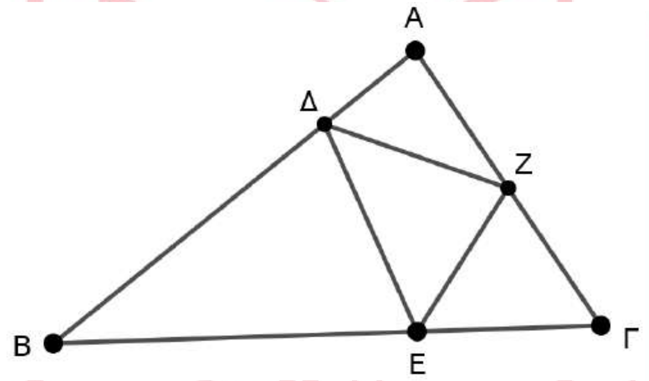
15978

ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, τα Δ, Ε, Ζ, είναι σημεία των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα, ώστε: ΑΔ= $\frac{1}{4}$ΑΒ, ΒΕ= $\frac{2}{3}$ΒΓ και ΓΖ= $\frac{1}{2}$ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) (ΑΔΖ) = $\frac{1}{8}$ (ΑΒΓ), (ΒΕΔ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΓ), (ΓΕΖ) = $\frac{1}{6}$ (ΑΒΓ). (Μονάδες 15)

β) (ΔΕΖ)= $\frac{5}{24}$ (ΑΒΓ). (Μονάδες 10)



15978-Λύση

ΛΥΣΗ

Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΔ= $\frac{1}{4}$ΑΒ, οπότε ΒΔ= $\frac{3}{4}$ΑΒ, ΒΕ= $\frac{2}{3}$ΒΓ, άρα ΓΕ= $\frac{1}{3}$ΒΓ και

ΓΖ= $\frac{1}{2}$ΑΓ, επομένως ΑΖ = $\frac{1}{2}$ΑΓ .

α) Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία Α, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Δηλαδή: $\frac{(\text{ΑΔΖ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{\text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΖ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}} = \frac{\frac{1}{4}\text{ΑΒ}\cdot\frac{1}{2}\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}} = \frac{1}{8}$, οπότε (ΑΔΖ) = $\frac{1}{8}$ (ΑΒΓ).

Επίσης: $\frac{(\text{ΒΕΔ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{\text{ΒΔ}\cdot\text{ΒΕ}}{\text{ΒΑ}\cdot\text{ΒΓ}} = \frac{\frac{3}{4}\text{ΑΒ}\cdot\frac{2}{3}\text{ΒΓ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}} = \frac{1}{2}$, οπότε (ΒΕΔ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΓ).

Όμοια: $\frac{(\text{ΓΕΖ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{\text{ΓΖ}\cdot\text{ΓΕ}}{\text{ΓΑ}\cdot\text{ΓΒ}} = \frac{\frac{1}{2}\text{ΓΑ}\cdot\frac{1}{3}\text{ΒΓ}}{\text{ΓΑ}\cdot\text{ΓΒ}} = \frac{1}{6}$, οπότε (ΓΕΖ) = $\frac{1}{6}$ (ΑΒΓ).

β) Λόγω του ερωτήματος (α) έχουμε:

(ΔΕΖ)= (ΑΒΓ) – (ΑΔΖ) – (ΒΕΔ) – (ΓΕΖ)= (ΑΒΓ) - $\frac{1}{8}$ (ΑΒΓ) - $\frac{1}{2}$ (ΑΒΓ) - $\frac{1}{6}$ (ΑΒΓ) = $\frac{5}{24}$ (ΑΒΓ).

15979

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ=5 και $\widehat{A} = 120^0$. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΓ = $5\sqrt{3}$. (Μονάδες 13)

β) (ΑΒΓ) = $\frac{25\sqrt{3}}{4}$. (Μονάδες 12)

15979-Λύση

ΛΥΣΗ

Έχουμε: ΑΒ = ΑΓ = 5 και $\widehat{A}$ = 120^0.

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, από το νόμο των συνημιτόνων είναι:

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 – 2·ΑΒ·ΑΓ·συνΑ = 5^2 + 5^2 – 2·5·5·συν120^0 = 25 + 25 – 50·(-\frac{1}{2}) = 75$,

οπότε ΒΓ = $\sqrt{75}$= $5\sqrt{3}$.

β) Επίσης (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}·ΑΒ·ΑΓ·ημΑ = \frac{1}{2}·5·5·ημ120^0 = \frac{1}{2}·25·\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$.

16097

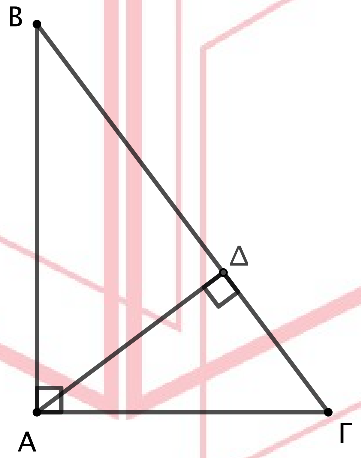
ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.

ii. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Στο σχήμα, η προβολή της πλευράς ΑΒ στην υποτείνουσα ΒΓ είναι το τμήμα ΓΔ.



iv. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

v. Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

(Μονάδες 15)

16097-Λύση

ΛΥΣΗ

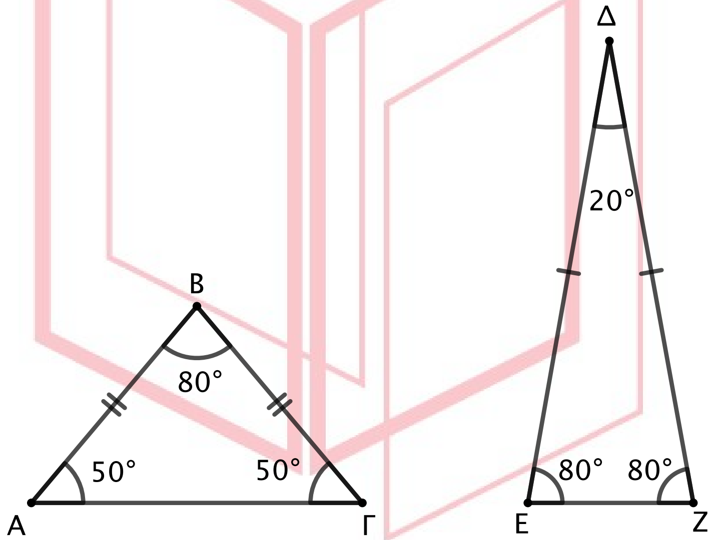
α)

i. Σωστό

Πόρισμα, σελίδα 15 σχολικό βιβλίο.

ii. Λάθος

Για παράδειγμα, τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΒΓ) και ΕΔΖ (ΕΔ = ΔΖ) του σχήματος έχουν $\hat{B} = \hat{E} = 80^o$. Ωστόσο, δεν είναι όμοια, αφού δεν έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.



iii. Λάθος

Η προβολή της πλευράς ΑΒ στην υποτείνουσα ΒΓ είναι το τμήμα ΒΔ.

iv. Λάθος

Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

v. Σωστό

Θεώρημα Ι, σελίδα 91 σχολικό βιβλίο.

β) §10.3, Θεώρημα Ι (απόδειξη), σελίδα 72 σχολικό βιβλίο (Σχήμα 7).

16102

ΘΕΜΑ 2

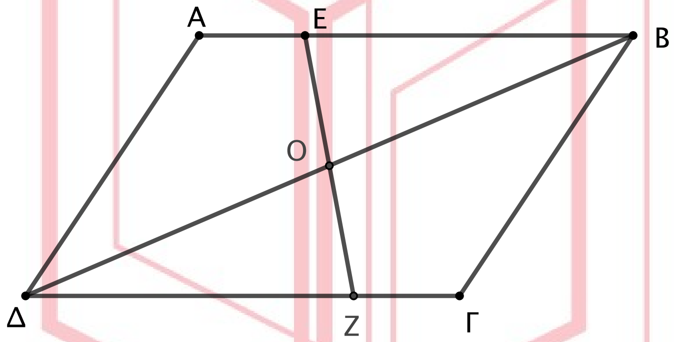
Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από το κέντρο Ο φέρουμε ευθεία η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α) (ΔΟΖ) = (ΒΟΕ).

(Μονάδες 10)

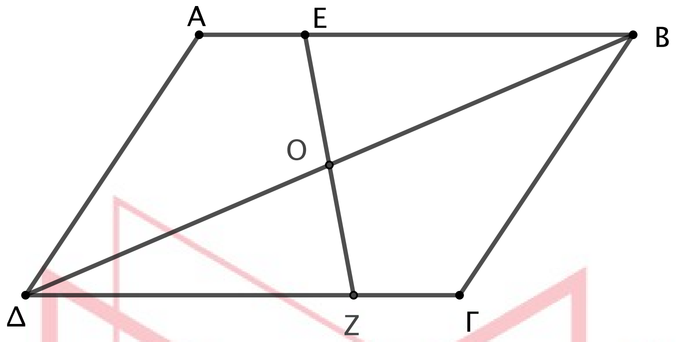
β) (ΔΟΕΑ) = (ΒΓΖΟ).

(Μονάδες 15)



16102-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΔΟΖ και ΒΟΕ είναι ίσα διότι έχουν:

ΔΟ=ΒΟ (το Ο είναι μέσο της ΔΒ)

$\Delta\hat{O}Z = B\hat{O}E$ (ως κατακορυφήν)

$Z\hat{\Delta}O = E\hat{B}O$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ τεμνόμενων από τη ΒΔ)

Επομένως, τα τρίγωνα ΔΟΖ και ΒΟΕ θα είναι ισοδύναμα, δηλαδή (ΔΟΖ) = (ΒΟΕ).

β) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΓΒΔ είναι ίσα, οπότε:

$$(A\Delta B) = (\Gamma B\Delta)$$

Από το σχήμα έχουμε ότι (ΑΔΒ) = (ΔΟΕΑ) + (ΒΟΕ) και (ΓΒΔ) = (ΒΓΖΟ) + (ΔΟΖ).

Οπότε, είναι:

$$(\Delta OEA) + (BOE) = (B\Gamma ZO) + (\Delta OZ)$$

Αφού (ΒΟΕ) = (ΔΟΖ), τότε είναι (ΔΟΕΑ) = (ΒΓΖΟ).

16114

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο ώστε $\Gamma\mathrm{E} = \frac{1}{4}\Gamma\mathrm{A}$.

α) Αν Δ σημείο της ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΔ = $\frac{1}{3}$ ΑΒ:

i. Να αποδείξετε ότι $(\mathrm{AB}\Gamma) = 4(\mathrm{A}\Delta\mathrm{E})$ (Μονάδες 10)

ii. Αν από τα Ε και Γ φέρουμε τις κάθετες ΕΖ και ΓΗ προς την ΑΒ, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{\mathrm{EZ}}{\Gamma\mathrm{H}}$ (Μονάδες 09)

β) Θεωρώντας ότι το Ε παραμένει ακίνητο, ενώ το Δ κινείται στο εσωτερικό της ΑΒ, να βρείτε σε ποιο σημείο πρέπει να βρεθεί το Δ ώστε $(\mathrm{AB}\Gamma) = 2(\mathrm{A}\Delta\mathrm{E})$ (Μονάδες 06)

16114-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν την γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$ κοινή οπότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν την γωνία.

Επίσης ΓΕ = $\frac{1}{4}\mathrm{A\Gamma}$, οπότε $\mathrm{AE} = \frac{3}{4}\mathrm{A\Gamma}$.

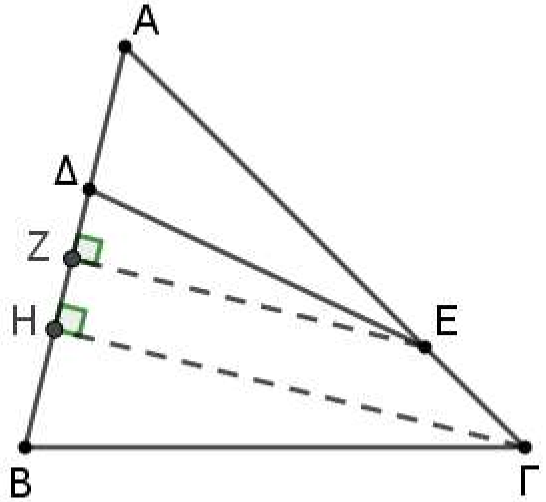
$\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, άρα (ΑΒΓ) = 4(ΑΔΕ).

ii. Τα ΕΖ και ΓΗ είναι ύψη των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ αντίστοιχα.

$\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{EZ}}{\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{\Gamma H}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{\Gamma H}} = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{\Gamma H}}$. Επειδή όμως $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{1}{4}$ από το ερώτημα

(α), θα έχουμε $\frac{1}{4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{\Gamma H}} \Rightarrow \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{\Gamma H}} = \frac{1}{4}:\frac{1}{3} = \frac{3}{4}$

β) Για να ισχύει $(\mathrm{AB\Gamma}) = 2(\mathrm{A\Delta E})$ πρέπει $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{1}{2}$. Σκεπτόμενοι ανάλογα με το πρώτο ερώτημα $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{1}{2}$ και επειδή ο λόγος $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{3}{4}$ παραμένει σταθερός θα έχουμε $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}:\frac{3}{4} = \frac{2}{3} \Rightarrow \mathrm{A\Delta} = \frac{2}{3}\mathrm{AB}$.



16127

ΘΕΜΑ 2

Ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχει πλευρά $ΒΓ = 9$ και αντίστοιχο ύψος $ΑΔ = 8$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$. (Μονάδες 9)

β) Ένα άλλο τρίγωνο $Α'Β'Γ'$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $ΑΒΓ$ και η ομόλογη πλευρά της $ΒΓ$ είναι η $Β'Γ' = 6$. Να υπολογίσετε:

i. τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$, (Μονάδες 7)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $Α'Β'Γ'$. (Μονάδες 9)

16127-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι

$$Ε = \frac{1}{2} ΒΓ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 = 36.$$

β) i) Ο λόγος ομοιότητας των όμοιων τριγώνων $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$ είναι

$$λ = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

ii) Έστω $Ε'$ το εμβαδόν του τριγώνου $Α'Β'Γ'$. Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, οπότε θα έχουμε

$$\frac{Ε}{Ε'} = λ^2 \text{ ή } \frac{36}{Ε'} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{ ή } \frac{4 \cdot 9}{Ε'} = \frac{9}{4} \text{ ή } \frac{4}{Ε'} = \frac{1}{4} \text{ ή } Ε' = 16.$$

16135

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με υποτείνουσα $ΒΓ = 10$ και έστω ότι $Δ$ είναι η προβολή της κορυφής $Α$ στην $ΒΓ$.

α) Αν $ΔΒ = 2$ να υπολογίσετε:

i. το ύψος $ΑΔ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$, (Μονάδες 7)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$. (Μονάδες 5)

β) Υποθέστε ότι το σημείο $Α$ κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $ΒΓ$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι $(ΑΒΓ) = 5ΑΔ$.

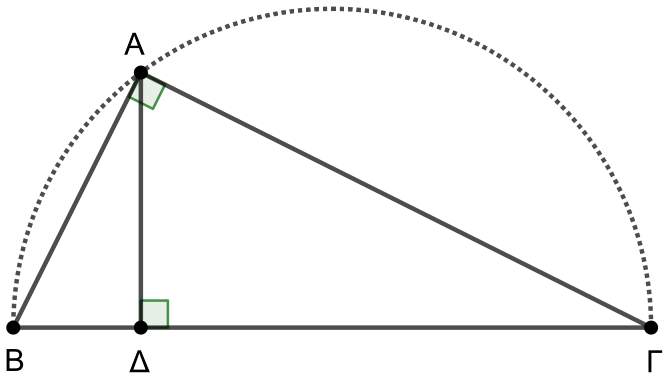
(Μονάδες 7)

ii. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για όλες τις θέσεις του $Α$ πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $ΒΓ$, το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ δεν υπερβαίνει το 25».

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)



16135-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Είναι $ΔΒ = 2$ οπότε $ΔΓ = ΒΓ - ΔΒ = 10 - 2 = 8$. Όμως σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα. Επομένως

$$ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ \quad ή \quad ΑΔ^2 = 2 \cdot 8 \quad ή \quad ΑΔ^2 = 16 \quad ή \quad ΑΔ = 4\,.$$

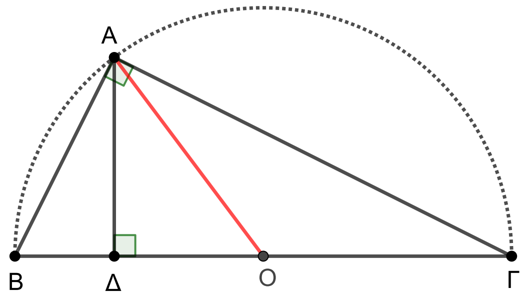
ii. Είναι $ΒΓ = 10$ και $ΑΔ = 4$ οπότε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι

$$(ΑΒΓ) = \frac{ΒΓ \cdot ΑΔ}{2} \quad ή \quad (ΑΒΓ) = \frac{10 \cdot 4}{2} \quad ή \quad (ΑΒΓ) = 20.$$

β) i. Καθώς το σημείο $Α$ κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $ΒΓ$, η βάση του τριγώνου $ΒΓ$ παραμένει σταθερή και ίση με 10, ενώ το αντίστοιχο ύψος $ΑΔ$ μεταβάλλεται. Επομένως μεταβάλλεται και το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$, το οποίο θα είναι

$$(ΑΒΓ) = \frac{ΒΓ \cdot ΑΔ}{2} \quad ή \quad (ΑΒΓ) = \frac{10 \cdot ΑΔ}{2} \quad ή \quad (ΑΒΓ) = 5ΑΔ.$$

ii. Έστω $Ο$ το κέντρο του κύκλου με διάμετρο τη $ΒΓ$.



- Το $Α$ ανήκει στον κύκλο με κέντρο $Ο$ και ακτίνα $\frac{ΒΓ}{2} = 5$. Επομένως $ΟΑ = 5$ (1).
- Το $Δ$ είναι η προβολή του $Α$ στη $ΒΓ$ και το $Ο$ σημείο της $ΒΓ$. Επομένως $ΑΔ \leq ΑΟ$ (2).
- $(ΑΒΓ) = 5ΑΔ$ (από το β(i))
  $\leq 5ΑΟ$ (από την (2))
  $= 25$ (από την (1)) .

Επομένως $(ΑΒΓ) \leq 25$, οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής.

16582

ΘΕΜΑ 4

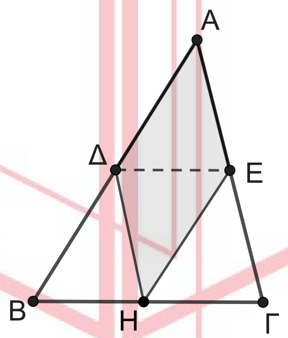
Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Έστω ότι $\frac{AΔ}{AB} = \frac{AE}{AΓ} = \frac{1}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)

ii. Αν Η είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζετε ότι $\frac{AΔ}{AB} = \frac{AE}{AΓ} = λ$, τότε ποια είναι η σχέση των εμβαδών του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ και του τριγώνου ΑΒΓ; (Μονάδες 06)



16582-Λύση

ΛΥΣΗ

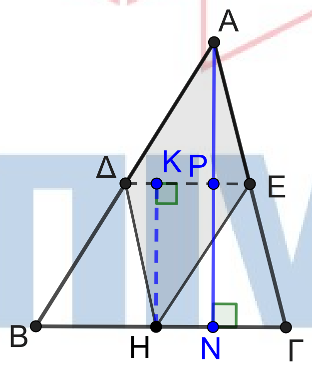
α) i. Εφόσον $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$, τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη στις πλευρές αυτές γωνία ίση (είναι η κοινή γωνία $\hat{A}$). Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή $\frac{1}{2}$.

Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους θα είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, δηλαδή $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. Άρα το εμβαδόν του ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του ΑΒΓ.

ii. <u>α΄ τρόπος</u>: Επειδή καθένας από τους λόγους $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ και $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$ είναι ίσος με $\frac{1}{2}$, τα Δ και Ε είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ. Άρα η ΔΕ είναι παράλληλη με τη ΒΓ.

Σχεδιάζουμε τα ύψη:

- ΑΝ του ΑΒΓ από την κορυφή Α και
- ΗΚ του ΗΕΔ από την κορυφή Η.



Ονομάζουμε Ρ το σημείο που το ΑΝ τέμνει το ΔΕ. Τότε το ΑΡ είναι κάθετο στη ΔΕ, αφού το ΑΝ είναι κάθετο στη ΒΓ η οποία είναι παράλληλη στο ΔΕ. Άρα το ΑΡ είναι ύψος του τριγώνου ΑΔΕ από την κορυφή Α.

Λόγω ομοιότητας των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ τα ύψη που αντιστοιχούν σε ομόλογες πλευρές είναι ανάλογα με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$, δηλαδή τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων.

Άρα $\frac{ΑΡ}{ΑΝ}=\frac{1}{2}$ ή $ΑΡ=\frac{ΑΝ}{2}$. Επομένως $ΡΝ=\frac{ΑΝ}{2}=ΑΡ$.

Όμως $ΗΚ=ΡΝ$, ως ευθύγραμμα τμήματα που είναι κάθετα στις παράλληλες ευθείες ΔΕ και ΒΓ, στις οποίες βρίσκονται τα άκρα τους. Άρα $ΗΚ=ΑΡ$.

16582-Λύση

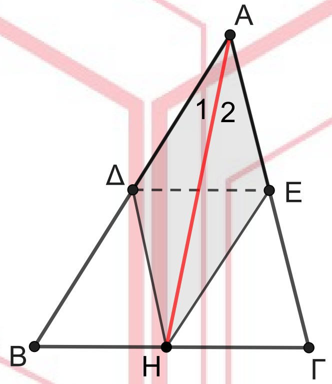
Επομένως τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΗΕΔ έχουν κοινή βάση τη ΔΕ και ίσα ύψη, τα ΑΡ και ΗΚ, άρα έχουν ίσα εμβαδά. Δηλαδή $(\text{ΑΔΕ})=(\text{ΗΕΔ})$.

Το εμβαδόν του ΑΔΗΕ είναι ίσο με $(\text{ΑΔΗΕ})=(\text{ΑΔΕ})+(\text{ΗΕΔ})=2(\text{ΑΔΕ})$.

Όμως από το ερώτημα α)i $(\text{ΑΔΕ})=\dfrac{(\text{ΑΒΓ})}{4}$. Άρα $(\text{ΑΔΗΕ})=2\cdot\dfrac{(\text{ΑΒΓ})}{4}=\dfrac{(\text{ΑΒΓ})}{2}$.

Δηλαδή το εμβαδόν του ΑΔΗΕ είναι το μισό του εμβαδού του ΑΒΓ.

<u>β΄ τρόπος</u>: Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ.



Τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΑΗΒ έχουν κοινή γωνία την $\hat{A}_1$, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\hat{A}_1$.

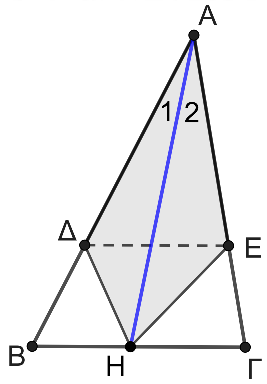
Δηλαδή $\dfrac{(\text{ΑΗΔ})}{(\text{ΑΗΒ})}=\dfrac{\text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΗ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΗ}}=\dfrac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}}=\dfrac{1}{2}$ ή $(\text{ΑΗΔ})=\dfrac{1}{2}\cdot(\text{ΑΗΒ})$.

Με όμοιο συλλογισμό και κοινή γωνία την $\hat{A}_2$, για τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΑΗΓ έχουμε ότι

$(\text{ΑΗΕ})=\dfrac{1}{2}\cdot(\text{ΑΗΓ})$.

Επομένως $(\text{ΑΔΗΕ})=(\text{ΑΗΔ})+(\text{ΑΗΕ})=\dfrac{1}{2}\cdot(\text{ΑΗΒ})+\dfrac{1}{2}\cdot(\text{ΑΗΓ})=\dfrac{1}{2}\cdot\left[(\text{ΑΗΒ})+(\text{ΑΗΓ})\right]=\dfrac{1}{2}\cdot(\text{ΑΒΓ})$.

β) Αν είναι $\dfrac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}}=\dfrac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}}=\lambda$, τότε $0<\lambda<1$, γιατί το $\text{ΑΔ}<\text{ΑΒ}$.



16582-Λύση

Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ.

Τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΑΗΒ έχουν κοινή γωνία την $\hat{A}_1$, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\hat{A}_1$.

Δηλαδή $\frac{(ΑΗΔ)}{(ΑΗΒ)}=\frac{ΑΔ\cdot ΑΗ}{ΑΒ\cdot ΑΗ}=\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\lambda$ ή $(ΑΗΔ)=\lambda\cdot(ΑΗΒ)$.

Με όμοιο συλλογισμό, για τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΑΗΓ έχουμε ότι:

$$\frac{(ΑΗΕ)}{(ΑΗΓ)}=\frac{ΑΕ\cdot ΑΗ}{ΑΓ\cdot ΑΗ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\lambda \text{ ή } (ΑΗΕ)=\lambda\cdot(ΑΗΓ)$$

Επομένως $(ΑΔΗΕ)=(ΑΗΔ)+(ΑΗΕ)=\lambda\cdot(ΑΗΒ)+\lambda\cdot(ΑΗΓ)=\lambda\cdot\left[(ΑΗΒ)+(ΑΗΓ)\right]=\lambda\cdot(ΑΒΓ)$.

16732

ΘΕΜΑ 4

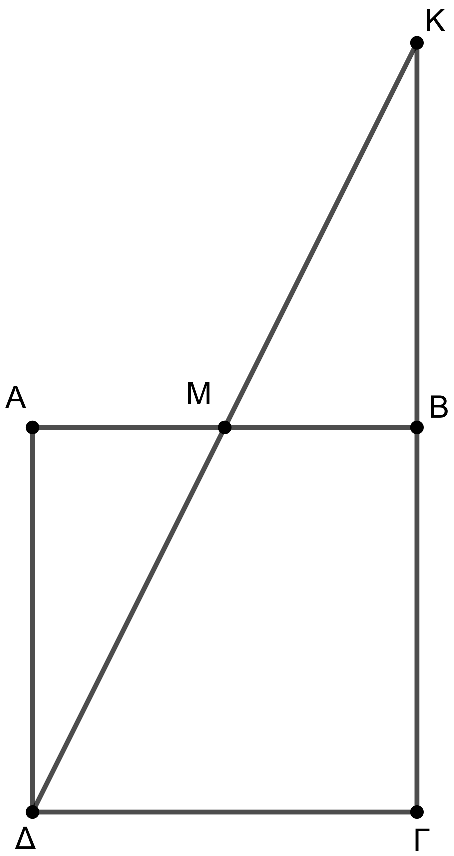
Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της ΑΒ. Οι ευθείες ΔΜ και ΓΒ τέμνονται στο Κ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ είναι όμοια. (5 μονάδες)

β) (ΜΚΒ) = $\frac{1}{4}$ (ΔΚΓ) (5 μονάδες)

γ) (ΜΒΓΔ) = $\frac{3}{4}$ (ΑΒΓΔ). (10 μονάδες)

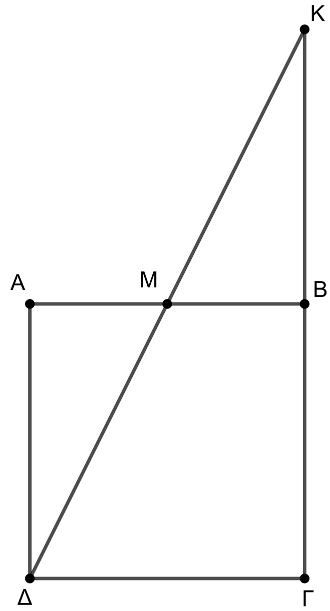
δ) Αν (ΜΒΓΔ) = 75 m^2 να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου. (5 μονάδες)



16732-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



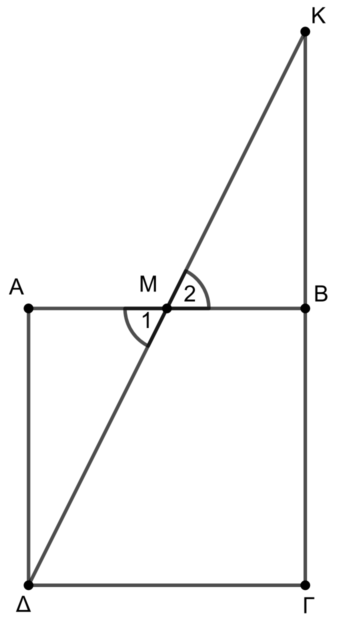
Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ είναι ορθογώνια και έχουν κοινή τη γωνία $\widehat{\mathrm{K}}$. Οπότε έχουν δυο γωνίες τους ίσες μια προς μια, άρα είναι όμοια.

β) Τα όμοια τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΒ έχουν λόγο ομοιότητας λ = $\frac{\mathrm{MB}}{\Delta\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}$. Οπότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, δηλαδή: $\frac{(\mathrm{MKB})}{(\Delta\mathrm{K}\Gamma)} = \lambda^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Συνεπώς $(\mathrm{MKB}) = \frac{1}{4}(\Delta\mathrm{K}\Gamma)$.

16732-Λύση

γ)



Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΜΚΒ είναι ίσα αφού έχουν

- ΑΜ = ΜΒ, το Μ είναι μέσο της ΑΒ
- $\Delta\widehat{A}M = M\widehat{B}K = 90^o$
- $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$, ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα, θα είναι και ισεμβαδικά, δηλαδή (ΑΜΔ) = (ΜΚΒ) (1).

Για το εμβαδόν του τριγώνου ΔΚΓ έχουμε:

(ΔΚΓ) = (ΔΜΒΓ) + (ΜΚΒ) = (ΔΜΒΓ) + (ΑΜΔ) = (ΑΒΓΔ), λόγω της σχέσης (1)

Για το εμβαδόν του ΜΒΓΔ έχουμε: (ΜΒΓΔ) = (ΔΚΓ) – (ΜΚΒ) = (ΔΚΓ) – $\frac{1}{4}$(ΔΚΓ), λόγω του β) ερωτήματος.

Άρα (ΜΒΓΔ) = $\frac{3}{4}$(ΑΒΓΔ)

δ) Έστω ότι το τετράγωνο έχει πλευρά α. Τότε (ΑΒΓΔ) = α^2 και (ΜΒΓΔ) = 75.

Από το ερώτημα γ) έχουμε ότι: 75 = $\frac{3}{4}$ α^2 ή $\alpha^2 = \frac{4}{3} \cdot 75$ ή $\alpha^2 = 100$.

Άρα $\alpha = 10$ m

16756

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ.

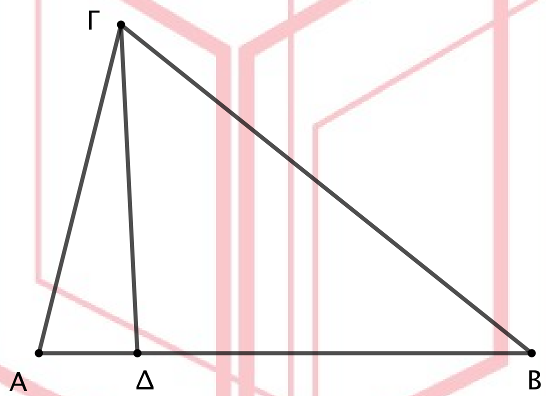
α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΔΒΓ})} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΒ}}$$

(Μονάδες 15)

β) Αν $(\text{ΑΒΓ}) = 25$ και $\text{ΑΒ} = 5\text{ΑΔ}$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ.

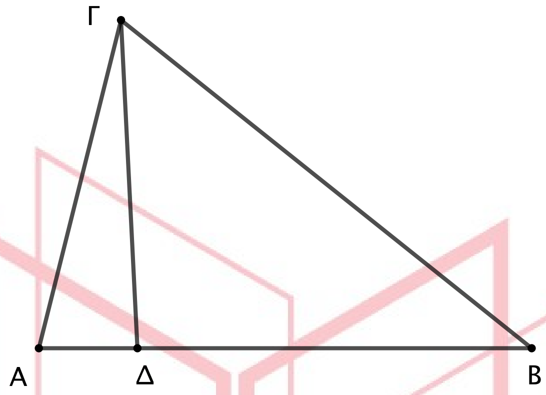
(Μονάδες 10)



16756-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{B}$. Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\hat{B}$ σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΔΒΓ)} = \frac{ΑΒ.ΒΓ}{ΔΒ.ΒΓ} \text{ ή } \frac{(ΑΒΓ)}{(ΔΒΓ)} = \frac{ΑΒ}{ΔΒ}$$

β) Αφού είναι $ΑΒ = 5ΑΔ$, τότε:

$$ΔΒ = ΑΒ - ΑΔ = 5ΑΔ - ΑΔ = 4ΑΔ$$

Οπότε, είναι:

$$\frac{25}{(ΔΒΓ)} = \frac{5ΑΔ}{4ΑΔ} \text{ ή } \frac{25}{(ΔΒΓ)} = \frac{5}{4} \text{ ή } (ΔΒΓ) = \frac{25 \cdot 4}{5}$$

Άρα, $(ΔΒΓ) = 20$.

16770

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία $x\hat{O}\psi$ και η διχοτόμος της Οδ. Πάνω στην Οδ παίρνουμε τυχαία σημεία Α και Β. Θεωρούμε σημείο Ε στην πλευρά Οx τέτοιο ώστε $O\hat{E}B = 70^o$ και σημείο Δ στην Οψ τέτοιο ώστε $O\hat{\Delta}A = 70^o$.

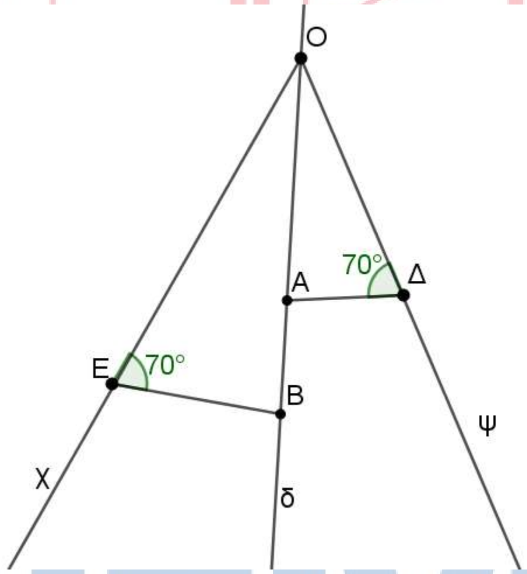
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β) Αν $\frac{OA}{OB} = \frac{2}{3}$ να υπολογίσετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών των τριγώνων.

(Μονάδες 06)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΔ είναι 28 τ.μ. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΟΕΒ.

(Μονάδες 09)



16770-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ έχουν:

$E\widehat{O}B = \Delta\widehat{O}A$, επειδή η ΟΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\widehat{O}\Delta$.

$\widehat{E} = \widehat{\Delta} = 70^o$.

Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μια προς μια αντίστοιχα.

β) Αφού τα δύο τρίγωνα είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

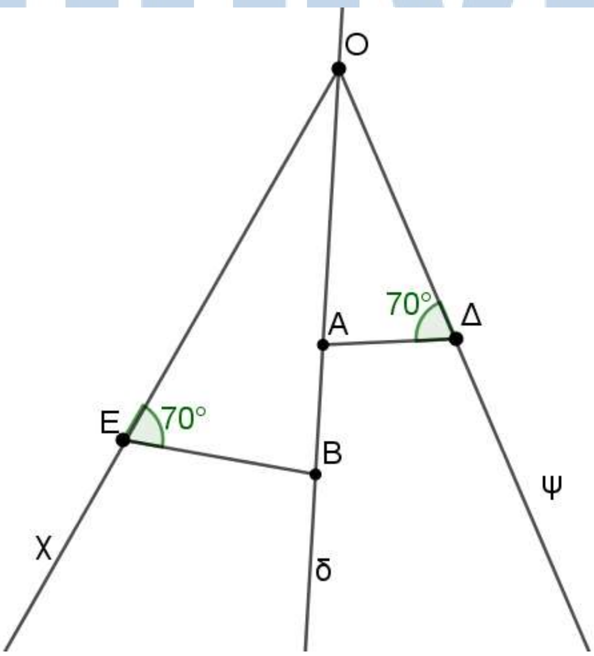
	Ίσες γωνίες		
	$\widehat{E} = \widehat{\Delta}$	$E\widehat{O}B = \Delta\widehat{O}A$	$\widehat{B} = \widehat{A}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΟΕΒ	ΟΒ	ΕΒ	ΟΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΟΔΑ	ΟΑ	ΑΔ	ΟΔ

Επομένως, θα είναι:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{EB}{A\Delta} = \frac{OE}{O\Delta}$$

γ) Τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ είναι όμοια, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, δηλαδή: $\frac{(OEB)}{(O\Delta A)} = \left(\frac{OB}{OA}\right)^2$.

