$ οπότε το εμβαδόν του θα είναι $E_2 = \frac{\pi R^2 \mu}{360°} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 240°}{360°} = \frac{200\pi}{3}\, cm^2$.

Επομένως το εμβαδόν που περικλείεται από την χορδή AB και το τόξο $\widehat{\mathrm{ANB}}$ είναι

$E = E_2 + E_1 = \frac{200\pi}{3} + 25\sqrt{3}\ cm^2$.

Εναλλακτικά: Αν $E\kappa$, $\left(O\,\widehat{\mathrm{AB}}\right)$ και E_1 είναι αντίστοιχα τα εμβαδά του κύκλου, του κυκλικού τομέα γωνίας $A\hat{O}B = 120°$ και του τριγώνου AOB, το εμβαδόν που περικλείεται από την χορδή AB και το τόξο $\widehat{\mathrm{ANB}}$ είναι

$$E = E_\kappa - \left(O\,\widehat{\mathrm{AB}}\right) + E_1 = \pi \cdot 10^2 - \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 120°}{360°} + 25\sqrt{3} = 100\pi - \frac{100\pi}{3} + 25\sqrt{3} = \frac{200\pi}{3} + 25\sqrt{3}\, cm^2.$$

ii) Το τόξο $\widehat{\mathrm{ANB}}$ είναι τόξο $\mu = 240°$ οπότε το μήκος του είναι

$$l = \frac{\pi R \mu}{180°} = \frac{\pi \cdot 10 \cdot 240°}{180°} = \frac{40\pi}{3}\, cm.$$

21138

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα ο κύκλος c_1 έχει κέντρο K και ακτίνα R και ο κύκλος c_2 έχει κέντρο Λ και ακτίνα $\rho = 2$. Οι αποστάσεις των K και Λ από την κοινή χορδή AB των δύο κύκλων είναι $\mathrm{KO} = \sqrt{3}$ και $\Lambda\mathrm{O} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι:

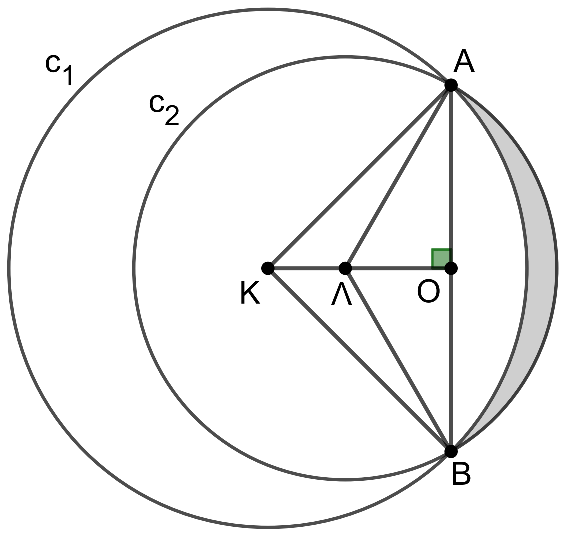
i. $\mathrm{OA} = \sqrt{3}$, (Μονάδες 6)

ii. $\mathrm{R} = \sqrt{6}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα εμβαδά:

i. των κυκλικών τομέων $\mathrm{K}\,\widehat{\mathrm{AB}}$ και $\Lambda\,\widehat{\mathrm{AB}}$, (Μονάδες 8)

ii. του σκιασμένου μηνίσκου του σχήματος. (Μονάδες 5)



21138-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΛ η υποτείνουσα $ΑΛ = ρ = 2$ και η $ΛΟ = 1$, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι $ΟΑ^2 = ΑΛ^2 - ΛΟ^2$ ή $ΟΑ^2 = 2^2 - 1^2 = 3$ ή $ΟΑ = \sqrt{3}$.

ii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ η υποτείνουσα $ΑΚ = R$ και η $ΚΟ = \sqrt{3}$, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα και λόγω του ερωτήματος (i) είναι

$ΑΚ^2 = ΚΟ^2 + ΟΑ^2$ ή $R^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 6$ ή $R = \sqrt{6}$.

β) Η ευθεία ΚΛ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής, άρα το Ο είναι το μέσο της ΑΒ, οπότε $ΑΒ = 2 \cdot ΟΑ$ ή $ΑΒ = 2\sqrt{3}$.

i) Επειδή $ΑΒ = 2\sqrt{3} = \sqrt{12} = \sqrt{2 \cdot 6} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = R\sqrt{2}$, η ΑΒ είναι πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο c_1, άρα η κεντρική του γωνία είναι $Α\widehat{Κ}Β = 90°$.

Εναλλακτικά: Είναι $ΟΚ = ΟΑ = \sqrt{3}$, άρα το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισοσκελές , οπότε $Α\widehat{Κ}Ο = 45°$. Επειδή η ΚΟ διχοτομεί την $Α\widehat{Κ}Β$ είναι $Α\widehat{Κ}Β = 90°$.

Ο κυκλικός τομέας $Κ\overset{\frown}{ΑΒ}$ είναι γωνίας $μ = Α\widehat{Κ}Β = 90°$ και ακτίνας $R = \sqrt{6}$, οπότε το εμβαδόν του είναι $\left(Κ\overset{\frown}{ΑΒ}\right) = \frac{πR^2μ}{360°} = \frac{π \cdot \left(\sqrt{6}\right)^2 \cdot 90°}{360°} = \frac{3π}{2}$.

Επειδή $ΑΒ = 2\sqrt{3} = ρ\sqrt{3}$, η ΑΒ είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο c_2, άρα η κεντρική του γωνία είναι $Α\widehat{Λ}Β = 120°$.

Εναλλακτικά: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΛ η υποτείνουσα $ΑΛ = 2$ και η $ΛΟ = 1 = \frac{ΑΛ}{2}$, άρα $Ο\widehat{Α}Λ = 30°$, οπότε $Α\widehat{Λ}Ο = 60°$. Επειδή η ΛΟ διχοτομεί την $Α\widehat{Λ}Β$ είναι $Α\widehat{Λ}Β = 120°$.

Ο κυκλικός τομέας $Λ\overset{\frown}{ΑΒ}$ είναι γωνίας $μ = Α\widehat{Λ}Β = 120°$ και ακτίνας $ρ = 2$, οπότε το εμβαδόν του είναι $\left(Λ\overset{\frown}{ΑΒ}\right) = \frac{πρ^2μ}{360°} = \frac{π \cdot 2^2 \cdot 120°}{360°} = \frac{4π}{3}$.

ii) Αν (ΚΑΒ) και (ΛΑΒ) είναι τα εμβαδά των τριγώνων ΚΑΒ και ΛΑΒ τότε το εμβαδόν Ε του σκιασμένου μηνίσκου θα είναι $Ε = \left(Λ\overset{\frown}{ΑΒ}\right) - \left(Κ\overset{\frown}{ΑΒ}\right) + (ΚΑΒ) - (ΛΑΒ)$.

Είναι $(ΚΑΒ) = \frac{ΚΑ \cdot ΚΒ}{2} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}{2} = 3$ και $(ΛΑΒ) = \frac{ΑΒ \cdot ΛΟ}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 1}{2} = \sqrt{3}$.

Επίσης από το β)i), $\left(Κ\overset{\frown}{ΑΒ}\right) = \frac{3π}{2}$ και $\left(Λ\overset{\frown}{ΑΒ}\right) = \frac{4π}{3}$, επομένως έχουμε

$Ε = \frac{4π}{3} - \frac{3π}{2} + 3 - \sqrt{3}$ ή $Ε = 3 - \sqrt{3} - \frac{π}{6}$.

21181

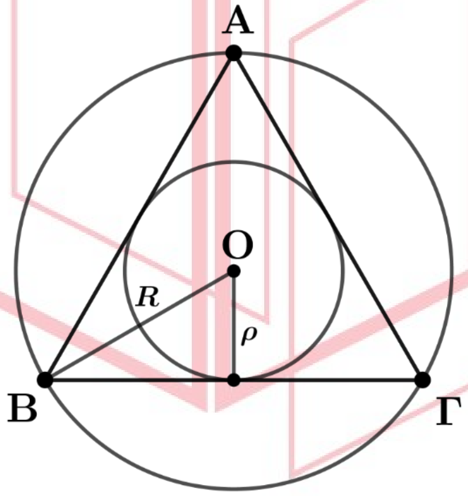
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και περιγεγραμμένο στον κύκλο (O, ρ) όπου ρ το απόστημα του ισοπλεύρου τριγώνου. Αν το απόστημα του ισοπλεύρου τριγώνου είναι 5 να υπολογίσετε:

α) Την ακτίνα R του κύκλου. (Μονάδες 4)

β) Αν R = 10 τότε να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδό του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. (Μονάδες 9)
ii. Το εμβαδό του κυκλικού δακτυλίου που σχηματίζουν ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος στο τρίγωνο ΑΒΓ κύκλος. (Μονάδες 12)



21181-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το απόστημα α_3 του ισοπλεύρου τριγώνου σε κύκλο ακτίνας R είναι: $\alpha_3 = \frac{R}{2}$, επομένως

για $\alpha_3 = 5$ έχουμε:

$$5 = \frac{R}{2} \text{ ή } R = 10$$

β)

i. Το εμβαδό κύκλου ακτίνας R είναι $E = \pi \cdot R^2$. Για R = 10 το εμβαδό E_1 του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου είναι:

$$E_1 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$$

ii. Το εμβαδό E_2 εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $E_2 = \pi \cdot \rho^2$ όπου $\rho = \alpha_3 = 5$, επομένως έχουμε:

$$E_2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$$

Άρα το εμβαδό του κυκλικού δακτυλίου Ε είναι:

$$E = E_1 - E_2 = 100\pi - 25\pi = 75\pi$$

21192

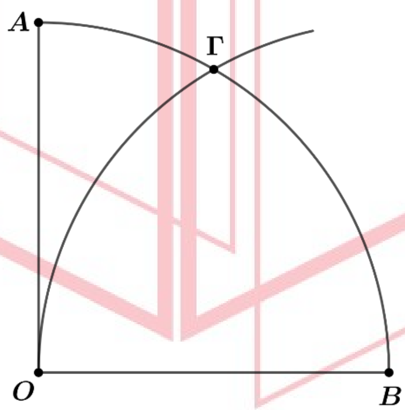
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τεταρτοκύκλιο $\mathrm{O}\widehat{\mathrm{AB}}$ κέντρου Ο και ακτίνας R. Αν ο κύκλος κέντρου B και ακτίνας R τέμνει το τόξο $\widehat{\mathrm{AB}}$ στο σημείο Γ όπως στο σχήμα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο και το μήκος $\ell_{\mathrm{B\Gamma}}$ του τόξου $\widehat{\mathrm{B\Gamma}}$ είναι $\ell_{\widehat{\mathrm{B\Gamma}}}=\frac{\pi\cdot \mathrm{R}}{3}$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το μήκος του τόξου $\widehat{\mathrm{A\Gamma}}$ είναι $\ell_{\widehat{\mathrm{A\Gamma}}}=\frac{\pi\cdot \mathrm{R}}{6}$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ΟΑΓ που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ και τα τόξα $\widehat{\mathrm{A\Gamma}}$ και $\widehat{\mathrm{O\Gamma}}$. (Μονάδες 9)



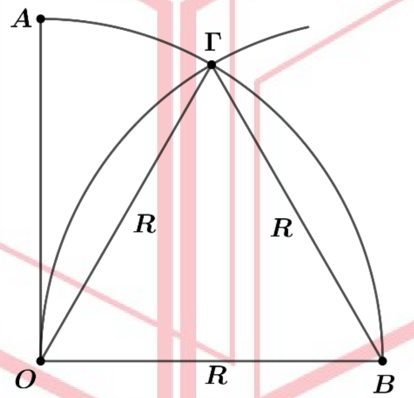
21192-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι ΟΒ = ΟΓ = ΒΓ = R ως ακτίνες των ίσων κύκλων, επομένως το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο οπότε $B\hat{O}\Gamma = 60^o$.

Το μήκος ℓ τόξου μ^o ενός κύκλου με ακτίνα R είναι $\ell = \dfrac{\pi \cdot R \cdot \mu}{180}$, άρα το μήκος του τόξου ΒΓ είναι:

$$\ell_{\widehat{B\Gamma}} = \frac{\pi \cdot R \cdot 60}{180} = \frac{\pi \cdot R}{3}$$



β) Επειδή στο τεταρτοκύκλιο ΟΑΒ η γωνία $A\hat{O}B = 90^o$ έχουμε ότι:

$$A\hat{O}\Gamma = A\hat{O}B - B\hat{O}\Gamma = 90^o - 60^o = 30^o$$

και το μήκος $\ell_{\widehat{A\Gamma}}$ του αντίστοιχου τόξου ΑΓ της γωνίας ΑΟΓ = 30° είναι:

$$\ell_{\widehat{A\Gamma}} = \frac{\pi \cdot R \cdot 30^o}{180^o} = \frac{\pi \cdot R}{6}$$

γ) Επειδή το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο, έχει ίσες γωνίες οπότε τα τόξα ΟΓ και ΒΓ είναι ίσα, ως αντίστοιχα τόξα των ίσων γωνιών $O\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{O}\Gamma$ ίσων κύκλων, συνεπώς από το (α) ερώτημα έχουμε:

$$\ell_{\widehat{O\Gamma}} = \ell_{\widehat{B\Gamma}} = \frac{\pi \cdot R}{3}$$

Η περίμετρος $T_{OA\Gamma}$ του μικτογράμμου τριγώνου ΟΑΓ είναι:

$$T_{OA\Gamma} = OA + \ell_{\widehat{A\Gamma}} + \ell_{\widehat{O\Gamma}} = R + \frac{\pi \cdot R}{6} + \frac{\pi \cdot R}{3} = R \cdot \left(1 + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = R \cdot \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

21193

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα τρεις κυκλικοί τροχοί με ίσες ακτίνες, έχουν τα κέντρα τους στις κορυφές τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές α, β και γ. Ένας τεντωμένος ιμάντας μήκους L συνδέει τους τρεις ίσους τροχούς όπως στο σχήμα και εφάπτεται σε αυτούς στα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν, Ρ, Σ.