Άρα $\frac{(OEB)}{28} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, δηλαδή $(OEB) = \frac{9}{4}28 = 63$ τ.μ.



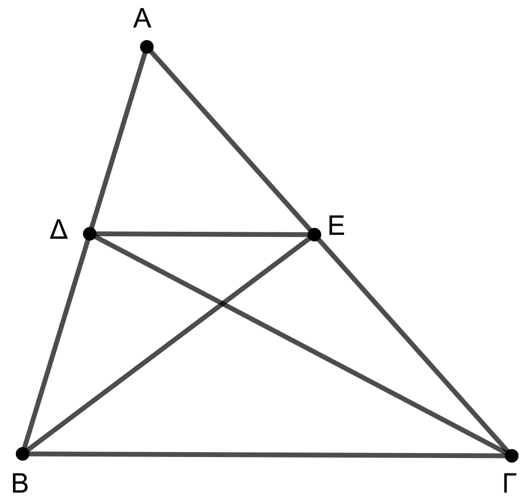
16806

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΔΕΒ})} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΒ}}$ και $\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΔΕΓ})} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}$. (Μονάδες 13)

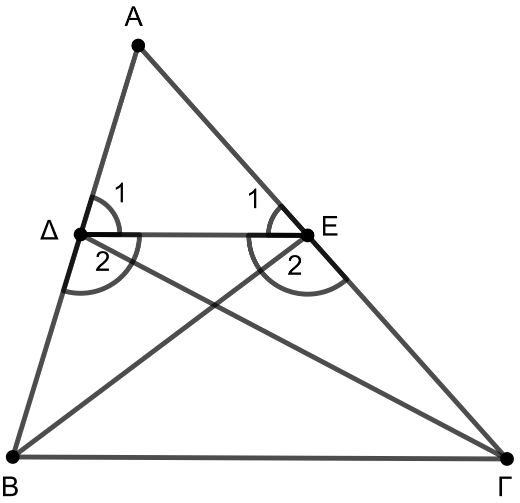
β) Να αποδείξετε ότι (ΔΕΒ) = (ΔΕΓ). (Μονάδες 12)



16806-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

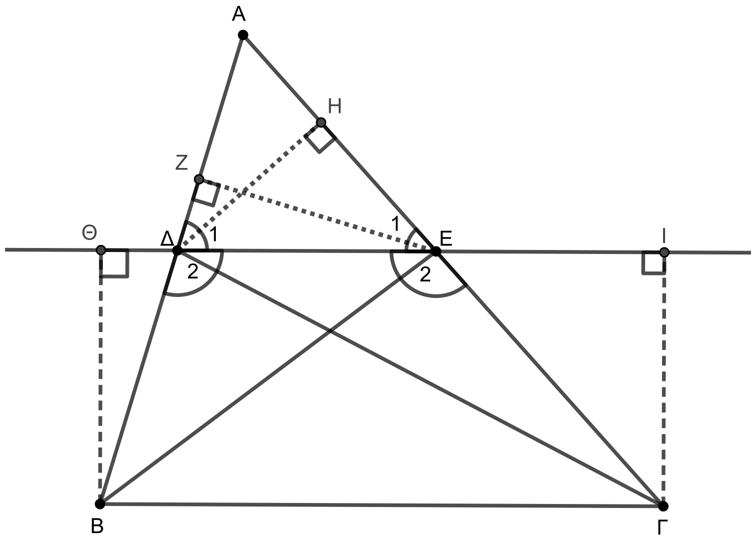


Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΒ έχουν τις γωνίες τους $\widehat{\Delta}_1$ και $\widehat{\Delta}_2$ παραπληρωματικές όπως και τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΓ έχουν παραπληρωματικές τις γωνίες $\hat{\mathrm{E}}_1$ και $\hat{\mathrm{E}}_2$. Άρα οι λόγοι των εμβαδών τους θα είναι ίσοι με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta EB})} = \frac{\mathrm{A\Delta \cdot \Delta E}}{\mathrm{\Delta B \cdot \Delta E}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta B}}$ και $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta E\Gamma})} = \frac{\mathrm{AE \cdot \Delta E}}{\mathrm{E\Gamma \cdot \Delta E}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}$.

β) Το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Θαλή, έχουμε ότι $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta B}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}$. Επομένως από το α) ερώτημα θα ισχύει ότι $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta EB})} = \frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta E\Gamma})}$, άρα (ΔΕΒ) = (ΔΕΓ).

16806-Λύση

Εναλλακτική λύση:



α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΒ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Ε, το τμήμα ΕΖ, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των πλευρών που αντιστοιχεί αυτό το ύψος. Δηλαδή $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta EB})}=\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta B}}$. Ομοίως τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΓ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Δ, το τμήμα ΔΗ, επομένως $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta E\Gamma})}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}$.

β) Τα τρίγωνα ΔΕΒ και ΔΕΓ έχουν κοινή πλευρά τη ΔΕ και οι απέναντι κορυφές τους Β και Γ αντίστοιχα βρίσκονται στη ΒΓ, που είναι παράλληλη στη ΔΕ. Δηλαδή, έχουν κοινή βάση και ίσα ύψη, τα ΒΘ και ΓΙ αντίστοιχα, που είναι η απόσταση των παραλλήλων ΒΓ και ΔΕ. Άρα είναι ισοδύναμα, δηλαδή (ΔΕΒ) = (ΔΕΓ).

16807

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις ΑΒ = 24, ΒΓ = 12 και σημείο Ε στην ευθεία ΑΒ.

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ όταν :

i. Το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ.

ii. Το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α του ορθογωνίου.

(Μονάδες 16)

β) Αφήνουμε το σημείο Ε να κινηθεί στην προέκταση του τμήματος ΑΒ προς το Β, απομακρυνόμενο από το σημείο Β.

i. Να εξετάσετε αν η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ αυξάνεται ή μειώνεται.

(Μονάδες 05)

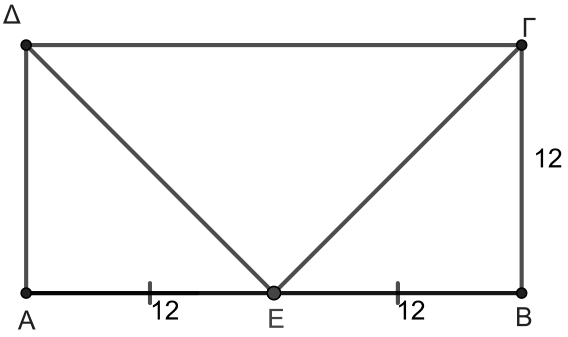
ii. Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ συμβαίνει η ίδια μεταβολή με αυτή που απαντήσατε για την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ στο ερώτημα β)i.; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 04)

16807-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i.

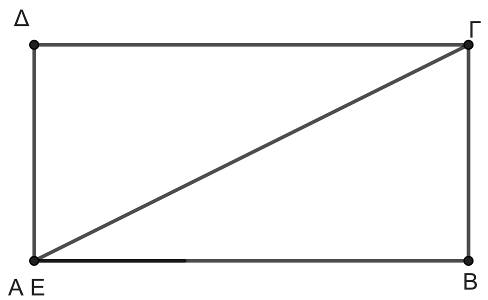


Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΕ είναι ορθογώνια με καθεμιά από τις κάθετες πλευρές τους 12. Οπότε είναι ίσα και ισχύει ΓΕ = ΔΕ. Από το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει $\Gamma E^2 = \Delta E^2 = 12^2 + 12^2 = 2\cdot 12^2$. Οπότε ΓΕ = ΔΕ = $12\sqrt{2}$.

Η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ είναι ίση με 24 + $12\sqrt{2}$ + $12\sqrt{2}$ = 24 + $24\sqrt{2}$.

Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\frac{\beta\cdot\upsilon}{2}$, όπου η βάση έχει μήκος ΔΓ = ΑΒ = 24 και το ύψος είναι το κάθετο τμήμα από την κορυφή Ε προς την πλευρά ΔΓ που έχει μήκος όσο η απόσταση των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ, δηλαδή ίσο με 12. Άρα (ΓΕΔ) = $\frac{24\cdot 12}{2}$ = 12·12 = 144.

ii.

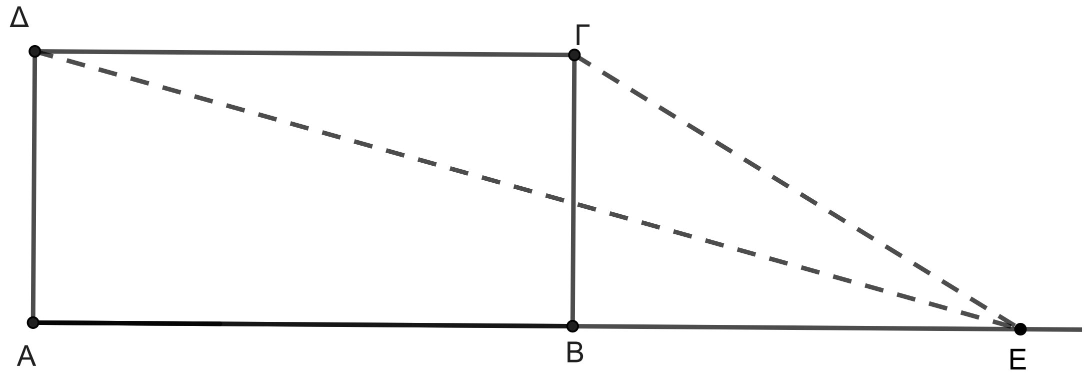


Αν το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α του ορθογωνίου τότε το τρίγωνο ΓΕΔ ταυτίζεται με το τρίγωνο ΓΑΔ. Οπότε η περίμετρος του τριγώνου είναι ίση με ΓΑ + ΑΔ + ΔΓ (1). Για την πλευρά ΓΑ που είναι υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε $\Gamma A^2 = AB^2 + B\Gamma^2$ ή $\Gamma A^2 = 24^2 + 12^2 = 2^2\cdot 12^2 + 12^2 = 5\cdot 12^2$ ή ΓΑ = 12 $\sqrt{5}$. Οπότε η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ από τη σχέση (1) ισούται με 12 $\sqrt{5}$ + 12 + 24 = 36 + 12 $\sqrt{5}$.

Το εμβαδό του τριγώνου όταν το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α ισούται με το εμβαδό του τριγώνου ΓΑΔ που είναι ίσο με $\frac{\Delta\Gamma\cdot A\Delta}{2} = \frac{24\cdot 12}{2}$ = 12·12 = 144.

β)

16807-Λύση



i. Αν το σημείο Ε κινηθεί πάνω στη ευθεία ΑΒ που είναι παράλληλη στην πλευρά ΔΓ τότε η πλευρά ΔΓ παραμένει σταθερή αλλά οι δυο άλλες πλευρές του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλονται. Αν το σημείο Ε κινείται στην προέκταση της ΑΒ προς το Β, απομακρυνόμενο από το σημείο Β, τα πλάγια τμήματα ΓΕ και ΔΕ συνεχώς μεγαλώνουν, αφού το ίχνος τους Ε απέχει ολοένα και περισσότερο από τα ίχνη Β και Α των κάθετων τμημάτων ΓΒ και ΔΑ αντίστοιχα. Οπότε η περίμετρος η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλεται και συνεχώς αυξάνεται.

ii. Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ, θα πάρουμε ως βάση τη σταθερή πλευρά του ΔΓ, οπότε το ύψος του προς τη ΔΓ ισούται με την απόσταση των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που είναι σταθερή και ίση με 12. Το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ σε οποιαδήποτε θέση της κορυφής Ε πάνω στην ευθεία ΑΒ είναι ίσο με : $\frac{24 \cdot 12}{2} = 12 \cdot 12 = 144$.

Παρατηρούμε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι: (ΑΒΓΔ) = 24 · 12 = 288. Άρα (ΓΕΔ) = 144 = $\frac{288}{2} = \frac{(ΑΒΓΔ)}{2}$.

Συμπερασματικά αν το σημείο Ε κινείται στην προέκταση του τμήματος ΑΒ προς το Β απομακρυνόμενο από το σημείο Β, οι πλευρές ΓΕ και ΔΕ του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλονται, η περίμετρος μεταβάλλεται (αυξάνεται) όπως έχει προκύψει στο βi) αλλά το εμβαδό του τριγώνου μένει σταθερό και ίσο με το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου.

16817

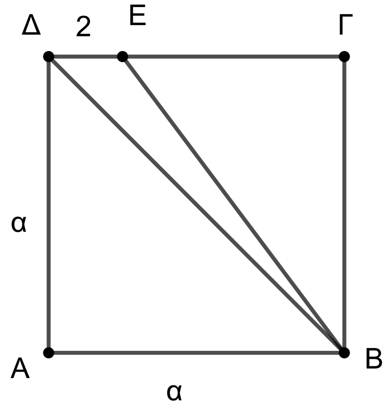
ΘΕΜΑ 2

Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α, θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς του ΔΓ έτσι ώστε

ΔΕ = 2. Αν γνωρίζουμε ότι: (ΒΕΔ) = $\frac{(ΑΒΓΔ)}{8}$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου α είναι ίση με 8. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ. (Μονάδες 12)



16817-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΕ ισούται με: (ΒΔΕ) = $\frac{1}{2}$· ΔΕ ·ΒΓ= $\frac{1}{2}$ ·2·α=α.

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ ισούται με: (ΑΒΓΔ)= α^2.

Από την υπόθεση έχουμε: (ΒΕΔ) = $\frac{(\text{ΑΒΓΔ})}{8}$, άρα α = $\frac{\alpha^2}{8}$ ή 8α = α^2 ή 8 = α.

Άρα η πλευρά του τετραγώνου είναι α = 8.

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ΒΓ = α = 8, ΔΕ = 2 οπότε η ΓΕ = ΓΔ – ΔΕ = 8 – 2 = 6.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ από πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $ΒΕ^2 = ΒΓ^2 + ΓΕ^2$ ή

$ΒΕ^2 = 8^2 + 6^2$ ή $ΒΕ^2 = 64 + 36 = 100$ ή ΒΕ = 10.

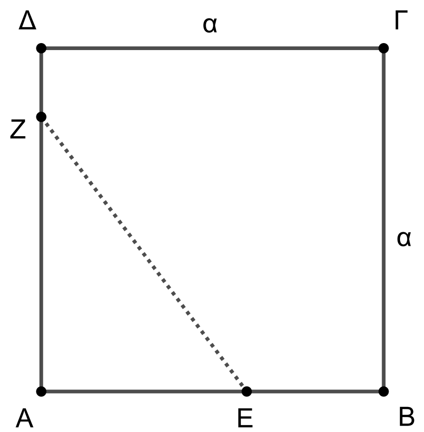
16821

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ = $\frac{3}{5}$ ΑΒ, και στην πλευρά ΑΔ θεωρούμε σημείο Ζ έτσι ώστε ΑΖ = $\frac{4}{5}$ ΑΔ.

α) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α τα εμβαδά, του τριγώνου ΑΕΖ και του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του πενταγώνου ΕΒΓΔΖ είναι ίσο με 76 να υπολογίσετε το μήκος α της πλευράς του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 13)



16821-Λύση

ΛΥΣΗ

Από υπόθεση έχουμε ότι το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά α, επίσης το τμήμα ΑΕ ισούται με: ΑΕ = $\frac{3}{5}$ ΑΒ, δηλαδή ΑΕ = $\frac{3}{5}$ α και το τμήμα ΑΖ ισούται με: ΑΖ = $\frac{4}{5}$ ΑΔ δηλαδή ΑΖ = $\frac{4}{5}$ α.

α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΖ ισούται με:

(ΑΕΖ) = $\frac{1}{2}\cdot$ ΑΕ $\cdot$ΑΖ $= \frac{1}{2}\cdot \frac{3}{5}α\cdot\frac{4}{5}α = \frac{12}{50}\cdot α^2 = \frac{6}{25}\cdot α^2$

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ ισούται με: (ΑΒΓΔ) = α · α = $α^2$

β) Το εμβαδόν του πενταγώνου ΕΒΓΔΖ υπολογίζεται αν από το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΖΕ.

Από το α) έχουμε: $(ΑΒΓΔ) = α^2$ και $(ΑΕΖ) = \frac{6}{25}\cdot α^2$

Άρα: $(ΕΒΓΔΖ) = (ΑΒΓΔ)$ - $(ΑΖΕ) = α^2$ - $\frac{6}{25}\cdot α^2 = \frac{19}{25}\cdot α^2$.

Από υπόθεση το εμβαδόν του πενταγώνου ΕΒΓΔΖ ισούται με 76, συνεπώς έχουμε:

$\frac{19}{25}\cdot α^2 = 76$ ή $α^2 = \frac{25\cdot 76}{19}$ ή $α^2 = \frac{25\cdot 19\cdot 4}{19}$ ή $α^2 = 100$ ή $α = 10$.

17346

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = 6$, $ΒΓ = 4$ και $\hat{Β} = 60^{o}$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 2\sqrt{7}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

Δίνεται ότι $ημ60^{o} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $συν60^{o} = \frac{1}{2}$.

17346-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2 - 2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}\cdot\text{συν}\hat{\text{Β}}.$$

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $\text{ΑΒ} = 6$, $\text{ΒΓ} = 4$ και $\hat{\text{Β}} = 60^o$, άρα

$\text{ΑΓ}^2 = 6^2 + 4^2 - 2\cdot 6\cdot 4\text{συν}60^o$ ή $\text{ΑΓ}^2 = 36 + 16 - 48\cdot\frac{1}{2}$ ή $\text{ΑΓ}^2 = 28$ ή $\text{ΑΓ} = 2\sqrt{7}$.

β) Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ είναι η ΑΒ, αφού $\text{ΑΒ} = 6 = 2\cdot 3 > 2\sqrt{7} = \text{ΑΓ}$, άρα η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου είναι η $\hat{\text{Γ}}$, γιατί βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά. Όμως $\text{ΑΒ}^2 = 6^2 = 36$ και $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΒΓ}^2 = (2\sqrt{7})^2 + 4^2 = 28 + 16 = 44$, άρα $\text{ΑΒ}^2 < \text{ΑΓ}^2 + \text{ΒΓ}^2$. Επομένως $\hat{\text{Γ}} < 90^o$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

γ) Για τον υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}\cdot\text{ημ}\hat{\text{Β}}.$$

Όμως $\text{ΑΒ} = 6$, $\text{ΒΓ} = 4$ και $\hat{\text{Β}} = 60^o$, άρα $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot\text{ημ}60^o = 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

17347

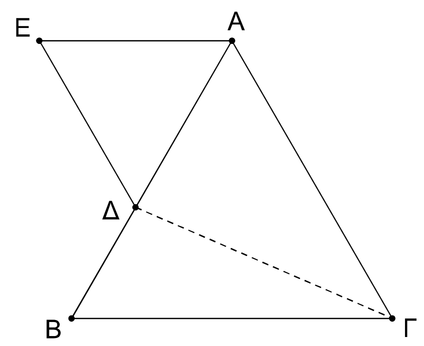
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς 10 και το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο πλευράς 6.

α) Να αποδείξετε ότι $(ΑΓΔ) = 15\sqrt{3}$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΓΔΕ. (Μονάδες 13)

Δίνεται ότι $ημ60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



17347-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για τον υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου ΑΓΔ χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$(\mathrm{A\Gamma\Delta}) = \frac{1}{2}\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{A\Gamma}\cdot\eta\mu\widehat{\mathrm{A}}.$$

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $\mathrm{A\Delta} = 6$, $\mathrm{A\Gamma} = 10$. Επιπλέον, είναι $\widehat{\mathrm{A}} = 60^{\mathrm{o}}$, γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. Άρα

$$(\mathrm{A\Gamma\Delta}) = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot\eta\mu 60^{\mathrm{o}} = 30\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}.$$

β) Το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α ισούται με $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$, άρα το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΑΔΕ που έχει πλευρά 6 είναι $(\mathrm{A\Delta E}) = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΓΔΕ είναι

$$(\mathrm{A\Gamma\Delta E}) = (\mathrm{A\Gamma\Delta}) + (\mathrm{A\Delta E}) = 15\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 24\sqrt{3}.$$

17349

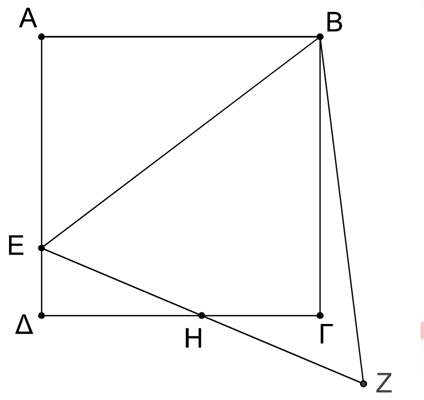
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3 και σημείο Ε της πλευράς ΑΔ, ώστε ΑΕ $= 4 - \sqrt{3}$. Στο ημιεπίπεδο που ορίζουν η ευθεία ΒΕ και το σημείο Γ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΒΕΖ. Οι ΓΔ και ΕΖ τέμνονται στο σημείο Η και ΔΗ $= \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΕ $= 2\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε το Η είναι το μέσο της ΕΖ. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου ΒΕΖ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 9)



17349-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε ότι

$$\mathrm{BE}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AE}^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\mathrm{AB} = 3$, $\mathrm{AE} = 4 - \sqrt{3}$, οπότε

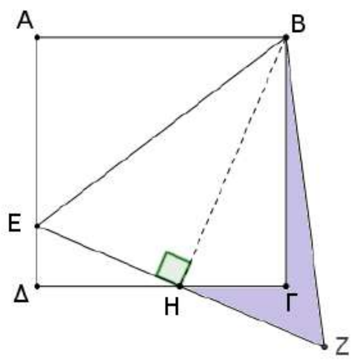
$$\mathrm{BE}^2 = 3^2 + (4-\sqrt{3})^2 \text{ ή } \mathrm{BE}^2 = 28 - 8\sqrt{3} = 4(7-2\sqrt{3}) \text{ ή } \mathrm{BE} = 2\sqrt{7-2\sqrt{3}}.$$

β) Είναι $\Delta\mathrm{E} = \mathrm{A}\Delta - \mathrm{AE} = 3 - \left(4-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - 1$. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΗ έχουμε ότι $\mathrm{EH}^2 = \Delta\mathrm{E}^2 + \Delta\mathrm{H}^2$. Όμως $\Delta\mathrm{H} = \sqrt{3}$ από τα δεδομένα και $\Delta\mathrm{E} = \sqrt{3} - 1$, οπότε

$$\mathrm{EH}^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3})^2 \text{ ή } \mathrm{EH}^2 = 7 - 2\sqrt{3} \text{ ή } \mathrm{EH} = \sqrt{7-2\sqrt{3}} \quad (1).$$

Από την ισότητα (1) και το ερώτημα α) προκύπτει ότι $\mathrm{BE} = 2\mathrm{EH}$. Από τα δεδομένα το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ισόπλευρο οπότε $\mathrm{EZ} = \mathrm{BE}$. Επομένως $\mathrm{EZ} = 2\mathrm{EH}$, δηλαδή το Η είναι το μέσο της ΕΖ.

γ)



Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου ισούται με τη διαφορά του εμβαδού του τριγώνου ΒΓΗ από το τρίγωνο ΒΖΗ, δηλαδή $(\mathrm{BZH}) - (\mathrm{B\Gamma H})$.

Το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α ισούται με $\dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$. Η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου ΒΕΖ ισούται με $2\sqrt{7-2\sqrt{3}}$, επομένως

$$(\mathrm{BEZ}) = \frac{4(7-2\sqrt{3})\sqrt{3}}{4} \text{ ή } (\mathrm{BEZ}) = 7\sqrt{3} - 6.$$

Το σημείο Η είναι το μέσο της πλευράς του ισόπλευρου τριγώνου ΒΕΖ, οπότε

$$(\mathrm{BZH}) = \frac{(\mathrm{BEZ})}{2} = \frac{7\sqrt{3}-6}{2} \quad (2).$$

Το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου ΒΓΗ είναι $(\mathrm{B\Gamma H}) = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}\cdot\Gamma\mathrm{H}}{2}$ με $\mathrm{B\Gamma} = 3$ και $\Gamma\mathrm{H} = \Gamma\Delta - \Delta\mathrm{H} = 3 - \sqrt{3}$, οπότε

17349-Λύση

$$(\text{ΒΓΗ}) = \frac{3(3-\sqrt{3})}{2} = \frac{9-3\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

Από τις ισότητες (2) και (3) προκύπτει ότι

$$(\text{ΒΖΗ}) - (\text{ΒΓΗ}) = \frac{7\sqrt{3}-6}{2} - \frac{9-3\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}-15}{2}.$$

17599

ΘΕΜΑ 4

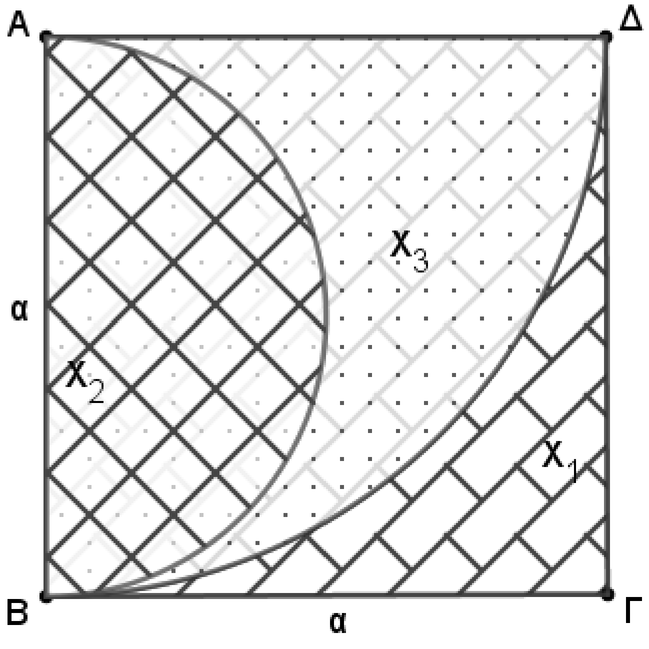
Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α του παρακάτω σχήματος, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο Α και ακτίνα α.

α) Αν X_1 είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκυκλίου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ισούται με: $(X_1) = \frac{\alpha^2}{4} \cdot (4\text{-}\pi)$ (Μονάδες 5)

β) Με διάμετρο ΑΒ κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν X_2 είναι το χωρίο του ημικυκλίου και X_3 το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων X_2 και X_3.

(Μονάδες 11)

γ) Ποιο από τα χωρία X_1 κι X_2 έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)



17599-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του χωρίου X_1 θα υπολογιστεί, αν από το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΒ. Έχουμε: (ΑΒΓΔ) = α · α = α^2 και $(\mathrm{AB\Delta}) = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2 \cdot 90^o}{360^o} = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{4}$.

$(X_1) = (\mathrm{AB\Gamma\Delta}) - (\mathrm{AB\Delta}) = \alpha^2 - \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{4} = \dfrac{\alpha^2}{4} \cdot (4-\pi)$

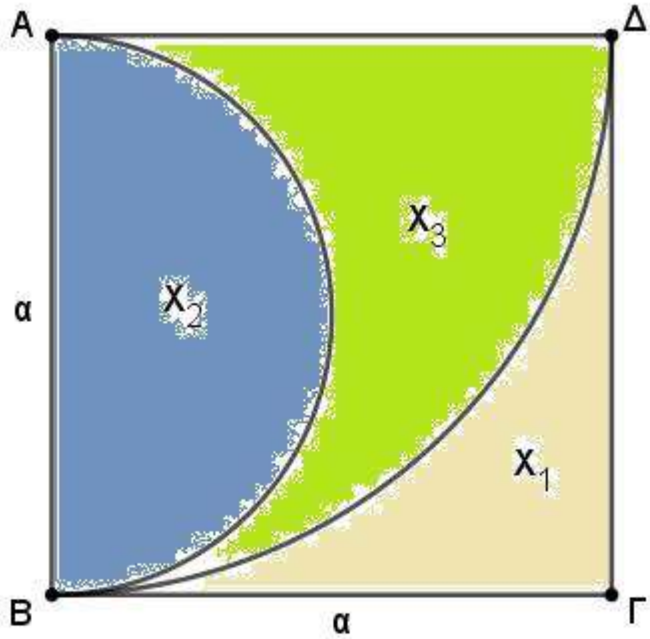
β) Το εμβαδόν X_2 του ημικυκλίου με διάμετρο ΑΒ ισούται με:

$(X_2) = \dfrac{\pi \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \cdot 180^o}{360^o} = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{8}$ Το εμβαδόν X_3 θα υπολογισθεί αν από το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου αφαιρέσουμε το X_2 και θα έχουμε:

$X_3 = (\mathrm{AB\Delta}) - X_2 = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{4} - \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{8} = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{8}$.

γ) $X_2 - X_1 = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{8} - \dfrac{\alpha^2}{4} \cdot (4-\pi) = \dfrac{\pi \cdot \alpha^2}{8} - \dfrac{2 \cdot \alpha^2}{8} \cdot (4-\pi) = \dfrac{\alpha^2}{8} \cdot [\pi - 2(4-\pi)] =$

$\dfrac{\alpha^2}{8} \cdot (\pi - 8 + 2\,\pi) = \dfrac{\alpha^2}{8} \cdot (3\,\pi - 8) > 0$ που σημαίνει ότι ισχύει $X_2 > X_1$



17907

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Με πλευρές τις ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ, τα τετράγωνα ΑΒΗΖ, ΑΓΘΙ, ΒΓΡΔ. Έστω Ε, $Ε_1$, $Ε_2$, τα εμβαδά των τετραγώνων ΑΓΘΙ, ΑΒΗΖ, ΒΓΡΔ αντίστοιχα. Αν ισχύουν οι ισότητες $Ε_1 = 4Ε$, $Ε_2 = 5Ε$ τότε:

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α.

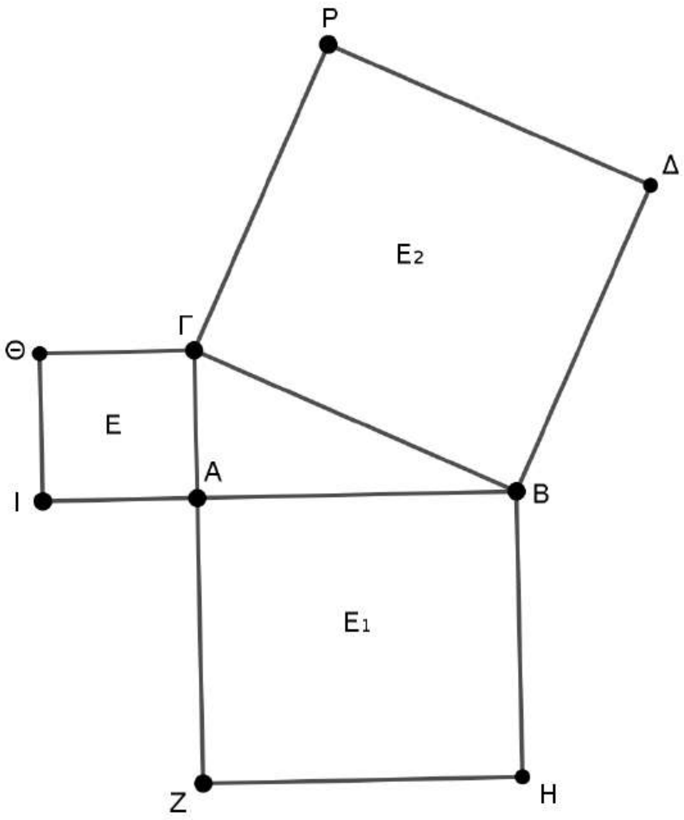
(Μονάδες 9)

β) να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΙΖ, ΒΗΔ, ΓΡΘ είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

γ) αν η ΑΓ=1 να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου ΖΗΔΡΘΙ.

(Μονάδες 7)



17907-Λύση

ΛΥΣΗ

Από τα δεδομένα έχουμε: (ΑΓΘΙ) = Ε, (ΑΒΗΖ) = $Ε_1$, (ΒΓΡΔ) = $Ε_2$ και ισχύουν:

$Ε_1=4Ε$ (1), $Ε_2=5Ε$ (2).

α) Θέτουμε ΒΓ = α, ΑΓ = β, ΑΒ = γ, τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, τότε:

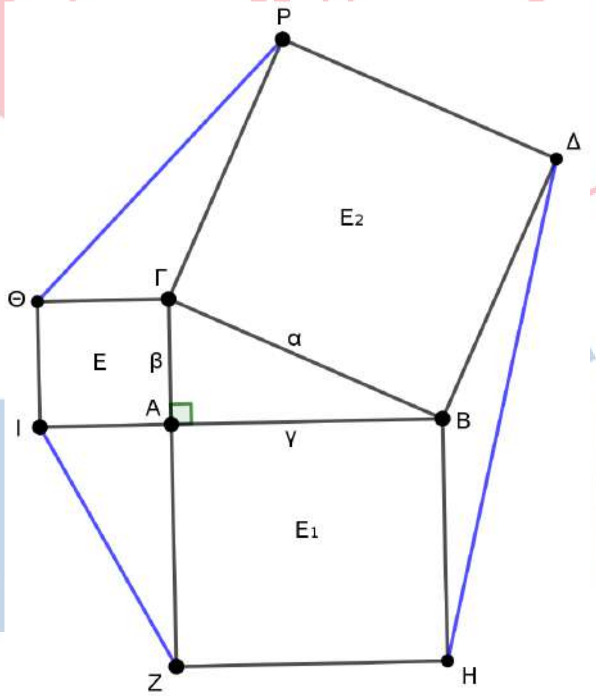
$Ε = β^2$ (3), $Ε_1 = γ^2$ (4) και $Ε_2 = α^2$ (5).

Οι (1), (2) λόγω των (3), (4), (5) γράφονται:

- $γ^2 = 4\,β^2$ ή $β^2 + γ^2 = β^2 + 4\,β^2$ ή $β^2 + γ^2 = 5β^2$
- $α^2 = 5\,β^2$

Οι τελευταίες δύο ισότητες έχουν τα δεύτερα μέλη τους ίσα, οπότε θα είναι και $β^2 + γ^2 = α^2$, που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, με υποτείνουσα την πλευρά α, άρα ορθή γωνία την Α.

β)



Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές β και γ, άρα (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}$ β·γ.

Το τρίγωνο ΑΙΖ, είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές β, γ, άρα (ΑΙΖ) = $\frac{1}{2}$ β·γ.

Άρα (ΑΒΓ) =(ΑΙΖ).

Λόγω των τετραγώνων, για τις γωνίες με κορυφή το Β έχουμε:

$Η\widehat{Β}Δ + Δ\widehat{Β}Γ + Α\widehat{Β}Γ + Α\widehat{Β}Η = 360^0$ ή $Η\widehat{Β}Δ + 90^o + Α\widehat{Β}Γ + 90^o = 360^0$ ή $Η\widehat{Β}Δ + Α\widehat{Β}Γ = 180^0$.

17907-Λύση

Δηλαδή οι γωνίες ΗΒΔ και ΑΒΓ είναι παραπληρωματικές. Άρα ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΒΗΔ, ΑΒΓ θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις παραπληρωματικές γωνίες. Δηλαδή $\frac{(\mathrm{B H \Delta})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{\mathrm{BH \cdot B\Delta}}{\mathrm{B\Gamma \cdot BA}} = \frac{\gamma \cdot \alpha}{\alpha \cdot \gamma}$ = 1, οπότε

$\frac{(\mathrm{B H \Delta})}{(\mathrm{AB\Gamma})}$ = 1, άρα (ΒΗΔ) = (ΑΒΓ).

Όμοια, για τις γωνίες με κορυφή το Γ έχουμε:

$\Theta\hat{\Gamma}\mathrm{P} + \Theta\hat{\Gamma}\mathrm{A} + \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} + \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{P} = 360^0$ ή $\Theta\hat{\Gamma}\mathrm{P} + 90^o + \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} + 90^o = 360^0$ ή $\Theta\hat{\Gamma}\mathrm{P} + \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 180^0$.