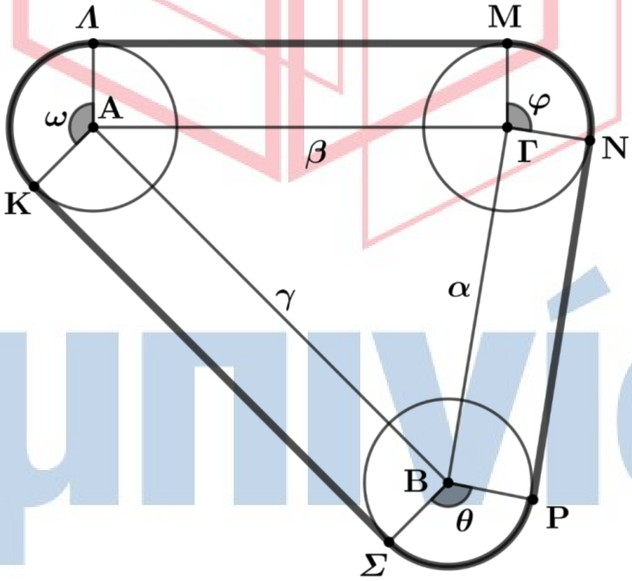
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΛΜΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 4)

ii. Η κυρτή γωνία $\mathrm{K\widehat{A}\Lambda}$ και η γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι παραπληρωματικές. (Μονάδες 4)

β) Αν $\mathrm{K\widehat{A}\Lambda} = \widehat{\omega}$, $\mathrm{\Sigma\widehat{B}P} = \widehat{\theta}$, $\mathrm{M\widehat{\Gamma}N} = \widehat{\varphi}$, να αποδείξετε ότι $\widehat{\omega} + \widehat{\theta} + \widehat{\varphi} = 360^{o}$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το μήκος του ιμάντα L είναι L = 2(τ + πR) όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)



21193-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Επειδή ο ιμάντας εφάπτεται στους κυκλικούς τροχούς, οι ακτίνες ΑΛ και ΓΜ είναι ίσες και παράλληλες αφού είναι κάθετες στο ίδιο εφαπτόμενο τμήμα ΛΜ, συνεπώς το τετράπλευρο ΑΛΜΓ είναι ορθογώνιο.

ii. Για τις γωνίες με κορυφή το κέντρο Α του ενός τροχού έχουμε:

$$\mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda + 90^{o} + \widehat{\mathrm{A}} + 90^{o} = 360^{o} \text{ ή } \mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda + \widehat{\mathrm{A}} = 180^{o}$$

δηλαδή η γωνία $\mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda$ και η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι παραπληρωματικές.

β) Με βάση το α)ii. ερώτημα έχουμε:

$$\widehat{\omega} + \widehat{\mathrm{A}} = 180^{o}$$

Ανάλογα για τις γωνίες $\widehat{\mathrm{B}}$ και $\widehat{\Gamma}$ βρίσκουμε $\widehat{\theta} + \widehat{\mathrm{B}} = 180^{o}$ και $\widehat{\varphi} + \widehat{\Gamma} = 180^{o}$.

Προσθέτοντας τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι:

$$\widehat{\omega} + \widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\theta} + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\varphi} + \widehat{\Gamma} = 180^{o} + 180^{o} + 180^{o} \text{ ή}$$

$$\widehat{\omega} + \widehat{\theta} + \widehat{\varphi} + 180^{o} = 180^{o} + 180^{o} + 180^{o} \text{ ή}$$

$$\widehat{\omega} + \widehat{\theta} + \widehat{\varphi} = 360^{o}$$

γ) Με ανάλογο τρόπο, όπως για το τετράπλευρο ΑΛΜΓ του α) ι. ερωτήματος, αποδεικνύεται ότι και τα τετράπλευρα ΓΝΡΒ και ΒΣΚΑ είναι επίσης ορθογώνια, οπότε θα έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες, δηλαδή ΝΡ = α, ΛΜ = β και ΚΣ = γ. Αν συμβολίσουμε με $\ell_{\widehat{\mathrm{K}\Lambda}}, \ell_{\widehat{\mathrm{MN}}}$ και $\ell_{\widehat{\mathrm{P}\Sigma}}$ τα μήκη των μικρότερων του ημικυκλίου τόξων $\widehat{\mathrm{K}\Lambda}, \widehat{\mathrm{MN}}$ και $\widehat{\mathrm{P}\Sigma}$ αντίστοιχα, τότε το μήκος L του ιμάντα είναι:

$$\mathrm{L} = \ell_{\widehat{\mathrm{K}\Lambda}} + \Lambda\mathrm{M} + \ell_{\widehat{\mathrm{MN}}} + \mathrm{NP} + \ell_{\widehat{\mathrm{P}\Sigma}} + \mathrm{K}\Sigma =$$

$$= \ell_{\widehat{\mathrm{K}\Lambda}} + \ell_{\widehat{\mathrm{MN}}} + \ell_{\widehat{\mathrm{P}\Sigma}} + (\alpha + \beta + \gamma) =$$

$$= \pi\mathrm{R}\frac{\widehat{\omega}}{180^{o}} + \pi\mathrm{R}\frac{\widehat{\varphi}}{180^{o}} + \pi\mathrm{R}\frac{\widehat{\theta}}{180^{o}} + 2\tau =$$

$$= \pi\mathrm{R} \cdot \frac{1}{180^{o}} \cdot (\widehat{\omega} + \widehat{\phi} + \widehat{\theta}) + 2\tau =$$

$$= \pi\mathrm{R} \cdot \frac{1}{180^{o}} \cdot 360^{o} + 2\tau = 2\pi\mathrm{R} + 2\tau = 2(\tau + \pi\mathrm{R})$$

21197

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 2α και Λ το μέσο της πλευράς του ΓΔ. Έστω ότι το ημικύκλιο, που σχεδιάζεται στο εσωτερικό του τετραγώνου με διάμετρο την πλευρά του ΑΒ, έχει εμβαδόν 10. Τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

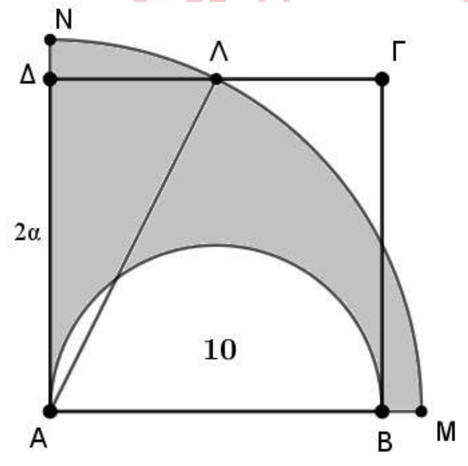
i. Το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι (ΑΒΓΔ) = $\frac{80}{\pi}$. (Μονάδες 6)

ii. $\mathrm{A\Lambda}^2 = \frac{100}{\pi}$ (Μονάδες 6)

β) Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΛ κατασκευάζουμε τεταρτοκύκλιο $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{MN}}$, και έστω Μ, Ν είναι τα σημεία τομής του με τις προεκτάσεις των πλευρών του τετραγώνου ΑΒ, ΑΔ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου ΑΒΜΝΑ. (Μονάδες 8)

ii. Τον λόγο του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{MN}}$ προς το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 5)



21197-Λύση

ΘΕΜΑ 4

α)

i. Το ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 2\alpha$ έχει ακτίνα α και εμβαδόν $E_{AB} = \frac{\pi\alpha^2}{2}$. Αφού το εμβαδό του ημικυκλίου είναι 10 τότε:

$$E_{AB} = \frac{\pi\alpha^2}{2} \quad ή \quad 10 = \frac{\pi\alpha^2}{2} \quad ή \quad \pi\alpha^2 = 20 \quad ή \quad \alpha^2 = \frac{20}{\pi}$$

Το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ με πλευρά 2α είναι:

$$(ΑΒΓΔ) = (2\alpha)^2 = 4\alpha^2 = 4 \cdot \frac{20}{\pi} = \frac{80}{\pi}$$

ii. Το σημείο Λ είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ του τετραγώνου, επομένως $ΔΛ = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΛ εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$ΑΛ^2 = ΑΔ^2 + ΔΛ^2 = (2\alpha)^2 + \alpha^2 = 5\alpha^2$$

Από το α) i. ερώτημα είναι $\alpha^2 = \frac{20}{\pi}$, επομένως $ΑΛ^2 = 5\alpha^2 = 5 \cdot \frac{20}{\pi} = \frac{100}{\pi}$

β)

i. Το ζητούμενο εμβαδό Ε του σκιασμένου σχήματος, υπολογίζεται αν από το εμβαδό του τεταρτοκυκλίου $\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{MN}}$ αφαιρέσουμε το εμβαδό E_{AB} του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΒ. Το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου $\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{MN}}$ είναι:

$$\left(\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{MN}}\right) = \frac{\pi \cdot ΑΛ^2}{4} = \frac{\pi \cdot \frac{100}{\pi}}{4} = \frac{100}{4} = 25$$

επομένως το ζητούμενο εμβαδό Ε του σκιασμένου σχήματος είναι:

$$E = \left(\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{MN}}\right) - \mathrm{E}_{\mathrm{AB}} = 25 - 10 = 15$$

ii. Από το ερώτημα (β.i) το εμβαδό του τεταρτοκυκλίου $\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{MN}}$ είναι $\left(\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{MN}}\right) = 25$και από το α) i. ερώτημα το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $(ΑΒΓΔ) = \frac{80}{\pi}$, επομένως ο λόγος του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου $\left(\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{MN}}\right)$ προς το εμβαδό του τετραγώνου (ΑΒΓΔ) θα είναι:

$$\frac{\left(\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{MN}}\right)}{(ΑΒΓΔ)} = \frac{25}{\frac{80}{\pi}} = \frac{25\pi}{80} = \frac{5\pi}{16}$$

21298

ΘΕΜΑ 2

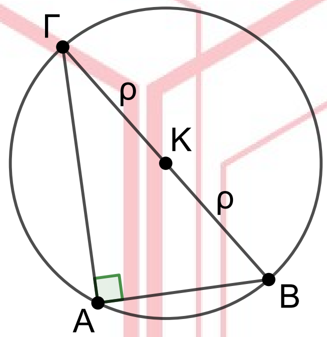
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A}$ ορθή γωνία και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου, που έχει κέντρο το Κ και ακτίνα ρ. Επίσης δίνεται ότι το μήκος του κύκλου ισούται με 10π.

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου έχει μήκος 5. (Μονάδες 08)

β) Αν η χορδή ΑΒ έχει μήκος 6 να υπολογίσετε:

i. το μήκος της χορδής ΑΓ του κύκλου, (Μονάδες 10)

ii. το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)



21298-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το μήκος του κύκλου (K,ρ) είναι $L = 2\pi \cdot \rho$. Άρα, $\rho = \frac{L}{2\pi}$.

Εφόσον $L = 10\pi$ θα είναι $\rho = \frac{10\pi}{2\pi}$ ή $\rho = 5$.

β) i. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει κάθετες πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ και υποτείνουσα τη ΒΓ, που είναι διάμετρος του κύκλου.

Για τη διάμετρο ΒΓ ισχύει ότι $ΒΓ = 2\rho = 10$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ ή $ΑΓ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2$ ή $ΑΓ^2 = 100 - 36$ ή $ΑΓ^2 = 64$ ή $ΑΓ = 8$.

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με $(ΑΒΓ) = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = \frac{48}{2} = 24$.

21300

ΘΕΜΑ 2

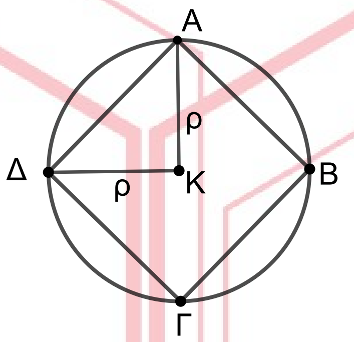
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Κ, ρ), όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 08)

β) Αν επιπλέον το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΔ είναι 4:

i. Να αποδείξετε ότι $\rho = \sqrt{8}$. (Μονάδες 07)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου (Κ, ρ). (Μονάδες 10)



21300-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η γωνία $\hat{AK\Delta}$ είναι η κεντρική γωνία $\hat{\omega}_4$ του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Άρα $A\hat{K}\Delta = \frac{360^o}{4} = 90^o$.

Επομένως το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την $\hat{AK\Delta}$ και υποτείνουσα την ΑΔ.

β) i. Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΔ είναι $(AK\Delta) = \frac{1}{2} \cdot K\Delta \cdot KA = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \rho = \frac{1}{2}\rho^2$.

Όμως $(AK\Delta) = 4$, οπότε $\frac{1}{2}\rho^2 = 4$ ή $\rho^2 = 8$ ή $\rho = \sqrt{8}$.

ii. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E = \pi\rho^2 = \pi \cdot (\sqrt{8})^2 = 8\pi$.

21301

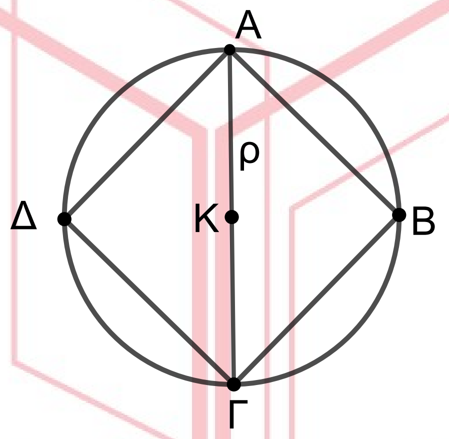
ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο (Κ, ρ) εμβαδού Ε = 4π είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο ΑΒΓΔ, όπως στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε:

α) την ακτίνα ρ του κύκλου (Κ, ρ). (Μονάδες 07)

β) το μήκος της διαμέτρου ΑΓ του κύκλου (Κ, ρ) και της πλευράς ΑΒ του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 10)

γ) το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 08)



21301-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για το εμβαδόν Ε του κύκλου (Κ, ρ) ισχύει ότι $E = \pi\rho^2$. Όμως $E = 4\pi$, άρα $\pi\rho^2 = 4\pi$ ή $\rho^2 = 4$ ή $\rho = 2$.

β) Για τη διάμετρο ΑΓ του κύκλου (Κ, ρ) ισχύει ότι $AΓ = 2\rho = 4$.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{B} = 90^\circ$ και ισοσκελές με ΑΒ = ΒΓ, που είναι ίσες ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$AΓ^2 = AB^2 + BΓ^2$ ή $AΓ^2 = AB^2 + AB^2$ ή $2AB^2 = 16$ ή $AB^2 = 8$ ή $AB = \sqrt{8}$.

(εναλλακτικά:

Γνωρίζουμε ότι το μήκος της πλευράς λ_4 του τετραγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας ρ είναι $\lambda_4 = \rho\sqrt{2}$. Άρα $\lambda_4 = 2\sqrt{2} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{8}$.)

γ) Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $(ΑΒΓΔ) = AB^2 = (\sqrt{8})^2 = 8$.