Δηλαδή οι γωνίες ΘΓΡ και ΑΓΒ είναι παραπληρωματικές. Άρα ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΓΡΘ, ΑΒΓ θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις παραπληρωματικές γωνίες. Δηλαδή $\frac{(\Gamma \mathrm{P} \Theta)}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{\Gamma\mathrm{P} \cdot \Gamma\Theta}{\Gamma\mathrm{A} \cdot \Gamma\mathrm{B}} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta \cdot \alpha}$ = 1, οπότε

$\frac{(\Gamma \mathrm{P} \Theta)}{(\mathrm{AB\Gamma})}$ = 1, άρα (ΓΡΘ) = (ΑΒΓ).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι: (ΑΒΓ) = (ΑΙΖ) = (ΒΗΔ) = (ΓΡΘ).

γ) Είναι ΑΓ = 1 ή β = 1, οπότε από τις ισότητες του ερωτήματος (α):

$\alpha^2 = 5\beta^2$ και $\gamma^2 = 4\beta^2$, παίρνουμε: $\alpha^2 = 5$ και $\gamma^2 = 4$, άρα $\alpha = \sqrt{5}$ και $\gamma = 2$.

Έτσι λόγω του ερωτήματος (β), είναι: (ΑΙΖ) = (ΒΗΔ) = (ΓΡΘ) = (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}\beta\cdot\gamma = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1$.

Επίσης $E = \beta^2$, $E_1 = \gamma^2$ και $E_2 = \alpha^2$ ή $E = 1$, $E_1 = 4$ και $E_2 = 5$. Οπότε:

(ΖΗΔΡΘΙ) = $E + E_1 + E_2$ + (ΑΙΖ) + (ΒΗΔ) + (ΓΡΘ) + (ΑΒΓ) = 1 + 4 + 5 + 1 +1 + 1 +1 = 14.

17908

ΘΕΜΑ 3

Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα μήκη των πλευρών του είναι α = 4, β = $\sqrt{17}$ και γ = 5.

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 9)

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή Α, τότε:

i. να υπολογίσετε το ΔΒ. (Μονάδες 9)

ii. να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)

17908-Λύση

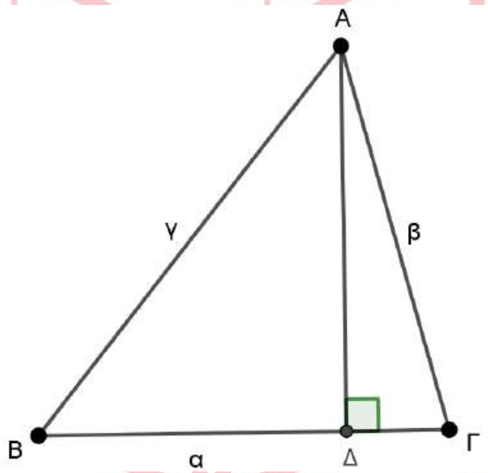
ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε: $\alpha = 4$, $\beta = \sqrt{17}$ και $\gamma = 5$, οπότε η πλευρά γ είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου. Θα συγκρίνουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων.

Είναι: $\gamma^2 = 5^2 = 25$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 4^2 + \sqrt{17}^2 = 16 + 17 = 33$.

Οπότε $\gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2$ άρα η $\hat{\Gamma} < 90^0$, επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, εφόσον απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία του.

β)



i. Λόγω του ερωτήματος (α), η γωνία Γ είναι οξεία. Οπότε από τη γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος είναι:

   $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\cdot\Delta\Gamma$ ή $25 = 33 - 2\cdot4\cdot\Delta\Gamma$ ή $8\cdot\Delta\Gamma = 8$ ή $\Delta\Gamma = 1$.

   Οπότε $\Delta B = B\Gamma - \Delta\Gamma = 4 - 1 = 3$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, από το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι:

   $A\Delta^2 = \beta^2 - \Delta\Gamma^2$ ή $A\Delta^2 = \sqrt{17}^2 - 1^2$ ή $A\Delta^2 = 16$, οπότε $A\Delta = 4$.

   Έτσι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\,\alpha\cdot\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\cdot B\Gamma\cdot A\Delta = \frac{1}{2}\cdot4\cdot4 = 8$.

17956

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τμήματος ΒΓ. Από το Δ φέρουμε παράλληλες στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Η παράλληλη στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και η παράλληλη στην ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο Ε. Θεωρούμε Κ και Λ τα μέσα των ΒΔ και ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

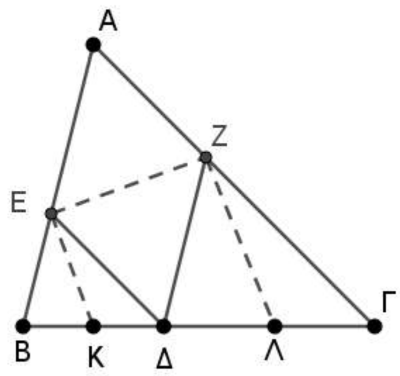
α) $(\mathrm{EK\Delta})=\dfrac{(\mathrm{BE\Delta})}{2}$ (Μονάδες 09)

β) $(\mathrm{EZ\Delta})=\dfrac{(\mathrm{AE\Delta Z})}{2}$ (Μονάδες 09)

γ) Το εμβαδόν του ΚΕΖΛ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Δ. (Μονάδες 07)

17956-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Στο τρίγωνο ΒΕΔ, η ΕΚ είναι διάμεσος, οπότε τα τρίγωνα ΒΕΚ και ΕΚΔ έχουν ίσες βάσεις ΒΚ και ΚΔ και κοινό ύψος από το Ε. Επομένως τα εμβαδά τους θα είναι ίσα, δηλαδή (ΒΕΚ) = (ΕΚΔ).

Άρα $(\text{ΕΚΔ})=\dfrac{(\text{ΒΕΔ})}{2}$ (1).

β) Το ΑΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, αφού ΔΖ//ΑΕ και ΔΕ//ΑΖ. Η διαγώνιος ΕΖ του παραλληλογράμμου ΑΕΔΖ το χωρίζει σε δύο ίσα άρα και ισοδύναμα τρίγωνα, δηλαδή (ΕΖΔ) = (ΑΕΖ).

Επομένως, $(\text{ΕΖΔ})=\dfrac{(\text{ΑΕΔΖ})}{2}$ (2).

γ) Στο τρίγωνο ΔΖΓ, η ΖΛ είναι διάμεσος, οπότε τα τρίγωνα ΔΖΛ και ΓΖΛ έχουν ίσες βάσεις ΔΛ και ΓΛ και κοινό ύψος από το Ζ. Επομένως τα εμβαδά τους θα είναι ίσα, δηλαδή (ΔΖΛ) = (ΓΖΛ).

Άρα $(\text{ΔΖΛ})=\dfrac{(\text{ΔΖΓ})}{2}$ (3).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) ,(3) έχουμε:

$$(\text{ΕΚΔ})+(\text{ΕΖΔ})+(\text{ΔΖΛ})=\frac{(\text{ΒΕΔ})}{2}+\frac{(\text{ΑΕΔΖ})}{2}+\frac{(\text{ΔΖΓ})}{2}$$

Άρα:

$$(\text{ΚΕΖΛ})=\frac{(\text{ΒΕΔ})+(\text{ΑΕΔΖ})+(\text{ΔΖΓ})}{2}=\frac{(\text{ΑΒΓ})}{2}$$

Επομένως, το εμβαδόν του ΚΕΖΛ θα ισούται με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ ανεξάρτητα από τη θέση του σημείου Δ πάνω στη ΒΓ.

18043

ΘΕΜΑ 4

Σε κύκλο (Ο,ρ) θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Η πλευρά ΑΔ είναι ίση με την πλευρά $λ_6$ κανονικού εξάγωνου εγγεγραμμένου στον κύκλο.

α) Αν η πλευρά ΑΒ ισούται με την πλευρά $λ_4$ τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο και το τόξο ΒΓ = 120^o :

i. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΓΔ ως συνάρτηση της ακτίνας.

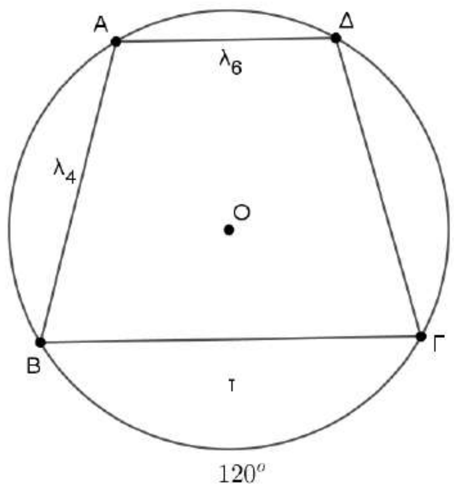
(Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος που περικλείεται από την κυρτή γωνία $B\hat{O}Γ$.

(Μονάδες 10)

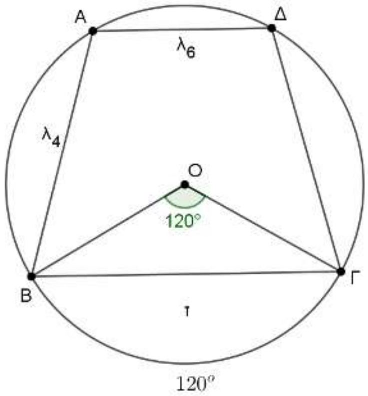
β) Κρατάμε τα σημεία Α και Δ σταθερά και μετακινούμε την χορδή ΒΓ παράλληλα προς την ΑΔ ώστε να διέρχεται από το Ο. Ποιο θα είναι το μήκος του τόξου ΑΒ;

(Μονάδες 07)



18043-Λύση

ΛΥΣΗ



α)

i. ΑΒ = λ_4, επομένως το τόξο ΑΒ = $\frac{360^o}{4} = 90^o$ γιατί αντιστοιχεί σε τόξο τετραγώνου.

ΑΔ = λ_6, επομένως το τόξο ΑΔ = $\frac{360^o}{6} = 60^o$ γιατί αντιστοιχεί σε τόξο κανονικού εξάγωνου.

Επομένως $\widehat{\Delta\Gamma} = 360^o - \widehat{AB} - \widehat{B\Gamma} - \widehat{A\Delta} = 360^o - 90^o - 120^o - 60^o$ = 90°.

Επειδή το τόξο ΔΓ είναι 90°, η χορδή ΔΓ = λ_4, δηλαδή ισούται με ρ$\sqrt{2}$.

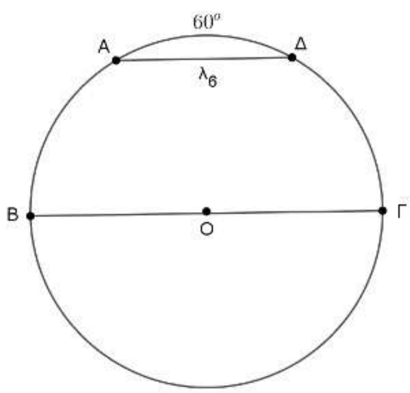
ii. Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος (τ) θα βρεθεί αν από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $O\widehat{B\Gamma}$ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου (ΟΒΓ).

($O\widehat{B\Gamma}$)= $\frac{\pi\rho^2 120^o}{360^o} = \frac{\pi\rho^2}{3}$ (1)

(ΟΒΓ) = $\frac{1}{2}OB \cdot O\Gamma \cdot \eta\mu 120^o = \frac{1}{2}\rho \cdot \rho \cdot \eta\mu 60^o = \frac{1}{2}\rho \cdot \rho \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\rho^2\sqrt{3}}{4}$ (2)

Οπότε: (τ) = $\frac{\pi\rho^2}{3} - \frac{\rho^2\sqrt{3}}{4}$

β)



Αφού η ΒΓ διέρχεται από το Ο, τότε θα είναι διάμετρος παράλληλη στην ΑΔ.

18043-Λύση

Τα τόξα $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ θα είναι ίσα γιατί περιέχονται μεταξύ παραλλήλων χορδών.

$\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{A\Delta} + \overset{\frown}{\Delta\Gamma} = 180^o$ ή $2\overset{\frown}{BA} + 60^o = 180^o$ ή $\overset{\frown}{BA} = \frac{180^o - 60^o}{2} = 60^o$.

Άρα το μήκος του τόξου ΑΒ θα είναι:

$$L_{\overset{\frown}{AB}} = \pi\rho\frac{\mu}{180^o} = \pi\rho\frac{60^o}{180^o} = \frac{\pi\rho}{3}$$

18097

ΘΕΜΑ 2

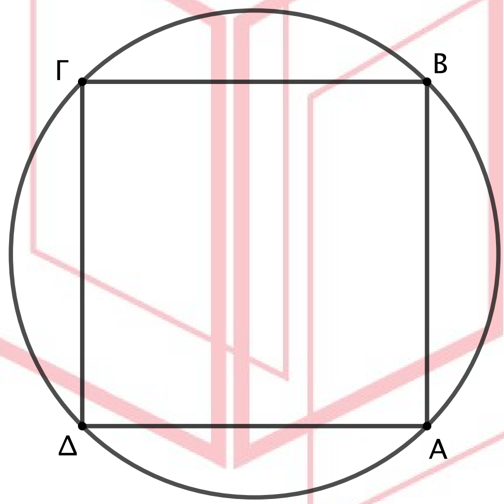
Τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν το εμβαδόν του τετραγώνου είναι ίσο με 4, τότε:

α) Να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου.

(Μονάδες 13)

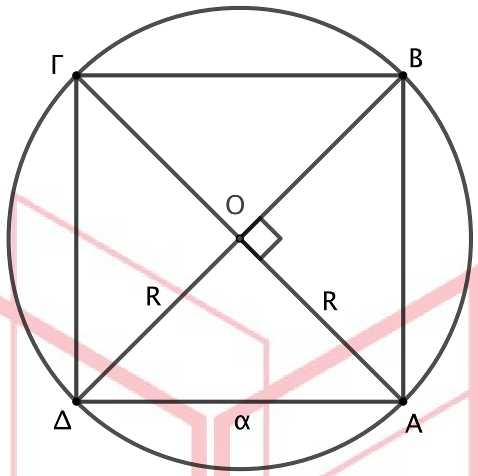
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του τετραγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι ίσο με $2\pi - 4$.

(Μονάδες 12)



18097-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του τετραγώνου είναι κάθετες και το σημείο τομής τους είναι το κέντρο Ο του περιγεγραμμένου κύκλου. Έστω α η πλευρά του τετραγώνου. Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο τρίγωνο ΟΔΑ έχουμε:

$$\alpha^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$$

Από την υπόθεση, το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E_\tau = \alpha^2 = 4$, οπότε προκύπτει:

$$2R^2 = 4 \text{ ή } R^2 = 2$$

Άρα, $R = \sqrt{2}$.

β) Το εμβαδόν του κύκλου είναι:

$$E_\kappa = \pi R^2 = 2\pi$$

Επομένως, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του τετραγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι:

$$E = E_\kappa - E_\tau = 2\pi - 4$$

18098

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $α = 4$. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα $ρ = 2$ σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του, όπως φαίνεται στο σχήμα.

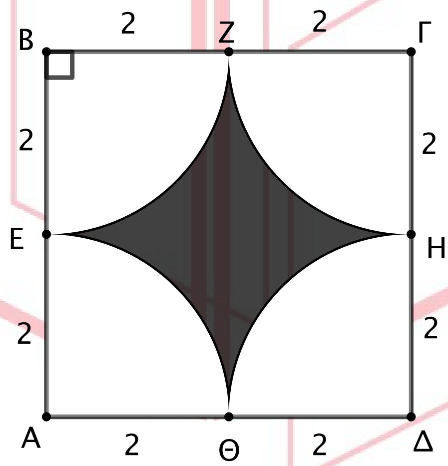
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι

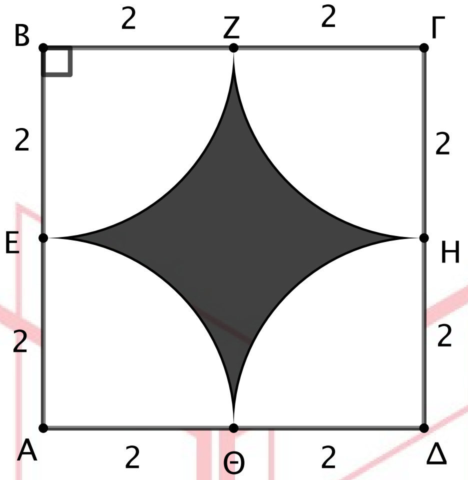
$$Ε = 4(4 - π)$$

(Μονάδες 12)



18098-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Τα τόξα ΘΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ είναι τόξα ίσων κύκλων ακτίνας $\rho = 2$ και αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες 90^o. Επομένως, οι κυκλικοί τομείς $\text{Α}\overset{\frown}{\text{ΘΕ}}$, $\text{Β}\overset{\frown}{\text{ΕΖ}}$, $\text{Γ}\overset{\frown}{\text{ΖΗ}}$, $\text{Δ}\overset{\frown}{\text{ΗΘ}}$ έχουν καθένας εμβαδόν ίσο με

$$(\text{Α}\overset{\frown}{\text{ΘΕ}}) = (\text{Β}\overset{\frown}{\text{ΕΖ}}) = (\text{Γ}\overset{\frown}{\text{ΖΗ}}) = (\text{Δ}\overset{\frown}{\text{ΗΘ}}) = \frac{\pi\rho^2 90^o}{360^o} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 90^o}{360^o} = \pi$$

β) Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι

$$E_\tau = \alpha^2 = 4^2 = 16$$

Οπότε, το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι:

$$E = E_\tau - 4(\text{Α}\overset{\frown}{\text{ΘΕ}}) = 16 - 4\pi = 4(4 - \pi)$$

18101

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ισοσκελή με $ΑΓ = ΒΓ = 3$ και $ΑΒ = ΑΔ = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{B}$ και $Β\widehat{Α}Γ$ είναι ίσες.

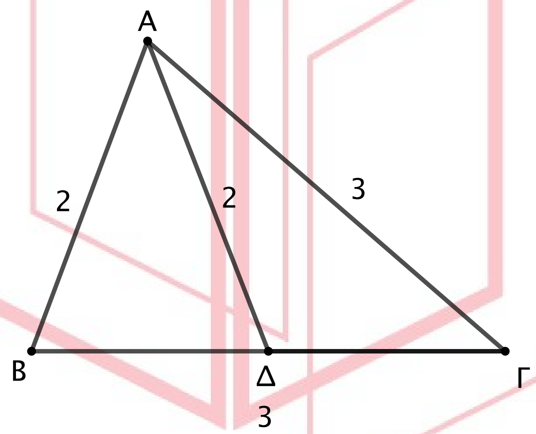
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΑ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

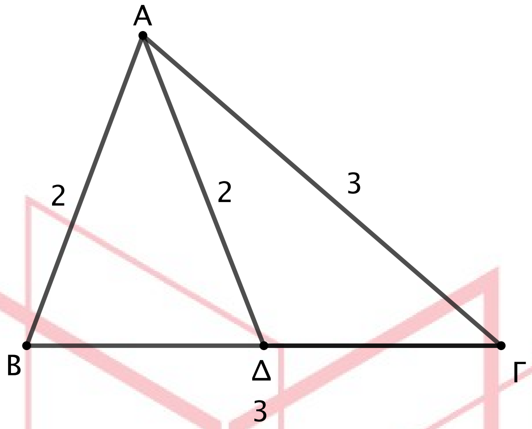
γ) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΒΔΑ)}$ των εμβαδών των δύο τριγώνων.

(Μονάδες 8)



18101-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $A\Gamma = B\Gamma$. Άρα, οι γωνίες $\hat{B}$ και $B\hat{A}\Gamma$ θα είναι ίσες, ως προσκείμενες στη βάση ΑΒ.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΑ είναι ισοσκελή και έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, αφού $B\hat{A}\Gamma = \hat{B}$ (η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι προσκείμενη στη βάση ΑΒ του ισοσκελούς ΑΒΓ και η γωνία $\hat{B}$ είναι προσκείμενη στη βάση ΒΔ του ισοσκελούς ΑΒΔ).

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια.

γ) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. Ο λόγος ομοιότητας λ των δύο τριγώνων ισούται με τον λόγο των πλευρών που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\hat{A}\Gamma$ και $\hat{B}$ αντίστοιχα, δηλαδή είναι

$$\frac{B\Gamma}{A\Delta} = \frac{3}{2}$$

Επομένως, έχουμε:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(B\Delta A)} = \left(\frac{B\Gamma}{A\Delta}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

18173

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΓΔ = 2ΑΒ. Δίνεται επίσης ότι το σημείο Κ είναι μέσο της ΓΔ και Μ τυχαίο σημείο στην ΑΔ.

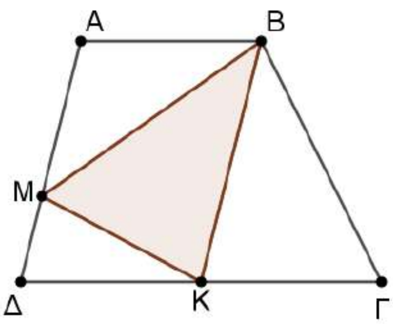
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(ΒΚΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΚΔ)$ (Μονάδες 09)

ii. $(ΒΜΚ) = (ΒΚΓ)$ (Μονάδες 09)

β) Δίνεται η πρόταση: «Αν το σημείο Μ κινείται πάνω στο εσωτερικό της ΑΔ, τότε ο λόγος των εμβαδών (ΑΒΓΔ) και (ΜΒΚ) παραμένει σταθερός και ίσος με 3». Να διερευνήσετε την ορθότητα της πρότασης αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)



18173-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Φέρουμε την ΒΚ. Επειδή ΓΔ = 2ΑΒ και Κ μέσο της ΓΔ, θα έχουμε ΑΒ =//ΔΚ, οπότε το ΑΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο και ΒΚ=//ΑΔ.

i. Φέρουμε την ΒΕ κάθετη στην ΓΔ. Τότε το ΒΕ είναι ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΒΚΓ αλλά και του παραλληλογράμμου ΑΒΚΔ. (ΑΒΚΔ) = ΔΚ·ΒΕ και (ΒΚΓ) = $\frac{\text{ΚΓ}\cdot\text{ΒΕ}}{2}$.

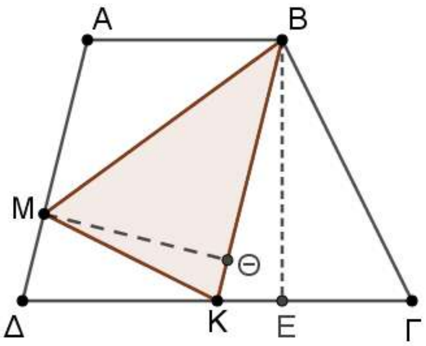
   Όμως επειδή το Κ είναι μέσο της ΔΓ, έχουμε ΔΚ = ΚΓ.

   Έτσι έχουμε (ΒΚΓ) = $\frac{\text{ΔΚ}\cdot\text{ΒΕ}}{2}=\frac{(\text{ΑΒΚΔ})}{2}$.

ii. Φέρουμε το ύψος ΜΘ του τριγώνου ΒΜΚ.

   Τότε θα έχουμε (ΒΜΚ) = $\frac{\text{ΒΚ}\cdot\text{ΜΘ}}{2}=\frac{(\text{ΑΒΚΔ})}{2}$. Από το i ερώτημα έχουμε ότι

   (ΒΚΓ) = $\frac{(\text{ΑΒΚΔ})}{2}$. Επομένως (ΒΚΓ) = (ΒΜΚ).



β)

Από το α.ii) έχουμε ότι 2(ΒΜΚ) = (ΑΒΚΔ) και (ΒΜΚ) = (ΒΚΓ).

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε 3(ΒΜΚ)= (ΑΒΚΔ) + (ΒΚΓ) = (ΑΒΓΔ),

δηλαδή $\frac{(\text{ΑΒΓΔ})}{(\text{ΒΜΚ})}=3$.

Άρα, η προς διερεύνηση πρόταση είναι σωστή. Ο λόγος των εμβαδών είναι σταθερός και ίσος με 3.

18301

ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν είναι $ΑΔ = \frac{1}{2}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{2}{5}ΑΓ$, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$.

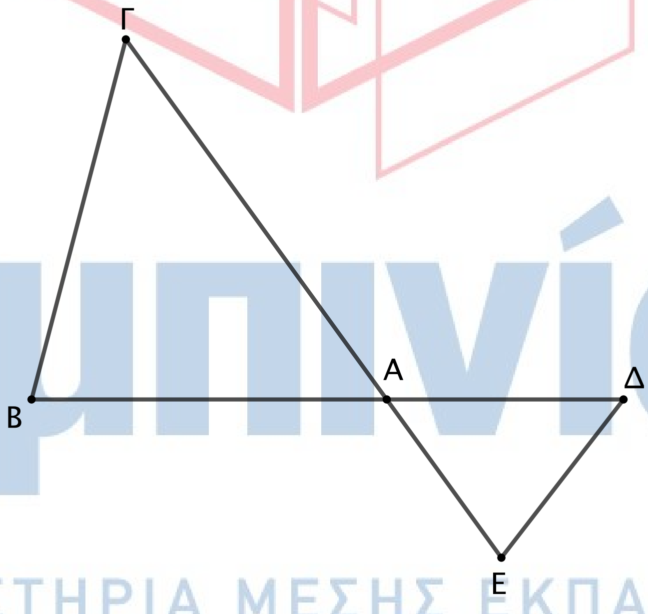
(Μονάδες 10)

β) Αν είναι $ΑΔ = \frac{1}{λ}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{λ}{μ}ΑΓ$, όπου λ, μ είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι ο λόγος $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$ είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ.

(Μονάδες 10)

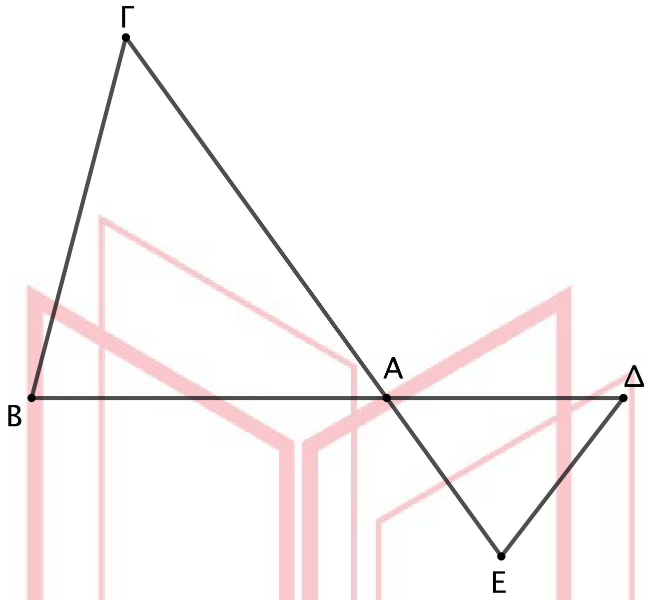
γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ για τα οποία είναι (ΑΔΕ) = (ΑΒΓ)». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)



18301-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν $\Delta\widehat{A}E = B\widehat{A}\Gamma$ (ως κατακορυφήν), οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές, δηλαδή:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot \frac{2}{5}A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

β) Εργαζόμενοι όπως στο προηγούμενο ερώτημα, έχουμε σε αυτή την περίπτωση:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{\lambda}AB \cdot \frac{\lambda}{\mu}A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{\mu}$$

Επομένως, ο ζητούμενος λόγος είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ.

γ) Αφού είναι (ΑΔΕ) = (ΑΒΓ), τότε από την ισότητα

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{\mu}$$

προκύπτει ότι

$$1 = \frac{1}{\mu} \quad \text{ή} \quad \mu = 1$$

Άρα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ισεμβαδικά για $\mu = 1$ και για οποιαδήποτε τιμή του λ, αφού, όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα (β), ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ. Επομένως, υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ, για τα οποία είναι (ΑΔΕ) = (ΑΒΓ). Τα ζεύγη αυτά είναι της μορφής

18301-Λύση

$\{(\lambda, 1), \lambda \in \mathbb{N}^*\}$

Άρα, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

18302

ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν είναι $ΑΔ = 2ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{2}ΑΓ$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα.

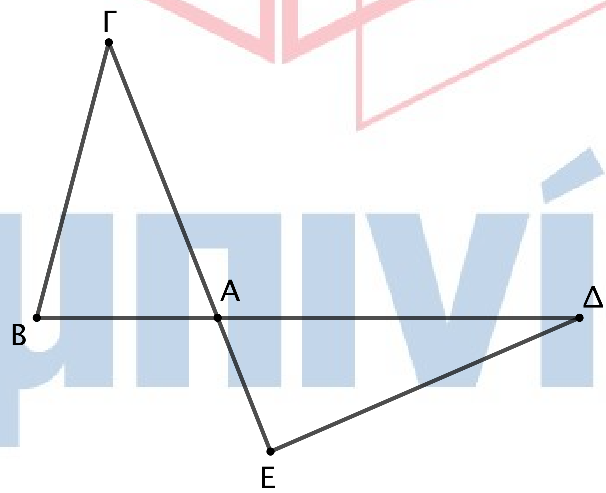
(Μονάδες 09)

β) Αν προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα είναι $ΑΔ = μ \cdot ΑΒ$ και $ΑΕ = ν \cdot ΑΓ$ αντίστοιχα, όπου μ, ν είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ποια πρέπει να είναι η σχέση των αριθμών μ και ν ώστε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ να είναι ισοδύναμα;

(Μονάδες 10)

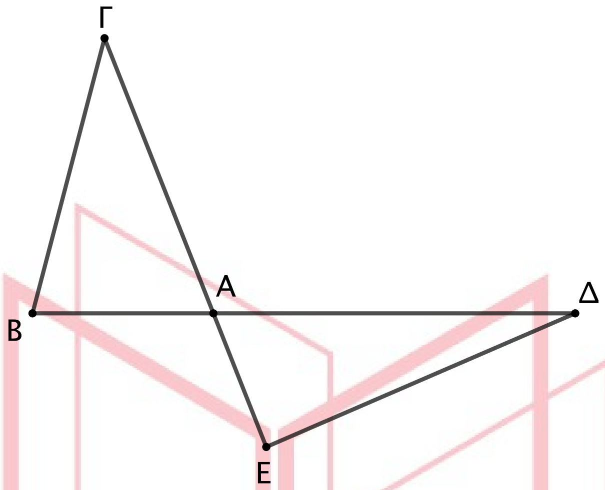
γ) Αν είναι $ΑΓ = \frac{3}{2}ΑΒ$ και $ΑΔ = 2ΑΒ$, να βρείτε τις δυνατές θέσεις του Ε ώστε τα ΑΒΓ και ΑΔΕ να είναι όμοια.

(Μονάδες 06)



18302-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν $\Delta\widehat{A}E = B\widehat{A}\Gamma$ (ως κατακορυφήν), οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές, δηλαδή:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{2AB \cdot \frac{1}{2}A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Επομένως, $(A\Delta E) = (AB\Gamma)$, δηλαδή τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα.

β) Αν προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα είναι $A\Delta = \mu \cdot AB$ και $AE = \nu \cdot A\Gamma$ αντίστοιχα, όπου μ, ν είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε θα έχουμε:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\mu \cdot AB \cdot \nu \cdot A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \mu \cdot \nu$$

Αφού τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα, θα πρέπει $\mu \cdot \nu = 1$. Επομένως, οι αριθμοί μ και ν είναι αντίστροφοι.

γ) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν $\Delta\widehat{A}E = B\widehat{A}\Gamma$ (ως κατακορυφήν), οπότε θα είναι όμοια αν και μόνο αν έχουν τις προσκείμενες πλευρές σε αυτές τις γωνίες ανάλογες. Επομένως, θα πρέπει:

$$\frac{A\Gamma}{A\Delta} = \frac{AB}{AE} \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{A\Delta}{AE} \quad (1) \qquad ή \qquad \frac{A\Gamma}{AE} = \frac{AB}{A\Delta} \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{AE}{A\Delta} \quad (2)$$

Δίνεται ότι:

$$\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad A\Delta = 2AB$$

18302-Λύση

Η (1) γίνεται διαδοχικά:

$$\frac{3}{2} = \frac{2AB}{AE} \quad ή \quad AE = \frac{4}{3}AB$$

Η (2) γίνεται διαδοχικά:

$$\frac{3}{2} = \frac{AE}{2AB} \quad ή \quad AE = 3AB$$

Άρα, τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια όταν $AE = \frac{4}{3}AB$ ή $AE = 3AB$.

18355

ΘΕΜΑ 4

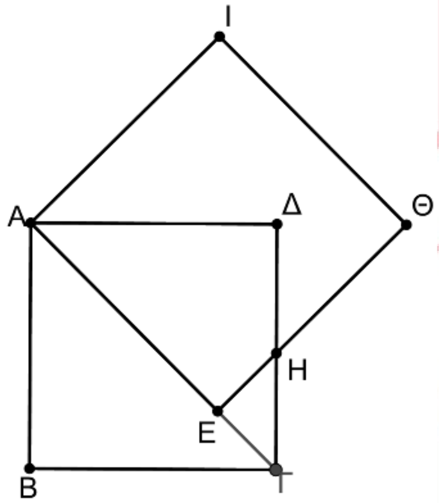
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Στην διαγώνιό του ΑΓ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΕΓ = $\frac{1}{4}$ ΑΓ. Με πλευρά την ΑΕ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΙΘΕ όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Η το σημείο τομής της ΔΓ με την ΕΘ.

α)

i. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(\text{ΑΙΘΕ})}{(\text{ΑΒΓΔ})}$. (Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(\text{ΕΓΗ})}{(\text{ΑΓΔ})}$. (Μονάδες 10)

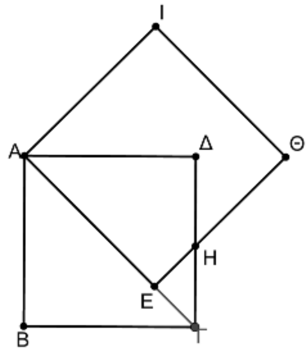
β) Κατασκευάζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του ΑΙΘΕ. Να εξετάσετε αν ο λόγος του εμβαδού του κύκλου αυτού προς το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ εξαρτάται από το μήκος α της πλευράς του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 07)



18355-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



i. ΕΓ = $\frac{1}{4}$ΑΓ, επομένως ΑΕ = $\frac{3}{4}$ΑΓ.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2$. Άρα $\mathrm{A\Gamma} = \alpha\sqrt{2}$.

Τα τετράγωνα ΑΙΘΕ και ΑΒΓΔ είναι όμοια, άρα ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

$$\frac{(\mathrm{AI\Theta E})}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})} = \left(\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{3}{4}\alpha\sqrt{2}}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}.$$

ii. Τα τρίγωνα ΕΗΓ και ΑΓΔ έχουν τις γωνίες τους $\hat{\Delta}$ και $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{H}$ ορθές και την γωνία $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{H}$ κοινή. Επομένως είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Οι ανάλογες πλευρές τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{\mathrm{E}} = \hat{\Delta}$	$\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{H} = \mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{H}$	$\mathrm{E}\hat{\mathrm{H}}\Gamma = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΕΗΓ	ΗΓ	ΕΗ	ΕΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΓΔ	ΑΓ	ΑΔ	ΔΓ

Ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, δηλαδή $\frac{(\mathrm{E\Gamma H})}{(\mathrm{A\Gamma\Delta})} = \left(\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\Delta\Gamma}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{4}\mathrm{A\Gamma}}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\frac{\alpha\sqrt{2}}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{8}$.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ: Τα τρίγωνα ΕΗΓ και ΑΓΔ έχουν την γωνία $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{H}$ κοινή. Η διαγώνιος ΑΓ του τετραγώνου διχοτομεί τις γωνίες του, άρα $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{H}$ = 45°. Επομένως

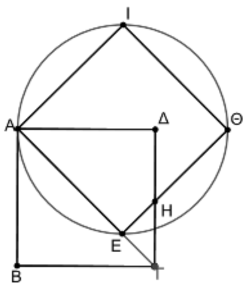
18355-Λύση

τα τρίγωνα ΕΗΓ και ΑΔΓ είναι ορθογώνια και ισοσκελή με ΕΓ = ΕΗ και ΑΔ = ΔΓ. Τα εμβαδά τους θα είναι:

(ΕΓΗ) = $\frac{1}{2}\cdot \mathrm{E\Gamma}\cdot \mathrm{EH} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{E\Gamma}^2$ και (ΑΓΔ) = $\frac{1}{2}\cdot \mathrm{A\Delta}\cdot \Delta\Gamma = \frac{1}{2}\cdot \alpha^2$.

$$\frac{(\mathrm{E\Gamma H})}{(\mathrm{A\Gamma\Delta})} = \frac{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{E\Gamma}^2}{\frac{1}{2}\cdot \alpha^2} = \frac{\left(\frac{1}{4}\cdot \mathrm{A\Gamma}\right)^2}{\alpha^2} = \frac{\frac{1}{16}\left(\alpha\sqrt{2}\right)^2}{\alpha^2} = \frac{1}{16}\frac{\alpha^2\cdot 2}{\alpha^2} = \frac{1}{8}.$$

β)



Σχεδιάζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του ΑΙΘΕ και έστω ρ η ακτίνα του.

Από το α) ερώτημα έχουμε ότι ΑΕ = $\frac{3}{4}$ ΑΓ = $\frac{3}{4}\alpha\sqrt{2}$.

Το τετράγωνο ΑΙΘΕ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο οπότε η πλευρά του ΑΕ είναι πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας ρ, δηλαδή ΑΕ = $\rho\sqrt{2}$.

Άρα $\rho = \frac{\mathrm{AE}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{3}{4}\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\alpha}{4}$.

Επομένως ο ζητούμενος λόγος γίνεται $\frac{\text{εμβαδόν κύκλου}}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})} = \frac{\pi\rho^2}{\alpha^2} = \frac{\pi\left(\frac{3}{4}\alpha\right)^2}{\alpha^2} = \frac{\pi\frac{9}{16}\alpha^2}{\alpha^2} = \pi\frac{9}{16}$,

που είναι ανεξάρτητος του μήκους της πλευράς α του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

18369

ΘΕΜΑ 4

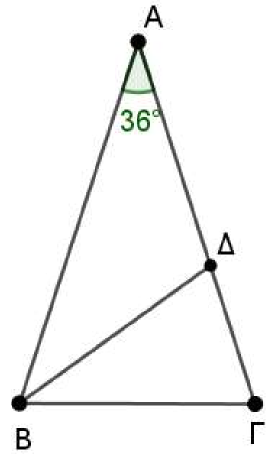
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, $\widehat{A} = 36^o$.

α) Αν η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

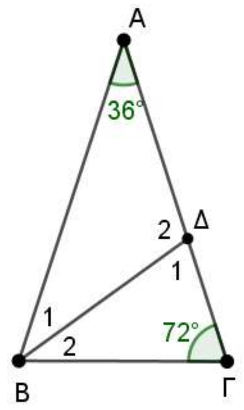
ii. Να γράψετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών. (Μονάδες 06)

β) Μετακινούμε το σημείο Δ στο εσωτερικό της ΑΓ. Για ποια θέση του σημείου Δ θα ισχύει $\frac{(AB\Delta)}{(\Delta B\Gamma)} = 3$. (Μονάδες 09)



18369-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = ΑΓ, οπότε $\widehat{\mathrm{B}}=\widehat{\Gamma}$. Όμως $\widehat{\mathrm{A}}+\widehat{\mathrm{B}}+\widehat{\Gamma}=180^{\circ}$,

άρα $36^{\circ}+2\widehat{\mathrm{B}}=180^{\circ}$ και τελικά $\widehat{\mathrm{B}}=\widehat{\Gamma}=\dfrac{180^{\circ}-36^{\circ}}{2}=72^{\circ}$.

Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$, οπότε $\widehat{\mathrm{B}}_1=\widehat{\mathrm{B}}_2=\dfrac{72^{\circ}}{2}=36^{\circ}$ (1).

$\widehat{\mathrm{A}}=\widehat{\mathrm{B}}_1=36^{\circ}$, άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με ΑΔ = ΒΔ (2).

$\widehat{\Delta}_1=36^{\circ}+36^{\circ}=72^{\circ}$, σαν εξωτερική γωνία του ΑΒΔ, επομένως το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές με ΒΔ = ΒΓ (3).

i. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ έχουν:

$\widehat{\Gamma}$ κοινή γωνία,

$\widehat{\mathrm{A}}=\widehat{\mathrm{B}}_2=\dfrac{\widehat{\mathrm{B}}}{2}=36^{\circ}$, από (1).

Επομένως είναι όμοια, διότι έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

ii. Οι ομόλογες πλευρές των όμοιων τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	Ίσες γωνίες		
	$\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}$	$\widehat{\mathrm{B}}_2=\widehat{\mathrm{A}}$	$\widehat{\Delta}_1=\widehat{\mathrm{B}}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΒΔΓ	ΒΔ	ΔΓ	ΒΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΑΒ	ΒΓ	ΑΓ

Επομένως οι λόγοι θα είναι $\dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{A}\Gamma}=\dfrac{\Delta\Gamma}{\mathrm{B}\Gamma}=\dfrac{\mathrm{B}\Delta}{\mathrm{AB}}$.

18369-Λύση

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΒΓ έχουν τις γωνίες $\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2$ παραπληρωματικές. Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν αυτές τις γωνίες, δηλαδή $\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\Delta\mathrm{B}\Gamma)} = \frac{\mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{B\Delta}}{\Delta\Gamma \cdot \mathrm{B\Delta}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\Delta\Gamma}$.

Όμως $\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\Delta\mathrm{B}\Gamma)} = 3$, οπότε $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\Delta\Gamma} = 3$ ή ΑΔ = 3ΔΓ. Το Δ θα χωρίζει το ΑΓ σε δύο τμήματα ΑΔ και ΔΓ με λόγο 3:1.

18370

ΘΕΜΑ 4

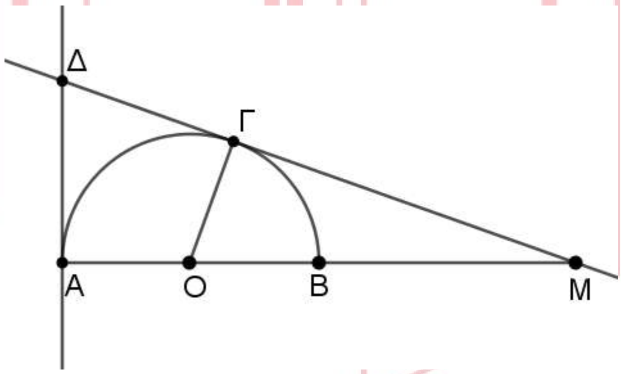
Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ = 2ρ. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Μ. Από το Μ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ στο ημικύκλιο. Αν η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο Α τέμνει την προέκταση της ΜΓ στο Δ τότε:

α) Αν ΒΜ = 2ρ να αποδείξετε ότι ΜΓ = $2\sqrt{2}$ρ. (Μονάδες 09)

β)

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{ΜΟ}{ΜΓ}=\frac{ΜΔ}{ΜΑ}$. (Μονάδες 09)

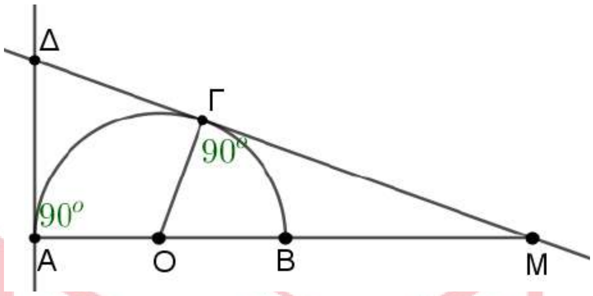
ii. Αν για το Μ ισχύει ότι ΒΜ = λ·ρ, όπου λ θετικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, τέτοια ώστε (ΑΔΜ) = 9(ΜΟΓ). (Μονάδες 07)



18370-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



Το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ είναι κάθετο στην ακτίνα ΟΓ.

ΜΟ = ΜΒ+ΒΟ = 2ρ+ρ = 3ρ.

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΓ:

$\mathrm{OM}^2 = \mathrm{O\Gamma}^2 + \mathrm{M\Gamma}^2$, άρα $\mathrm{M\Gamma}^2 = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{O\Gamma}^2 = (3\rho)^2 - \rho^2 = 8\rho^2$, δηλαδή ΜΓ = $2\sqrt{2}\rho$.

β)

i. Τα τρίγωνα ΟΜΓ και ΑΔΜ είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία αντίστοιχα: $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Gamma} = 90^o$ και την γωνία $\widehat{\mathrm{M}}$ κοινή. Επομένως οι ομόλογες πλευρές τους θα είναι ανάλογες:

	Ίσες γωνίες		
	$\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Gamma}$	Μ κοινή	$\widehat{\mathrm{O}} = \widehat{\Delta}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΟΜΓ	ΜΟ	ΟΓ	ΜΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΜ	ΜΔ	ΔΑ	ΜΑ

$\frac{\mathrm{M\Delta}}{\mathrm{MO}} = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{M\Gamma}}$ ή $\frac{\mathrm{M\Delta}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{M\Gamma}}$.

ii. Δείξαμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΟΜΓ είναι όμοια, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

$\frac{(\mathrm{AM\Delta})}{(\mathrm{OM\Gamma})} = \left(\frac{\mathrm{AM}}{\Gamma\mathrm{M}}\right)^2 = \frac{\mathrm{AM}^2}{\Gamma\mathrm{M}^2}$. (1)

ΟΜ = ΜΒ+ΒΟ = λρ+ρ = (λ+1)ρ.

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΓ:

$\mathrm{OM}^2 = \mathrm{O\Gamma}^2 + \Gamma\mathrm{M}^2$, άρα

$$\Gamma\mathrm{M}^2 = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{O\Gamma}^2 = \left((\lambda+1)\rho\right)^2 - \rho^2 = \left(\lambda^2 + 2\lambda + 1 - 1\right)\rho^2 = \left(\lambda^2 + 2\lambda\right)\rho^2.$$

ΑΜ = 2ρ+λρ= (λ+2)ρ.

Η (1) γίνεται $\frac{(\mathrm{AM\Delta})}{(\mathrm{MO\Gamma})} = \frac{\mathrm{AM}^2}{\Gamma\mathrm{M}^2} = \frac{(\lambda+2)^2\rho^2}{\left(\lambda^2+2\lambda\right)\rho^2} = \frac{(\lambda+2)^2}{\lambda(\lambda+2)} = \frac{\lambda+2}{\lambda}$.

18370-Λύση

Αφού (ΑΔΜ) = 9(ΜΟΓ) θα έχουμε $\frac{(\text{ΑΜΔ})}{(\text{ΜΟΓ})} = \frac{9(\text{ΜΟΓ})}{(\text{ΜΟΓ})} = 9$ και επομένως $\frac{\lambda+2}{\lambda} = 9$ ή $\lambda + 2 = 9\lambda$ ή 8λ =2, άρα λ = $\frac{1}{4}$.

18371

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ μέσο της ΑΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ παράλληλη στην ΒΓ και ίση με το μισό της ΑΒ όπως στο σχήμα.

α)

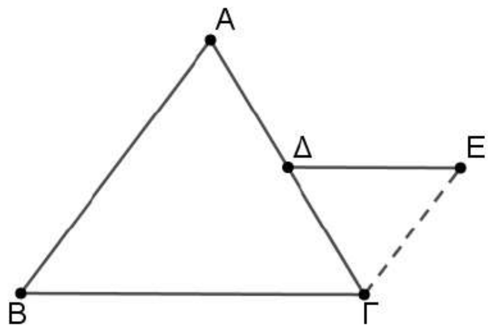
i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta E}{2B\Gamma}$. (Μονάδες 10)

ii. Αν το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, τότε να αποδείξετε ότι (ΔΕΓ) = (ΑΒΔ).

(Μονάδες 10)

β) Σε ένα τεστ που χρειάστηκε από τους μαθητές να βρεθεί ο λόγος $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)}$ ένας μαθητής έγραψε: «Παρατηρώ ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ έχουν $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ και δύο πλευρές τους ανάλογες, αφού $\frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{AB} = \frac{1}{2}$. Επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις γωνίες τους $\widehat{\Delta}, \widehat{\Gamma}$ ίσες, τα τρίγωνα θα είναι όμοια. Επομένως, ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{\Delta E}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$». Ο καθηγητής του του είπε ότι έχει κάνει ένα σημαντικό λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιο σημείο ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος;

(Μονάδες 05)

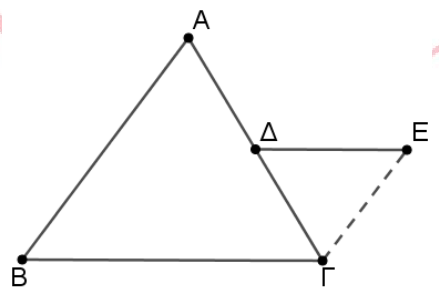


18371-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Τα τρίγωνα ΔΕΓ και ΑΒΓ έχουν τις γωνίες τους $\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}$, γιατί είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ. Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές: $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)}=\frac{\Delta E\cdot\Delta\Gamma}{A\Gamma\cdot B\Gamma}=\frac{\Delta E\cdot\Delta\Gamma}{2\Delta\Gamma\cdot B\Gamma}=\frac{\Delta E}{2B\Gamma}$ (1), γιατί από υπόθεση ΑΓ = 2ΔΓ.

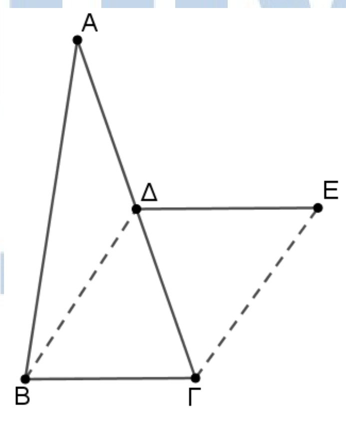


ii. Αν ΔΕΓΒ παραλληλόγραμμο, τότε ΔΕ = ΒΓ. Επομένως η (1) γίνεται $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)}=\frac{\Delta E}{2B\Gamma}=\frac{B\Gamma}{2B\Gamma}=\frac{1}{2}$ (2)

Στο τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΒΔ χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, τα ΑΒΔ και ΒΔΓ. Επομένως το καθένα από αυτά θα έχει το μισό εμβαδόν του ΑΒΓ.

$\frac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)}=\frac{1}{2}$ (3) .

Από (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι (ΔΕΓ) = (ΑΒΔ).



β) Ο μαθητής για να αποδείξει ότι τα τρίγωνα είναι όμοια χρησιμοποιεί το επιχείρημα ότι έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες μία προς μια και τις γωνίες $\hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}$ ίσες. Για να εξασφαλίσουμε όμως την ομοιότητα από το κριτήριο θα έπρεπε οι γωνίες να είναι οι

18371-Λύση

περιεχόμενες των ανάλογων πλευρών, πράγμα το οποίο εδώ δεν συμβαίνει. Οι περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές ΔΕ, ΔΓ και ΑΒ, ΑΓ είναι οι $\widehat{\Delta}$ και $\widehat{\mathrm{A}}$.

18550

ΘΕΜΑ 2

Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 36 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

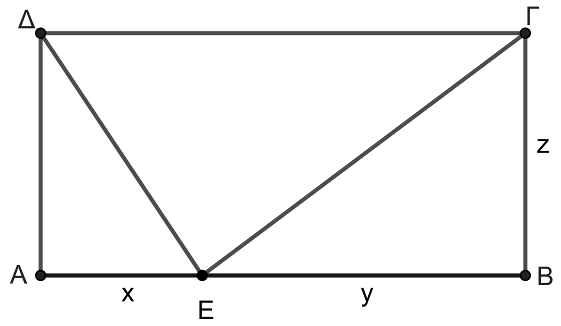
α) Να αποδείξετε ότι $x = 4$, $y = 8$ και $z = 6$. (Μονάδες 13)

β)

i. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ.

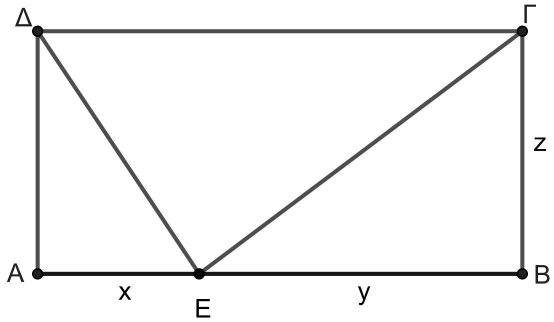
ii. Να βρεθεί ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου ΓΔΕ προς το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 12)



18550-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι 36. Οπότε 2 ΑΒ + 2 ΒΓ = 36 ή 2 (x + y) + 2 z = 36 ή x + y + z = 18. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα, άρα ισχύει $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{2+4+3} = \frac{18}{9} = 2$. Άρα x = 2·2 = 4, y = 4·2 = 8 και z = 3·2 = 6.

β)

i. Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$ όπου η βάση έχει μήκος ΔΓ = ΑΒ = 4 + 8 = 12 και το ύψος είναι το κάθετο τμήμα από την κορυφή Ε προς την πλευρά ΔΓ που έχει μήκος ίσο με 6 , οπότε (ΓΕΔ) = $\frac{12 \cdot 6}{2}$ = 6·6 = 36.

ii. Το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι : (ΑΒΓΔ) = 12 · 6 = 72. Το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ είναι 36. Οπότε $\frac{(\Gamma E \Delta)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$. Δηλαδή το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ είναι το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

18553

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο με πλευρά α και σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς ΑΒ προς το Β τέτοιο ώστε ΒΣ = ΑΒ.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α:

i. Το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ.

ii. Το μήκος της πλευράς ΣΓ του τριγώνου ΣΔΓ.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε τυχαίο σημείο Σ’ στην προέκταση της πλευράς ΑΒ προς το Β τέτοιο ώστε ΒΣ’ > ΒΣ. Να συγκρίνετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

i. Το εμβαδό του τριγώνου Σ’ΔΓ με το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ.

ii. Το μήκος της πλευράς Σ’Γ με το μήκος της πλευράς ΣΓ των τριγώνων Σ’ΔΓ και ΣΔΓ αντίστοιχα.

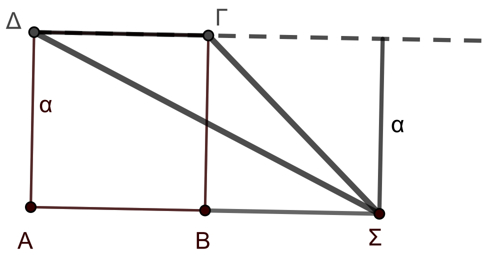
iii. Τις αποστάσεις του σημείου Δ από τις ευθείες ΣΓ και Σ’Γ.

(Μονάδες 15)

18553-Λύση

ΛΥΣΗ

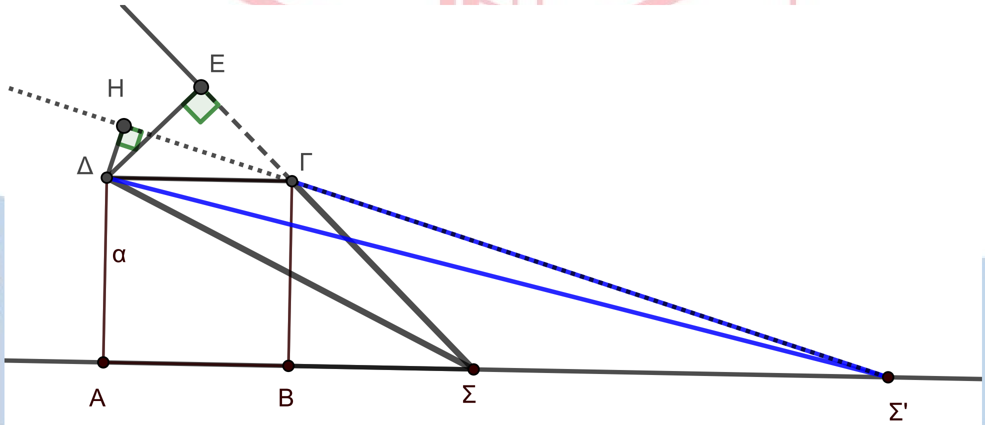
α)



i. Για να υπολογίσουμε το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ μπορούμε να πάρουμε ως βάση την πλευρά ΔΓ, οπότε το ύψος είναι η απόσταση της κορυφής Σ από την ευθεία ΔΓ που είναι ίση με α. Άρα (ΣΔΓ) = $\frac{1}{2}$·α ·α = $\frac{\alpha^2}{2}$.

ii. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΣΒΓ έχουμε $\Sigma\Gamma^2 = \Sigma B^2 + B\Gamma^2$ ή $\Sigma\Gamma^2 = \alpha^2 + \alpha^2$ ή $\Sigma\Gamma^2 = 2\alpha^2$ ή ΣΓ = $\alpha\sqrt{2}$.

β)



i. Τα τρίγωνα Σ'ΔΓ και ΣΔΓ έχουν κοινή βάση τη ΔΓ και ύψος ίσο με την απόσταση των παραλλήλων πλευρών ΑΒ και ΔΓ, αφού οι κορυφές τους Σ και Σ' βρίσκονται στην ευθεία ΑΒ // ΔΓ. Οπότε τα τρίγωνα αυτά έχουν και ίσα εμβαδά.

(Σ'ΔΓ) = (ΣΔΓ) = $\frac{1}{2}$·α ·α = $\frac{\alpha^2}{2}$.

ii. Από το σημείο Γ έχουμε το κάθετο τμήμα ΓΒ προς την ευθεία ΑΒ και τα πλάγια ΓΣ και ΓΣ'. Τα ίχνη Σ και Σ' των πλάγιων τμημάτων ΓΣ και ΓΣ' αντίστοιχα είναι τέτοια ώστε οι αποστάσεις τους από το ίχνος Β του κάθετου ΓΒ να είναι άνισες και συγκεκριμένα ΒΣ’ > ΒΣ, οπότε και τα αντίστοιχα πλάγια είναι ομοίως άνισα δηλαδή ΓΣ’ > ΓΣ.

iii. Η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία ΣΓ είναι ίση με το μήκος του τμήματος ΔΕ και η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία Σ’Γ είναι ίση με το μήκος του τμήματος ΔΗ. Ισχύει (Σ’ΔΓ) = $\frac{1}{2}$ ∙Σ’Γ ∙ΔΗ και (ΣΔΓ) = $\frac{1}{2}$ ∙ΣΓ ∙ΔΕ. Δείξαμε στο ερώτημα βi) ότι τα τρίγωνα Σ’ΔΓ και ΣΔΓ είναι ισεμβαδικά οπότε θα έχουμε:

$\frac{1}{2}$ ∙Σ’Γ ∙ΔΗ = $\frac{1}{2}$ ∙ΣΓ ∙ΔΕ ή Σ’Γ ∙ΔΗ = ΣΓ ∙ΔΕ ή $\frac{Σ'Γ}{ΣΓ} = \frac{ΔΕ}{ΔΗ}$ και επειδή Σ’Γ > ΣΓ θα έχουμε ΔΕ > ΔΗ. Δηλαδή η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία Σ’Γ είναι μικρότερη από την απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία ΣΓ.

18557

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ, ώστε ΑΒ > ΓΔ. Από τις κορυφές Γ κα Δ φέρουμε ΓΕ//ΑΔ και ΔΖ//ΓΒ, με Ε και Ζ σημεία στην πλευρά ΑΒ του τραπεζίου.

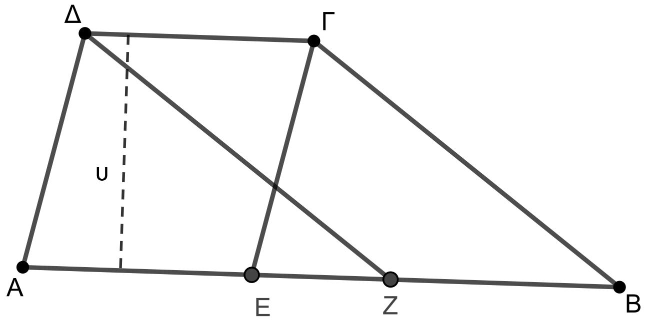
α) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τετραπλεύρων ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ. (Μονάδες 9)

β) Να εκφράσετε τις περιμέτρους των τετραπλεύρων ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ ως συνάρτηση των πλευρών του τραπεζίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 8)

γ) Πώς θα πρέπει να κατασκευάσουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ ώστε τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ να έχουν ίσες περιμέτρους και ίσα εμβαδά; (Μονάδες 8)

18557-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ έχουν τις απέναντι πλευρές τους ανά δύο παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμα. Για τα εμβαδά τους έχουμε :

(ΑΔΓΕ) = ΔΓ · υ (1), όπου υ είναι το ύψος του τραπεζίου ή αλλιώς η απόσταση των βάσεών του.

(ΒΓΔΖ) = ΔΓ · υ (2), όπου υ είναι το ύψος του τραπεζίου.

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ είναι ισεμβαδικά.

β) Το τετράπλευρο ΑΔΓΕ έχει περίμετρο $Π_1$ = ΑΔ + ΔΓ + ΓΕ + ΕΑ, αλλά οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες αφού είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $Π_1$ = 2 · ΑΔ + 2 · ΔΓ.

Το τετράπλευρο ΒΓΔΖ είναι επίσης παραλληλόγραμμο οπότε έχει περίμετρο $Π_2$ = ΒΓ + ΔΓ + ΔΖ + ΖΒ = 2 · ΒΓ + 2 · ΔΓ.

γ) Από το ερώτημα α) έχουμε ότι τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ έχουν ίσα εμβαδά ανεξάρτητα από τη μορφή που έχει το αρχικό τραπέζιο. Για να έχουν και ίσες περιμέτρους θα πρέπει ΑΔ = ΒΓ, δηλαδή το αρχικό τραπέζιο να έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες, οπότε το τραπέζιο ΑΒΓΔ πρέπει να είναι ισοσκελές.

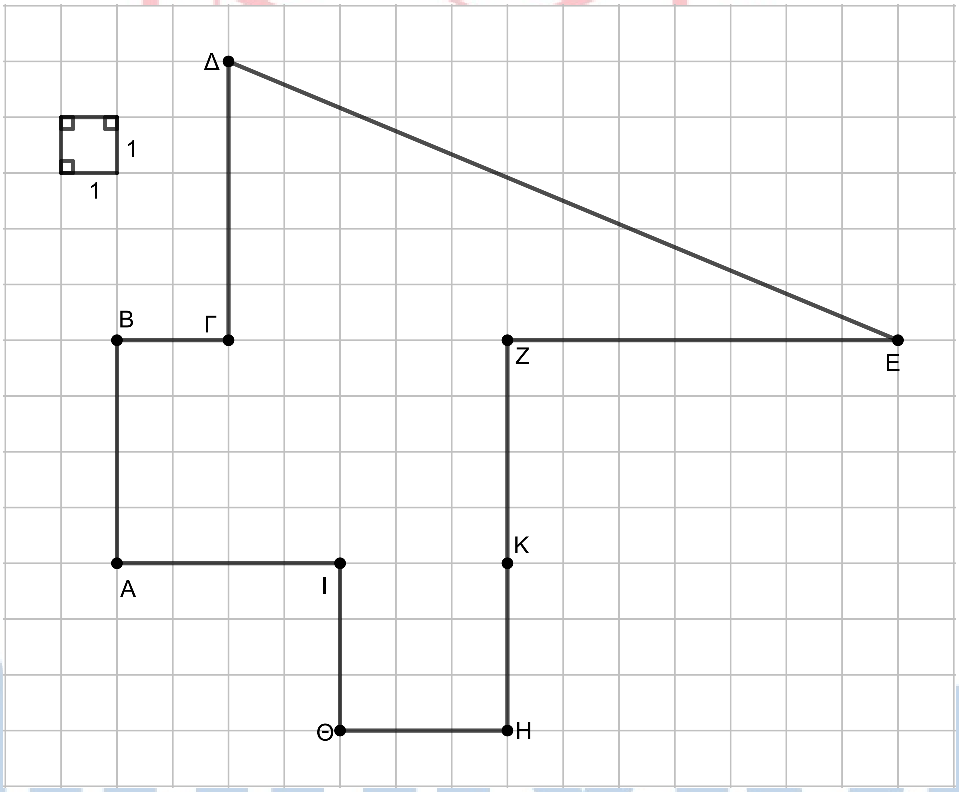
18558

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα:

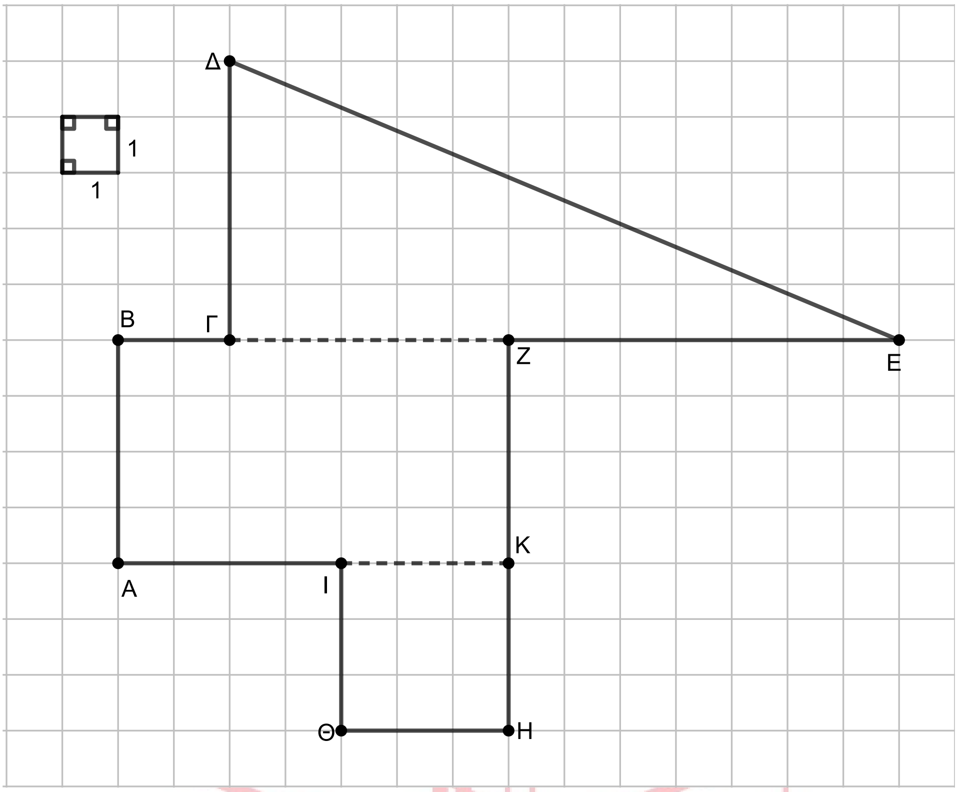
α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΔΕ. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΑ. (Μονάδες 15)



18558-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Φέροντας το τμήμα ΓΖ, το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο με ΔΓ= 5 και ΓΕ=12. Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $ΔΕ^2=ΔΓ^2+ΓΕ^2$ ή $ΔΕ^2=5^2+12^2$ ή $ΔΕ^2=25+144$ ή $ΔΕ^2=169$, άρα ΔΕ=13.

β) Το χωρίο αποτελείται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΕ, το ορθογώνιο ΒΖΚΑ και το τετράγωνο ΚΗΘΙ. Υπολογίζουμε τα εμβαδά τους ξεχωριστά.

$(ΔΓΕ) = \frac{1}{2} \cdot ΓΕ \cdot ΔΓ = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30$ τ.μ.

$(ΒΖΚΑ) = ΒΖ \cdot ΑΒ = 7 \cdot 4 = 28$ τ.μ.

$(ΚΗΘΙ) = 3^2 = 9$ τ.μ.

Άρα (ΑΒΓΔΕΖΗΘΙ) = (ΔΓΕ) + (ΒΖΚΑ) + (ΚΗΘΙ) = 30 + 28 + 9 = 67 τ.μ.

18559

ΘΕΜΑ 2

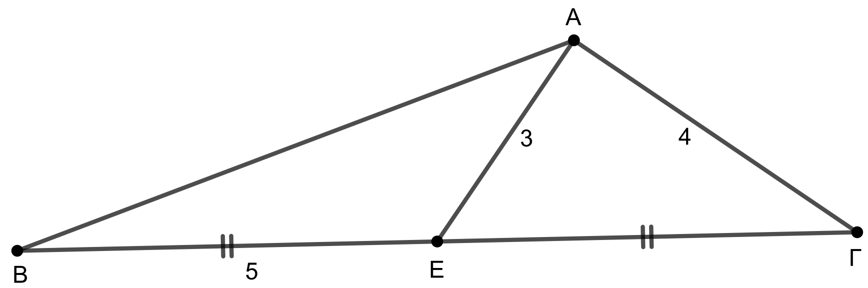
Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ έχει μήκος 3 και η πλευρά ΑΓ είναι ίση με 4. Αν ΒΕ=5, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΑΕ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΓ. (Μονάδες 10)

β)

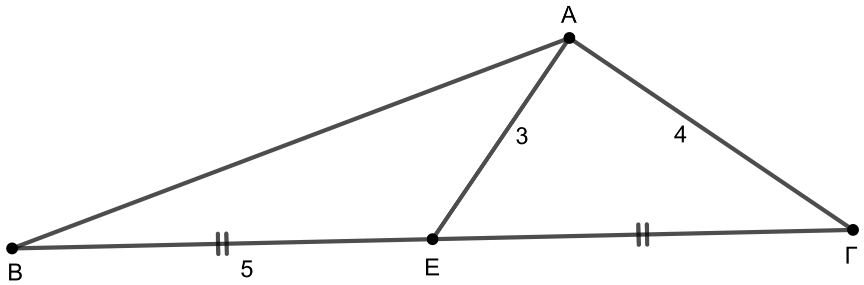
i. Να δικαιολογήσετε γιατί (ΑΒΕ)=(ΑΓΕ). (Μονάδες 05)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 10)



18559-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Το τμήμα ΒΕ είναι το μισό της πλευράς ΒΓ, αφού η ΑΕ είναι διάμεσος στην πλευρά ΒΓ, άρα ΕΓ=5. Στο τρίγωνο ΑΓΕ μεγαλύτερη πλευρά του είναι η ΓΕ και θα εξετάσουμε αν το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του. Δηλαδή αν $ΓΕ^2=ΑΓ^2+ΑΕ^2 \Leftrightarrow 5^2=4^2+3^2 \Leftrightarrow 25=16+9 \Leftrightarrow 25=25$ που ισχύει. Άρα το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο με $Ε\widehat{Α}Γ = 90^o$, οπότε $ΑΕ \perp ΑΓ$.

β)

i. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, άρα (ΑΒΕ) = (ΑΓΕ).

ii. Το ΑΓΕ είναι ορθογώνιο τρίγωνο, άρα το εμβαδό του θα ισούται με το ημιγινόμενο των κάθετων πλευρών του, δηλαδή $(ΑΓΕ) = \frac{1}{2} \cdot ΑΕ \cdot ΑΓ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ τ.μ.

Από το β) i. ερώτημα έχουμε ότι (ΑΒΕ)=(ΑΓΕ), άρα (ΑΒΓ)=2(ΑΓΕ). Βρήκαμε ότι (ΑΓΕ)=6, επομένως (ΑΒΓ) = 2·6 =12 τ.μ.

18560

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Αν ΓΕ είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά ΑΒ και το τμήμα ΑΕ έχει μήκος 9, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό

i. του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

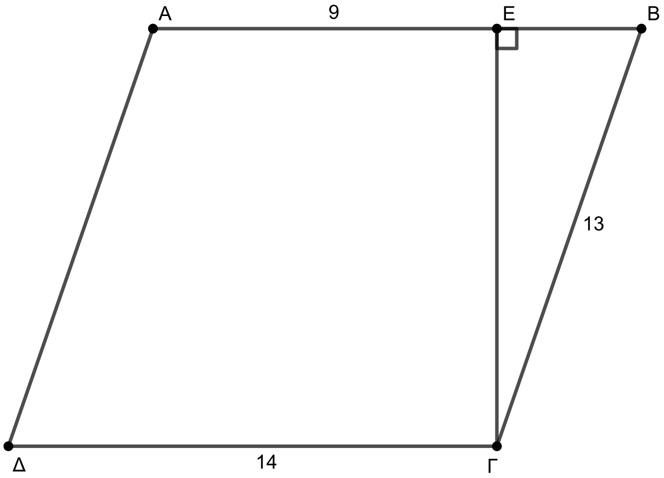
ii. του τραπεζίου ΑΕΓΔ.

(Μονάδες 12)

18560-Λύση

ΛΥΣΗ

Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Φέρουμε ΓΕ⊥ΑΒ.



α) ΑΒ = ΓΔ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Για το τμήμα ΒΕ έχουμε: ΒΕ = ΑΒ − ΑΕ = 14 − 9 = 5. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$ΓΕ^2=ΓΒ^2-ΒΕ^2$ ή $ΓΕ^2=13^2-5^2$ ή $ΓΕ^2=169-25$ ή $ΓΕ^2=144$, άρα ΓΕ=12.