21659

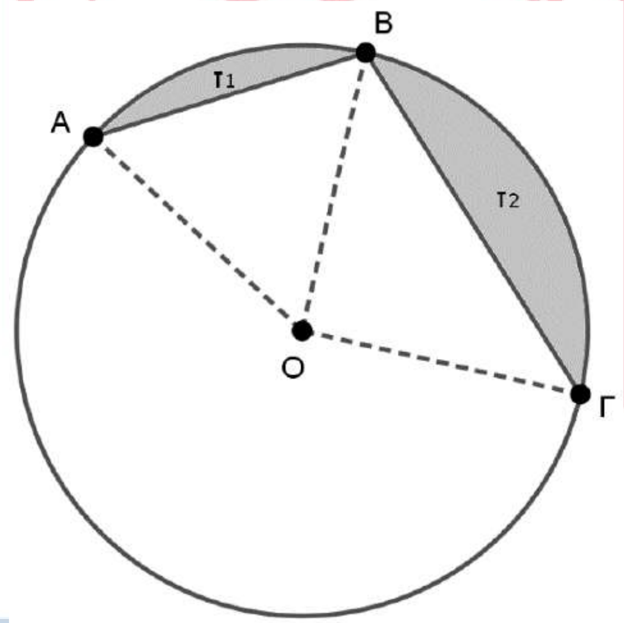
ΘΕΜΑ 4

Για τα σημεία Α, Β και Γ του κύκλου (Ο,R) στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι ΑΒ = R και ΒΓ = R$\sqrt{2}$. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R:

α) τα μήκη των τόξων ΑΒ, ΒΓ. (Μονάδες 8)

β) το μήκος του μη κυρτογώνιου τόξου ΑΓ και το εμβαδό του κυκλικού τομέα (Ο $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$) που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία ΑΟΓ. (Μονάδες 8)

γ) το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων (τ_1) και (τ_2), όπως αυτά σημειώνονται στο σχήμα. (Μονάδες 9)



21659-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε:

AB = R = λ_6, οπότε το τόξο ΑΒ αντιστοιχεί στην κεντρική γωνία κανονικού 6-γώνου, άρα η $A\hat{O}B = 60^0$, επομένως το μέτρο του τόξου ΑΒ ισούται με $\mu = 60^0$ (1).

ΒΓ = $R\sqrt{2} = \lambda_4$, οπότε το τόξο ΒΓ αντιστοιχεί στην κεντρική γωνία κανονικού 4-γώνου, άρα η $B\hat{O}\Gamma = 90^0$, επομένως το μέτρο του τόξου ΒΓ ισούται με $\mu = 90^0$ (2).

Για το μήκος ℓ_1 του τόξου ΑΒ έχουμε: $\ell_1 = \frac{\pi R\mu}{180} = \frac{\pi R\cdot 60}{180} = \frac{\pi R}{3}$.

Για το μήκος ℓ_2 του τόξου ΒΓ έχουμε: $\ell_2 = \frac{\pi R\mu}{180} = \frac{\pi R\cdot 90}{180} = \frac{\pi R}{2}$.

β) Λόγω των (1), (2) για την κυρτή γωνία ΑΟΓ έχουμε: $A\hat{O}\Gamma = A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma = 150^0$.

Το μήκος ℓ_3, του μη κυρτογώνιου τόξου ΑΓ, θα βρεθεί αν από το μήκος του κύκλου αφαιρέσουμε τα μήκη των τόξων ΑΒ, ΒΓ, που υπολογίσαμε στο ερώτημα (α). Δηλαδή:

$\ell_3 = 2\pi R - \ell_1 - \ell_2 = 2\pi R - \frac{\pi R}{3} - \frac{\pi R}{2} = \frac{12\pi R - 2\pi R - 3\pi R}{6} = \frac{7\pi R}{6}$.

Επίσης: $(O\overset{\frown}{A\Gamma}) = \frac{\pi R^2\mu}{360} = \frac{\pi R^2\cdot 150}{360} = \frac{5\pi R^2}{12}$.

γ) Για το εμβαδό τ_1, του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από την χορδή ΑΒ έχουμε:

$(\tau_1) = (O\overset{\frown}{AB}) - (OAB)$.

Όμως $(O\overset{\frown}{AB}) = \frac{\pi R^2\mu}{360} = \frac{\pi R^2\cdot 60}{360} = \frac{\pi R^2}{6}$.

Επίσης το τρίγωνο ΟΑΒ, είναι ισόπλευρο, με πλευρά R. Οπότε $(OAB) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Επομένως $(\tau_1) = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}$.

Για το εμβαδό τ_2, του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από την χορδή ΒΓ έχουμε:

$(\tau_2) = (O\overset{\frown}{B\Gamma}) - (OB\Gamma)$.

Όμως $(O\overset{\frown}{B\Gamma}) = \frac{\pi R^2\mu}{360} = \frac{\pi R^2\cdot 90}{360} = \frac{\pi R^2}{4}$.

Επίσης το τρίγωνο ΟΒΓ, είναι ορθογώνιο λόγω της (2), με κάθετες πλευρές ΟΒ, ΟΓ άρα

$(OB\Gamma) = \frac{1}{2}\, OB\cdot O\Gamma = \frac{1}{2}\cdot R\cdot R = \frac{R^2}{2}$.

21659-Λύση

Επομένως $(τ_2) = \frac{πR^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{πR^2 - 2R^2}{4} = \frac{(π-2)R^2}{4}$.

Έτσι: $(τ_1) + (τ_2) = \frac{(2π-3\sqrt{3})R^2}{12} + \frac{(π-2)R^2}{4} = \frac{(2π+3π-6-3\sqrt{3})R^2}{12} = \frac{(5π-6-3\sqrt{3})R^2}{12}$.

21841

ΘΕΜΑ 4

Έστω ΑΒΓΔΕΖ κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R).

α) Να αποδείξετε ότι:

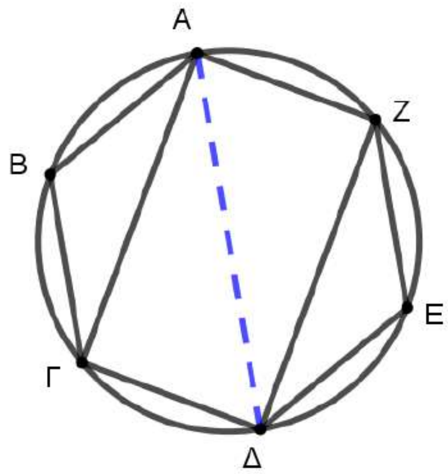
i. Η διαγώνιος ΑΔ του εξαγώνου είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 6)

ii. Οι γωνίες $Γ\hat{Α}Δ$ και $Α\hat{Δ}Ζ$ είναι ίσες. (Μονάδες 3)

iii. Οι διαγώνιοί ΑΓ και ΖΔ του εξαγώνου είναι παράλληλες. (Μονάδες 3)

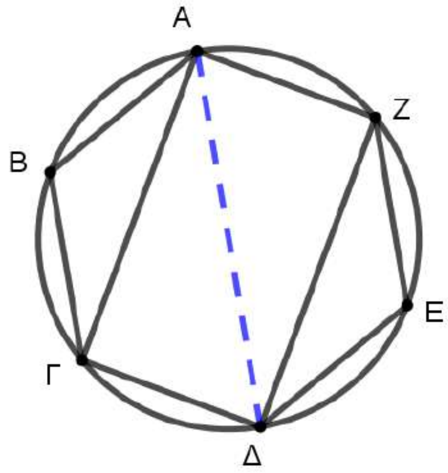
iv. Το τετράπλευρο ΑΓΔΖ είναι ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδόν του συναρτήσει της ακτίνας R του κύκλου. (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι σε κάθε κανονικό πολύγωνο με περισσότερες από πέντε πλευρές υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαγώνιοι που να είναι παράλληλες. Συμφωνείτε με την άποψη αυτού του μαθητή; Να αιτιολογήστε τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 6)



21841-Λύση

ΛΥΣΗ



α)

i. Οι κορυφές του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ χωρίζουν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα μέτρου 60^o το καθένα. Επειδή το τόξο ΑΓΔ ισούται με $3\cdot 60^o = 180^o$, είναι ημικύκλιο και άρα η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

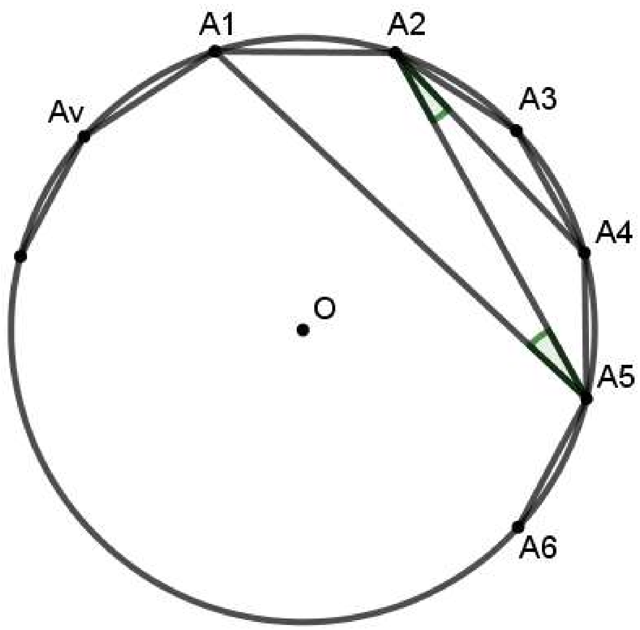
ii. Οι γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $A\hat{\Delta}Z$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα 60^o το καθένα , άρα είναι ίσες.

iii. Οι γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $A\hat{\Delta}Z$ είναι εντός εναλλάξ των ευθειών ΑΓ και ΔΖ που τέμνονται από την ΑΔ και εφόσον, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, είναι ίσες οι ευθείς ΑΓ και ΔΖ είναι παράλληλες.

iv. Οι κορυφές του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ χωρίζουν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα μέτρου 60^o το καθένα. Η γωνία Γ του τετραπλεύρου ΑΓΔΖ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο ΔΕΑ που είναι ίσο με $3\cdot 60^o = 180^o$ και εφόσον κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό του μέτρου του τόξου στο οποίο βαίνει, προκύπτει ότι είναι ορθή. Για τον ίδιο λόγο και οι υπόλοιπες γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΔΖ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε τόξα 180^o , άρα είναι ορθές. Επομένως το τετράπλευρο ΑΓΔΖ είναι ορθογώνιο. Η ΑΖ είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Ο, R), άρα $AZ=\lambda_6=R$. Η ΑΓ είναι χορδή που αντιστοιχεί σε τόξο 120^o , άρα ισούται με την πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Ο,R). Έτσι $A\Gamma=\lambda_3=R\sqrt{3}$. Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι $(A\Gamma\Delta Z)=AZ\cdot A\Gamma=R\cdot R\sqrt{3}=R^2\sqrt{3}$.

21841-Λύση

β)



Έστω ένα κανονικό ν-γωνο $A_1A_2 \ldots A_\nu$, (ν>5). Γνωρίζουμε ότι κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο και έστω (O,R) ο περιγεγραμμένος κύκλος του πολυγώνου. Δύο διαγώνιοι του πολυγώνου είναι οι A_2A_4 και A_1A_5 οι οποίες είναι χορδές του κύκλου στις οποίες περιέχονται τα τόξα A_1A_2 και A_4A_5.Το κάθε ένα από αυτά τα τόξα είναι ίσο με $\frac{360^o}{\nu}$, άρα είναι ίσα. Οι γωνίες $A_4\widehat{A_2}A_5$ και $A_2\widehat{A_5}A_1$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα, άρα είναι ίσες, επομένως $A_2A_4//A_1A_5$ αφού σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Άρα ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

21975

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

ii. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

iv. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2<\beta^2+\gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.

v. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

(Μονάδες 15)

21975-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Σωστό
ii. Λάθος
iii. Σωστό
iv. Λάθος
v. Σωστό

β) Θεώρημα ΙΙΙ σελίδα 82.

21979

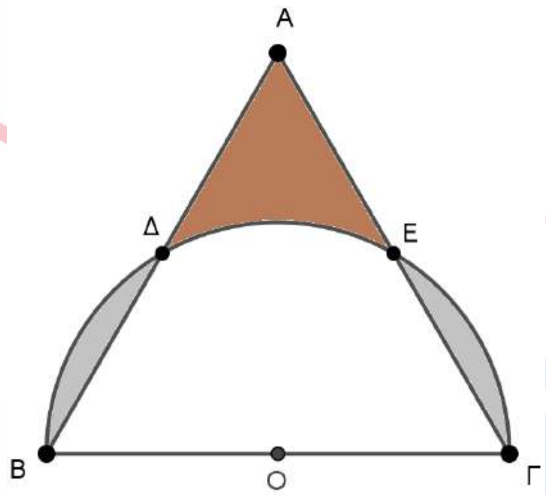
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, πλευράς 2α. Με διάμετρο τη ΒΓ γράφουμε ημικύκλιο, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ,Ε αντίστοιχα. Αν Ο είναι το κέντρο του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΓ = α\sqrt{3}$. (Μονάδες 8)

β) το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται στο εξωτερικό του τριγώνου ισούται με $Ε = \frac{(2π-3\sqrt{3})α^2}{6}$. (Μονάδες 9)

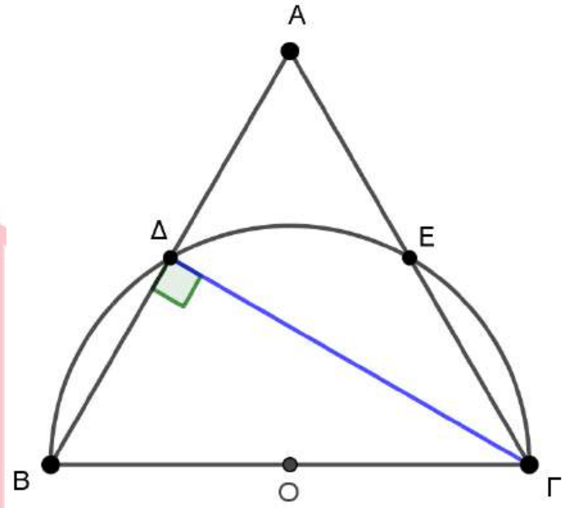
γ) το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου που ορίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΑΕ και το τόξο ΔΕ είναι: $Ε' = \frac{(3\sqrt{3}-π)α^2}{6}$. (Μονάδες 8)



21979-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



Από τα δεδομένα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς 2α. Άρα έχουμε:

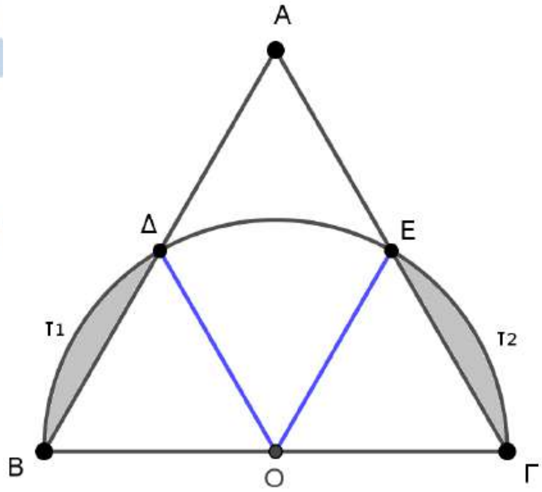
ΑΒ = ΒΓ = ΓΑ = 2α, ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ = ΟΕ = α και $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 60^0$.