β)

i. Το μήκος ΓΕ είναι η απόσταση των απέναντι πλευρών ΑΒ και ΓΔ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Άρα (ΑΒΓΔ)=$ΑΒ\cdot ΓΕ=14\cdot 12$, δηλαδή (ΑΒΓΔ)=168 τ.μ.

ii. Το τραπέζιο ΑΕΓΔ είναι ορθογώνιο και οι βάσεις του είναι οι ΑΕ και ΓΔ. Άρα (ΑΕΓΔ)= $\frac{ΑΕ+ΓΔ}{2}\cdot ΓΕ = \frac{9+14}{2}\cdot 12=23\cdot 6$, δηλαδή (ΑΕΓΔ)=138 τ.μ.

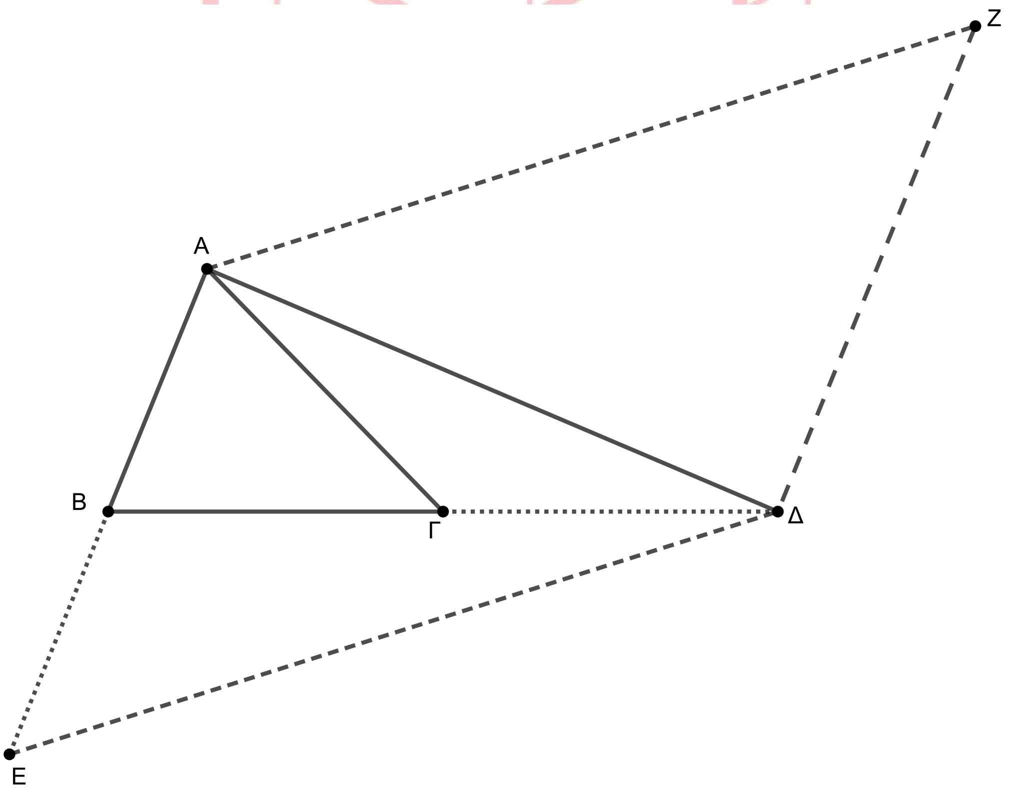
18561

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ=ΒΓ και την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ=ΑΒ.

α) Αν (ΑΒΓ)= 25 m^2, να αποδείξετε ότι (ΒΔΕ)=50 m^2. (Μονάδες 10)

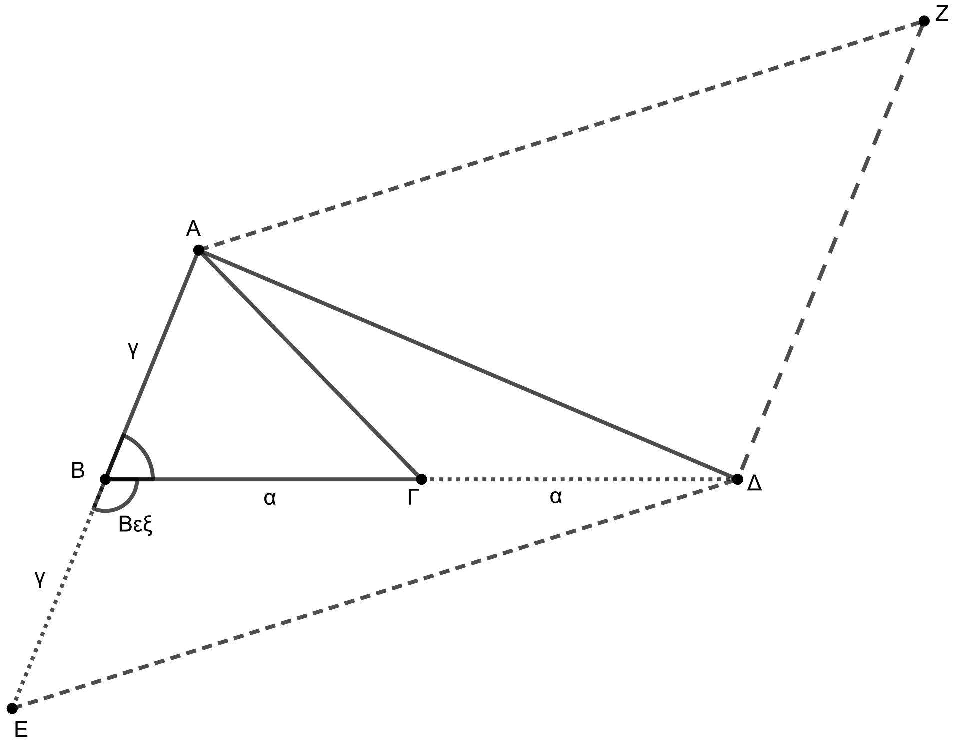
β) Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΕΔ και από την κορυφή Δ ευθεία παράλληλη στην ΕΑ που τέμνονται στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΖΔ είναι 4-πλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 15)



18561-Λύση

ΛΥΣΗ

Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ με (ΑΒΓ) = 25 m^2 στο οποίο έχουμε προεκτείνει την πλευρά α = ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ = α και την πλευρά γ = ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = γ.



α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΕ έχουν $\widehat{B} + \widehat{B}_{εξ} = 180^o$, άρα ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΒΔΕ)} = \frac{γ \cdot α}{γ \cdot 2α} = \frac{1}{2}$, άρα (ΒΔΕ) = 2·(ΑΒΓ) ή (ΒΔΕ) = 50 m^2.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΔ το τμήμα ΑΓ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΔ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι ισοδύναμα, δηλαδή (ΑΓΔ) = (ΑΒΓ). Η διαγώνιος ΑΔ χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δύο ίσα τρίγωνα, τα ΑΖΔ και ΑΕΔ, οπότε αυτά είναι ισοδύναμα, δηλαδή (ΑΔΖ) = (ΑΕΔ).

Επομένως (ΑΖΔ) = (ΑΕΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) + (ΒΔΕ) = 4(ΑΒΓ).

18562

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος της διαγωνίου ΒΔ ισούται με $\alpha\sqrt{2}$ και να βρείτε το εμβαδό του. (Μονάδες 05)

β)

i. Να σχεδιάσετε το τετράγωνο ΒΔΖΗ έτσι ώστε το σημείο Α να είναι εσωτερικό σημείο του και να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι το κέντρο του τετραγώνου ΒΔΖΗ. (Μονάδες 07)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΒΔΖΗ και να το συγκρίνετε με το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 08)

γ) Επαναλαμβάνουμε το σχεδιασμό όπως περιγράφηκε παραπάνω και σχηματίζουμε νέο τετράγωνο, με πλευρά κάθε φορά, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου.

Δηλαδή με πλευρά τη διαγώνιο ΔΗ του τετραγώνου ΒΔΖΗ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο, το ΔΗΘΚ. Με πλευρά τη διαγώνιο ΗΚ του ΔΗΘΚ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο κ.ο.κ. Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του θα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, πόσες φορές ακόμη πρέπει να επαναλάβουμε το σχεδιασμό αυτό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 05)

18562-Λύση

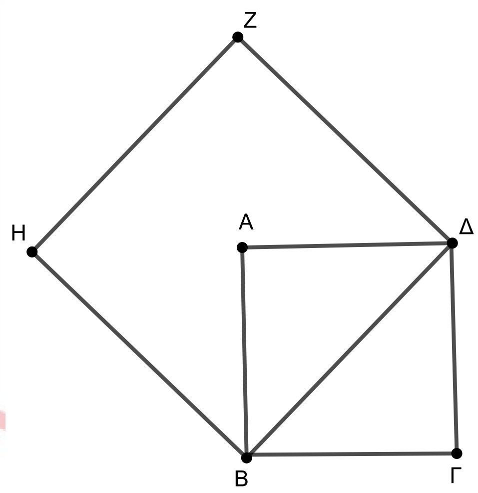
ΛΥΣΗ

α) Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$ΒΔ^2=ΑΒ^2+ΑΔ^2$ ή $ΒΔ^2 = α^2 + α^2$ ή $ΒΔ^2 = 2α^2$, οπότε ΒΔ= $α\sqrt{2}$. Για το εμβαδόν του ΑΒΓΔ, έχουμε (ΑΒΓΔ) = $α^2$.

β)

i.

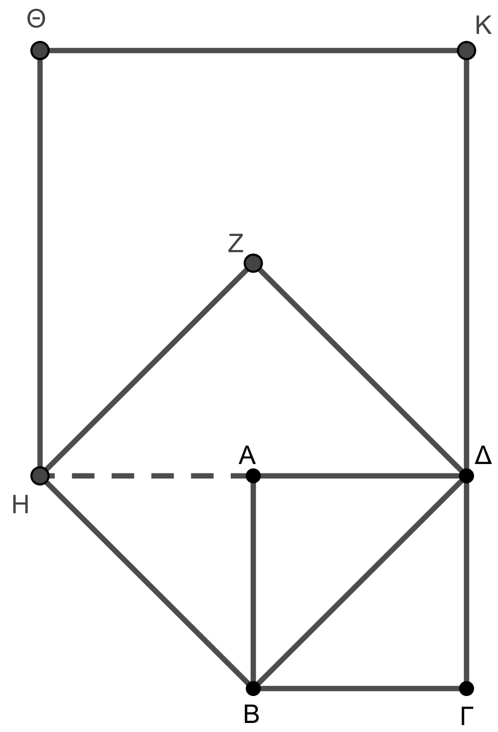


Τα τμήματα ΔΑ και ΒΑ είναι κάθετα μεταξύ τους ως πλευρές του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ. Η γωνία $Β\hat{Δ}Α$ είναι 45^o αφού η διαγώνιος ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\hat{Δ}$ του τετραγώνου. Επειδή $Β\hat{Δ}Ζ = 90^o$ ως γωνία του τετραγώνου ΒΔΖΗ, $Α\hat{Δ}Ζ = 45^o$. Οπότε το τμήμα ΔΑ διχοτομεί τη γωνία $\hat{Δ}$ του τετραγώνου, άρα το ΔΑ ανήκει στη διαγώνιο του τετραγώνου ΒΔΖΗ. Ομοίως η ΒΑ διχοτομεί τη γωνία $\hat{Β}$ του τετραγώνου ΒΔΖΗ και το ΒΑ ανήκει στην άλλη διαγώνιό του. Οι δύο διαγώνιες του τετραγώνου ΒΔΖΗ τέμνονται στο σημείο Α, δηλαδή το Α είναι το κέντρο του.

ii. Η πλευρά του τετραγώνου ΒΔΖΗ είναι ίση με $α\sqrt{2}$, οπότε για το εμβαδον του έχουμε: (ΒΔΖΗ) = $(α\sqrt{2})^2$ ή (ΒΔΖΗ) = $2α^2$. Στο α) ερώτημα βρήκαμε ότι το εμβαδό του ΑΒΓΔ είναι $α^2$, οπότε παρατηρούμε ότι (ΒΔΖΗ) = 2(ΑΒΓΔ).

18562-Λύση

γ)



Στο τετράγωνο ΒΔΖΗ η πλευρά του ισούται με $\alpha\sqrt{2}$. Επομένως η διαγώνιός του ΔΗ, σύμφωνα με το α) ερώτημα, θα είναι ίση με $\alpha\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2\alpha$. Επομένως η πλευρά του τετραγώνου ΔΗΘΚ είναι 2α, οπότε (ΔΗΘΚ) = $4\alpha^2$. Συγκρίνοντας το εμβαδό του τετραγώνου ΔΗΘΚ με το εμβαδό του ΒΔΖΗ παρατηρούμε ότι (ΔΗΘΚ) = 2(ΒΔΖΗ), όπως και (ΒΔΖΗ) = 2(ΑΒΓΔ). Επομένως (ΔΗΘΚ) = 2(ΒΔΖΗ) = 4(ΑΒΓΔ). Δηλαδή, σχεδιάζοντας τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο ενός τετραγώνου, το νέο τετράγωνο έχει διπλάσιο εμβαδό από το προηγούμενό του. Το αρχικό τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά ίση με α, έχει εμβαδό α^2, το ΒΔΖΗ έχει εμβαδό $2\alpha^2$, το ΔΗΘΚ έχει εμβαδό $4\alpha^2$. Σχεδιάζοντας τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο του ΔΗΘΚ θα προκύψει τετράγωνο με εμβαδό $8\alpha^2$.

Επομένως για να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του θα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, θα πρέπει να κάνουμε τη διαδικασία αυτή συνολικά τέσσερις (4) φορές. Δηλαδή, μετά το τετράγωνο ΔΗΘΚ του σχήματος θα χρειαστεί να φτιάξουμε, όπως περιγράφηκε, δύο ακόμη τετράγωνα.

18564

ΘΕΜΑ 4

Ο παππούς του Πέτρου έχει έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου και θέλει να φυτέψει στον μισό διάφορα λουλούδια και στο υπόλοιπο γκαζόν. Λέει λοιπόν στον Πέτρο ότι έχει σκεφτεί κάποιους απλούς τρόπους να τον χωρίσει σε δύο κομμάτια που να έχουν το ίδιο εμβαδό.

α) Να σχεδιάσετε δύο (2) τρόπους με τους οποίους χωρίζεται ο κήπος σε δύο κομμάτια ίδιου εμβαδού και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

(Μονάδες 10)

β) Ο Πέτρος προτείνει στον παππού του έναν δικό του τρόπο για το χωρισμό. Για να ορίσει το κομμάτι που θα φυτευτεί με λουλούδια χρησιμοποιεί τρεις πέτρες. Τοποθετεί την πρώτη πέτρα σε ένα εσωτερικό σημείο της μιας πλευράς του κήπου και τις άλλες δύο στις απέναντι κορυφές του ορθογωνίου. Δείχνει στον παππού του το τρίγωνο που σχηματίζεται εξηγώντας του πως είναι το μισό του κήπου. Προτείνει δε στον παππού του, το τριγωνικό χωρίο που σχηματίζεται, να το μετακινήσει εκείνος σε όποια θέση νομίζει καλύτερα μετακινώντας μόνο την πρώτη πέτρα, χωρίς παρ' όλα αυτά να αλλάξει το εμβαδό του.

i. Να σχεδιάσετε τον τρόπο που προτείνει ο Πέτρος και να αποδείξετε ότι, το εμβαδό του σχηματιζόμενου τριγωνικού χωρίου είναι το μισό του κήπου.

(Μονάδες 08)

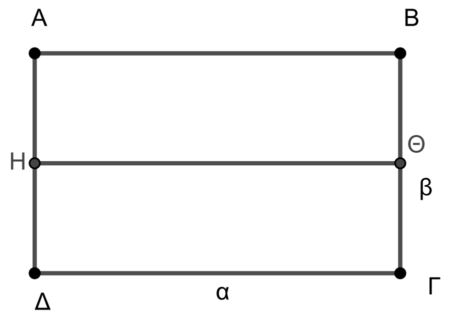
ii. Τι εννοεί ο Πέτρος λέγοντας ότι «το τριγωνικό χωρίο μπορεί να μετακινηθεί όταν αλλάζει η θέση της πρώτης πέτρας σε εσωτερικό σημείο της πλευράς του κήπου και παρ' όλα αυτά δεν αλλάζει το εμβαδό του»; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)

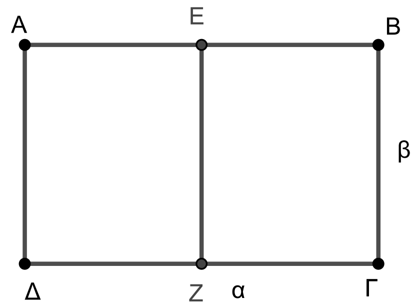
18564-Λύση

ΛΥΣΗ

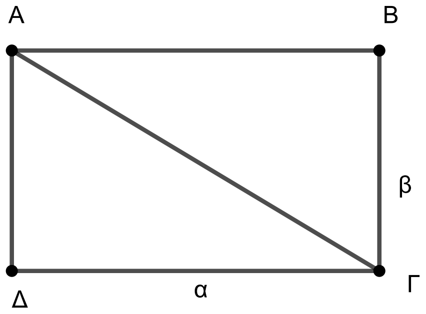
α)



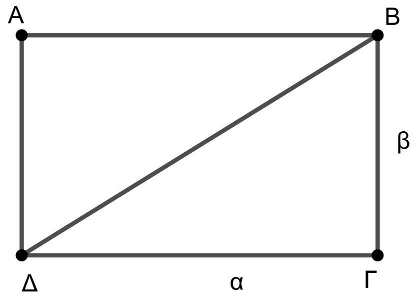
$1^η$ περίπτωση



$2^η$ περίπτωση



$3^η$ περίπτωση



$4^η$ περίπτωση

Κάποιοι τρόποι με τους οποίους μπορεί να χωριστεί ένα ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία είναι είτε φέροντας τις μεσοπαράλληλες των απέναντι πλευρών του ορθογωνίου είτε τις διαγώνιές του. Οι δύο πρώτες περιπτώσεις όπως και η $3^η$ και $4^η$ θεωρούνται διαφορετικές αφού το χωρίο είναι κήπος και έχει σημασία ο προσανατολισμός του.

Αν ΑΒ = ΓΔ = α και ΑΔ = ΒΓ = β τότε (ΑΒΓΔ) = α·β.

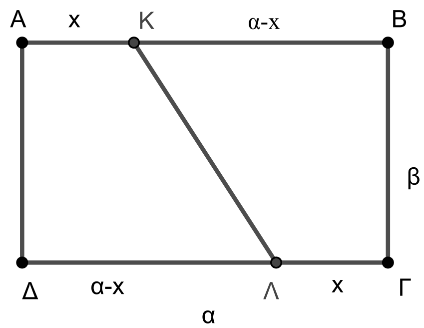
Στην $1^η$ περίπτωση έχουμε (ΑΒΘΗ)=(ΗΘΓΔ) =α $\cdot \frac{β}{2} = \frac{(ΑΒΓΔ)}{2}$.

Στην $2^η$ περίπτωση έχουμε (ΑΕΖΔ)=(ΕΒΓΖ) = $\frac{α}{2} \cdot β = \frac{(ΑΒΓΔ)}{2}$.

Στην $3^η$ και $4^η$ περίπτωση τα τρίγωνα που δημιουργούνται από κάθε διαγώνιο γνωρίζουμε ότι είναι ίσα, άρα και ισοδύναμα με (ΑΒΓ)=(ΑΔΓ)=(ΑΒΔ)=(ΒΓΔ)= $\frac{1}{2}$ α· β = $\frac{(ΑΒΓΔ)}{2}$.

Ένας άλλος τρόπος που μπορεί επίσης να χωριστεί το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία είναι ο εξής:

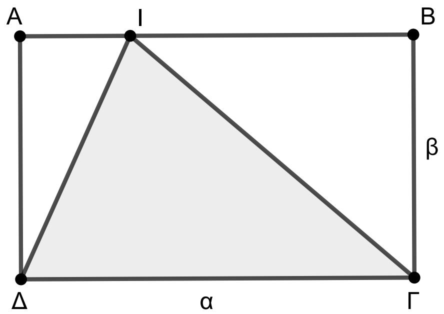
18564-Λύση



Θεωρούμε ένα σημείο Κ στην πλευρά ΑΒ και ένα σημείο Λ στην απέναντι πλευρά ΓΔ τέτοια ώστε ΑΚ = ΓΛ. Αν ΑΚ =ΓΛ =x, τότε ΚΒ = ΛΔ = α – x. Τα δύο τραπέζια ΑΚΛΔ και ΓΛΚΒ έχουν ίσες τις βάσεις τους και το ύψος τους είναι η διάσταση ΑΔ του ορθογωνίου. Οπότε (ΑΚΛΔ) = (ΓΛΚΒ) = $\frac{x+\alpha-x}{2}\cdot\beta = \frac{\alpha}{2}\cdot\beta = \frac{(ΑΒΓΔ)}{2}$.

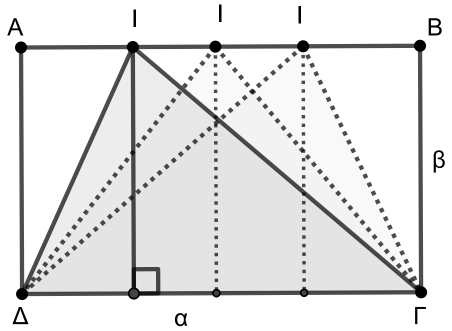
β)

i.



Έστω ότι το εσωτερικό σημείο μιας πλευράς του ορθογωνίου είναι το σημείο Ι, τότε οι απέναντι κορυφές είναι οι Γ και Δ. Οπότε σχηματίζεται το τρίγωνο ΙΔΓ που η πλευρά του ΔΓ είναι το μήκος α του ορθογωνίου και το ύψος προς αυτή είναι η απόσταση του Ι από τη ΔΓ, δηλαδή η άλλη διάσταση του ορθογωνίου που ισούται με β. Άρα (ΙΔΓ) = $\frac{1}{2}\alpha\cdot\beta = \frac{(ΑΒΓΔ)}{2}$.

ii.



18564-Λύση

Έστω ότι η θέση του σημείου Ι μεταβάλλεται και μπορεί να είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο της πλευράς ΑΒ. Σε κάθε τέτοια μετακίνηση του σημείου Ι, το τρίγωνο που σχηματίζεται έχει εμβαδό το μισό του αρχικού ορθογωνίου όπως αποδείχθηκε στο β) i. ερώτημα. Και οι θέσεις του Ι είναι τα άπειρα εσωτερικά σημεία της πλευράς ΑΒ.

18565

ΘΕΜΑ 4

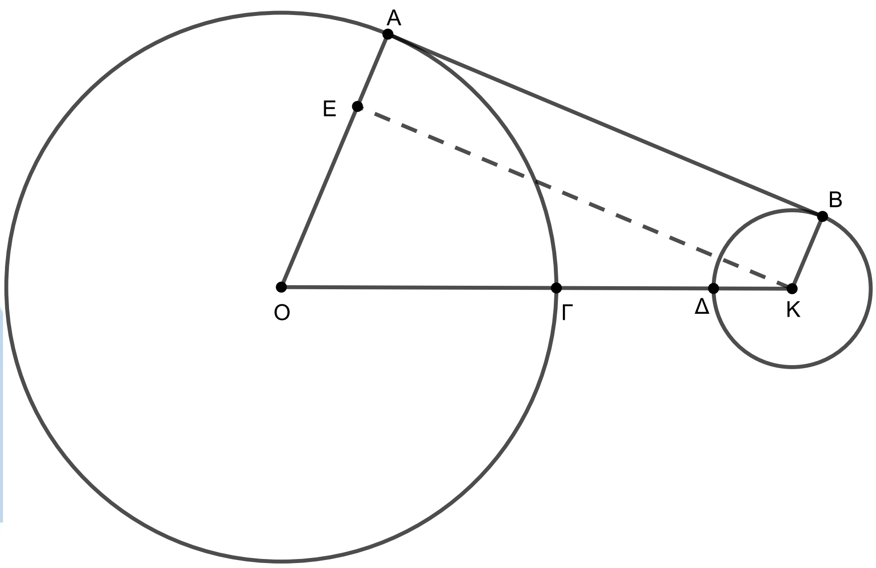
Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα Ο και Κ. Ο κύκλος με κέντρο Ο έχει ακτίνα R=7 ενώ ο κύκλος με κέντρο Κ έχει ακτίνα ρ=2. Το τμήμα ΑΒ είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων και το τμήμα ΚΕ είναι παράλληλο στο τμήμα ΑΒ με Ε σημείο του τμήματος ΟΑ. Η διάκεντρος ΟΚ τέμνει τον κύκλο (Ο,R) στο σημείο Γ και τον κύκλο (Κ,ρ) στο σημείο Δ.

α) Αν η θέση των δύο κύκλων είναι τέτοια ώστε, η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι ΓΔ=4, τότε:

i. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΚΟ. (Μονάδες 07)

β) Ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των 2 κύκλων, ώστε το εμβαδόν του ΑΒΚΕ να ισούται με $4\sqrt{14}$ τ.μ.; (Μονάδες 08)



18565

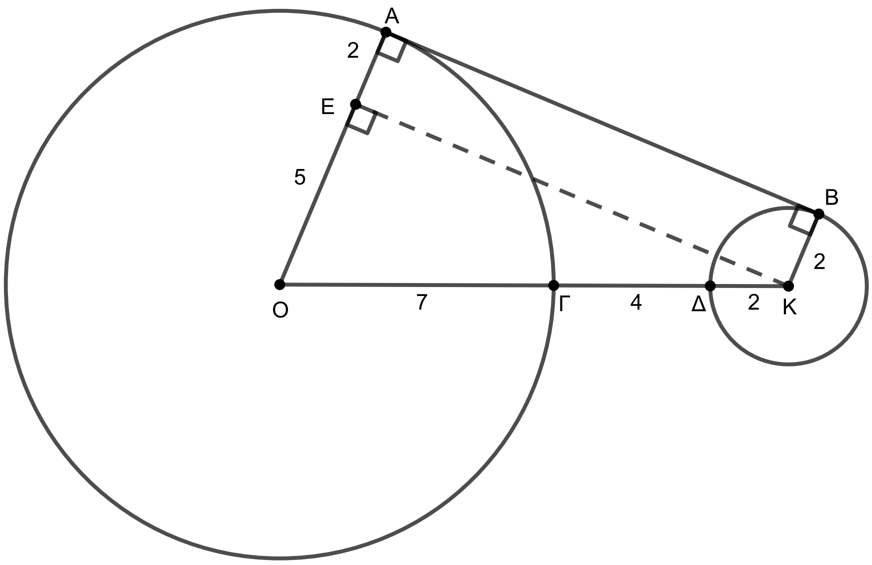
αλιμπινίσης

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

18565-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



i. Οι ακτίνες ΟΑ και ΚΒ είναι κάθετες στο εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ στα σημεία επαφής Α και Β. Το τμήμα ΚΕ είναι παράλληλο στο ΑΒ και αφού ΑΒ⊥ΟΑ, θα είναι και ΚΕ⊥ΟΑ. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΚΕ έχει 3 ορθές γωνίες και είναι ορθογώνιο. Επομένως ΑΕ=ΚΒ=2 και ΟΕ=ΟΑ-ΕΑ=7-2=5. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΚ η υποτείνουσά του ΟΚ είναι ΟΓ+ΓΔ+ΔΚ=7+4+2=13. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $ΚΕ^2=ΟΚ^2-ΟΕ^2$ ή $ΚΕ^2=13^2-5^2$ ή $ΚΕ^2=169-25$ ή $ΚΕ^2=144$, άρα ΚΕ=12. Άρα ΑΒ = ΚΕ =12.

ii. Στο τετράπλευρο ΑΒΚΟ είναι ΟΑ⊥ΑΒ και ΚΒ⊥ΑΒ, άρα ΟΑ//ΚΒ. Επίσης ΟΑ=7≠2=ΚΒ, άρα οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και άνισες, οπότε δεν είναι παραλληλόγραμμο. Άρα το ΑΒΚΟ είναι τραπέζιο, στο οποίο η μικρή του βάση είναι η ΚΒ, η μεγάλη βάση του η ΟΑ και το ύψος του είναι το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΑΒ. Οπότε (ΑΒΚΟ) = $\frac{ΚΒ+ΟΑ}{2} \cdot ΑΒ = \frac{2+7}{2} \cdot 12 = 54$ τ.μ.

β) Το ΑΒΚΕ είναι ορθογώνιο, άρα (ΑΒΚΕ) = ΑΒ·ΚΒ. Επειδή (ΑΒΚΕ) = $4\sqrt{14}$, έχουμε: $4\sqrt{14}$ = ΑΒ·2 άρα ΑΒ = $2\sqrt{14}$. Από το α) ερώτημα ΑΒ=ΚΕ, οπότε ΚΕ=$2\sqrt{14}$ και από το Π.Θ. στο τρίγωνο ΟΚΕ είναι: $ΟΚ^2 = ΟΕ^2+ΚΕ^2$ ή $ΟΚ^2=5^2+(2\sqrt{14})^2$, ή $ΟΚ^2 = 25+56$, ή $ΟΚ^2=81$, άρα ΟΚ=9. Για το τμήμα ΟΚ ισχύει ότι ΟΚ=ΟΓ+ΓΔ+ΔΚ, ή 9=7+ΓΔ+2, δηλαδή 9=9+ΓΔ, οπότε ΓΔ=0. Δηλαδή η διάκεντρος ΟΚ των δύο κύκλων ισούται με το άθροισμα των ακτινών τους. Άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

18566

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}=90^{o}$.

Με πλευρά την υποτείνουσα ΒΓ και έξω από το τρίγωνο, γράφουμε το τετράγωνο ΒΓΔΕ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το Α και παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΒΖ = ΒΓ. Από τα σημεία Γ και Ζ φέρουμε παράλληλες προς τα τμήματα ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο Η.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΒΓΗΖ είναι ρόμβος και να βρείτε τις περιμέτρους του ρόμβου και του τετραγώνου. (Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: «Ο ρόμβος και το τετράγωνο αφού έχουν ίσες περιμέτρους, θα έχουν και ίσα εμβαδά».

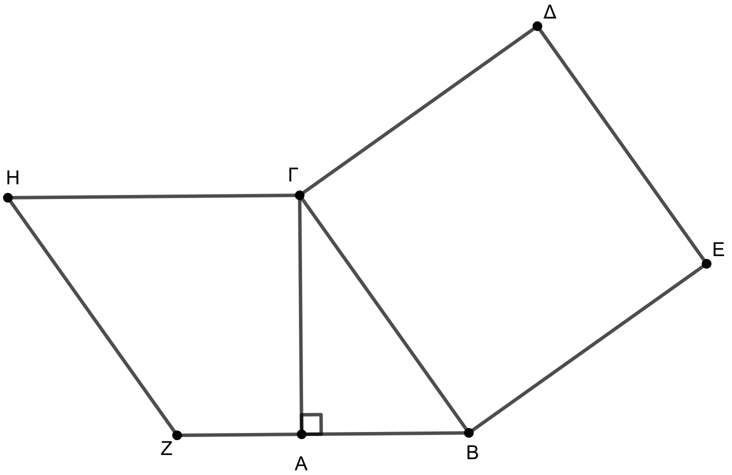
Ισχυρισμός 2: «Ο ρόμβος έχει μικρότερο εμβαδό από το τετράγωνο και μάλιστα, όπως έχουν κατασκευαστεί τα δύο τετράπλευρα δεν γίνεται να είναι ποτέ ισεμβαδικά».

Εξετάστε ποιος από τους 2 παραπάνω ισχυρισμούς είναι σωστός και να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

18566-Λύση

ΛΥΣΗ

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}$ $=90^o$ και ΒΓΔΕ το τετράγωνο με πλευρά την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το Α και παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΒΖ = ΒΓ. Οι παράλληλες από το Γ στη ΒΖ και από το Ζ στη ΒΓ τέμνονται στο Η.



α) Το τετράπλευρο ΒΓΗΖ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές του ΒΓ και ΒΖ είναι ίσες από την κατασκευή, οπότε το ΒΓΗΖ είναι ρόμβος με πλευρά ίση με την υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Άρα η περίμετρος του ρόμβου είναι ίση με 4·ΒΓ. Επίσης το τετράγωνο ΒΓΔΕ έχει πλευρά ίση με την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου, άρα η περίμετρός του είναι ίση με 4·ΒΓ. Δηλαδή ο ρόμβος και το τετράγωνο έχουν ίσες περιμέτρους.

β) Για το εμβαδό του τετραγώνου έχουμε ότι (ΒΓΔΕ) = $ΒΓ^2$. Ενώ, για το εμβαδό του ρόμβου, αφού ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε: (ΒΓΗΖ) = ΒΖ·ΓΑ με ΓΑ η απόσταση των παραλλήλων πλευρών του ΒΖ και ΓΗ. Συγκρίνοντας τα δύο εμβαδά παρατηρούμε ότι, για το εμβαδό του τετραγώνου το τμήμα ΒΓ πολλαπλασιάζεται με το ΒΓ και για το εμβαδό του ρόμβου, το ΒΓ πολλαπλασιάζεται με το ΑΓ. Το τμήμα ΑΓ είναι κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ και το τμήμα ΒΓ είναι υποτείνουσα. Όμως η κάθετη πλευρά είναι πάντα μικρότερη της υποτείνουσας, επομένως το εμβαδό του ρόμβου είναι μικρότερο από το εμβαδό του τετραγώνου και δεν γίνεται ποτέ τα δύο σχήματα να είναι ισεμβαδικά. Άρα ο ισχυρισμός 2 είναι σωστός.

19037

ΘΕΜΑ 3

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε

$$\text{ΔΒ} = \frac{1}{5}\text{ΑΒ},\ \text{ΕΓ} = \frac{1}{4}\text{ΒΓ},\ \text{ΖΓ} = \frac{1}{2}\text{ΑΓ}$$

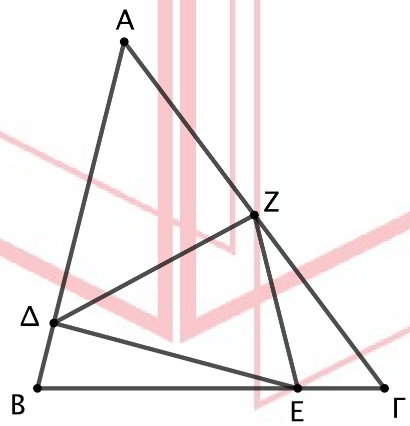
α) Να υπολογίσετε τους λόγους

$$\frac{(\text{ΔΒΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}, \frac{(\text{ΕΓΖ})}{(\text{ΑΒΓ})}, \frac{(\text{ΖΑΔ})}{(\text{ΑΒΓ})}$$

(Μονάδες 15)

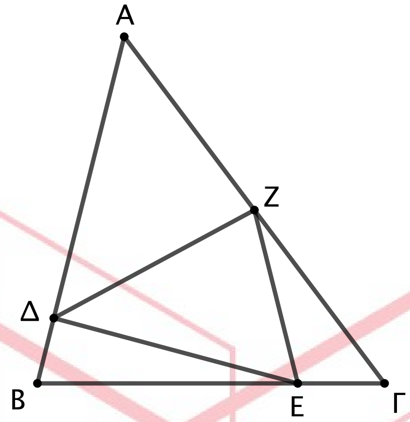
β) Αν είναι (ΑΒΓ) = 120, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ.