Επίσης η ΒΓ είναι διάμετρος του ημικυκλίου, άρα $B\widehat{\Delta}\Gamma = 90^0$. Δηλαδή στο ισόπλευρο τρίγωνο ΓΑΒ, το ΓΔ είναι ύψος, οπότε θα είναι και διάμεσος. Άρα το Δ είναι μέσο της ΑΒ και όμοια το Ε, είναι μέσο της ΑΓ, οπότε ΔΒ = ΔΑ = ΕΑ = ΕΓ = α.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ, από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$\Delta\Gamma^2 = B\Gamma^2 - B\Delta^2$ ή $\Delta\Gamma^2 = (2\alpha)^2 - \alpha^2$ ή $\Delta\Gamma^2 = 3\alpha^2$, επομένως $\Delta\Gamma = \alpha\sqrt{3}$.

β)



21979-Λύση

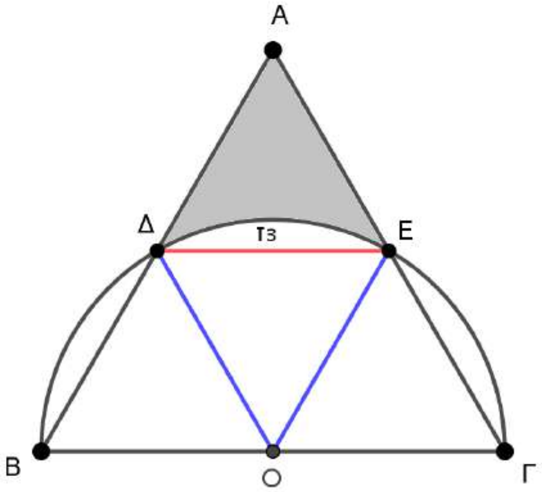
Λόγω του ερωτήματος (α), τα τρίγωνα ΟΒΔ, ΟΓΕ είναι ισόπλευρα πλευράς α, οπότε θα είναι ίσα. Επομένως τα εμβαδά $τ_1$, $τ_2$ των δύο κυκλικών τμημάτων θα είναι ίσα. Άρα $Ε = τ_1 + τ_2 = 2τ_1$ (1).

Όμως $τ_1 = (Ο\overset{\frown}{ΒΔ}) - (ΟΒΔ) =$

$$\frac{πα^2 60}{360} - \frac{α^2\sqrt{3}}{4} = \frac{πα^2}{6} - \frac{α^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2πα^2 - 3α^2\sqrt{3}}{12} = \frac{(2π-3\sqrt{3})α^2}{12}.$$

Οπότε από την (1): $Ε = 2\frac{(2π-3\sqrt{3})α^2}{12} = \frac{(2π-3\sqrt{3})α^2}{6}$.

γ)



Λόγω του ερωτήματος (α), τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΟΔΕ είναι ισόπλευρα πλευράς α. Οπότε το εμβαδό $τ_3$, του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από τη χορδή ΔΕ θα ισούται με τα εμβαδά $τ_1$ και $τ_2$. Δηλαδή $τ_3 = \frac{(2π-3\sqrt{3})α^2}{12}$.

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$Ε' = (ΑΔΕ) - τ_3 = \frac{α^2\sqrt{3}}{4} - \frac{(2π-3\sqrt{3})α^2}{12} = \frac{3\sqrt{3}α^2 - 2πα^2 + 3\sqrt{3}α^2}{12} = \frac{6\sqrt{3}α^2 - 2πα^2}{12} =$$

$$\frac{2(3\sqrt{3}-π)α^2}{12} = \frac{(3\sqrt{3}-π)α^2}{6}.$$

22021

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^{o}$ και $ΒΓ = 2ρ$. Με διάμετρο ΒΓ γράφουμε ημικύκλιο εξωτερικά του τριγώνου. Επίσης, γράφουμε τον κυκλικό τομέα $Α\widehat{ΒΓ}$ με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΒ = ρ\sqrt{2}$.

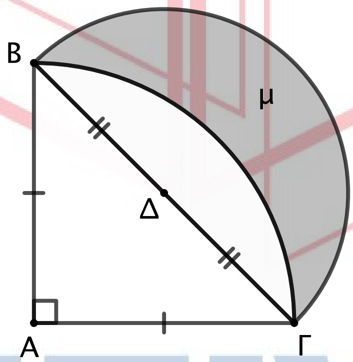
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου μ ως συνάρτηση του ρ.

(Μονάδες 10)

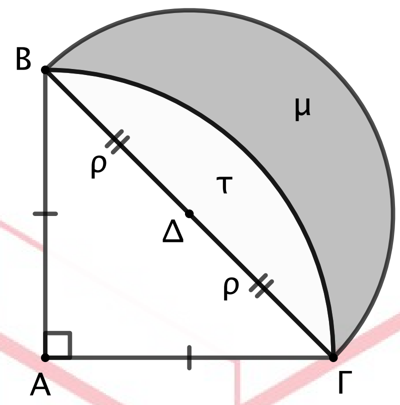
γ) Να συγκρίνετε το εμβαδόν του μηνίσκου μ με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Τι συμπέρασμα προκύπτει;

(Μονάδες 05)



22021-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο είναι $ΑΒ = ΑΓ$. Έχουμε διαδοχικά:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$$

$$(2ρ)^2 = ΑΒ^2 + ΑΒ^2$$

$$4ρ^2 = 2ΑΒ^2$$

$$ΑΒ^2 = 2ρ^2$$

Επομένως, $ΑΒ = ρ\sqrt{2}$.

β) Το εμβαδόν (μ) του σχηματιζόμενου μηνίσκου προκύπτει αν από το εμβαδόν του ημικυκλίου διαμέτρου ΒΓ αφαιρέσουμε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος με χορδή ΒΓ, δηλαδή:

$$(μ) = (Δ\,\overset{\frown}{ΒΓ}) - (τ)$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου $Δ\,\overset{\frown}{ΒΓ}$ είναι:

$$(Δ\,\overset{\frown}{ΒΓ}) = \frac{π \cdot ΔΓ^2 \cdot 180^o}{360^o} = \frac{π \cdot ρ^2}{2}$$

Το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος με χορδή ΒΓ υπολογίζεται αφαιρώντας από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $Α\,\overset{\frown}{ΒΓ}$ το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή:

$$(τ) = (Α\,\overset{\frown}{ΒΓ}) - (ΑΒΓ) = \frac{π \cdot ΑΒ^2 \cdot 90^o}{360^o} - \frac{1}{2}ΑΒ \cdot ΑΓ = \frac{π \cdot 2ρ^2}{4} - \frac{1}{2}2ρ^2 = \frac{π \cdot ρ^2}{2} - ρ^2$$

Επομένως, έχουμε τελικά:

$$(μ) = \frac{π \cdot ρ^2}{2} - \left(\frac{π \cdot ρ^2}{2} - ρ^2\right) = ρ^2$$

γ) Στο προηγούμενο ερώτημα βρέθηκε ότι $(μ) = ρ^2$.

Επίσης, είναι:

22021-Λύση

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}ΑΒ \cdot ΑΓ = \frac{1}{2}2ρ^2 = ρ^2$$

Επομένως, $(μ) = (ΑΒΓ)$, δηλαδή ο σχηματιζόμενος μηνίσκος είναι ισοδύναμος με το τρίγωνο ΑΒΓ.

22024

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και τυχαίο σημείο του Μ, τέτοιο ώστε $AM = 2\alpha$ και $MB = 2\beta$. Με διαμέτρους ΑΜ, ΜΒ και ΑΒ γράφουμε ημικύκλια προς το ίδιο μέρος του ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Γ το σημείο τομής του ημικυκλίου ΑΒ και της κάθετης από το Μ στο ΑΒ.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα τρία ημικύκλια $Z\overset{\frown}{AM}$, $E\overset{\frown}{MB}$ και $\Delta\overset{\frown}{AB}$, όπου Ζ, Ε, Δ είναι τα μέσα των ΑΜ, ΜΒ και ΑΒ αντίστοιχα.

(Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καμπυλόγραμμου σχήματος τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.

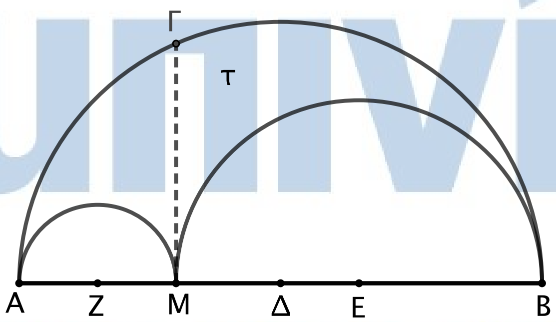
(Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων έχει το ίδιο εμβαδόν με τον κύκλο διαμέτρου ΜΓ.

(Μονάδες 05)

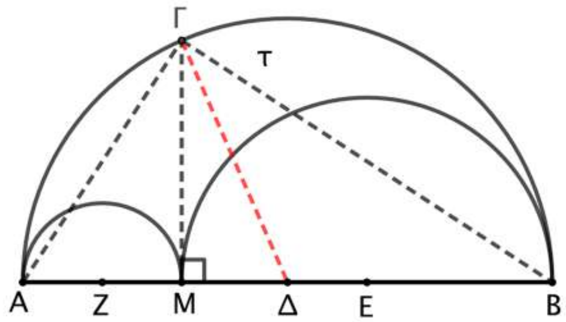
δ) Για ποια θέση του Μ μεγιστοποιείται το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ;

(Μονάδες 05)



22024-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης είναι $AZ = ZM = \alpha$, $ME = EB = \beta$ και $A\Delta = \Delta B = \alpha + \beta$.

Το εμβαδόν του ημικυκλίου $Z\,\widehat{AM}$ είναι:

$$(Z\,\widehat{AM}) = \frac{\pi \cdot ZM^2 \cdot 180^o}{360^o} = \frac{\pi \cdot \alpha^2}{2}$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου $E\,\widehat{MB}$ είναι:

$$(E\,\widehat{MB}) = \frac{\pi \cdot EB^2 \cdot 180^o}{360^o} = \frac{\pi \cdot \beta^2}{2}$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου $\Delta\,\widehat{AB}$ είναι:

$$(\Delta\,\widehat{AB}) = \frac{\pi \cdot \Delta B^2 \cdot 180^o}{360^o} = \frac{\pi \cdot (\alpha + \beta)^2}{2}$$

β) Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων υπολογίζεται αν αφαιρέσουμε από το εμβαδόν του ημικυκλίου $\Delta\,\widehat{AB}$ τα εμβαδά των ημικυκλίων $Z\,\widehat{AM}$ και $E\,\widehat{MB}$, δηλαδή:

$$(\tau) = (\Delta\,\widehat{AB}) - (Z\,\widehat{AM}) - (E\,\widehat{MB}) = \frac{\pi \cdot (\alpha + \beta)^2}{2} - \frac{\pi \cdot \alpha^2}{2} - \frac{\pi \cdot \beta^2}{2}$$

Οπότε

$$(\tau) = \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 - \beta^2) = \frac{\pi}{2}2\alpha\beta = \pi\alpha\beta$$

γ) Ο κύκλος με διάμετρο ΜΓ έχει ακτίνα $\rho = \dfrac{M\Gamma}{2}$ και εμβαδόν

$$E = \pi \cdot \rho^2 = \pi \cdot \left(\frac{M\Gamma}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot M\Gamma^2}{4}$$

Όμως, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Γ, αφού η γωνία $A\hat{\Gamma}B$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ημικύκλιο ΑΒ. Οπότε:

$$M\Gamma^2 = AM \cdot MB = 2\alpha \cdot 2\beta = 4\alpha\beta$$

Άρα, έχουμε τελικά:

$$E = \frac{\pi \cdot 4\alpha\beta}{4} = \pi\alpha\beta$$

Επομένως, $E = (\tau)$, δηλαδή ο κύκλος με διάμετρο ΜΓ είναι ισοδύναμος με το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.

δ) Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ θα γίνει μέγιστο όταν το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο ΜΓ γίνει μέγιστο, δηλαδή όταν μεγιστοποιηθεί το κλάσμα

$$\frac{\pi \cdot M\Gamma^2}{4}$$

Το κλάσμα αυτό παίρνει τη μέγιστη τιμή του όταν το κάθετο τμήμα ΜΓ γίνει μέγιστο, δηλαδή όταν $M\Gamma = R$, αφού $M\Gamma \leq \Delta\Gamma = R$. Άρα, το σημείο Μ θα είναι το μέσο του ΑΒ, δηλαδή θα είναι $\alpha = \beta$.

22046

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα $R = 1$. Θεωρούμε ακτίνα ΟΓ την οποία προεκτείνουμε κατά τμήμα $ΓΒ = ΟΓ = R$ και το εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $O\hat{B}A = 30^o$.

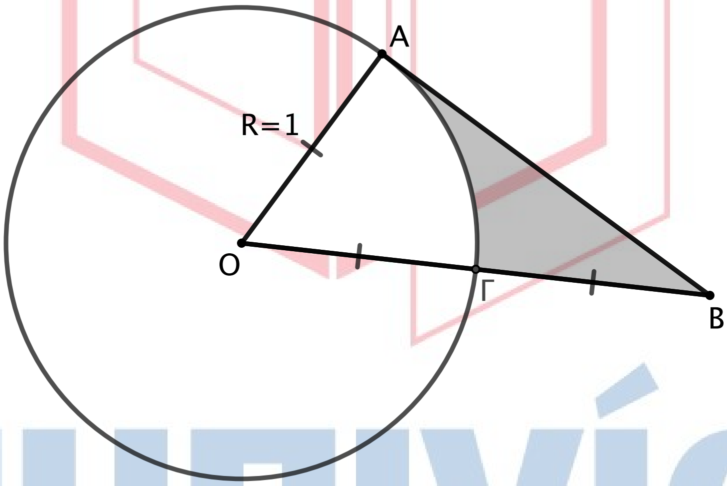
(Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι $AB = \sqrt{3}$.