(Μονάδες 10)



19037-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$ΔΒ = \frac{1}{5}ΑΒ, \text{ οπότε } ΑΔ = \frac{4}{5}ΑΒ$$

$$ΕΓ = \frac{1}{4}ΒΓ, \text{ οπότε } ΒΕ = \frac{3}{4}ΒΓ$$

$$ΖΓ = \frac{1}{2}ΑΓ, \text{ οπότε } ΑΖ = \frac{1}{2}ΑΓ$$

Τα τρίγωνα ΔΒΕ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{Β}$. Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\hat{Β}$ σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(ΔΒΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΔΒ \cdot ΒΕ}{ΑΒ \cdot ΒΓ} \text{ ή } \frac{(ΔΒΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{\frac{1}{5}ΑΒ\frac{3}{4}ΒΓ}{ΑΒ \cdot ΒΓ} \text{ ή } \frac{(ΔΒΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{3}{20}$$

Τα τρίγωνα ΕΓΖ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{Γ}$. Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\hat{Γ}$ σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(ΕΓΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΕΓ \cdot ΖΓ}{ΒΓ \cdot ΑΓ} \text{ ή } \frac{(ΕΓΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{\frac{1}{4}ΒΓ\frac{1}{2}ΑΓ}{ΒΓ \cdot ΑΓ} \text{ ή } \frac{(ΕΓΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{8}$$

Τα τρίγωνα ΖΑΔ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία $\widehat{Α}$. Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\widehat{Α}$ σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(ΖΑΔ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΖ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} \text{ ή } \frac{(ΖΑΔ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{\frac{4}{5}ΑΒ\frac{1}{2}ΑΓ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} \text{ ή } \frac{(ΖΑΔ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

β) Από το σχήμα έχουμε ότι:

19037-Λύση

$$(ΑΒΓ) = (ΔΒΕ) + (ΕΓΖ) + (ΖΑΔ) + (ΔΕΖ)$$

Από το προηγούμενο ερώτημα είναι:

$$(ΔΒΕ) = \frac{3}{20}(ΑΒΓ) = \frac{3}{20} \cdot 120 = 18$$

$$(ΕΓΖ) = \frac{1}{8}(ΑΒΓ) = \frac{1}{8} \cdot 120 = 15$$

$$(ΖΑΔ) = \frac{4}{10}(ΑΒΓ) = \frac{2}{5} \cdot 120 = 48$$

Οπότε:

$$(ΑΒΓ) = 18 + 15 + 48 + (ΔΕΖ) \quad ή \quad (ΔΕΖ) = 39$$

20361

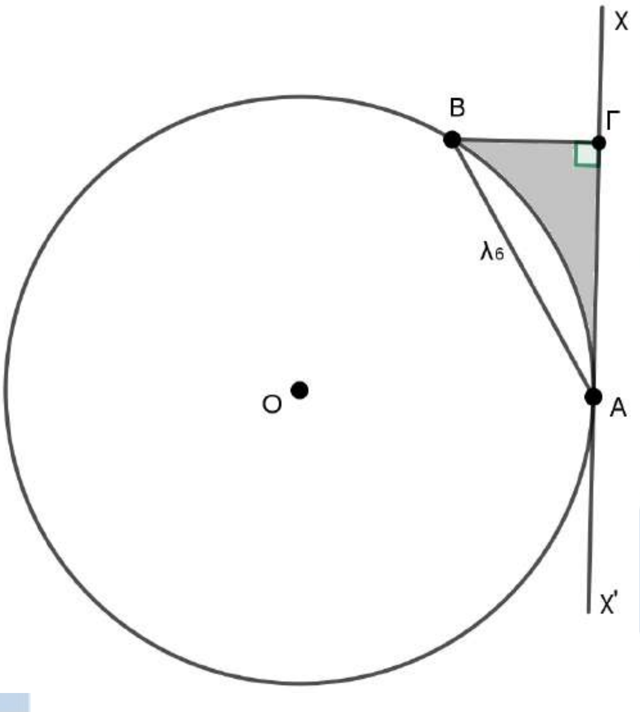
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (O,R) και η χορδή του AB ίση με την πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Στο σημείο Α φέρνουμε την εφαπτομένη x'x του κύκλου και από το B την κάθετη στην x'x που την τέμνει στο Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΓ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 8)

β) $(ΟΑΓΒ) = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$. (Μονάδες 7)

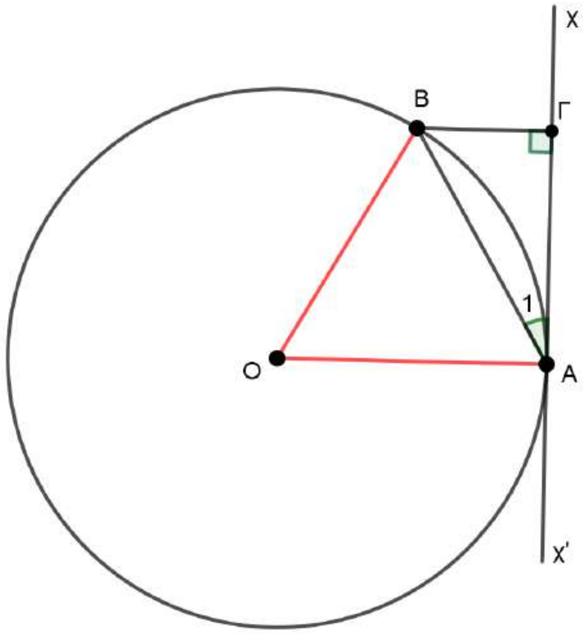
γ) το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα είναι: $E = \frac{(9\sqrt{3}-4\pi)R^2}{24}$. (Μονάδες 10)



20361-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



Φέρνουμε τις ακτίνες ΟΑ, ΟΒ.

Από τα δεδομένα, η ΑΒ είναι πλευρά κανονικού 6-γώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο οπότε το τόξο ΑΒ θα ισούται με $\frac{360^0}{6} = 60^0$. Άρα και η επίκεντρη γωνία ΑΟΒ θα ισούται με 60^0 επομένως το τρίγωνο ΟΑΒ θα είναι ισόπλευρο πλευράς R. Δηλαδή ΑΒ = R = ΟΑ = ΟΒ και επιπλέον θα έχει όλες του τις γωνίες ίσες με 60^0.

Η ΟΑ ως ακτίνα που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής, είναι κάθετη στην εφαπτομένη x'x, επομένως η γωνία ΟΑΓ είναι ορθή.

Άρα η γωνία A_1 θα ισούται με 30^0, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η $ΒΓ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{R}{2}$.

Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 - ΒΓ^2$ ή $ΑΓ^2 = R^2 - (\frac{R}{2})^2$ ή $ΑΓ^2 = R^2 - \frac{R^2}{4}$ ή $ΑΓ^2 = \frac{3R^2}{4}$, οπότε $ΑΓ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

β) Λόγω του ερωτήματος (α), οι ΟΑ, ΒΓ ως κάθετες στην x'x, θα είναι μεταξύ τους παράλληλες. Άρα το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι τραπέζιο με βάσεις ΟΑ, ΒΓ και ύψος ΑΓ.

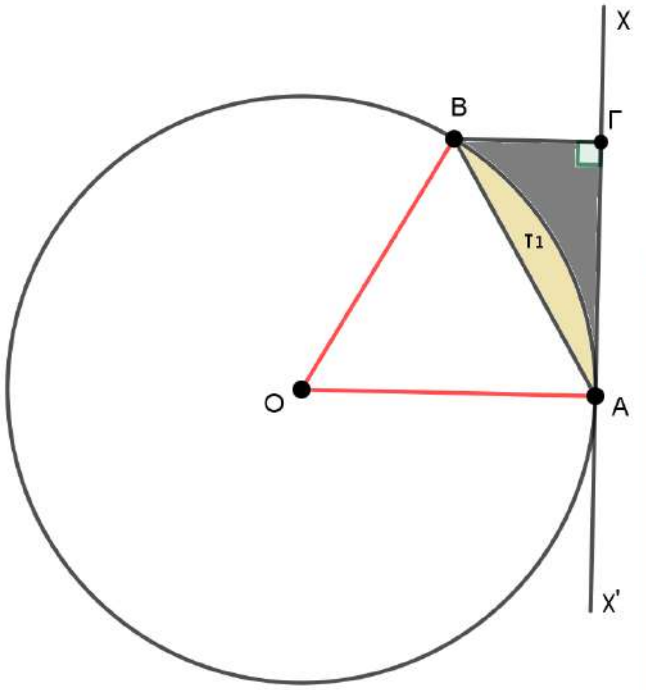
Οπότε $(ΟΑΓΒ) = \frac{ΟΑ+ΒΓ}{2} \cdot ΑΓ = \frac{R+\frac{R}{2}}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{4} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$.

γ) Το ζητούμενο εμβαδό θα βρεθεί αν από το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ, αφαιρέσουμε το εμβαδό του κυκλικού τμήματος $τ_1$. Δηλαδή $Ε = (ΑΒΓ) - (τ_1)(1)$.

20361-Λύση

Λόγω του ερωτήματος (α) έχουμε:

(ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}\cdot$ΒΓ$\cdot$ΑΓ = $\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{8}$.



$(\tau_1) = (\text{O}\overset{\frown}{AB}) - (\text{OAB}) = \frac{\pi R^2 \mu}{360} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2 \cdot 60^0}{360} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi R^2 - 3\sqrt{3}R^2}{12}$.

Έτσι η (1) δίνει: Ε = $\frac{R^2\sqrt{3}}{8} - \frac{2\pi R^2 - 3\sqrt{3}R^2}{12} = \frac{3\sqrt{3}R^2 - 4\pi R^2 + 6\sqrt{3}R^2}{24} = \frac{9\sqrt{3}R^2 - 4\pi R^2}{24}$

$= \frac{(9\sqrt{3} - 4\pi)R^2}{24}$.

Εναλλακτικά: Το ζητούμενο εμβαδό είναι: Ε = (ΟΑΓΒ) – (Ο$\overset{\frown}{AB}$).

Λόγω του ερωτήματος (β) το (ΟΑΓΒ) = $\frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$.

Επίσης: (Ο$\overset{\frown}{AB}$) = $\frac{\pi R^2 \mu}{360} = \frac{\pi R^2 \cdot 60^0}{360} = \frac{\pi R^2}{6}$.

Έτσι Ε = $\frac{3\sqrt{3}R^2}{8} - \frac{\pi R^2}{6} = \frac{9\sqrt{3}R^2 - 4\pi R^2}{24} = \frac{(9\sqrt{3} - 4\pi)R^2}{24}$.

20667

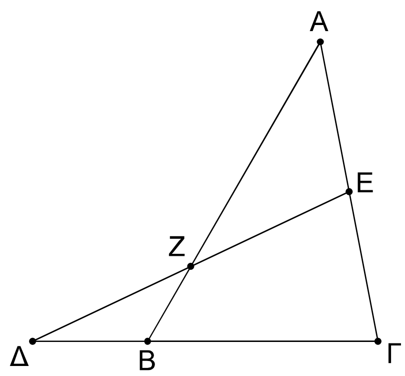
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = 8$. Στην προέκταση της ΓΒ προς το Β παίρνουμε σημείο Δ, ώστε $ΔΒ = 4$ και Ε είναι το μέσο της ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $(ΑΒΓ) = 4ΑΓ \cdot ημΓ$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $(ΓΔΕ) = 3ΑΓ \cdot ημΓ$. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΓΔΕ και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, αν το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ είναι 12 τ.μ. (Μονάδες 8)



20667-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ο τύπος

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\text{ΒΓ} \cdot \text{ΑΓ} \cdot \text{ημΓ}.$$

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $\text{ΒΓ} = 8$, επομένως

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \text{ΑΓ} \cdot \text{ημΓ} = 4\text{ΑΓ} \cdot \text{ημΓ}.$$

β) Για το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ ισχύει ο τύπος

$$(\text{ΓΔΕ}) = \frac{1}{2}\text{ΓΔ} \cdot \text{ΓΕ} \cdot \text{ημΓ}.$$

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $\text{ΒΓ} = 8$ και $\text{ΔΒ} = 4$, επομένως $\text{ΓΔ} = \text{ΒΓ} + \text{ΔΒ} = 8 + 4 = 12$. Επιπλέον $\text{ΓΕ} = \frac{\text{ΑΓ}}{2}$, γιατί Ε είναι το μέσο της ΑΓ. Άρα

$$(\text{ΓΔΕ}) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{\text{ΑΓ}}{2} \cdot \text{ημΓ} = 3\text{ΑΓ} \cdot \text{ημΓ}.$$

γ) Από τα ερωτήματα α) και β) προκύπτει ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι

$$\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΓΔΕ})} = \frac{4\text{ΑΓ} \cdot \text{ημΓ}}{3\text{ΑΓ} \cdot \text{ημΓ}} = \frac{4}{3}.$$

Όμως $(\text{ΓΔΕ}) = 12$ τ.μ. επομένως

$$\frac{(\text{ΑΒΓ})}{12} = \frac{4}{3} \text{ ή } (\text{ΑΒΓ}) = 16 \text{ τ.μ.}$$

20678

ΘΕΜΑ 4

Η κορνίζα του παρακάτω σχήματος αποτελείται από δύο όμοια ορθογώνια με παράλληλες πλευρές και κοινό κέντρο Ο. Το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ' έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ.

α) Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας του ορθογωνίου ΑΒΓΔ προς το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ'.

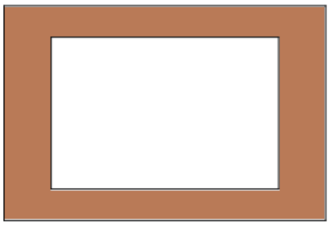
(Μονάδες 5)

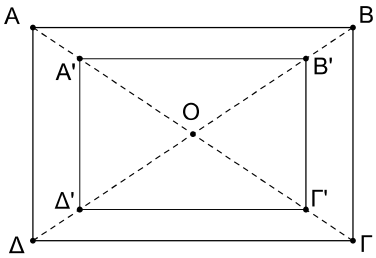
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι όμοια. (Μονάδες 6)

γ) Στην κορνίζα τοποθετούμε μια φωτογραφία που χωράει ακριβώς στο κάδρο, χωρίς να χάνεται κανένα μέρος της. Η διαγώνιος ΑΓ της κορνίζας έχει μήκος 40 cm και $\text{A}\widehat{\text{O}}\text{B} = 120^o$.

i. Πόσο μήκος έχει η διαγώνιος της φωτογραφίας; (Μονάδες 6)

ii. Πόσο είναι το εμβαδόν της φωτογραφίας; (Μονάδες 8)





20678-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αφού το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ' έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ, θα είναι $(ΑΒΓΔ) = 2(Α'Β'Γ'Δ')$ ή

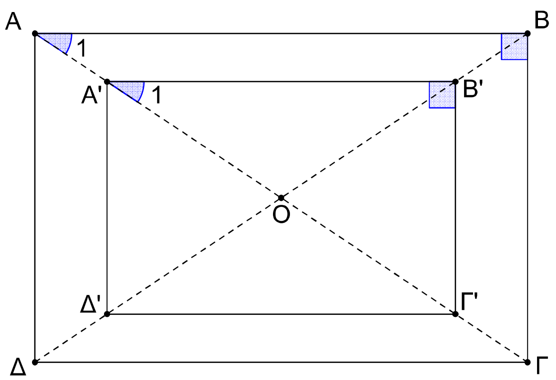
$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(Α'Β'Γ'Δ')} = 2.$$

Αν είναι λ ο λόγος ομοιότητας του ορθογωνίου ΑΒΓΔ προς το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ', τότε

$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(Α'Β'Γ'Δ')} = λ^2.$$

Άρα $λ^2 = 2$ ή $λ = \sqrt{2}$.

β)



Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν $\widehat{Α}_1 = \widehat{Α'}_1$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, Α'Β' που τέμνονται από την ΑΓ και $\widehat{Β} = \widehat{Β'} = 90^o$. Επομένως τα δύο τρίγωνα είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

γ) i. Από το ερώτημα α) έχουμε ότι ο λόγος ομοιότητας των δύο ορθογωνίων είναι $λ = \sqrt{2}$, δηλαδή $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \sqrt{2}$.

Επιπλέον, από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουμε ότι $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}$.

Επομένως $\frac{ΑΓ}{Α'Γ'} = \sqrt{2}$.

Όμως $ΑΓ = 40$, άρα $\frac{40}{Α'Γ'} = \sqrt{2}$ ή $Α'Γ' = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$, δηλαδή η διαγώνιος της φωτογραφίας έχει μήκος $20\sqrt{2}$ cm.

ii. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου Α'Β'Γ'Δ' έχουν το ίδιο μήκος και διχοτομούνται. Επομένως

$$ΟΑ' = ΟΒ' = ΟΓ' = ΟΔ' = \frac{Α'Γ'}{2} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}.$$

20678-Λύση

Είναι $A'\widehat{O}B' = \Gamma'\widehat{O}\Delta' = 120^o$ ως κατακορυφήν. Για το εμβαδόν των τριγώνων ΟΑ'Β' και ΟΓ'Δ' ισχύει

$$(OA'B') = \frac{1}{2}OA' \cdot OB' \cdot \eta\mu 120^o = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$$

και

$$(O\Gamma'\Delta') = \frac{1}{2}O\Gamma' \cdot O\Delta' \cdot \eta\mu 120^o = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}\,.$$

Είναι $A'\widehat{O}\Delta' = B'\widehat{O}\Gamma' = 60^o$ ως παραπληρωματικές της γωνίας $A'\widehat{O}B' = 120^o$. Για το εμβαδόν των τριγώνων ΟΑ'Δ' και ΟΒ'Γ' ισχύει

$$(OA'\Delta') = \frac{1}{2}OA' \cdot O\Delta' \cdot \eta\mu 60^o = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$$

και

$$(OB'\Gamma') = \frac{1}{2}OB' \cdot O\Gamma' \cdot \eta\mu 60^o = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}\,.$$

Το εμβαδόν της φωτογραφίας είναι

$$\left(A'B'\Gamma'\Delta'\right) = (OA'B') + (O\Gamma'\Delta') + (OA'\Delta') + (OB'\Gamma') = 4 \cdot 50\sqrt{3} = 200\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2.$$

<u>2^{η} λύση για το ερώτημα γ)ii.</u>

Το τρίγωνο ΟΑ'Δ' είναι ισοσκελές, αφού $OA' = O\Delta'$ ως μισά των ίσων διαγωνίων του ορθογωνίου Α'Β'Γ'Δ' και $A'\widehat{O}\Delta' = 60^o$. Άρα $O\widehat{A'}\Delta' = 60^o$. Όμως η γωνία $B'\widehat{A'}\Delta'$ είναι ορθή, επομένως $O\widehat{A'}B' = 90^o - 60^o = 30^o$.

Η γωνία $O\widehat{A'}B'$ του ορθογωνίου τριγώνου Α'Β'Γ' ισούται με 30^o, οπότε η απέναντι πλευρά Β'Γ' είναι το μισό της υποτείνουσας Α'Γ', δηλαδή $B'\Gamma' = \frac{A'\Gamma'}{2} = \frac{A'\Gamma'}{2} = 10\sqrt{2}$.

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο Α'Β'Γ' έχουμε ότι

$$A'B'^2 = A'\Gamma'^2 - B'\Gamma'^2.$$

Όμως $A'\Gamma' = 20\sqrt{2}$ και $B'\Gamma' = 10\sqrt{2}$, οπότε

$$A'B'^2 = (20\sqrt{2})^2 - (10\sqrt{2})^2 \text{ ή } A'B'^2 = 600 \text{ ή } A'B' = 10\sqrt{6}.$$

Το εμβαδόν της φωτογραφίας είναι

$$\left(A'B'\Gamma'\Delta'\right) = A'B' \cdot B'\Gamma' = 10\sqrt{6} \cdot 10\sqrt{2} = 200\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2.$$

21075

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο, ακτίνα ρ και εμβαδόν ίσο με 16π.

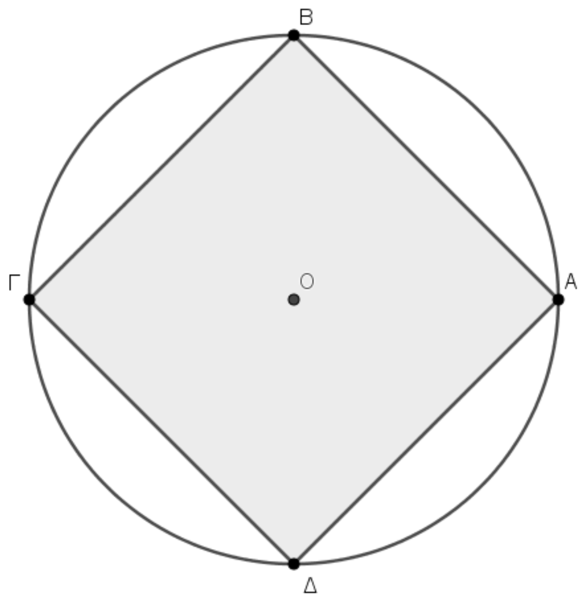
α) Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου. (Μονάδες 07)

β) Αν η ακτίνα ρ του κύκλου είναι 4 να υπολογίσετε:

i. Την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον κύκλο. (Μονάδες 09)

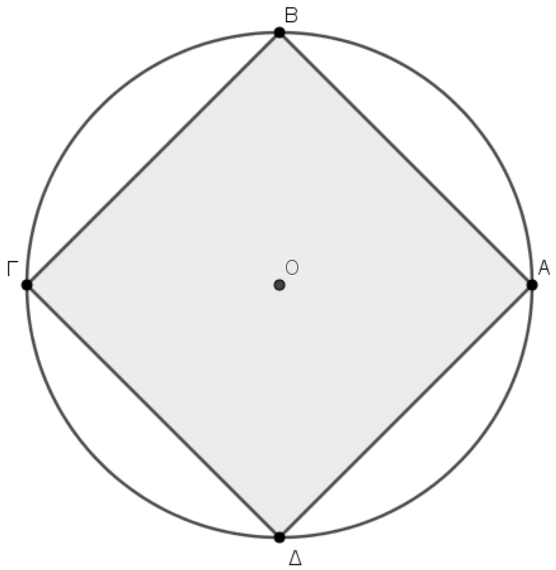
ii. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο τετράγωνο και στον κύκλο.

(Μονάδες 09)



21075-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Το εμβαδόν του κύκλου δίνεται από τον τύπο Ε = $\pi\rho^2$. Επομένως $16\pi = \pi\rho^2$, άρα ρ = 4.

β)

i. Η πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με ακτίνα ρ ισούται με $\rho\sqrt{2}$. Επομένως για ρ = 4 έχουμε ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι ΑΒ = $\rho\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

ii. Το εμβαδόν του κύκλου είναι 16π, ενώ το εμβαδόν του τετραγώνου είναι Ε = AB^2 = $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 16 \cdot 2 = 32$. Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το τετράγωνο θα είναι ίσο με 16π – 32.

21101

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΒΓ = $\sqrt{3}$, ΑΒ = $\sqrt{2}$, ΑΓ = 1.

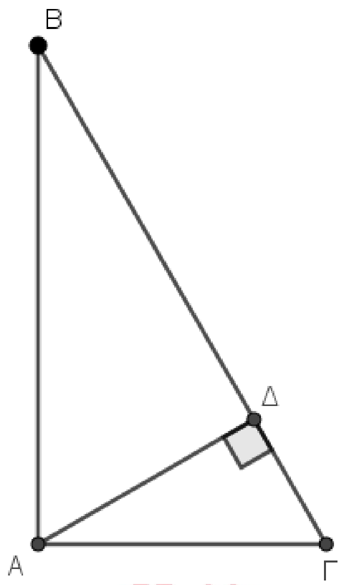
α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{A} = 90^o$. (Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ. (Μονάδες 09)

21101-Λύση

ΛΥΣΗ



α)

Έχουμε:

$B\Gamma^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

$AB^2 + A\Gamma^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3$

Επομένως, είναι $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$, άρα η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΒΓ είναι ορθή, δηλαδή $\widehat{A} = 90^o$.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

γ) Φέρουμε το ύψος ΑΔ. Το εμβαδόν του τριγώνου μπορεί να δοθεί και από τον τύπο

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta$$

Στο ερώτημα β) βρήκαμε ότι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Έτσι έχουμε:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot A\Delta \quad \text{ή} \quad \sqrt{2} = \sqrt{3}\cdot A\Delta \quad \text{ή} \quad A\Delta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

21103

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α και με διαμέτρους τις ΒΓ και ΒΑ φτιάχνουμε εξωτερικά του τετραγώνου ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος κάθε ημικυκλίου ισούται με π·α. (Μονάδες 07)

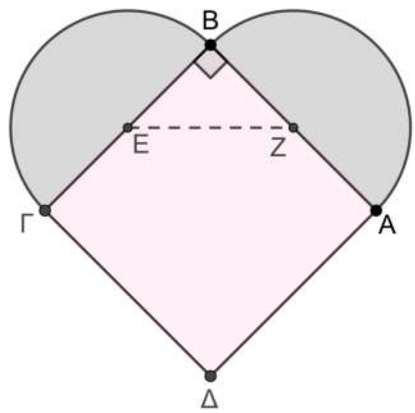
β)

i. Αν η περίμετρος της καρδιάς είναι 2π+4, να υπολογίσετε το α. (Μονάδες 06)

ii. Αν α = 1 να βρείτε το μήκος του τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο ημικυκλίων.

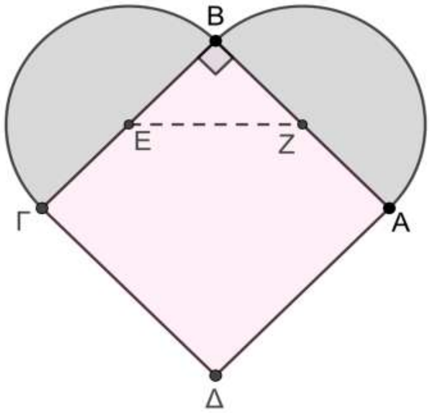
(Μονάδες 06)

γ) Αν (τ) είναι το άθροισμα των εμβαδών των δυο ημικυκλίων να συγκρίνετε τον λόγο $\frac{(\tau)}{(AB\Gamma\Delta)}$ με την μονάδα. Να αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 06)



21103-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Το κάθε ημικύκλιο έχει ακτίνα ρ ίση με το μισό της πλευράς του τετραγώνου, δηλαδή

ρ = $\frac{2\alpha}{2}=\alpha$. Το μήκος τόξου μ° θα είναι $\frac{\pi\rho\mu^o}{180^o}$, δηλαδή $\frac{\pi\alpha 180^o}{180^o}=\pi\alpha$.

β)

i. Η περίμετρος της καρδιάς αποτελείται από τα δύο ημικύκλια και τις πλευρές ΑΔ και ΔΓ. Από το α) ερώτημα το κάθε ημικύκλιο έχει μήκος πα οπότε η περίμετρος θα ισούται με πα + πα + 2α + 2α = 2πα + 4α. Από υπόθεση έχουμε ότι η περίμετρος είναι 2π + 4, οπότε 2πα + 4α = 2π + 4 ή (2π + 4)α = 2π + 4, άρα α = 1.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΖ ($\widehat{B}=90^o$) έχουμε ΒΕ = ΒΖ = α. Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα: $EZ^2=BE^2+BZ^2=\alpha^2+\alpha^2=2\alpha^2$ ή $EZ=\alpha\sqrt{2}$. Για α = 1 έχουμε $EZ=\sqrt{2}$.

γ) Τα δύο ημικύκλια είναι ίσα γιατί έχουν την ίδια ακτίνα α, οπότε το άθροισμά τους θα είναι ένας κυκλικός δίσκος με ακτίνα α. Το εμβαδόν του θα είναι (τ) = $\pi\rho^2=\pi\alpha^2$.

Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει εμβαδόν $(AB)^2=(2\alpha)^2=4\alpha^2$.

Ο ζητούμενος λόγος $\frac{(\tau)}{(AB\Gamma\Delta)}=\frac{\pi\alpha^2}{4\alpha^2}=\frac{\pi}{4}$.

Επειδή π < 4 το κλάσμα $\frac{\pi}{4}$ θα είναι μικρότερο της μονάδας, το ίδιο και ο ζητούμενος λόγος.

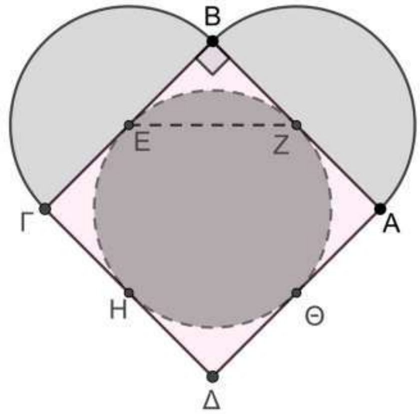
Εναλλακτική λύση γ).

Το εμβαδόν των δύο ημικυκλίων θα είναι ίσο με το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου του τετραγώνου, διότι τα ημικύκλια έχουν ακτίνα α και ο εγγεγραμμένος στο τετράγωνο κύκλος έχει και αυτός ακτίνα α (η διάμετρος ισούται με 2α). Επειδή ο κύκλος είναι

21103-Λύση

εγγεγραμμένος στο τετράγωνο (σχήμα) το εμβαδόν του είναι μικρότερο από αυτό του τετραγώνου, οπότε το κλάσμα

$$\frac{(\tau)}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}<1$$



21120

ΘΕΜΑ 2

Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = \sqrt{2}$. Από σημείο $Δ$ της πλευράς $ΑΒ$ ώστε $ΑΔ = 1$, φέρνουμε παράλληλη στη $ΒΓ$ η οποία τέμνει την $ΑΓ$ στο σημείο $Ε$.

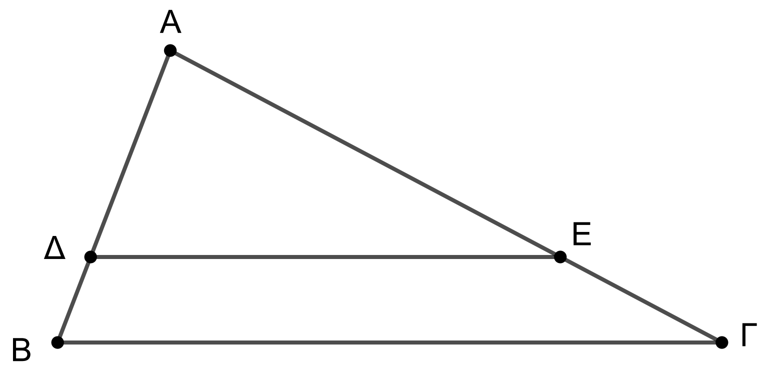
α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΑΒΓ$ είναι όμοια και να γράψετε τον λόγο ομοιότητας ,

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΔΕ$ είναι το μισό του εμβαδού του τριγώνου $ΑΒΓ$.

(Μονάδες 18)

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι 2, να βρείτε τα εμβαδά του τριγώνου $ΑΔΕ$ και του τραπεζίου $ΒΓΕΔ$. (Μονάδες 7)



21120-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Γνωρίζουμε ότι το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου. Επίσης, αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια. Επομένως τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΑΒΓ$ είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι $\lambda = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

ii) Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $ΑΔΕ$ και $ΑΒΓ$ θα είναι

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \lambda^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \text{ ή } (ΑΔΕ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ).$$

β) Δίνεται ότι $(ΑΒΓ) = 2$, οπότε από το ερώτημα α) i) είναι $(ΑΔΕ) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Επίσης το εμβαδόν του τραπεζίου $ΒΓΕΔ$ θα είναι $(ΒΓΕΔ) = (ΑΒΓ) - (ΑΔΕ) = 2 - 1 = 1$.

21121

ΘΕΜΑ 2

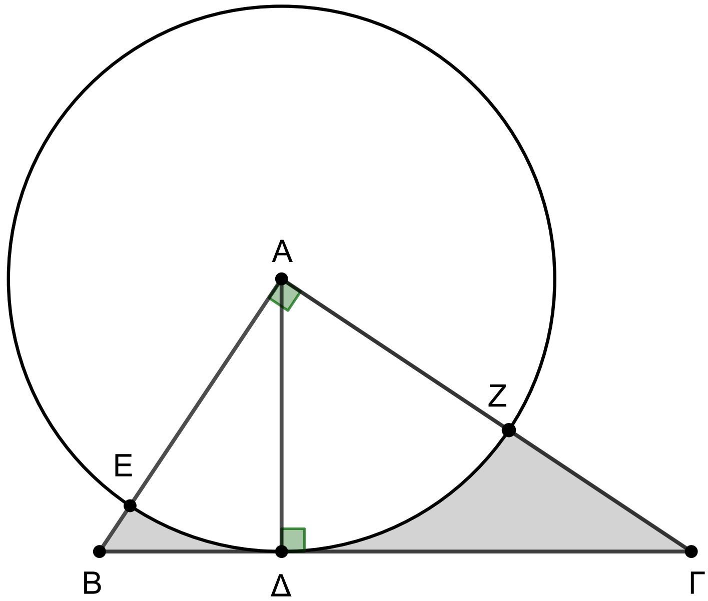
Στο παρακάτω σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχει υποτείνουσα $ΒΓ = 13$ και αντίστοιχο ύψος $ΑΔ = 6$. Με κέντρο το $Α$ και ακτίνα $ΑΔ$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$, στα σημεία $Ε$ και $Ζ$ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά:

i. του κυκλικού τομέα $Α\,\widehat{ΕΔΖ}$, (Μονάδες 9)

ii. του σκιασμένου χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου $ΑΒΓ$ και εξωτερικά του κύκλου, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. (Μονάδες 8)



21121-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι $ΒΓ = 13$ και $ΑΔ = 6$, επομένως το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot ΒΓ \cdot ΑΔ \quad \text{ή} \quad (ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 \quad \text{ή} \quad (ΑΒΓ) = 39.$$

β) i) Ο κυκλικός τομέας $\mathrm{Α}\,\widehat{\mathrm{ΕΔΖ}}$ είναι γωνίας $\mu = \hat{A} = 90°$ και ακτίνας $R = \mathrm{ΑΔ} = 6$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$$\left(\mathrm{Α}\,\widehat{\mathrm{ΕΔΖ}}\right) = \frac{\pi R^2 \mu}{360°} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 90°}{360°} = 9\pi\ .$$

ii) Το εμβαδόν E του χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου $ΑΒΓ$ και εξωτερικά του κύκλου είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών του τριγώνου $ΑΒΓ$ και του κυκλικού τομέα $\mathrm{Α}\,\widehat{\mathrm{ΕΔΖ}}$. Επομένως είναι

$$E = (ΑΒΓ) - \left(\mathrm{Α}\,\widehat{\mathrm{ΕΔΖ}}\right) = 39 - 9\pi\ .$$

21124

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με πλευρές $\alpha = 40,\ \beta = 25,\ \gamma = 25$ και αντίστοιχα ύψη υ_α , υ_β , υ_γ. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι $Ε = 300$ και τα ύψη του είναι $\upsilon_\alpha = 15$ και $\upsilon_\beta = \upsilon_\gamma = 24$. (Μονάδες 7)

iii. Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη υ_α , υ_β , υ_γ είναι οξυγώνιο. (Μονάδες 7)

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου, είναι ισοσκελές και οξυγώνιο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

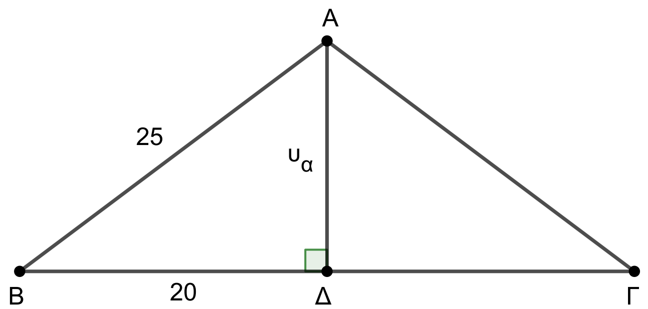
21124-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Θα συγκρίνουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του τριγώνου $ΑΒΓ$ με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του.

Είναι $\alpha^2 = 40^2 = 1600$ και $\beta^2 + \gamma^2 = 25^2 + 25^2 = 1250$, άρα $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ οπότε $\hat{A} > 90°$, άρα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ θα είναι αμβλυγώνιο.

ii) Το ύψος $\upsilon_\alpha = ΑΔ$ από την κορυφή $Α$ του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι και διάμεσος, οπότε $ΒΔ = \frac{\alpha}{2} = \frac{40}{2} = 20$.



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΒ$ ($\hat{Δ} = 90°$), έχουμε $\upsilon_\alpha{}^2 = \gamma^2 - ΒΔ^2$ ή $\upsilon_\alpha{}^2 = 25^2 - 20^2$ ή $\upsilon_\alpha{}^2 = 225$ ή $\upsilon_\alpha = 15$.

Το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι $Ε = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 15 = 300$.

Επίσης $E = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta$ ή $\upsilon_\beta = \frac{2E}{\beta} = \frac{600}{25} = 24$ και $E = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma$ ή $\upsilon_\gamma = \frac{2E}{\gamma} = \frac{600}{25} = 24$.

iii) Είναι $\upsilon_\beta = \upsilon_\gamma = 24$ και $\upsilon_\alpha = 15$.

Είναι $\upsilon_\beta{}^2 < \upsilon_\gamma{}^2 + \upsilon_\alpha{}^2$ ή $24^2 < 24^2 + 15^2$ ή $0 < 15^2$ που ισχύει.

Άρα το τρίγωνο με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου $ΑΒΓ$, είναι οξυγώνιο.

β) Έστω α, β, γ οι πλευρές οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου$ΑΒΓ$ με $\beta = \gamma$ και υ_α, υ_β, υ_γ τα αντίστοιχα ύψη. Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι αμβλυγώνιο, η αμβλεία γωνία θα είναι η $\hat{A}$. Τότε $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ ή $\alpha^2 > 2\beta^2$ ή $\frac{\alpha}{\beta} > \sqrt{2}$ ή $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ (1).

Είναι $E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma$, άρα $\frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma$ και επειδή $\beta = \gamma$ προκύπτει $\upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$.

Επομένως το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου $ΑΒΓ$, είναι ισοσκελές.

Επίσης είναι $\frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta$ ή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\upsilon_\beta}{\upsilon_\alpha}$ άρα η από την (1) έχουμε $\frac{\upsilon_\beta}{\upsilon_\alpha} > 1$ ή $\upsilon_\beta > \upsilon_\alpha$ άρα $\upsilon_\beta = \upsilon_\gamma > \upsilon_\alpha$. Επομένως $\upsilon_\beta{}^2 < \upsilon_\gamma{}^2 + \upsilon_\alpha{}^2$ ή $0 < \upsilon_\alpha{}^2$ που ισχύει. Άρα το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου $ΑΒΓ$, είναι οξυγώνιο. Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.

21183

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά $\sqrt{2}$ και το τετράγωνο ΔΕΖΗ έχει πλευρά 1.

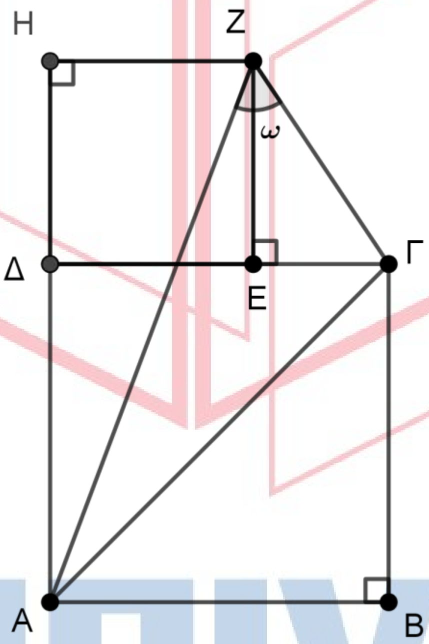
α) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = 2. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι

i. $\mathrm{A}\mathrm{Z}^2 = 4 + 2\sqrt{2}$. (Μονάδες 7)

ii. $\Gamma\mathrm{Z}^2 = 4 - 2\sqrt{2}$. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίστε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \hat{\omega}$. (Μονάδες 5)



21183-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 4 \text{ επομένως } ΑΓ = 2.$$

β)

i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΖ είναι $ΑΗ = ΑΔ + ΔΗ = \sqrt{2} + 1$, επομένως έχουμε:

$$ΑΖ^2 = ΑΗ^2 + ΗΖ^2 = (\sqrt{2}+1)^2 + 1^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1 = 4 + 2\sqrt{2}.$$

ii. Είναι $ΕΓ = ΔΓ - ΔΕ = \sqrt{2} - 1$. Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΕΓ έχουμε:

$$ΖΓ^2 = ΖΕ^2 + ΕΓ^2 = 1^2 + (\sqrt{2}-1)^2 = 1 + 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 4 - 2\sqrt{2}.$$

γ) Από το β ερώτημα προκύπτει ότι

$$ΑΖ = \sqrt{4+2\sqrt{2}} \text{ και } ΖΓ = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

Στο τρίγωνο ΑΖΓ με εφαρμογή του νόμου των συνημιτόνων προκύπτει

$$ΑΓ^2 = ΑΖ^2 + ΖΓ^2 - 2ΑΖ \cdot ΖΓ \cdot συνω \text{ ή}$$

$$2^2 = 4 + 2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4-2\sqrt{2}} \cdot συνω \text{ ή}$$

$$2 \cdot \sqrt{\left(4+2\sqrt{2}\right)\left(4-2\sqrt{2}\right)} \cdot συνω = 4 \text{ ή}$$

$$2 \cdot \sqrt{4^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} \cdot συνω = 4 \text{ ή}$$

$$συνω = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ άρα } \hat{ω} = 45^\circ.$$

21189

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\text{ΑΒΓ}) = (\text{ΑΓΔ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΒΓΔ})$ (Μονάδες 8)

β) $\frac{(\text{ΒΜΝ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{1}{4}$ (Μονάδες 12)

γ) $(\text{ΒΜΝ}) = \frac{1}{8}(\text{ΑΒΓΔ})$ (Μονάδες 5)

21189-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ έχουμε

- ΑΓ είναι κοινή πλευρά.
- ΑΒ = ΓΔ αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
- ΒΓ = ΑΔ αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

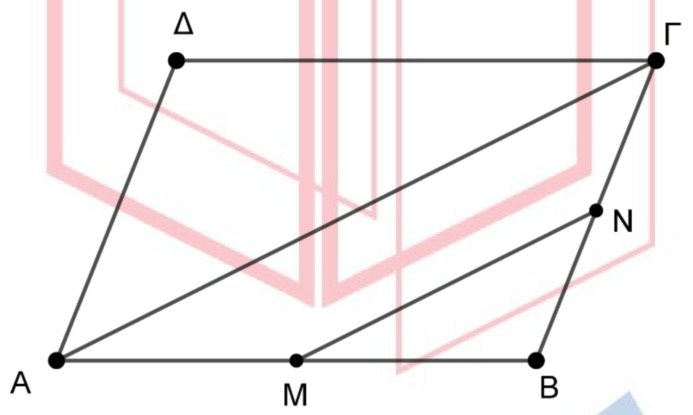
συνεπώς τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα έχουν ίσα εμβαδά, δηλαδή (ΑΒΓ) = (ΑΓΔ)

τότε

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΒΓ) = 2(ΑΒΓ)$$

δηλαδή

$$(ΑΒΓ) = (ΑΓΔ) = \frac{1}{2}\cdot(ΑΒΓΔ)$$



β) Αφού τα Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, τότε

$$ΜΑ = ΜΒ = \frac{ΑΒ}{2} \quad \text{και} \quad ΒΝ = ΝΓ = \frac{ΒΓ}{2}$$

Τα τρίγωνα ΒΜΝ και ΑΒΓ έχουν την γωνία $\hat{Β}$ κοινή, επομένως

$$\frac{(ΒΜΝ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΜΒ\cdot ΒΝ}{ΑΒ\cdot ΒΓ} = \frac{\frac{ΑΒ}{2}\cdot\frac{ΒΓ}{2}}{ΑΒ\cdot ΒΓ} = \frac{ΑΒ\cdot ΒΓ}{4\cdot ΑΒ\cdot ΒΓ} = \frac{1}{4}, \text{ δηλαδή } \frac{(ΒΜΝ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{4}$$

γ) Από το (β) ερώτημα έχουμε

$$\frac{(ΒΜΝ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{4} \text{ ή } (ΒΜΝ) = \frac{1}{4}\cdot(ΑΒΓ)$$

επειδή από το (α) ερώτημα έχουμε $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\cdot(ΑΒΓΔ)$, τότε θα είναι

$$(ΒΜΝ) = \frac{1}{4}\cdot(ΑΒΓ) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{8}\cdot(ΑΒΓΔ)$$

21194

ΘΕΜΑ 4

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΑΜ είναι διάμεσός του και το σημείο Ε είναι το μέσο της ΑΜ. Από το Ε φέρουμε παράλληλες στις ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν τη ΒΓ στα σημεία Δ και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\mathrm{AMB}) = (\mathrm{AM\Gamma})$ (Μονάδες 5)

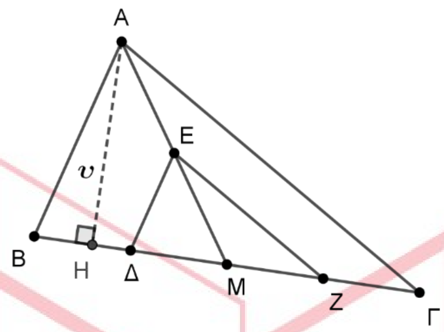
β) $(\mathrm{ME\Delta}) = \frac{1}{8} \cdot (\mathrm{AB\Gamma})$ (Μονάδες 12)

γ) $(\mathrm{AB\Delta E}) = (\mathrm{A\Gamma ZE})$ (Μονάδες 8)

21194-Λύση

ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ η διάμεσός του και Ε το μέσο της ΑΜ, ΔΕ // ΑΒ και ΕΖ // ΑΓ.



α) Έστω ΑΗ = υ το κοινό ύψος των τριγώνων ΑΜΒ και ΑΜΓ. Έχουμε

$$(\mathrm{AMB}) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{BM}\cdot \upsilon \ \text{ και } \ (\mathrm{AM\Gamma}) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{M\Gamma}\cdot \upsilon$$

Η ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, επομένως ΒΜ = ΜΓ και από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε $(\mathrm{AMB}) = (\mathrm{AM\Gamma})$.

β) Στο τρίγωνο ΑΜΒ το Ε είναι το μέσο της ΑΜ και ΕΔ // ΑΒ, επομένως και το Δ είναι το μέσο της ΒΜ, άρα $\mathrm{M\Delta} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{BM}$ και $\mathrm{ME} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{AM}$

Από το (α) ερώτημα έχουμε $(\mathrm{AMB}) = (\mathrm{AM\Gamma}) = \frac{1}{2}\cdot(\mathrm{AB\Gamma})$

Τα τρίγωνα ΜΕΔ και ΑΜΒ έχουν την γωνία $\mathrm{A\hat{M}B}$ κοινή, επομένως

$$\frac{(\mathrm{ME\Delta})}{(\mathrm{AMB})} = \frac{\mathrm{ME}\cdot\mathrm{M\Delta}}{\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AM}\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BM}}{\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}} = \frac{1}{4}$$

άρα

$$(\mathrm{ME\Delta}) = \frac{1}{4}\cdot(\mathrm{AMB}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{8}\cdot(\mathrm{AB\Gamma})$$

γ) Από το (α) ερώτημα είναι (ΑΜΒ) = (ΑΜΓ) (1), επιπλέον στο τρίγωνο ΔΕΖ είναι

$$\mathrm{\Delta M} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{BM} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{M\Gamma} = \mathrm{MZ}$$

συνεπώς η ΕΜ είναι διάμεσος του, άρα (ΜΕΔ) = (ΜΕΖ) (2)

Αφαιρώντας τις σχέσεις (1) – (2) έχουμε:

(ΑΜΒ) – (ΜΕΔ) = (ΑΜΓ) – (ΜΕΖ) ή

(ΑΒΓΔ) = (ΑΓΖΕ)

21196

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές β = 8 και γ = 6.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\mathrm{E} = 24$ (Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε:

i. Να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς α του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 6)

ii. Το ύψος του $υ_α$ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα α του τριγώνου. (Μονάδες 7)

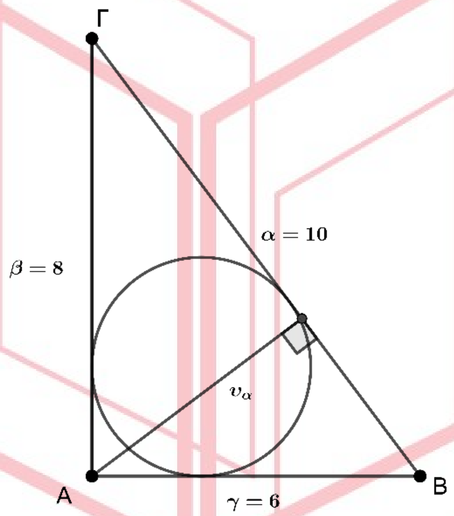
iii. Την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. (Μονάδες 7)

21196-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ υπολογίζεται από τον τύπο $E=\frac{1}{2}\beta\cdot\gamma$ όπου β και γ οι κάθετες πλευρές του, επομένως αντικαθιστώντας τα μήκη των πλευρών β και γ του τριγώνου έχουμε:

$$E=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12=24.$$



β)

i. Το μήκος της υποτείνουσας α του ορθογωνίου τριγώνου προσδιορίζεται με την βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος, επομένως:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2=8^2+6^2=100 \text{ άρα } \alpha=\sqrt{100}=10.$$

ii. Το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\upsilon_\alpha$. Αντικαθιστώντας την τιμή του εμβαδού Ε = 24 από το πρώτο ερώτημα και το μήκος της πλευράς α = 10 στον παραπάνω τύπο προκύπτει:

$$24=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\upsilon_\alpha \text{ ή } \upsilon_\alpha=\frac{24}{5}.$$

iii. Αν ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου, τότε το εμβαδό του Ε είναι $E=\tau\cdot\rho$. Η ημιπερίμετρος τ του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$\tau=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{10+8+6}{2}=\frac{24}{2}=12.$$

21196-Λύση

Αντικαθιστώντας τις τιμές του εμβαδού $E = 24$ και της ημιπεριμέτρου $\tau = 12$ στον τύπο $E = \tau \cdot \rho$ έχουμε:

$$24 = 12 \cdot \rho \text{ ή } \rho = 2 .$$

21197

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 2α και Λ το μέσο της πλευράς του ΓΔ. Έστω ότι το ημικύκλιο, που σχεδιάζεται στο εσωτερικό του τετραγώνου με διάμετρο την πλευρά του ΑΒ, έχει εμβαδόν 10. Τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

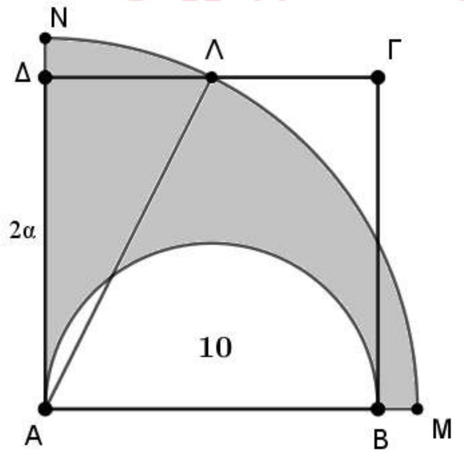
i. Το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι (ΑΒΓΔ) = $\frac{80}{\pi}$. (Μονάδες 6)

ii. $\mathrm{A}\Lambda^2 = \frac{100}{\pi}$ (Μονάδες 6)

β) Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΛ κατασκευάζουμε τεταρτοκύκλιο $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{MN}}$, και έστω Μ, Ν είναι τα σημεία τομής του με τις προεκτάσεις των πλευρών του τετραγώνου ΑΒ, ΑΔ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου ΑΒΜΝΑ. (Μονάδες 8)

ii. Τον λόγο του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{MN}}$ προς το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 5)



21197-Λύση

ΘΕΜΑ 4

α)

i. Το ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 2\alpha$ έχει ακτίνα α και εμβαδόν $E_{AB} = \dfrac{\pi\alpha^2}{2}$. Αφού το εμβαδό του ημικυκλίου είναι 10 τότε:

$$E_{AB} = \frac{\pi\alpha^2}{2} \quad ή \quad 10 = \frac{\pi\alpha^2}{2} \quad ή \quad \pi\alpha^2 = 20 \quad ή \quad \alpha^2 = \frac{20}{\pi}$$

Το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ με πλευρά 2α είναι:

$$(ΑΒΓΔ) = (2\alpha)^2 = 4\alpha^2 = 4\cdot\frac{20}{\pi} = \frac{80}{\pi}$$

ii. Το σημείο Λ είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ του τετραγώνου, επομένως $ΔΛ = \dfrac{2\alpha}{2} = \alpha$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΛ εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$ΑΛ^2 = ΑΔ^2 + ΔΛ^2 = (2\alpha)^2 + \alpha^2 = 5\alpha^2$$

Από το α) i. ερώτημα είναι $\alpha^2 = \dfrac{20}{\pi}$, επομένως $ΑΛ^2 = 5\alpha^2 = 5\cdot\dfrac{20}{\pi} = \dfrac{100}{\pi}$

β)

i. Το ζητούμενο εμβαδό Ε του σκιασμένου σχήματος, υπολογίζεται αν από το εμβαδό του τεταρτοκυκλίου $\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{MN}}$ αφαιρέσουμε το εμβαδό E_{AB} του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΒ.

Το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου $\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{MN}}$ είναι:

$$\left(\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{MN}}\right) = \frac{\pi\cdot ΑΛ^2}{4} = \frac{\pi\cdot\frac{100}{\pi}}{4} = \frac{100}{4} = 25$$

επομένως το ζητούμενο εμβαδό Ε του σκιασμένου σχήματος είναι:

$$E = \left(\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{MN}}\right) - \mathrm{E}_{\mathrm{AB}} = 25 - 10 = 15$$

ii. Από το ερώτημα (β.i) το εμβαδό του τεταρτοκυκλίου $\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{MN}}$ είναι $\left(\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{MN}}\right) = 25$και από το α) i. ερώτημα το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $(ΑΒΓΔ) = \dfrac{80}{\pi}$, επομένως ο λόγος του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου $\left(\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{MN}}\right)$ προς το εμβαδό του τετραγώνου (ΑΒΓΔ) θα είναι:

$$\frac{\left(\mathrm{A}\,\widehat{\mathrm{MN}}\right)}{(ΑΒΓΔ)} = \frac{25}{\frac{80}{\pi}} = \frac{25\pi}{80} = \frac{5\pi}{16}$$

21298

ΘΕΜΑ 2

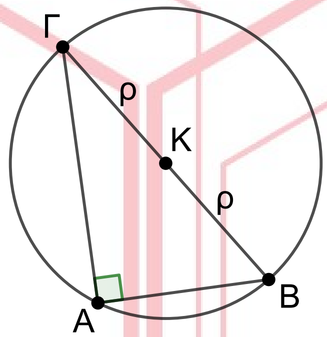
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A}$ ορθή γωνία και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου, που έχει κέντρο το Κ και ακτίνα ρ. Επίσης δίνεται ότι το μήκος του κύκλου ισούται με 10π.

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου έχει μήκος 5. (Μονάδες 08)

β) Αν η χορδή ΑΒ έχει μήκος 6 να υπολογίσετε:

i. το μήκος της χορδής ΑΓ του κύκλου, (Μονάδες 10)

ii. το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)



21298-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το μήκος του κύκλου (K,ρ) είναι $L = 2\pi \cdot \rho$. Άρα, $\rho = \dfrac{L}{2\pi}$.

Εφόσον $L = 10\pi$ θα είναι $\rho = \dfrac{10\pi}{2\pi}$ ή $\rho = 5$.

β) i. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει κάθετες πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ και υποτείνουσα τη ΒΓ, που είναι διάμετρος του κύκλου.

Για τη διάμετρο ΒΓ ισχύει ότι $B\Gamma = 2\rho = 10$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$ ή $A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2$ ή $A\Gamma^2 = 100 - 36$ ή $A\Gamma^2 = 64$ ή $A\Gamma = 8$.

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με $(AB\Gamma) = \dfrac{AB \cdot A\Gamma}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = \dfrac{48}{2} = 24$.

21299

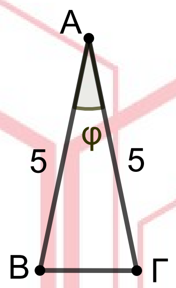
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma = 5$ και η γωνία της κορυφής $\hat{\varphi}$ έχει $\eta\mu\varphi = \frac{2}{5}$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε το ύψος ΒΗ του τριγώνου ΑΒΓ και να υπολογίσετε το μήκος του.

(Μονάδες 13)

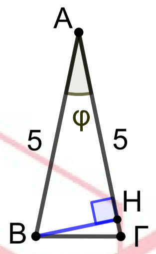


21299-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}\cdot ΑΒ\cdot ΑΓ\cdot ημφ=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \frac{2}{5}=5$.

β) Σχεδιάζουμε το ύψος ΒΗ του ΑΒΓ από την κορυφή Β, κάθετα στην πλευρά ΑΓ.



Για το εμβαδόν του ΑΒΓ ισχύει ότι $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}\cdot ΑΓ\cdot ΒΗ=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot ΒΗ=\frac{5}{2}\cdot ΒΗ$.

Από τη λύση του ερωτήματος α) έχουμε ότι $(ΑΒΓ)=5$.

Άρα $\frac{5}{2}\cdot ΒΗ=5$ ή $ΒΗ=\frac{2}{5}\cdot 5$ ή $ΒΗ=2$.

21301

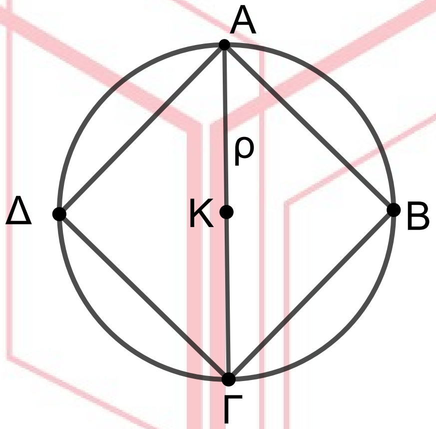
ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο (Κ, ρ) εμβαδού Ε = 4π είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο ΑΒΓΔ, όπως στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε:

α) την ακτίνα ρ του κύκλου (Κ, ρ). (Μονάδες 07)

β) το μήκος της διαμέτρου ΑΓ του κύκλου (Κ, ρ) και της πλευράς ΑΒ του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 10)

γ) το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 08)



21301-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για το εμβαδόν Ε του κύκλου (Κ, ρ) ισχύει ότι $E = \pi\rho^2$. Όμως $E = 4\pi$, άρα $\pi\rho^2 = 4\pi$ ή $\rho^2 = 4$ ή $\rho = 2$.

β) Για τη διάμετρο ΑΓ του κύκλου (Κ, ρ) ισχύει ότι $A\Gamma = 2\rho = 4$.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{B} = 90^\circ$ και ισοσκελές με ΑΒ = ΒΓ, που είναι ίσες ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$ ή $A\Gamma^2 = AB^2 + AB^2$ ή $2AB^2 = 16$ ή $AB^2 = 8$ ή $AB = \sqrt{8}$.

(εναλλακτικά:

Γνωρίζουμε ότι το μήκος της πλευράς λ_4 του τετραγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας ρ είναι $\lambda_4 = \rho\sqrt{2}$. Άρα $\lambda_4 = 2\sqrt{2} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{8}$.)

γ) Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $(AB\Gamma\Delta) = AB^2 = (\sqrt{8})^2 = 8$.

21304

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 1. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα, ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στη ΒΓ και ΒΔ = 2.

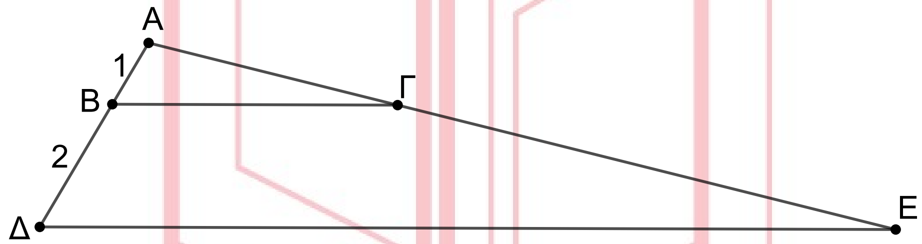
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{3}$.

(Μονάδες 10)

β) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με 8,5, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 08)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι 15, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 07)



21304-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, οι πλευρές του τριγώνου ΑΔΕ είναι ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, εφόσον το ΑΔΕ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του ΑΒΓ και την ΔΕ που είναι παράλληλη στην ΒΓ. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με $\frac{AB}{A\Delta}=\frac{A\Gamma}{AE}=\frac{B\Gamma}{\Delta E}$.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι $\frac{AB}{A\Delta}=\frac{AB}{AB+B\Delta}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$.

β) Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους, άρα οι περίμετροι των όμοιων τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν λόγο $\frac{1}{3}$.

Επομένως η περίμετρος του ΑΔΕ είναι τριπλάσια της περιμέτρου του ΑΒΓ, δηλαδή είναι ίση με $3\cdot 8{,}5=25{,}5$.

γ) Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, άρα ο λόγος των εμβαδών (ΑΒΓ) και (ΑΔΕ) των όμοιων τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ, αντίστοιχα είναι $\frac{1}{9}$. Δηλαδή:

$\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)}=\frac{1}{9}$ ή $(AB\Gamma)=\frac{(A\Delta E)}{9}$ ή $(AB\Gamma)=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$.

21636

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με μήκη πλευρών ΑΒ=6, ΑΓ=8, και ΒΓ=10.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)

β) Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{3}{4}$. (Μονάδες 10)

ii. Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$. (Μονάδες 5)

21636-Λύση

ΛΥΣΗ

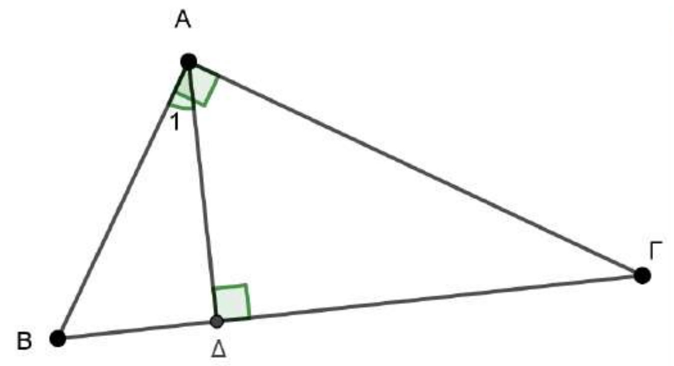
α) Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΒ=6, ΑΓ=8, και ΒΓ=10, οπότε ΒΓ > ΑΒ, ΑΓ.

Επίσης $ΒΓ^2 = 10^2 = 100$ και $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$.

Άρα $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ, είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΒΓ και ορθή γωνία την Α.

β)

i.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι: $\widehat{Α}_1 + \widehat{Β} = 90^0$.

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\widehat{Γ} + \widehat{Β} = 90^0$.

Οπότε $\widehat{Α}_1 + \widehat{Β} = \widehat{Γ} + \widehat{Β}$ ή $\widehat{Α}_1 = \widehat{Γ}$. Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας $λ = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

ii. Γνωρίζουμε ότι ο λόγος των εμβαδών ομοίων τριγώνων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Οπότε λόγω του ερωτήματος (β, ι) θα είναι: $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΓΔ)} = λ^2 = (\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$.

21659

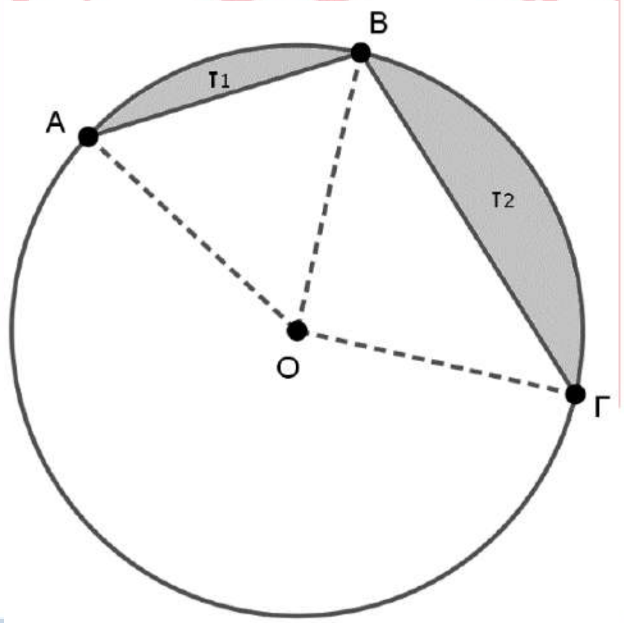
ΘΕΜΑ 4

Για τα σημεία Α, Β και Γ του κύκλου (Ο,R) στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι ΑΒ = R και ΒΓ = R$\sqrt{2}$. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R:

α) τα μήκη των τόξων ΑΒ, ΒΓ. (Μονάδες 8)

β) το μήκος του μη κυρτογώνιου τόξου ΑΓ και το εμβαδό του κυκλικού τομέα (Ο$\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}$) που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία ΑΟΓ. (Μονάδες 8)

γ) το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων (τ_1) και (τ_2), όπως αυτά σημειώνονται στο σχήμα. (Μονάδες 9)



21659-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε:

ΑΒ = R = λ_6, οπότε το τόξο ΑΒ αντιστοιχεί στην κεντρική γωνία κανονικού 6-γώνου, άρα η $A\hat{O}B = 60^0$, επομένως το μέτρο του τόξου ΑΒ ισούται με $\mu = 60^0$ (1).

ΒΓ = $R\sqrt{2} = \lambda_4$, οπότε το τόξο ΒΓ αντιστοιχεί στην κεντρική γωνία κανονικού 4-γώνου, άρα η $B\hat{O}\Gamma = 90^0$, επομένως το μέτρο του τόξου ΒΓ ισούται με $\mu = 90^0$ (2).

Για το μήκος ℓ_1 του τόξου ΑΒ έχουμε: $\ell_1 = \dfrac{\pi R\mu}{180} = \dfrac{\pi R\cdot 60}{180} = \dfrac{\pi R}{3}$.

Για το μήκος ℓ_2 του τόξου ΒΓ έχουμε: $\ell_2 = \dfrac{\pi R\mu}{180} = \dfrac{\pi R\cdot 90}{180} = \dfrac{\pi R}{2}$.

β) Λόγω των (1), (2) για την κυρτή γωνία ΑΟΓ έχουμε: $A\hat{O}\Gamma = A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma = 150^0$.

Το μήκος ℓ_3, του μη κυρτογώνιου τόξου ΑΓ, θα βρεθεί αν από το μήκος του κύκλου αφαιρέσουμε τα μήκη των τόξων ΑΒ, ΒΓ, που υπολογίσαμε στο ερώτημα (α). Δηλαδή:

$\ell_3 = 2\pi R - \ell_1 - \ell_2 = 2\pi R - \dfrac{\pi R}{3} - \dfrac{\pi R}{2} = \dfrac{12\pi R - 2\pi R - 3\pi R}{6} = \dfrac{7\pi R}{6}$.

Επίσης: $(O\overset{\frown}{A\Gamma}) = \dfrac{\pi R^2\mu}{360} = \dfrac{\pi R^2\cdot 150}{360} = \dfrac{5\pi R^2}{12}$.

γ) Για το εμβαδό τ_1, του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από την χορδή ΑΒ έχουμε:

$(\tau_1) = (O\overset{\frown}{AB}) - (OAB)$.

Όμως $(O\overset{\frown}{AB}) = \dfrac{\pi R^2\mu}{360} = \dfrac{\pi R^2\cdot 60}{360} = \dfrac{\pi R^2}{6}$.

Επίσης το τρίγωνο ΟΑΒ, είναι ισόπλευρο, με πλευρά R. Οπότε $(OAB) = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Επομένως $(\tau_1) = \dfrac{\pi R^2}{6} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{2\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12} = \dfrac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}$.

Για το εμβαδό τ_2, του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από την χορδή ΒΓ έχουμε:

$(\tau_2) = (O\overset{\frown}{B\Gamma}) - (OB\Gamma)$.

Όμως $(O\overset{\frown}{B\Gamma}) = \dfrac{\pi R^2\mu}{360} = \dfrac{\pi R^2\cdot 90}{360} = \dfrac{\pi R^2}{4}$.

Επίσης το τρίγωνο ΟΒΓ, είναι ορθογώνιο λόγω της (2), με κάθετες πλευρές ΟΒ, ΟΓ άρα

$(OB\Gamma) = \dfrac{1}{2}\, OB\cdot O\Gamma = \dfrac{1}{2}\cdot R\cdot R = \dfrac{R^2}{2}$.

21659-Λύση

Επομένως $(\tau_2) = \dfrac{\pi R^2}{4} - \dfrac{R^2}{2} = \dfrac{\pi R^2 - 2R^2}{4} = \dfrac{(\pi-2)R^2}{4}$.

Έτσι: $(\tau_1) + (\tau_2) = \dfrac{(2\pi-3\sqrt{3})R^2}{12} + \dfrac{(\pi-2)R^2}{4} = \dfrac{(2\pi+3\pi-6-3\sqrt{3})R^2}{12} = \dfrac{(5\pi-6-3\sqrt{3})R^2}{12}$.

21783

ΘΕΜΑ 3

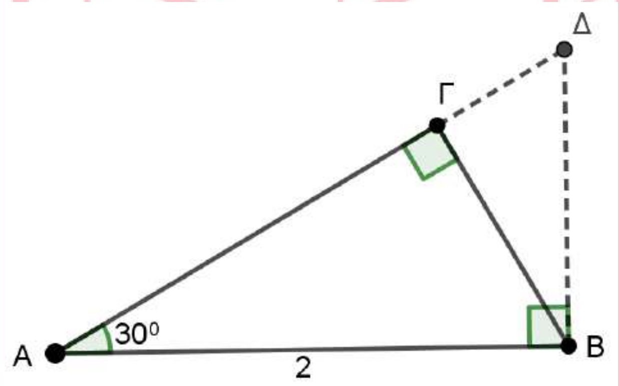
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\widehat{\Gamma} = 90^0$, $\widehat{A} = 30^0$ και ΑΒ = 2.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = $\sqrt{3}$. (Μονάδες 7)

β) Φέρνουμε κάθετη στην ΑΒ, στο σημείο Β, που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο Δ.

Να αποδείξετε ότι ΑΔ = $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 10)

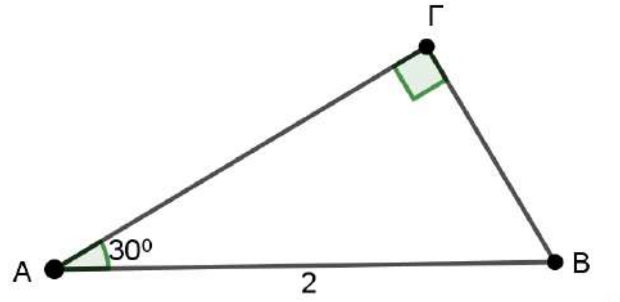
γ) Αν Κ είναι το μέσο της ΑΔ, να αποδείξετε ότι (ΚΑΒ) = $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 8)



21783-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

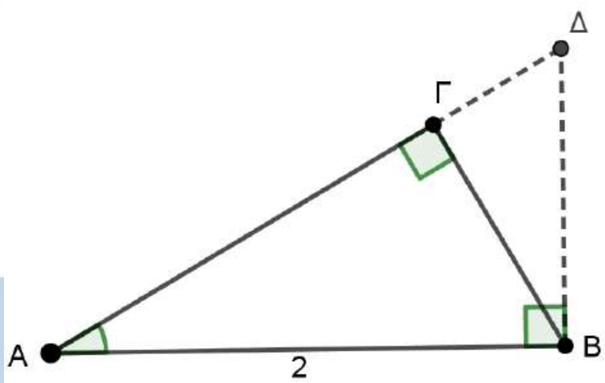


Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΒ = 2, $\widehat{\Gamma} = 90^0$ και $\widehat{A} = 30^0$ οπότε η ΒΓ = $\frac{AB}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι:

$A\Gamma^2 = AB^2 - B\Gamma^2$ ή $A\Gamma^2 = 2^2 - 1^2$ ή $A\Gamma^2 = 3$, οπότε $A\Gamma = \sqrt{3}$.

β)



Από τα δεδομένα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι ορθογώνια.

Επίσης, έχουν τη γωνία Α κοινή, οπότε θα είναι όμοια. Επομένως θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Άρα $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

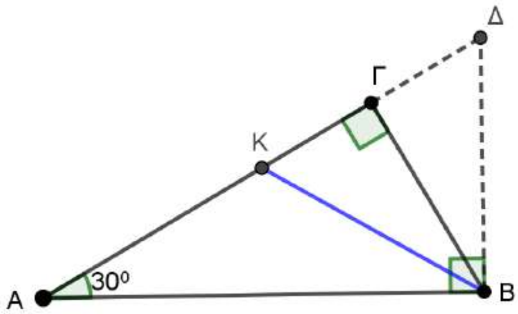
Όμως η ΑΒ = 2 και λόγω του ερωτήματος (α) η $A\Gamma = \sqrt{3}$ οπότε έχουμε:

$\frac{A\Delta}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ή $A\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

γ) Το Κ είναι μέσο του ΑΔ επομένως η $AK = \frac{A\Delta}{2}$.