(Μονάδες 10)

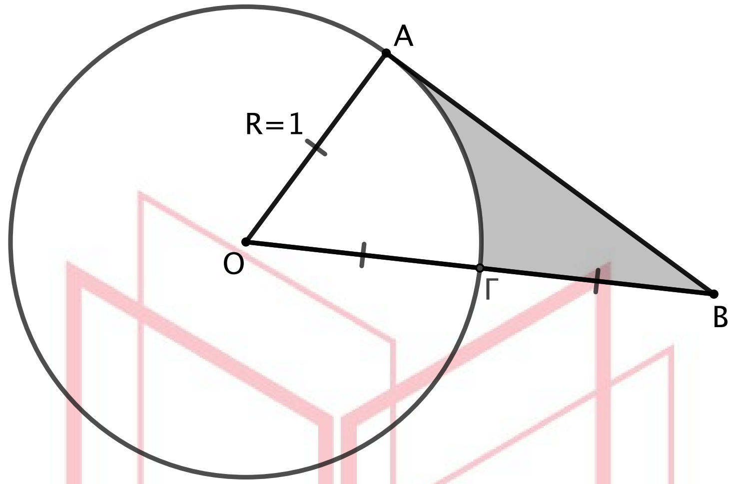
γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)



22046-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής, οπότε $BA \perp OA$. Άρα, η γωνία $O\hat{A}B$ είναι ορθή.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ η κάθετη πλευρά ΟΑ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΟΒ, οπότε η απέναντι γωνία της $O\hat{B}A$ ισούται με 30^o.

β) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε:

$$AB^2 = OB^2 - OA^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

Άρα, $AB = \sqrt{3}$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ είναι $A\hat{O}B = 90^o - 30^o = 60^o$. Έτσι, το μήκος του τόξου $\widehat{A\Gamma}$ είναι:

$$\ell_{\widehat{A\Gamma}} = \frac{\pi R 60^o}{180^o} = \frac{\pi}{3}$$

Οπότε, η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου μικτόγραμμου χωρίου ΑΒΓ είναι:

$$L = (AB) + (B\Gamma) + \ell_{\widehat{A\Gamma}} = \sqrt{3} + 1 + \frac{\pi}{3}$$

22054

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα α σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα ως συνάρτηση του α.

(Μονάδες 08)

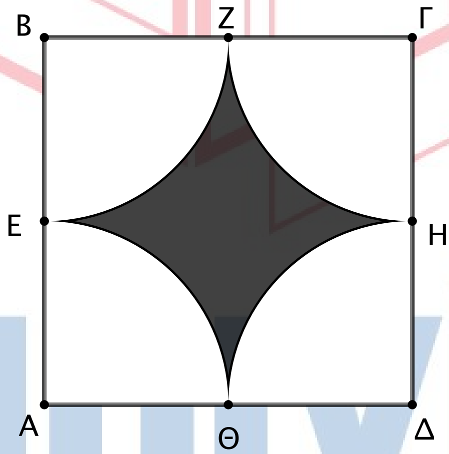
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι:

$$E = \alpha^2(4 - \pi)$$

(Μονάδες 12)

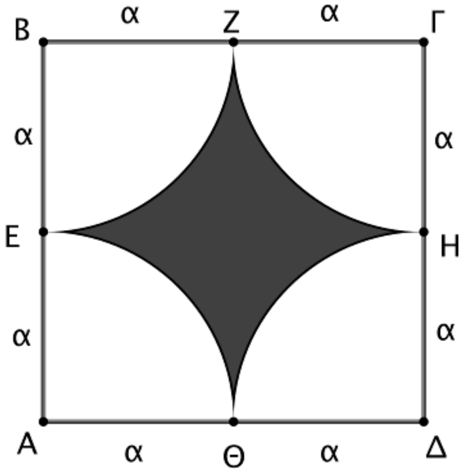
γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου.

(Μονάδες 05)



22054-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Τα τόξα $\widehat{ΘΕ}$, $\widehat{ΕΖ}$, $\widehat{ΖΗ}$, $\widehat{ΗΘ}$ είναι τόξα ίσων κύκλων ακτίνας α και αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες 90^o. Επομένως, οι κυκλικοί τομείς $Α\widehat{ΘΕ}$, $Β\widehat{ΕΖ}$, $Γ\widehat{ΖΗ}$, $Δ\widehat{ΗΘ}$ έχουν ο καθένας εμβαδόν

$$(Α\,\widehat{ΘΕ}\,) = (Β\,\widehat{ΕΖ}\,) = (Γ\,\widehat{ΖΗ}\,) = (Δ\,\widehat{ΗΘ}\,) = \frac{πα^2 90^o}{360^o} = \frac{πα^2}{4}$$

β) Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι

$$Ε_τ = (2α)^2 = 4α^2$$

Οπότε, το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι:

$$Ε = Ε_τ - 4(Α\,\widehat{ΘΕ}\,) = 4α^2 - 4\frac{πα^2}{4} = 4α^2 - πα^2 = α^2(4-π)$$

γ) Το μήκος καθενός από τα ίσα τόξα $\widehat{ΘΕ}$, $\widehat{ΕΖ}$, $\widehat{ΖΗ}$, $\widehat{ΗΘ}$ είναι:

$$\ell_{\widehat{ΘΕ}} = \ell_{\widehat{ΕΖ}} = \ell_{\widehat{ΖΗ}} = \ell_{\widehat{ΗΘ}} = \frac{πα 90^o}{180^o} = \frac{πα}{2}$$

Οπότε, η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι:

$$L = 4\ell_{\widehat{ΘΕ}} = 4\frac{πα}{2} = 2πα$$

22058

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα R. Έστω ΑΒ διάμετρος του κύκλου και Δ, Ε σημεία της τέτοια ώστε $ΑΔ = ΔΕ = ΕΒ$. Σχεδιάζουμε τα ημικύκλια ΑΔ και ΑΕ πάνω από τη διάμετρο ΑΒ και τα ημικύκλια ΒΕ και ΒΔ κάτω από τη διάμετρο ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά $ε_1$ και $ε_3$ των καμπυλόγραμμων σχημάτων ΑΔΒΖ και ΒΕΑΗ αντίστοιχα.

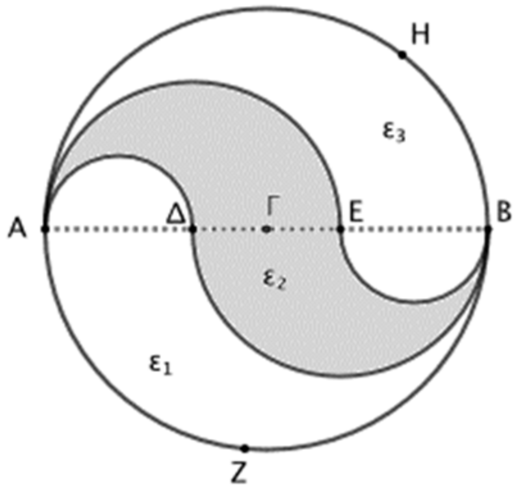
(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $ε_2$ του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου σχήματος ΑΔΒΕ.

(Μονάδες 08)

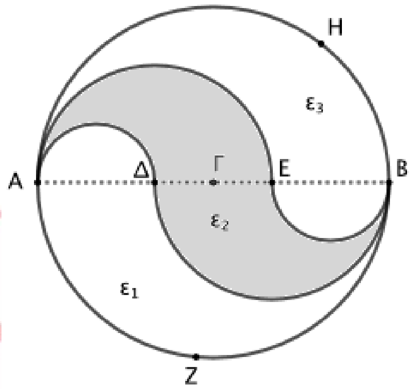
γ) Να εξετάσετε αν ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμα σχήματα.

(Μονάδες 05)



22058-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Από την εκφώνηση έχουμε ότι:

$$ΑΔ = ΔΕ = ΕΒ = \frac{ΑΒ}{3} = \frac{2R}{3}$$

Τα ημικύκλια $\widehat{ΑΔ}$ και $\widehat{ΒΕ}$ έχουν ακτίνα

$$ρ_1 = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{R}{3}$$

και εμβαδόν

$$ε = \frac{πρ_1{}^2 180^o}{360^o} = \frac{π\left(\frac{R}{3}\right)^2 180^o}{360^o} = \frac{πR^2}{18}$$

Τα ημικύκλια $\widehat{ΑΕ}$ και $\widehat{ΒΔ}$ έχουν ακτίνα

$$ρ_2 = \frac{ΑΕ}{2} = ΑΔ = \frac{2R}{3}$$

και εμβαδόν

$$τ = \frac{πρ_2{}^2 180^o}{360^o} = \frac{π\left(\frac{2R}{3}\right)^2 180^o}{360^o} = \frac{2πR^2}{9}$$

Τα ημικύκλια $\widehat{ΑΗΒ}$ και $\widehat{ΑΖΒ}$ έχουν ακτίνα R και εμβαδόν

$$σ = \frac{πR^2}{2}$$

Οπότε, τα καμπυλόγραμμα σχήματα ΑΔΒΖ και ΒΕΑΗ έχουν εμβαδόν

$$ε_1 = ε_3 = σ + ε - τ = \frac{πR^2}{2} + \frac{πR^2}{18} - \frac{2πR^2}{9} = \frac{9πR^2}{18} + \frac{πR^2}{18} - \frac{4πR^2}{18} = \frac{6πR^2}{18} = \frac{πR^2}{3}$$

β) Το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο ΑΒ είναι

$$Ε = πR^2$$

Επομένως, το καμπυλόγραμμο σχήμα ΑΔΒΕ έχει εμβαδόν

22058-Λύση

$$\varepsilon_2 = E - \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \pi R^2 - \frac{\pi R^2}{3} - \frac{\pi R^2}{3} = \frac{\pi R^2}{3}$$

γ) Παρατηρούμε ότι

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{\pi R^2}{3} = \frac{E}{3}$$

Άρα, ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμα σχήματα.

22098

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $ΑΒ = 4α$ και $ΑΔ = πα$. Στο εσωτερικό του ορθογωνίου σχεδιάστηκε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ.

α) Να αποδείξετε ότι το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

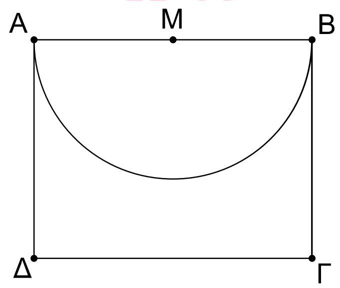
(Μονάδες 8)

β) Αν η διαγώνιος ΒΔ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Ε και Μ είναι το μέσο της ΑΒ,

i. να αποδείξετε ότι $ΑΒ^2 = ΒΔ \cdot ΒΕ$ και $ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΕ$. (Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $ΒΕ = \frac{16α}{\sqrt{16+π^2}}$ και $ΔΕ = \frac{π^2α}{\sqrt{16+π^2}}$, (Μονάδες 6)

iii. να υπολογίσετε το $συνB\widehat{M}E$. (Μονάδες 5)



22098-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \text{ΑΒ} \cdot \text{ΑΔ} = 4\alpha \cdot \pi\alpha = 4\pi\alpha^2.$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου ακτίνας $\mathrm{R} = \frac{\text{ΑΒ}}{2} = \frac{4\alpha}{2} = 2\alpha$ δίνεται από τον τύπο

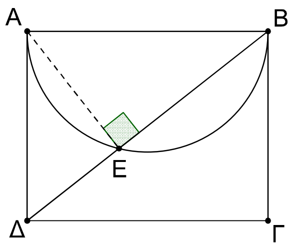
$$\text{Ε}_1 = \frac{\pi \mathrm{R}^2}{2} = \frac{\pi(2\alpha)^2}{2} = \frac{4\pi\alpha^2}{2} = 2\pi\alpha^2 \ (1).$$

Το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και εξωτερικά του ημικυκλίου γίνεται από τον τύπο

$$\text{Ε}_2 = (\text{ΑΒΓΔ}) - \text{Ε}_1 = 4\pi\alpha^2 - 2\pi\alpha^2 = 2\pi\alpha^2 \ (2).$$

Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι $\text{Ε}_1 = \text{Ε}_2$, επομένως το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

β) Η διαγώνιος ΒΔ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Ε. Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ.



i. Η γωνία $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β}$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, επομένως $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β} = 90^{\circ}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΕ είναι η προβολή της κάθετης πλευράς ΑΒ πάνω στην υποτείνουσα ΒΔ, επομένως

$$\text{ΑΒ}^2 = \text{ΒΔ} \cdot \text{ΒΕ} \quad (1).$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΔΕ είναι η προβολή της κάθετης πλευράς ΑΔ πάνω στην υποτείνουσα ΒΔ, επομένως

$$\text{ΑΔ}^2 = \text{ΒΔ} \cdot \text{ΔΕ} \quad (2).$$

ii. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι

$$\text{ΒΔ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΔ}^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\text{ΑΒ} = 4\alpha$, $\text{ΑΔ} = \pi\alpha$, οπότε

$$\text{ΒΔ}^2 = (4\alpha)^2 + (\pi\alpha)^2 \ \text{ ή } \ \text{ΒΔ}^2 = (16+\pi^2)\alpha^2 \ \text{ ή } \ \text{ΒΔ} = \alpha\sqrt{16+\pi^2}.$$

Είναι $\text{ΑΒ} = 4\alpha$ και $\text{ΒΔ} = \alpha\sqrt{16+\pi^2}$, επομένως η (1) γίνεται

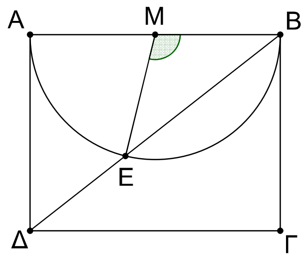
$$(4\alpha)^2 = \alpha\sqrt{16+\pi^2} \cdot \text{ΒΕ} \ \text{ ή } \ \text{ΒΕ} = \frac{16\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}.$$

Είναι $\text{ΑΔ} = \pi\alpha$ και $\text{ΒΔ} = \alpha\sqrt{16+\pi^2}$, επομένως η (2) γίνεται

22098-Λύση

$$(\pi\alpha)^2 = \alpha\sqrt{16+\pi^2}\cdot \Delta E \quad \text{ή} \quad \Delta E = \frac{\pi^2\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}.$$

iii. Έστω Μ το μέσο της ΑΒ.



Τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΕ και ΜΒ είναι ακτίνες του ημικυκλίου διαμέτρου ΑΒ, επομένως

$$ME = MB = \frac{AB}{2} = \frac{4\alpha}{2} = 2\alpha.$$

Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΒΕΜ ισχύει

$$BE^2 = MB^2 + ME^2 - 2MB\cdot ME\cdot \text{συν}B\widehat{M}E \quad \text{ή} \quad \text{συν}B\widehat{M}E = \frac{MB^2+ME^2-BE^2}{2MB\cdot ME}.$$

Όμως $ME = MB = 2\alpha$ και $BE = \dfrac{16\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}$, οπότε

$$\text{συν}B\widehat{M}E = \frac{(2\alpha)^2+(2\alpha)^2-\frac{256\alpha^2}{16+\pi^2}}{2\cdot 2\alpha\cdot 2\alpha} \quad \text{ή} \quad \text{συν}B\widehat{M}E = \frac{\left(8-\frac{256}{16+\pi^2}\right)\alpha^2}{8\alpha^2} \quad \text{ή} \quad \text{συν}B\widehat{M}E = \frac{\pi^2-16}{16+\pi^2}.$$

22099

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και σημείο Μ στο εσωτερικό του. Έστω $Μ_1$, $Μ_2$, $Μ_3$, $Μ_4$, $Μ_5$ οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(ΑΒΜ) = \frac{1}{2} \cdot λ_5 \cdot ΜΜ_1$, όπου $λ_5$ είναι η πλευρά του κανονικού πενταγώνου.

(Μονάδες 6)

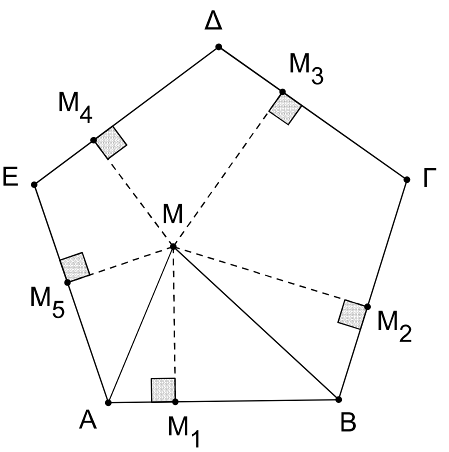
ii. $(ΑΒΓΔΕ) = \frac{1}{2} \cdot λ_5 \cdot (ΜΜ_1 + ΜΜ_2 + ΜΜ_3 + ΜΜ_4 + ΜΜ_5)$. (Μονάδες 7)

iii. $ΜΜ_1 + ΜΜ_2 + ΜΜ_3 + ΜΜ_4 + ΜΜ_5 = 5α_5$, όπου $α_5$ είναι το απόστημα του κανονικού πενταγώνου. (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής διατύπωσε τον ισχυρισμό: «Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός κανονικού ν-γώνου $Α_1Α_2…Α_ν$ και $Μ_1$, $Μ_2$,…, $Μ_ν$ είναι οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές $Α_1Α_2$, $Α_2Α_3$,…,$Α_νΑ_1$ αντίστοιχα, τότε

$$ΜΜ_1 + ΜΜ_2 + \cdots + ΜΜ_ν = να_ν,$$

όπου $α_ν$ είναι το απόστημα του κανονικού ν-γώνου». Να αποδείξετε ότι ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός. (Μονάδες 5)



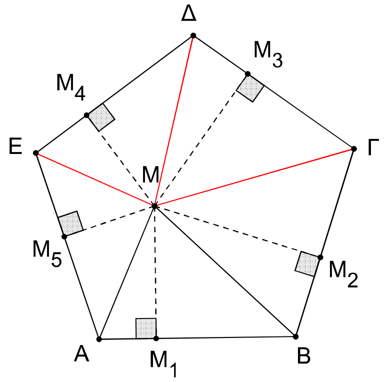
22099-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΜ με βάση ΑΒ και αντίστοιχο ύψος το $ΜΜ_1$ είναι

$$(ΑΒΜ) = \frac{1}{2} \cdot ΑΒ \cdot ΜΜ_1 = \frac{1}{2} \cdot λ_5 \cdot ΜΜ_1.$$

ii. Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΓ, ΜΔ και ΜΕ.



Για το εμβαδόν του κανονικού πενταγώνου ΑΒΓΔΕ έχουμε:

$$(ΑΒΓΔΕ) = (ΑΒΜ) + (ΒΓΜ) + (ΓΔΜ) + (ΔΕΜ) + (ΕΑΜ)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot λ_5 \cdot ΜΜ_1 + \frac{1}{2} \cdot λ_5 \cdot ΜΜ_2 + \frac{1}{2} \cdot λ_5 \cdot ΜΜ_3 + \frac{1}{2} \cdot λ_5 \cdot ΜΜ_4 + \frac{1}{2} \cdot λ_5 \cdot ΜΜ_5$$

$$= \frac{1}{2} \cdot λ_5 \cdot (ΜΜ_1 + ΜΜ_2 + ΜΜ_3 + ΜΜ_4 + ΜΜ_5) \quad (1).$$

iii. Το εμβαδόν του κανονικού πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι

$$(ΑΒΓΔΕ) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot λ_5 \cdot α_5 \quad (2).$$

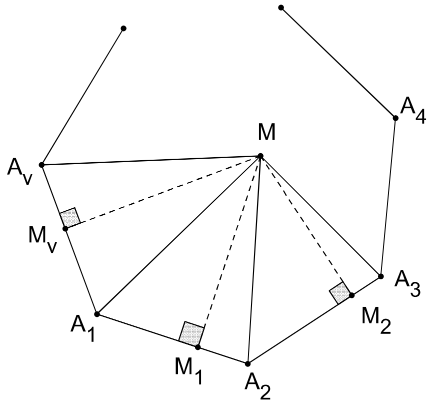
Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2} \cdot λ_5 \cdot (ΜΜ_1 + ΜΜ_2 + ΜΜ_3 + ΜΜ_4 + ΜΜ_5) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot λ_5 \cdot α_5$$

και με απλοποίηση του $\frac{1}{2} \cdot λ_5$ προκύπτει ότι

$$ΜΜ_1 + ΜΜ_2 + ΜΜ_3 + ΜΜ_4 + ΜΜ_5 = 5α_5.$$

β) Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα $ΜΑ_1$, $ΜΑ_2$,…, $ΜΑ_ν$.



22099-Λύση

Για το εμβαδόν του κανονικού ν-γώνου $A_1A_2\ldots A_\nu$ έχουμε:

$$\begin{aligned}(A_1A_2\ldots A_\nu) &= (A_1A_2M)+(A_2A_3M)+\cdots+(A_\nu A_1M)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\lambda_\nu\cdot MM_1+\frac{1}{2}\cdot\lambda_\nu\cdot MM_2+\cdots+\frac{1}{2}\cdot\lambda_\nu\cdot MM_\nu\\ &= \frac{1}{2}\cdot\lambda_\nu\cdot(MM_1+MM_2+\cdots+MM_\nu)\quad (3).\end{aligned}$$

Όμως το εμβαδόν του κανονικού ν-γώνου $A_1A_2\ldots A_\nu$ δίνεται από τον τύπο

$$(A_1A_2\ldots A_\nu)=\frac{1}{2}\cdot\nu\cdot\lambda_\nu\cdot\alpha_\nu \quad (4).$$

Από τις ισότητες (3) και (4) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}\cdot\lambda_\nu\cdot(MM_1+MM_2+\cdots+MM_\nu)=\frac{1}{2}\cdot\nu\cdot\lambda_\nu\cdot\alpha_\nu$$

και με απλοποίηση του $\frac{1}{2}\cdot\lambda_\nu$ προκύπτει ότι

$$MM_1+MM_2+\cdots+MM_\nu=\nu\alpha_\nu.$$

Έτσι αποδείξαμε ότι ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

22133

ΘΕΜΑ 2

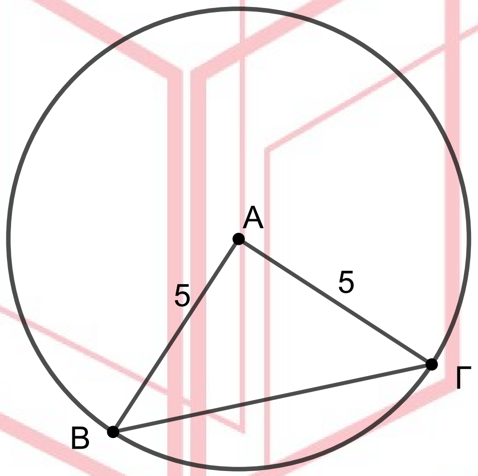
Η $B\hat{A}\Gamma$ είναι επίκεντρη γωνία σε κύκλο (Α, 5), όπως στο σχήμα. Δίνεται ότι $B\Gamma = 5\sqrt{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι η χορδή ΒΓ είναι ίση με την πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $R = 5$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $B\hat{A}\Gamma = 90^o$. (Μονάδες 08)

γ) Αν ℓ είναι το μήκος του κυρτού τόξου $\widehat{B\Gamma}$ να αποδείξετε ότι $\ell = 2{,}5\pi$.

(Μονάδες 07)



22133-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το μήκος λ_4 της πλευράς τετραγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R είναι:

$$\lambda_4 = R\sqrt{2}$$

Αν $\mathrm{R} = 5$, τότε $\lambda_4 = 5\sqrt{2} = B\Gamma$.

β) Άρα, στον κύκλο $(A, 5)$, η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $B\hat{A}\Gamma$ της χορδής $B\Gamma$ είναι ίση με την κεντρική γωνία ω_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο, άρα $B\hat{A}\Gamma = \omega_4 = \frac{360^o}{4} = 90^o$.

γ) Στο κυρτό τόξο $\widehat{\mathrm{B}\Gamma}$ αντιστοιχεί η επίκεντρη γωνία $B\hat{A}\Gamma = 90^o$.

Επομένως $\ell = \frac{\pi\rho 90}{180} = \frac{5\pi}{2} = 2{,}5\pi$, εφόσον $\rho = 5$.

22151

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε σημείο Δ και στην πλευρά ΑΓ σημείο Ε ώστε ΑΕ = ΑΒ. Με κέντρο το σημείο Α και ακτίνες ρ = ΑΔ , r = ΑΒ = ΑΕ και R = ΑΓ γράφουμε τρεις ομόκεντρους κύκλους (Α,ρ) , (Α,r) και (Α,R) όπως στο σχήμα. Έστω $E_{ΕΓ}$ το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, r) και (Α, R) , $E_{ΔΒ}$ το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, ρ) και (Α, r), $E_{ΑΒ}$ το εμβαδόν του κύκλου (Α, r) και $E_{ΑΔ}$ το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ).

α) Να αποδείξετε ότι:

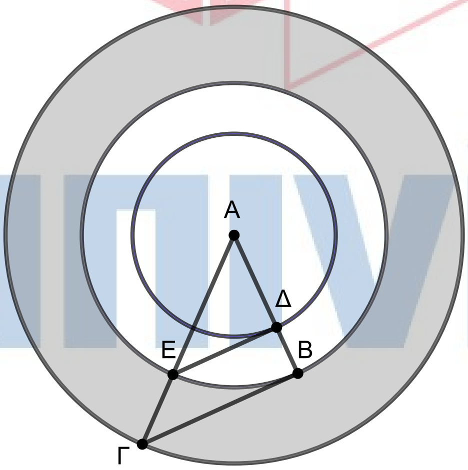
i. $\frac{E_{ΕΓ}}{E_{ΑΕ}} = \frac{R^2-r^2}{r^2}$ (Μονάδες 10)

ii. $\frac{E_{ΔΒ}}{E_{ΑΔ}} = \frac{r^2-\rho^2}{\rho^2}$ (Μονάδες 07)

β) Αν επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{E_{ΕΓ}}{E_{ΑΕ}} = \frac{E_{ΔΒ}}{E_{ΑΔ}}$$

(Μονάδες 08)



22151-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Το εμβαδόν E_{AE} του κύκλου (Α, r) είναι ίσο με $E_{AE} = \pi \cdot r^2$ και το εμβαδόν $E_{EΓ}$ του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, r) και (Α, R) είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των δύο κύκλων, δηλαδή $E_{EΓ} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$ ή $E_{EΓ} = \pi(R^2 - r^2)$.

Άρα $\dfrac{E_{EΓ}}{E_{AE}} = \dfrac{\pi(R^2 - r^2)}{\pi \cdot r^2}$ ή $\dfrac{E_{EΓ}}{E_{AE}} = \dfrac{R^2 - r^2}{r^2}$.

ii. Με όμοιους συλλογισμούς προκύπτει ότι $E_{AΔ} = \pi \cdot \rho^2$ και $E_{ΔB} = \pi(r^2 - \rho^2)$.

Άρα $\dfrac{E_{ΔB}}{E_{AΔ}} = \dfrac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}$.

β) Από τα α)i) και α)ii), για να αποδείξουμε τη ζητούμενη ισότητα $\dfrac{E_{EΓ}}{E_{AE}} = \dfrac{E_{ΔB}}{E_{AΔ}}$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{R^2 - r^2}{r^2} = \dfrac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}$ ή $\dfrac{R^2}{r^2} - 1 = \dfrac{r^2}{\rho^2} - 1$ ή $\dfrac{R^2}{r^2} = \dfrac{r^2}{\rho^2}$ ή $\dfrac{R}{r} = \dfrac{r}{\rho}$.

Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, γιατί:

Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την παράλληλη ΔΕ στην πλευρά του ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΒΓ. Άρα $\dfrac{AΔ}{AB} = \dfrac{AE}{AΓ}$ ή $\dfrac{\rho}{r} = \dfrac{r}{R}$ ή $\dfrac{R}{r} = \dfrac{r}{\rho}$.

22154

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ, που η κοινή κορυφή τους Α βρίσκεται στο κέντρο τριών ομόκεντρων κύκλων (Α, ρ_1), (Α, ρ_2) και (Α, ρ_3), η κορυφή Γ βρίσκεται στον κύκλο (Α, ρ_3), οι κορυφές Β και Ε στον κύκλο (Α, ρ_2) και η κορυφή Δ στον κύκλο (Α, ρ_1), όπως στο σχήμα, με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Ονομάζουμε $E_{ΕΓ}$ το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, ρ_2) και (Α, ρ_3), E_1 το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ_1), E_2 το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ_2) και E_3 το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ_3).

α) Αν $\frac{E_{ΕΓ}}{E_2} = \frac{7}{9}$, να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{3}{4}$. (Μονάδες 07)

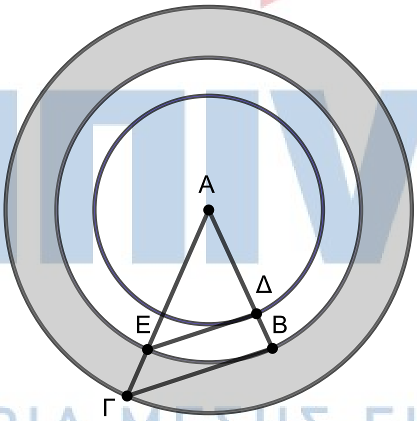
ii. $\frac{E_2}{E_3} = \frac{9}{16}$. (Μονάδες 05)

iii. Αν επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες να αποδείξετε ότι $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 08)

β) Αν $E_{ΕΓ} = E_2$ και επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι $E_{ΔΒ} = E_1$, όπου $E_{ΔΒ}$ είναι το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, ρ_1) και (Α, ρ_2).

(Μονάδες 05)



22154-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Για το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου ισχύει ότι $E_{ΕΓ} = E_3 - E_2$.

Επίσης $\frac{E_{ΕΓ}}{E_2} = \frac{E_3 - E_2}{E_2}$ ή $\frac{7}{9} = \frac{\pi\rho_3^2 - \pi\rho_2^2}{\pi\rho_2^2}$ ή $\frac{7}{9} = \frac{\pi(\rho_3^2 - \rho_2^2)}{\pi\rho_2^2}$ ή $\frac{7}{9} = \frac{\rho_3^2 - \rho_2^2}{\rho_2^2}$ ή

$7\rho_2^2 = 9\rho_3^2 - 9\rho_2^2$ ή $16\rho_2^2 = 9\rho_3^2$ ή $\frac{\rho_2^2}{\rho_3^2} = \frac{9}{16}$ ή $\left(\frac{\rho_2}{\rho_3}\right)^2 = \frac{9}{16}$ ή $\frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{3}{4}$.

ii. Τα εμβαδά των κύκλων (Α, ρ_2) και (Α, ρ_3) είναι $E_2 = \pi\rho_2^2$ και $E_3 = \pi\rho_3^2$, αντίστοιχα.

Άρα $\frac{E_2}{E_3} = \frac{\pi\rho_2^2}{\pi\rho_3^2} = \frac{\rho_2^2}{\rho_3^2} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_3}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

iii. Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την παράλληλη ΔΕ στην πλευρά του ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΒΓ. Άρα:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ} \text{ ή } \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$$

Άρα, από την απάντηση στο α) i έχουμε $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{4}$.

β) Έχουμε $E_{ΕΓ} = E_3 - E_2$ ή $E_2 = E_3 - E_2$ ή $2E_2 = E_3$ ή $2\pi\rho_2^2 = \pi\rho_3^2$ ή $2\rho_2^2 = \rho_3^2$ ή $\rho_3 = \rho_2\sqrt{2}$.

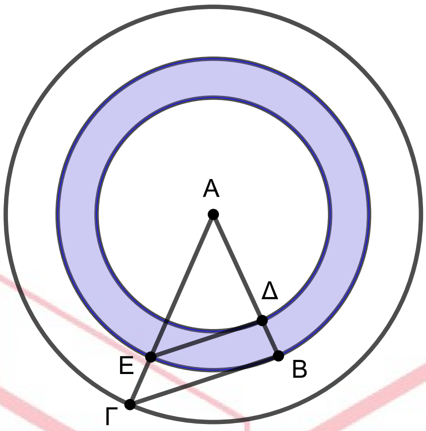
Όπως στο α) iii, από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΑΔΕ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ. Άρα $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$ ή $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$.

Επομένως $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_2\sqrt{2}}$ ή $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ή $\rho_2 = \rho_1\sqrt{2}$ ή $\rho_2^2 = \rho_1^2\left(\sqrt{2}\right)^2$ ή $\rho_2^2 = 2\rho_1^2$ ή $\pi\rho_2^2 = 2\pi\rho_1^2$

ή $E_2 = 2E_1$.

Επίσης, για το εμβαδόν $E_{ΔΒ}$ του δακτυλίου που είναι χρωματισμένος στο παρακάτω σχήμα έχουμε $E_{ΔΒ} = E_2 - E_1$ ή $E_{ΔΒ} = 2E_1 - E_1$ ή $E_{ΔΒ} = E_1$.

22154-Λύση



22157

ΘΕΜΑ 4

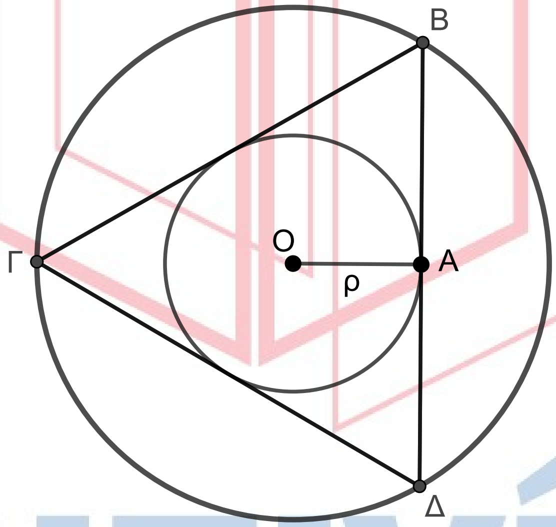
Δίνονται οι ομόκεντροι κύκλοι (O,ρ) και (O,R) με $R>\rho$. Οι κορυφές του ισοπλεύρου τριγώνου ΒΓΔ είναι σημεία του κύκλου (O,R), ενώ οι πλευρές του εφάπτονται του κύκλου (O,ρ), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Επίσης η ΒΔ εφάπτεται του κύκλου (O,ρ) στο Α.
α) Αν το εμβαδόν Ε του κύκλου (O,ρ) είναι ίσο με 36π, να αποδείξετε ότι:

i. ρ = 6. (Μονάδες 08)

ii. $R=12$. (Μονάδες 06)

iii. Το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΒΓΔ είναι ίσο με $108\sqrt{3}$. (Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν (ΒΓΔ) του ισόπλευρου τριγώνου ΒΓΔ είναι ίσο με $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\cdot E$, όπου E είναι το εμβαδόν του κύκλου (Ο, ρ). (Μονάδες 04)



22157-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Η ΟΑ είναι ακτίνα του κύκλου (O,ρ), εφόσον η ΒΔ εφάπτεται του κύκλου στο Α. Υπολογίζουμε το μήκος της ακτίνας του κύκλου (O,ρ):

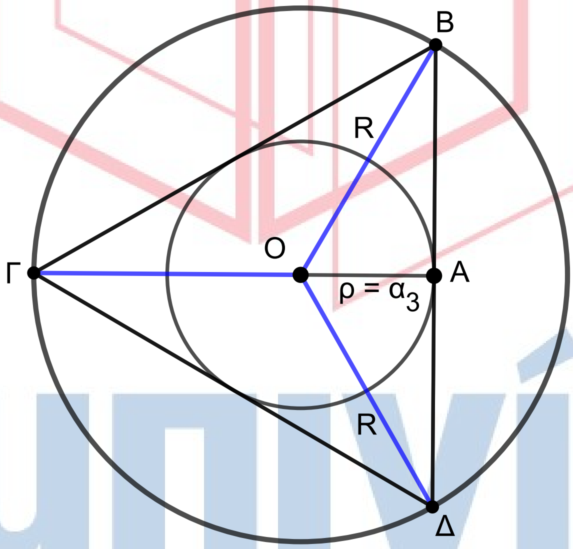
Το εμβαδόν του κύκλου (O,ρ) είναι $E=\pi\cdot\rho^2$. Άρα, $\rho^2=\frac{E}{\pi}$.

Εφόσον $E=36\pi$ είναι $\rho^2=\frac{36\pi}{\pi}$ ή $\rho^2=36$ ή $\rho=6$.

ii. Ισχύει $\alpha_3=\rho$ και $\alpha_3=\frac{R}{2}$ ή $\rho=\frac{R}{2}$ ή $R=2\rho$. Όμως $\rho=6$, άρα $R=2\cdot 6=12$.

iii. Έστω λ_3 η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (O,R). Τότε $\lambda_3=R\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.

Φέρνουμε τις ΟΓ=$OB=O\Delta=R$. Τότε τα τρίγωνα ΟΒΔ, ΟΒΓ, ΟΓΔ είναι ίσα.



Αν $(BO\Delta)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΒΟΔ και $(B\Gamma\Delta)$ το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΒΓΔ, τότε ισχύει:

$$(B\Gamma\Delta)=3(BO\Delta)$$

Επομένως αρκεί να υπολογίσουμε το εμβαδόν του ΒΟΔ:

$$(BO\Delta)=\frac{B\Delta\cdot OA}{2}=\frac{\lambda_3\cdot\rho}{2}=\frac{12\sqrt{3}\cdot 6}{2}=36\sqrt{3}$$

Άρα $(B\Gamma\Delta)=3\cdot 36\sqrt{3}=108\sqrt{3}$.

β) Στην απάντηση του α) i. βρήκαμε ότι αν Ε είναι το εμβαδόν του κύκλου (Ο, ρ), τότε $\rho^2=\frac{E}{\pi}$

22157-Λύση

Στην απάντηση του α) ii. βρήκαμε ότι $R = 2\rho$.

Στην απάντηση του α) iii. βρήκαμε ότι $(ΒΓΔ) = 3(ΒΟΔ) = 3 \cdot \dfrac{\lambda_3 \cdot \rho}{2}$.

Τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν και στο ερώτημα β).

Επίσης γνωρίζουμε ότι $\lambda_3 = R\sqrt{3}$, άρα $\lambda_3 = 2\rho\sqrt{3}$, εφόσον $R = 2\rho$.

Άρα $(ΒΓΔ) = 3 \cdot \dfrac{2\rho\sqrt{3} \cdot \rho}{2}$ ή $(ΒΓΔ) = 3\sqrt{3}\rho^2$ ή $(ΒΓΔ) = 3\sqrt{3} \cdot \dfrac{Ε}{\pi}$ ή $(ΒΓΔ) = \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi} \cdot Ε$.

22242

ΘΕΜΑ 2

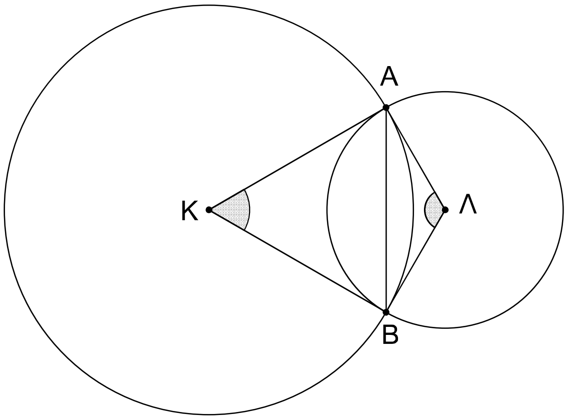
Δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) τέμνονται στα σημεία Α, Β, ώστε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B} = 60^{o}$ και $\mathrm{A}\hat{\Lambda}\mathrm{B} = 120^{o}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\mathrm{AB} = \mathrm{R}$. (Μονάδες 5)

ii. Η κοινή χορδή ΑΒ είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Λ, ρ) και ισχύει $\mathrm{R} = \rho\sqrt{3}$. (Μονάδες 7)

β) Αν ℓ_1 είναι το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ του κύκλου (Κ, R) που είναι μικρότερο του ημικυκλίου και ℓ_2 είναι το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ του κύκλου (Λ, ρ) που είναι μικρότερο του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι $\dfrac{\ell_1}{\ell_2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 13)



22242-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Αφού $\mathrm{A\hat{K}B} = 60^{o}$ η γωνία αυτή είναι κεντρική γωνία κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (K,R), επομένως η AB είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (K, R). Άρα

$$\mathrm{AB} = \mathrm{R}\ (1).$$

ii. Αφού $\mathrm{A\hat{\Lambda}B} = 120^{o}$ η γωνία αυτή είναι κεντρική γωνία ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Λ, ρ), επομένως η AB είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Λ, ρ). Άρα

$$\mathrm{AB} = \rho\sqrt{3}\ (2).$$

Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι $\mathrm{R} = \rho\sqrt{3}$.

β) Αφού $\mathrm{A\hat{K}B} = 60^{o}$ το μήκος ℓ_1 του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ του κύκλου (K, R) που είναι μικρότερο του ημικυκλίου είναι

$$\ell_1 = \frac{\pi R 60}{180} \text{ ή } \ell_1 = \frac{\pi R}{3}\ (3).$$

Αφού $\mathrm{A\hat{\Lambda}B} = 120^{o}$ το μήκος ℓ_2 του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ του κύκλου (Λ, ρ) που είναι μικρότερο του ημικυκλίου είναι

$$\ell_2 = \frac{\pi\rho 120}{180} \text{ ή } \ell_2 = \frac{2\pi\rho}{3}\ (4).$$

Από τις ισότητες (3) και (4) προκύπτει ότι

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\frac{\pi R}{3}}{\frac{2\pi\rho}{3}} = \frac{R}{2\rho}.$$

Όμως από το ερώτημα α) έχουμε $\mathrm{R} = \rho\sqrt{3}$, επομένως

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\rho\sqrt{3}}{2\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

22244

ΘΕΜΑ 4

Ένας κηπουρός θέλει να ποτίσει το γκαζόν που έχει φυτέψει σε έναν τετράγωνο κήπο πλευράς 10 m. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί μηχανισμούς ποτίσματος τους οποίους μπορεί να ρυθμίσει, ώστε να ποτίζουν έναν κυκλικό τομέα με συγκεκριμένη γωνία και ακτίνα.

α) Ο κηπουρός τοποθετεί στις απέναντι κορυφές Α, Γ του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 10m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Να αποδείξετε ότι:

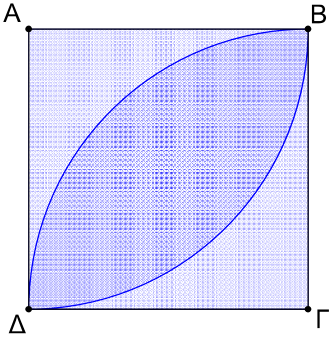
i. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζει κάθε μηχανισμός είναι $25\pi\ \mathrm{m}^2$. (Μονάδες 4)

ii. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζουν ταυτόχρονα και οι δύο μηχανισμοί είναι $50(\pi-2)\ \mathrm{m}^2$. (Μονάδες 5)

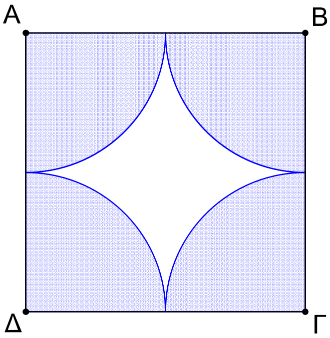
β) Ο κηπουρός τοποθετεί στις τέσσερις κορυφές του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 5m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

i. Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται. (Μονάδες 8)

ii. Για να μην μείνει απότιστη κάποια περιοχή του κήπου ο κηπουρός τοποθετεί έναν πέμπτο μηχανισμό ποτίσματος στο κέντρο του κήπου ο οποίος ποτίζει την περιοχή ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας 5m. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα και να το συγκρίνετε με την απάντηση που βρήκατε στο ερώτημα α). (Μονάδες 8)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

22244-Λύση

ΛΥΣΗ

Το εμβαδόν του τετράγωνου κήπου είναι $Ε = 10^2 = 100 \text{ m}^2$.

α) i. Ο κάθε ένας από τους δύο μηχανισμούς ποτίσματος ποτίζει έναν κυκλικό τομέα γωνίας 90^o και ακτίνας 10m. Το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα είναι

$$Ε_1 = \frac{π \cdot 10^2 \cdot 90}{360} = 25π \text{ m}^2.$$

ii. Οι δύο μηχανισμοί ποτίσματος ποτίζουν ολόκληρο τον κήπο, ενώ μια περιοχή του κήπου ποτίζεται και από τους δύο μηχανισμούς. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τομέων ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου αυξημένο κατά το εμβαδόν της περιοχής του κήπου που ποτίζεται από τους δύο μηχανισμούς. Άρα το εμβαδόν αυτής της περιοχής είναι

$$2Ε_1 - Ε = 50π - 100 = 50(π - 2) \text{ m}^2.$$

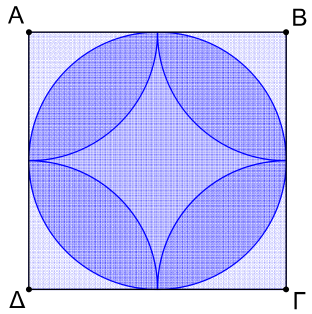
β) i. Ο κάθε ένας από τους τέσσερις μηχανισμούς ποτίσματος ποτίζει έναν κυκλικό τομέα γωνίας 90^o και ακτίνας 5m. Το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα είναι

$$Ε_2 = \frac{π \cdot 5^2 \cdot 90}{360} = \frac{25π}{4} \text{ m}^2.$$

Το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται είναι

$$Ε - 4Ε_2 = 100 - 25π = 25(4 - π) \text{ m}^2.$$

ii.



Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου που ποτίζει ο πέμπτος μηχανισμός είναι

$$Ε_3 = π \cdot 5^2 = 25π.$$

Οι πέντε μηχανισμοί ποτίσματος ποτίζουν ολόκληρο τον κήπο, ενώ τέσσερις περιοχές του κήπου ποτίζονται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων κυκλικών τομέων αυξημένο κατά το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου αυξημένο κατά το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς. Άρα το εμβαδόν αυτό είναι

22244-Λύση

$$4\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_3 - \mathrm{E} = 25\pi + 25\pi - 100 = 50(\pi - 2)\ \mathrm{m}^2.$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή του εμβαδού είναι ίση με αυτή του ερωτήματος α).

22261

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) με ΑΒ= γ , ΑΓ= β και ΒΓ= $\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με $\widehat{\mathrm{A}} > 90^0$. (Μονάδες 8)

β) η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με 120^0. Δίνεται συν$120^0 = -\frac{1}{2}$. (Μονάδες 5)

γ) η γωνία ΒΟΓ ισούται με 120^0. (Μονάδες 5)

δ) το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος, που ορίζεται από τη χορδή ΒΓ και το κυρτογώνιο τόξο ΒΓ, είναι: Ε = $\frac{(4\pi-3\sqrt{3})\mathrm{R}^2}{12}$. Δίνεται ημ$120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 7)

22261-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΒ= γ , ΑΓ= β και ΒΓ= $\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma}$.

Είναι: $B\Gamma^2 = \beta^2+\gamma^2+\beta\gamma$ και $A\Gamma^2 + AB^2 = \beta^2+\gamma^2$.

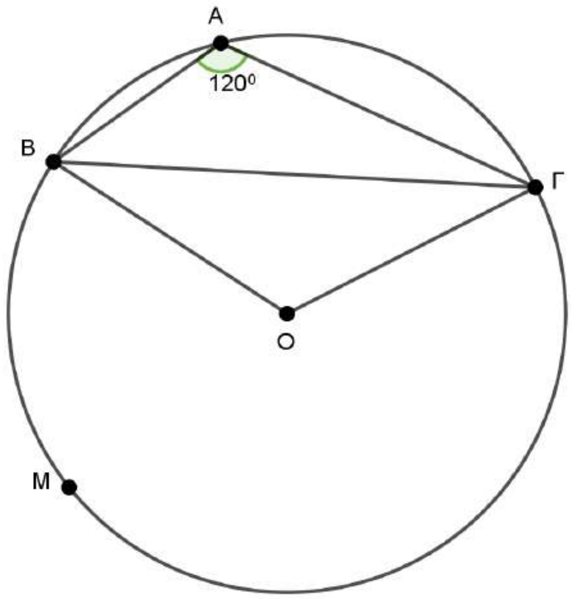
Οπότε: $B\Gamma^2 > A\Gamma^2 + AB^2 \Rightarrow \widehat{A} > 90^0$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 - 2A\Gamma\cdot AB\cdot συνA = \beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cdot συνA$.

Επίσης από το ερώτημα (α): $B\Gamma^2 = \beta^2+\gamma^2+\beta\gamma$.

Άρα: $\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cdot συνA = \beta^2+\gamma^2+\beta\gamma$ ή $συνA = -\frac{1}{2}$, άρα $\widehat{A} = 120^0$.



γ) Η γωνία ΒΑΓ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, οπότε το τόξο στο οποίο βαίνει θα έχει μέτρο διπλάσιο από αυτήν. Άρα $\overset{\frown}{BM\Gamma} = 2\cdot120^0 = 240^0$.

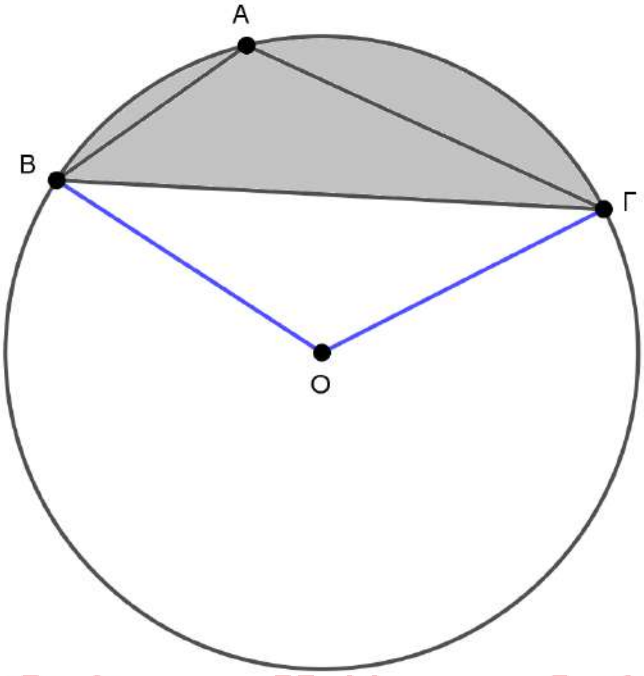
Έτσι για το κυρτογώνιο τόξο ΒΑΓ θα ισχύει: $\overset{\frown}{BA\Gamma} = 360^0 - 240^0 = 120^0$, οπότε η επίκεντρη γωνία ΒΟΓ ισούται με 120^0.

δ) Λόγω του ερωτήματος (γ) είναι: $B\widehat{O}\Gamma = 120^0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$E = (O\ \overset{\frown}{BA\Gamma}) - (OB\Gamma) = \frac{\pi R^2 \mu}{360} - \frac{1}{2}OB\cdot O\Gamma\cdot ημ120^0 = \frac{\pi R^2 120}{360} - \frac{1}{2}\cdot R\cdot R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi R^2 - 3\sqrt{3}R^2}{12} = \frac{(4\pi-3\sqrt{3})R^2}{12}$.

22261-Λύση



22310

ΘΕΜΑ 2

Το παρακάτω σχήμα (Σ) αποτελείται από το ημικύκλιο διαμέτρου AB και το ορθογώνιο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$. Το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά. Δίνεται $\mathrm{AB} = 8\ \mathrm{cm}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

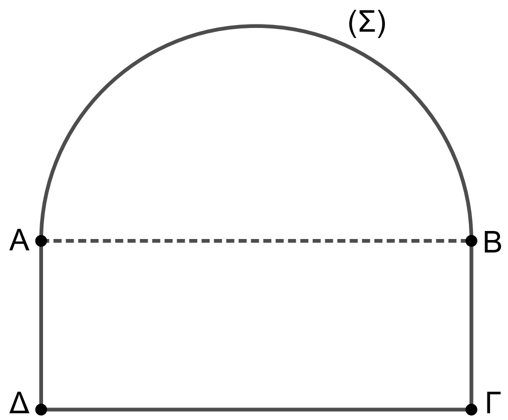
i. το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι $\mathrm{E} = 8\pi\ \ \mathrm{cm}^2$, (Μονάδες 8)

ii. το μήκος του ημικυκλίου είναι $\mathrm{L} = 4\pi\ \ \mathrm{cm}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε:

i. το μήκος της πλευράς $\mathrm{A\Delta}$ του ορθογωνίου, (Μονάδες 5)

ii. την περίμετρο του σχήματος (Σ) . (Μονάδες 4)



22310-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Επειδή η διάμετρος του ημικυκλίου είναι $AB = 8\ \text{cm}$, η ακτίνα του είναι

$\rho = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4\ \text{cm}$, άρα το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι

$E = \frac{1}{2}\cdot \pi\rho^2 = \frac{1}{2}\cdot \pi \cdot 4^2 = 8\pi\ \ \text{cm}^2$.

ii) Το μήκος του ημικυκλίου είναι $L = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\rho = \pi\rho = 4\pi\ \ \text{cm}$.

β) i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$ είναι $(ΑΒΓΔ) = ΑΒ \cdot ΑΔ = 8 \cdot ΑΔ\ \text{cm}^2$.

Επειδή το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά , θα έχουμε

$(ΑΒΓΔ) = E$ ή $8 \cdot ΑΔ = 8\pi$ ή $ΑΔ = \pi\ \text{cm}$.

ii) Το μήκος του ημικυκλίου από το ερώτημα (α ii) είναι $L = 4\pi\ \ \text{cm}$.

Στο (β i) βρήκαμε $ΑΔ = \pi\ \text{cm}$ και επειδή το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο, είναι

$ΒΓ = ΑΔ = \pi\ \text{cm}$ και $ΔΓ = ΑΒ = 8\ \text{cm}$.

Η περίμετρος P του σχήματος (Σ) είναι

$P = L + ΑΔ + ΔΓ + ΒΓ$ ή $P = 4\pi + \pi + 8 + \pi = 6\pi + 8\ \ \text{cm}$.

22389

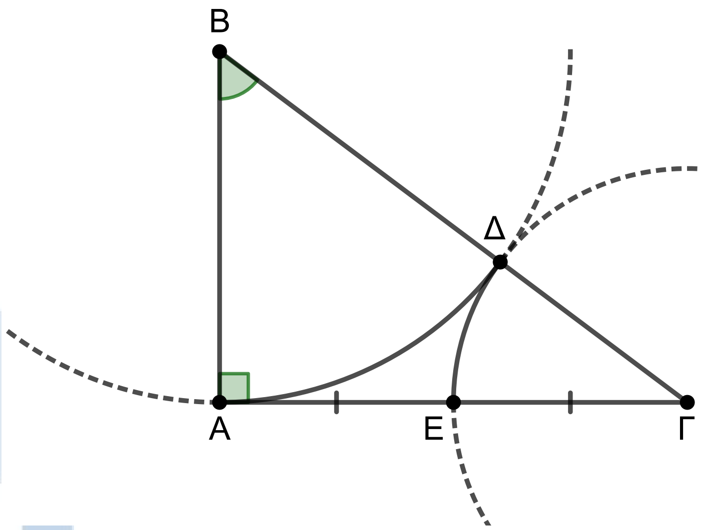
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\widehat{Α} = 90°$. Με κέντρο το σημείο $Β$ και ακτίνα $R = ΒΑ$ γράφουμε τον κύκλο $(Β, R)$ ο οποίος τέμνει την πλευρά $ΒΓ$ στο σημείο $Δ$. Με κέντρο το σημείο $Γ$ και ακτίνα $ρ = ΓΔ$ γράφουμε τον κύκλο $(Γ, ρ)$ ο οποίος τέμνει την πλευρά $ΑΓ$ στο σημείο $Ε$. Έστω ότι το $Ε$ είναι το μέσο της $ΑΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι $ρ = \frac{2}{3}R$. (Μονάδες 8)

β) Έστω $Ε_1$ το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ και $Ε_2$ το εμβαδόν του κύκλου $(Β, R)$. Να αποδείξετε ότι $\frac{Ε_2}{Ε_1} = \frac{3π}{2}$. (Μονάδες 8)

γ) Έστω $\widehat{Β} = μ°$ και $Ε_3$ και $Ε_4$ είναι το εμβαδά των κυκλικών τομέων $Β\widehat{ΑΔ}$ και $Γ\widehat{ΔΕ}$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\frac{Ε_4}{Ε_3} = \frac{4(90-μ)}{9μ}$. (Μονάδες 9)



22389-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\mathrm{BA} = \mathrm{B\Delta} = \mathrm{R}$ και $\Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{E} = \rho$.

Επειδή το E είναι το μέσο της $\mathrm{A\Gamma}$, είναι $\mathrm{A\Gamma} = 2\Gamma\mathrm{E} = 2\rho$.

Επίσης είναι $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{B\Delta} + \Delta\Gamma = \mathrm{R} + \rho$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ($\widehat{\mathrm{A}} = 90°$) έχουμε

$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2$

$(\mathrm{R} + \rho)^2 = \mathrm{R}^2 + (2\rho)^2$

$\mathrm{R}^2 + 2\mathrm{R}\rho + \rho^2 = \mathrm{R}^2 + 4\rho^2$

$2\mathrm{R}\rho = 3\rho^2$

$\rho = \frac{2}{3}\mathrm{R}$.

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι

$\mathrm{E}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{AB} = \frac{1}{2} \cdot 2\rho \cdot \mathrm{R} = \frac{2}{3}\mathrm{R} \cdot \mathrm{R} = \frac{2}{3}\mathrm{R}^2$

και του κύκλου (B, R), $\mathrm{E}_2 = \pi\mathrm{R}^2$, άρα

$$\frac{\mathrm{E}_2}{\mathrm{E}_1} = \frac{\pi\mathrm{R}^2}{\frac{2}{3}\mathrm{R}^2} = \frac{3\pi}{2} .$$

γ) Ο κυκλικός τομέας $\mathrm{B}\,\widehat{\mathrm{A\Delta}}$ είναι ακτίνας R και γωνίας $\widehat{\mathrm{B}} = \mu°$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$$\mathrm{E}_3 = \frac{\pi\mathrm{R}^2\mu}{360}.$$

Ο κυκλικός τομέας $\Gamma\,\widehat{\Delta\mathrm{E}}$ είναι ακτίνας $\rho = \frac{2}{3}\mathrm{R}$ και γωνίας $\widehat{\Gamma} = 90° - \mu°$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$$\mathrm{E}_4 = \frac{\pi\rho^2(90-\mu)}{360} = \frac{4\pi\mathrm{R}^2(90-\mu)}{9\cdot 360} .$$

Άρα

$$\frac{\mathrm{E}_4}{\mathrm{E}_3} = \frac{4\pi\mathrm{R}^2(90-\mu)\cdot 360}{9\cdot 360\cdot \pi\mathrm{R}^2\mu} = \frac{4(90-\mu)}{9\mu} .$$