Η τελευταία ισότητα λόγω του ερωτήματος (β, i) δίνει: $AK = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

21783-Λύση



Έτσι (ΚΑΒ) = $\frac{1}{2}\cdot$ΑΒ$\cdot$ΑΚ$\cdot$ημ$30^0 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

21823

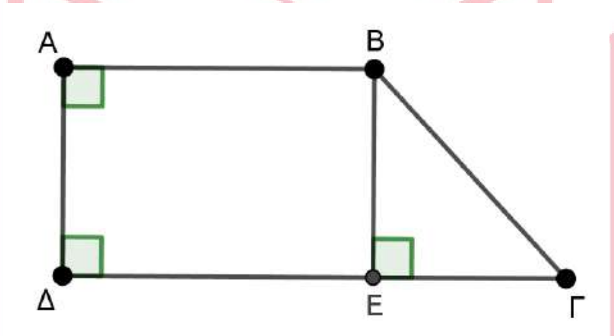
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, με $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^0$ και ΑΔ = 4, ΑΒ = 5, Δ Γ= 8. Από την κορυφή Β του τραπεζίου, φέρνουμε την ΒΕ κάθετη στην πλευρά ΔΓ.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΕΓ. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ του τραπεζίου. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(\mathrm{B\Delta\Gamma})}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}$. (Μονάδες 8)



21823-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε: $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^0$ και ΑΔ=4, ΑΒ=5, ΔΓ=8.

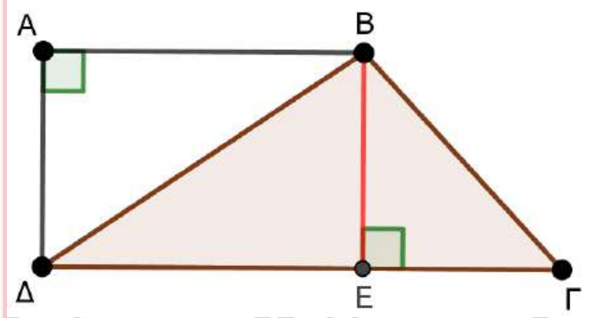
Το ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο (έχει τρείς γωνίες ορθές), οπότε ΒΕ = ΑΔ = 4

και ΔΕ = ΑΒ = 5. Άρα η ΕΓ = ΔΓ – ΔΕ = 8 – 5 = 3.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$ΒΓ^2 = ΒΕ^2 + ΕΓ^2$ ή $ΒΓ^2 = 4^2 + 3^2$ ή $ΒΓ^2 = 25$, άρα ΒΓ = 5.

γ)



Λόγω του ερωτήματος (α) είναι:

- $(ΒΔΓ) = \frac{1}{2}ΔΓ\cdot ΒΕ = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4 = 16$
- $(ΑΒΓΔ) = \frac{ΑΒ+ΔΓ}{2}\cdot ΑΔ = \frac{5+8}{2}\cdot 4 = 26$

οπότε: $\frac{(ΒΔΓ)}{(ΑΒΓΔ)} = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$.

21838

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=8 , ΑΓ=12 και γωνία $\widehat{A} = 60^o$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι (ΑΒΓ)=$24\sqrt{3}$.

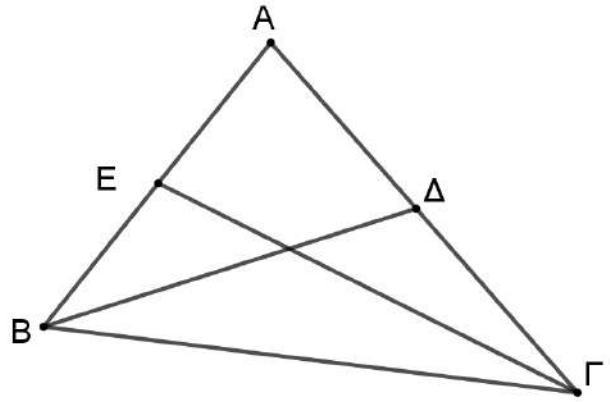
(Μονάδες 13)

β) Αν ΒΔ και ΓΕ διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΑΕΓ είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 4)

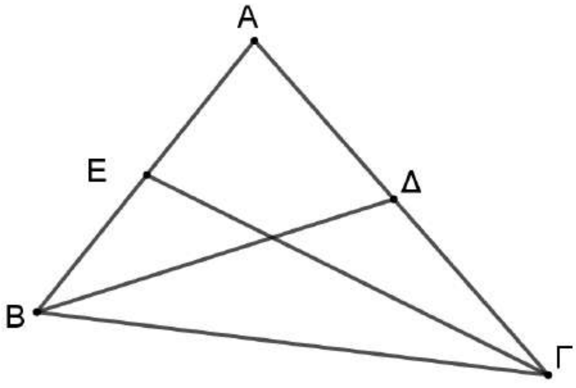
ii. Τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΔΓΒ είναι ισοδύναμα με (ΕΒΓ)=(ΔΓΒ)=$12\sqrt{3}$

(Μονάδες 8)



21838-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Είναι (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}$ ·ΑΒ·ΑΓ·ημΑ= $\frac{1}{2}$ ·8·12· $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $24\sqrt{3}$.

β)

i. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος του τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα . Αφού η ΓΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, άρα (ΒΕΓ)=(ΑΕΓ).

ii. Αφού (ΒΕΓ)=(ΑΕΓ) και (ΒΕΓ)+(ΑΕΓ)=(ΑΒΓ), άρα (ΒΕΓ) = $\frac{1}{2}$ ·(ΑΒΓ)= $\frac{1}{2}$ ·$24\sqrt{3}$=$12\sqrt{3}$. Ομοίως αφού η ΒΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ είναι (ΔΒΓ)= $\frac{1}{2}$ ·(ΑΒΓ) = $12\sqrt{3}$, οπότε (ΔΒΓ)=(ΕΒΓ)= $12\sqrt{3}$.

21839

ΘΕΜΑ 4

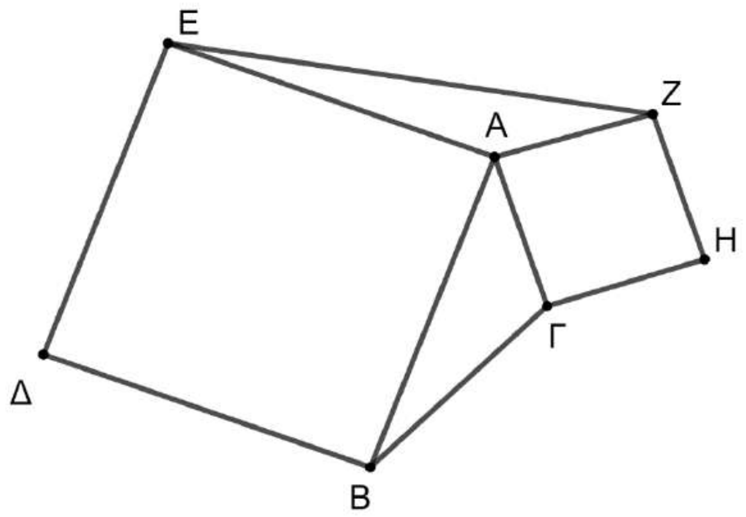
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 6 cm και ΑΓ = 3 cm και $\widehat{A}$ οξεία. Εξωτερικά του τριγώνου με πλευρές τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΗΖ και φέρνουμε την ΕΖ , όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου ΕΖΗΓΒΔ είναι (ΕΖΗΓΒΔ)=54cm^2 :

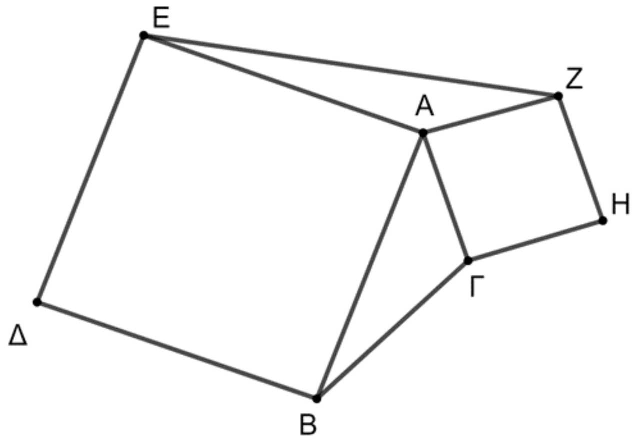
i. Να αποδείξετε ότι η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\widehat{A}$ =30^o. (Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)



21839-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Είναι $\widehat{ΒΑΓ}+\widehat{ΕΑΖ}=360^o-90^o-90^o=180^o$ και άρα οι γωνίες ΒΑΓ και ΕΑΖ είναι παραπληρωματικές. Γνωρίζουμε όμως ότι αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΕΑΖ)}=\frac{ΑΒ\cdot ΑΓ}{ΑΕ\cdot ΑΖ}=1$ οπότε (ΑΒΓ)=(ΕΑΖ).

β)

i. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι (ΑΒΓ)=(ΕΑΖ) και από υπόθεση είναι (ΕΖΗΓΒΔ)=54. Είναι (ΑΒΓ)+(ΑΒΔΕ)+(ΑΕΖ)+(ΑΓΗΖ)=(ΕΖΗΓΒΔ) ή (ΑΒΓ)+36+(ΑΒΓ)+9=54 ή $2\cdot$(ΑΒΓ)=9 ή (ΑΒΓ)=$\frac{9}{2}$ ή $\frac{1}{2}\cdot ΑΒ\cdot ΑΓ\cdot ημ\widehat{Α}=\frac{9}{2}$ ή $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\cdot ημ\widehat{Α}=\frac{9}{2}$ ή $ημ\widehat{Α}=\frac{1}{2}$ και εφόσον η γωνία $\widehat{Α}$ είναι οξεία , έχουμε ότι $\widehat{Α}=30^o$.

ii. Από νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$ΒΓ^2=ΑΒ^2+ΑΓ^2-2\cdot ΑΒ\cdot ΑΓ\cdot συν30^o=6^2+3^2-2\cdot 6\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=45-18\sqrt{3}$$

Άρα το εμβαδόν του ζητούμενου τετραγώνου είναι $Ε=ΒΓ^2=45-18\sqrt{3}$.

21840

ΘΕΜΑ 4

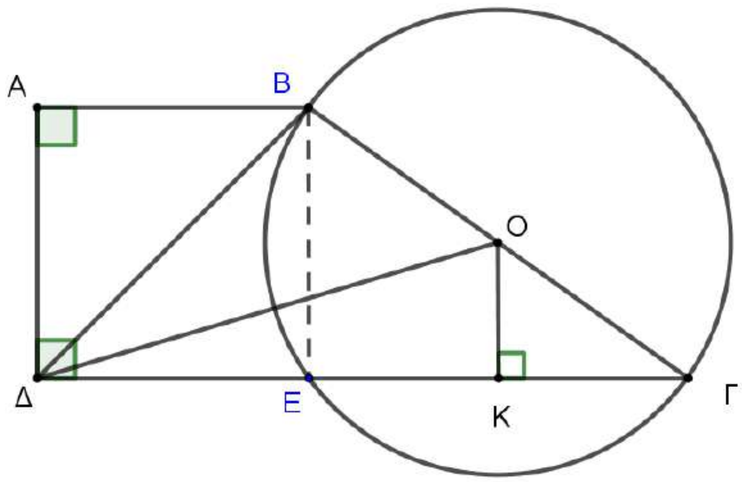
Έστω ΑΒΓΔ τραπέζιο με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$, ΑΒ=5 , ΓΔ=13 και εμβαδόν (ΑΒΓΔ)=54. Ο κύκλος με διάμετρο τη ΒΓ τέμνει τη ΓΔ στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ = 6. (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μήκος των ΒΕ και ΒΓ. (Μονάδες 6)

γ) Αν ΟΚ είναι η κάθετη από το σημείο Ο στην ΕΓ, να αποδείξετε ότι ΟΚ=3, και να υπολογίσετε το μήκος της ΟΔ. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΟ. (Μονάδες 7)



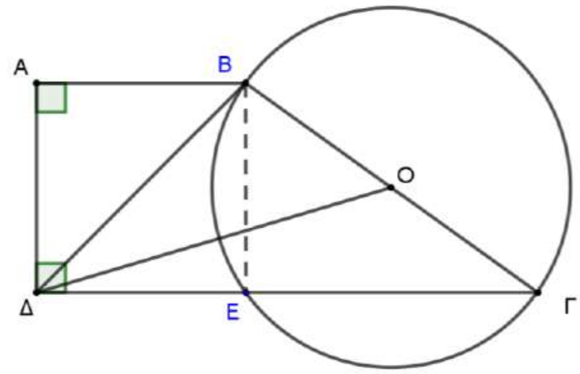
21840-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι 54 είναι:

$(ΑΒΓΔ)=\frac{(ΑΒ+ΓΔ)\cdot ΑΔ}{2} \Longrightarrow 54=\frac{(5+13)\cdot ΑΔ}{2} \Longrightarrow 54 = 9 \cdot ΑΔ \Longrightarrow ΑΔ=\frac{54}{9} = 6$

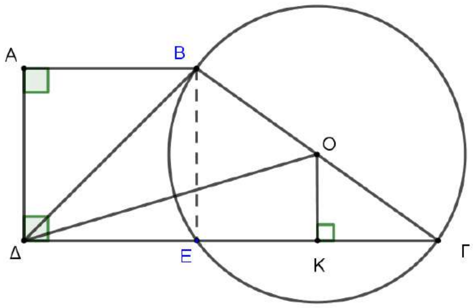
β)



Η γωνία $Β\hat{Ε}Γ=90^o$ (εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο), άρα και $Β\hat{Ε}Δ=90^o$, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχοντας σύμφωνα με την υπόθεση $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^o$ και $Β\hat{Ε}Δ=90^o$, δηλαδή τρεις γωνίες ορθές, είναι ορθογώνιο και επομένως ΒΕ=ΑΔ (απέναντι πλευρές ορθογωνίου), άρα ΒΕ=6.

Ακόμη ΔΕ=ΑΒ=5, οπότε ΕΓ=ΔΓ-ΔΕ=13-5=8. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε $ΒΓ^2=ΒΕ^2+ΕΓ^2= 36+64=100$. Άρα ΒΓ=10.

γ)



Η κάθετος ΟΚ από το κέντρο Ο στη χορδή ΕΓ του κύκλου διχοτομεί τη χορδή, άρα το Κ είναι το μέσο του τμήματος ΕΓ. Το Ο ως κέντρο του κύκλου είναι το μέσο της διαμέτρου ΒΓ.

21840-Λύση

Οπότε το ΟΚ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΕΓ του τριγώνου ΒΕΓ και άρα ΟΚ = $\frac{ΒΕ}{2}$ = 3.

Αφού η ΟΚ είναι κάθετος στην ΕΓ, άρα θα είναι κάθετος και στην ΔΓ, οπότε το τρίγωνο ΔΟΚ είναι ορθογώνιο και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΔΟΚ έχουμε:

$ΔΟ^2=ΔΚ^2+ΟΚ^2 = 81+9 =90$. Άρα $ΔΟ=3\sqrt{10}$.

δ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΓ είναι (ΒΔΓ) = $\frac{ΔΓ.ΒΕ}{2} = \frac{13.6}{2}$ = 39. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα και εφόσον η ΔΟ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΔΓ, άρα :

$$(ΒΔΟ) = \frac{(ΒΔΓ)}{2} = \frac{39}{2} .$$

21975

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

ii. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

iv. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.

v. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

(Μονάδες 15)

21975-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Σωστό
ii. Λάθος
iii. Σωστό
iv. Λάθος
v. Σωστό

β) Θεώρημα ΙΙΙ σελίδα 82.

22023

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

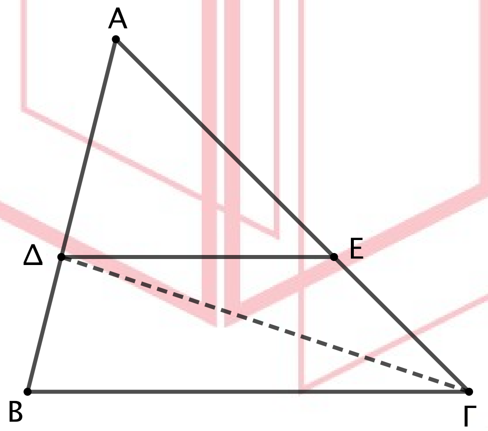
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$ όταν το σημείο Δ είναι μέσο της ΑΒ.

(Μονάδες 10)

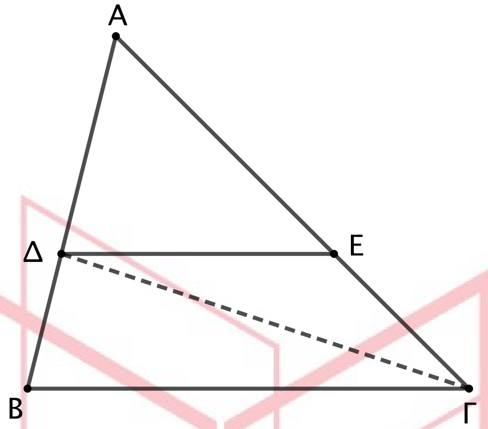
γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Δ ώστε $\frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{2}{9}$.

(Μονάδες 05)



22023-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν $\hat{B} = A\hat{\Delta}E$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ) και κοινή τη γωνία $\hat{A}$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα (α), τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{A}$	$A\hat{E}\Delta = \hat{\Gamma}$	$A\hat{\Delta}E = \hat{B}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΕ	ΔΕ	ΑΔ	ΑΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΒ	ΑΓ

Δίνεται ότι το σημείο Δ είναι μέσο της ΑΒ. Επομένως, ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι:

$$\lambda = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{A\Delta}{2A\Delta} = \frac{1}{2}$$

Αφού τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, δηλαδή:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \lambda^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

γ) Ζητάμε τη θέση του σημείου Δ ώστε να είναι

$$\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9}$$

Είναι:

22023-Λύση

$$(\Delta E\Gamma) = (\Delta A\Gamma) - (A\Delta E) \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{A\Delta}{AB}$$

Οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{(\Delta A\Gamma) - (A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{(\Delta A\Gamma)}{(AB\Gamma)} - \frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9}$$

Από (β) ερώτημα είναι $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \lambda^2$, οπότε:

$$\frac{\lambda AB \cdot A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} - \lambda^2 = \frac{2}{9}$$

$$\lambda - \lambda^2 = \frac{2}{9}$$

$$9\lambda^2 - 9\lambda + 2 = 0$$

Οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι:

$$\lambda = \frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{1}{3}$$

Άρα, το σημείο Δ χωρίζει εσωτερικά την πλευρά ΑΒ σε λόγο λ τέτοιο ώστε:

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{A\Delta}{AB} = \frac{1}{3}$$

22032

ΘΕΜΑ 2

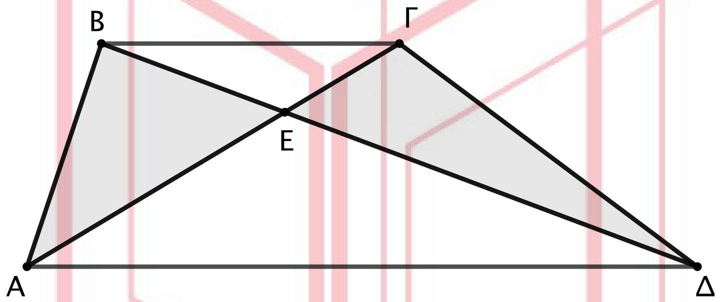
Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ) και έστω Ε το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ισοδύναμα.

(Μονάδες 13)

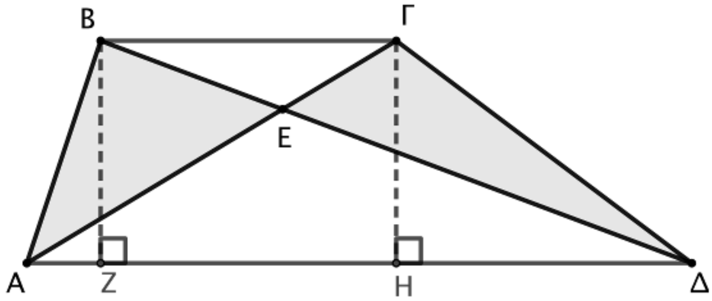
β) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων τριγώνων ΑΒΕ και ΔΓΕ.

(Μονάδες 12)



22032-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν κοινή βάση ΑΔ. Επίσης, τα ύψη τους ΒΖ και ΓΗ είναι ίσα με το ύψος του τραπεζίου ΑΒΓΔ. Οπότε, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ θα είναι ισοδύναμα, δηλαδή:

$$(ΑΒΔ) = (ΑΓΔ) \quad (1)$$

β) Έχουμε ότι:

$$(ΑΒΔ) = (ΑΒΕ) + (ΑΕΔ) \quad \text{και} \quad (ΑΓΔ) = (ΑΕΔ) + (ΔΓΕ)$$

Αντικαθιστώντας στην ισότητα (1) έχουμε:

$$(ΑΒΕ) + (ΑΕΔ) = (ΑΕΔ) + (ΔΓΕ)$$

Οπότε:

$$(ΑΒΕ) = (ΔΓΕ)$$

δηλαδή, τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ είναι ισοδύναμα.

22035

ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος παριστάνει την κάτοψη ενός κτήματος με $AB = 60$ m, $B\Gamma = 80$ m, $\hat{\Delta} = 60^o$, $\hat{B} = 90^o$ και $A\Delta = \Gamma\Delta$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου ΑΓ.

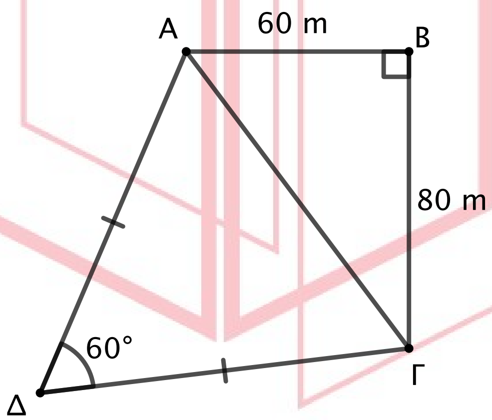
(Μονάδες 09)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 04)

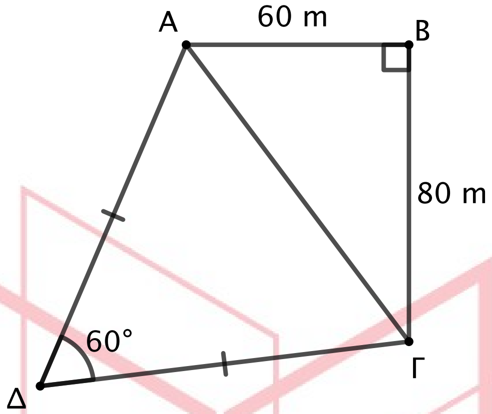
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ. Πόσο είναι το συνολικό εμβαδόν του κτήματος;

(Μονάδες 12)



22035-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$$

$$ΑΓ^2 = 60^2 + 80^2$$

$$ΑΓ^2 = 3600 + 6400$$

$$ΑΓ^2 = 10000$$

Επομένως, $ΑΓ = 100$ m.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ είναι $\hat{Δ} = 60^{o}$. Οπότε, το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο με $ΑΔ = ΑΓ = ΓΔ = 100$ m.

γ) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}ΑΒ \cdot ΒΓ = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 80 = 2400 \ \ m^2$$

Το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΔΓ είναι:

$$(ΑΔΓ) = \frac{ΑΓ^2\sqrt{3}}{4} = 2500 \cdot \sqrt{3} \ \ m^2$$

Το συνολικό εμβαδόν του κτήματος θα είναι:

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΔΓ) = (2400 + 2500 \cdot \sqrt{3}\ ) \ m^2$$

22054

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα α σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα ως συνάρτηση του α.

(Μονάδες 08)

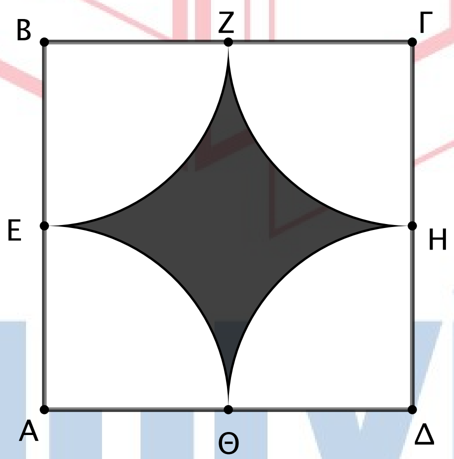
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι:

$$E = \alpha^2(4 - \pi)$$

(Μονάδες 12)

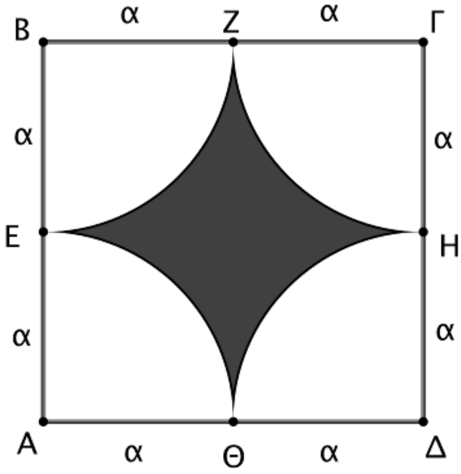
γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου.

(Μονάδες 05)



22054-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Τα τόξα $\overset{\frown}{ΘΕ}$, $\overset{\frown}{ΕΖ}$, $\overset{\frown}{ΖΗ}$, $\overset{\frown}{ΗΘ}$ είναι τόξα ίσων κύκλων ακτίνας α και αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες 90^o. Επομένως, οι κυκλικοί τομείς $Α\overset{\frown}{ΘΕ}$, $Β\overset{\frown}{ΕΖ}$, $Γ\overset{\frown}{ΖΗ}$, $Δ\overset{\frown}{ΗΘ}$ έχουν ο καθένας εμβαδόν

$$(Α\,\overset{\frown}{ΘΕ}) = (Β\,\overset{\frown}{ΕΖ}) = (Γ\,\overset{\frown}{ΖΗ}) = (Δ\,\overset{\frown}{ΗΘ}) = \frac{πα^2 90^o}{360^o} = \frac{πα^2}{4}$$

β) Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι

$$Ε_τ = (2α)^2 = 4α^2$$

Οπότε, το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι:

$$Ε = Ε_τ - 4(Α\,\overset{\frown}{ΘΕ}) = 4α^2 - 4\frac{πα^2}{4} = 4α^2 - πα^2 = α^2(4 - π)$$

γ) Το μήκος καθενός από τα ίσα τόξα $\overset{\frown}{ΘΕ}$, $\overset{\frown}{ΕΖ}$, $\overset{\frown}{ΖΗ}$, $\overset{\frown}{ΗΘ}$ είναι:

$$\ell_{\overset{\frown}{ΘΕ}} = \ell_{\overset{\frown}{ΕΖ}} = \ell_{\overset{\frown}{ΖΗ}} = \ell_{\overset{\frown}{ΗΘ}} = \frac{πα 90^o}{180^o} = \frac{πα}{2}$$

Οπότε, η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι:

$$L = 4\ell_{\overset{\frown}{ΘΕ}} = 4\frac{πα}{2} = 2πα$$

22058

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα R. Έστω ΑΒ διάμετρος του κύκλου και Δ, Ε σημεία της τέτοια ώστε $ΑΔ = ΔΕ = ΕΒ$. Σχεδιάζουμε τα ημικύκλια ΑΔ και ΑΕ πάνω από τη διάμετρο ΑΒ και τα ημικύκλια ΒΕ και ΒΔ κάτω από τη διάμετρο ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά $ε_1$ και $ε_3$ των καμπυλόγραμμων σχημάτων ΑΔΒΖ και ΒΕΑΗ αντίστοιχα.

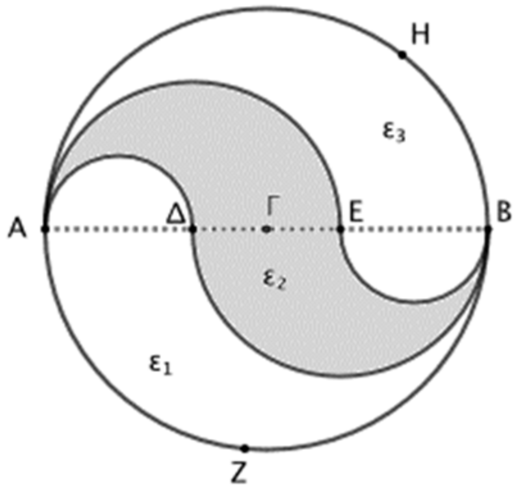
(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $ε_2$ του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου σχήματος ΑΔΒΕ.

(Μονάδες 08)

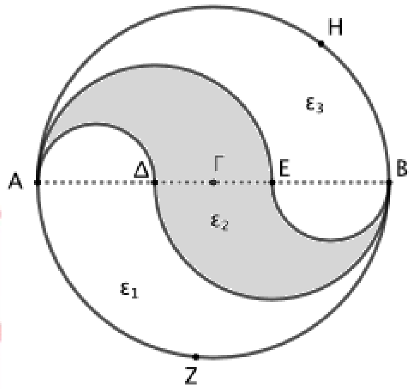
γ) Να εξετάσετε αν ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμα σχήματα.

(Μονάδες 05)



22058-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Από την εκφώνηση έχουμε ότι:

$$ΑΔ = ΔΕ = ΕΒ = \frac{ΑΒ}{3} = \frac{2R}{3}$$

Τα ημικύκλια $\widehat{ΑΔ}$ και $\widehat{ΒΕ}$ έχουν ακτίνα

$$ρ_1 = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{R}{3}$$

και εμβαδόν

$$ε = \frac{πρ_1{}^2 180^o}{360^o} = \frac{π\left(\frac{R}{3}\right)^2 180^o}{360^o} = \frac{πR^2}{18}$$

Τα ημικύκλια $\widehat{ΑΕ}$ και $\widehat{ΒΔ}$ έχουν ακτίνα

$$ρ_2 = \frac{ΑΕ}{2} = ΑΔ = \frac{2R}{3}$$

και εμβαδόν

$$τ = \frac{πρ_2{}^2 180^o}{360^o} = \frac{π\left(\frac{2R}{3}\right)^2 180^o}{360^o} = \frac{2πR^2}{9}$$

Τα ημικύκλια $\widehat{ΑΗΒ}$ και $\widehat{ΑΖΒ}$ έχουν ακτίνα R και εμβαδόν

$$σ = \frac{πR^2}{2}$$

Οπότε, τα καμπυλόγραμμα σχήματα ΑΔΒΖ και ΒΕΑΗ έχουν εμβαδόν

$$ε_1 = ε_3 = σ + ε - τ = \frac{πR^2}{2} + \frac{πR^2}{18} - \frac{2πR^2}{9} = \frac{9πR^2}{18} + \frac{πR^2}{18} - \frac{4πR^2}{18} = \frac{6πR^2}{18} = \frac{πR^2}{3}$$

β) Το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο ΑΒ είναι

$$Ε = πR^2$$

Επομένως, το καμπυλόγραμμο σχήμα ΑΔΒΕ έχει εμβαδόν

22058-Λύση

$$\varepsilon_2 = E - \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \pi R^2 - \frac{\pi R^2}{3} - \frac{\pi R^2}{3} = \frac{\pi R^2}{3}$$

γ) Παρατηρούμε ότι

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{\pi R^2}{3} = \frac{E}{3}$$

Άρα, ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμα σχήματα.

22070

ΘΕΜΑ 2

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει μήκη πλευρών α = 17, β = 8, γ = 15.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ:

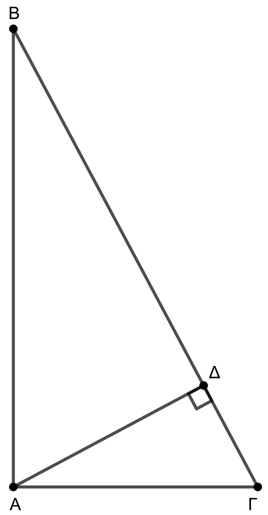
i. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους λ.

ii. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\mathrm{A\Gamma\Delta})}$.

(Μονάδες 12)

22070-Λύση

ΛΥΣΗ



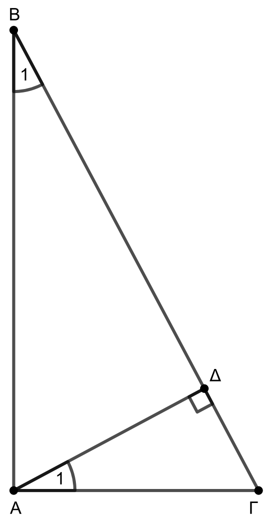
α) Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι η α. Θα εξετάσουμε αν το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της πλευράς α.

$$\beta^2+\gamma^2=8^2+15^2 \text{ ή } \beta^2+\gamma^2=64+225 \text{ ή } \beta^2+\gamma^2=289$$

$$\alpha^2=17^2 \text{ ή } \alpha^2=289$$

Άρα $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά α=17 και $\widehat{A}=90^o$.

β)



i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ορθογώνια με $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{A}}_1$ αφού είναι και οι δύο γωνίες συμπληρωματικές της γωνίας $\widehat{\Gamma}$. Άρα είναι όμοια και ο λόγος ομοιότητάς τους θα είναι ίσος με το λόγο των υποτεινουσών τους. Δηλαδή λ = $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{15}{8}$.

22070-Λύση

ii. Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, αφού είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι αυτά είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ = $\frac{15}{8}$.

Άρα $\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\mathrm{A\Gamma\Delta})} = \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{225}{64}$.

22098

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $ΑΒ = 4α$ και $ΑΔ = πα$. Στο εσωτερικό του ορθογωνίου σχεδιάστηκε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ.

α) Να αποδείξετε ότι το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

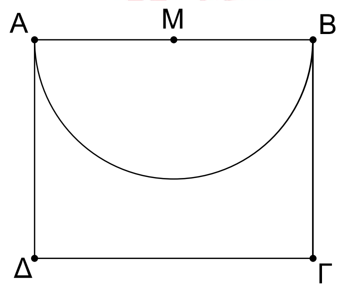
(Μονάδες 8)

β) Αν η διαγώνιος ΒΔ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Ε και Μ είναι το μέσο της ΑΒ,

i. να αποδείξετε ότι $ΑΒ^2 = ΒΔ \cdot ΒΕ$ και $ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΕ$. (Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $ΒΕ = \frac{16α}{\sqrt{16+π^2}}$ και $ΔΕ = \frac{π^2α}{\sqrt{16+π^2}}$, (Μονάδες 6)

iii. να υπολογίσετε το $συνB\widehat{M}E$. (Μονάδες 5)



22098-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \text{ΑΒ} \cdot \text{ΑΔ} = 4\alpha \cdot \pi\alpha = 4\pi\alpha^2.$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου ακτίνας $R = \frac{\text{ΑΒ}}{2} = \frac{4\alpha}{2} = 2\alpha$ δίνεται από τον τύπο

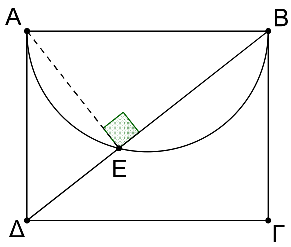
$$\text{Ε}_1 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi(2\alpha)^2}{2} = \frac{4\pi\alpha^2}{2} = 2\pi\alpha^2 \ (1).$$

Το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και εξωτερικά του ημικυκλίου γίνεται από τον τύπο

$$\text{Ε}_2 = (\text{ΑΒΓΔ}) - \text{Ε}_1 = 4\pi\alpha^2 - 2\pi\alpha^2 = 2\pi\alpha^2 \ (2).$$

Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι $\text{Ε}_1 = \text{Ε}_2$, επομένως το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

β) Η διαγώνιος ΒΔ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Ε. Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ.



i. Η γωνία $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β}$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, επομένως $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β} = 90^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΕ είναι η προβολή της κάθετης πλευράς ΑΒ πάνω στην υποτείνουσα ΒΔ, επομένως

$$\text{ΑΒ}^2 = \text{ΒΔ} \cdot \text{ΒΕ} \quad (1).$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΔΕ είναι η προβολή της κάθετης πλευράς ΑΔ πάνω στην υποτείνουσα ΒΔ, επομένως

$$\text{ΑΔ}^2 = \text{ΒΔ} \cdot \text{ΔΕ} \quad (2).$$

ii. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι

$$\text{ΒΔ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΔ}^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\text{ΑΒ} = 4\alpha$, $\text{ΑΔ} = \pi\alpha$, οπότε

$$\text{ΒΔ}^2 = (4\alpha)^2 + (\pi\alpha)^2 \ \text{ ή } \ \text{ΒΔ}^2 = (16+\pi^2)\alpha^2 \ \text{ ή } \ \text{ΒΔ} = \alpha\sqrt{16+\pi^2}.$$

Είναι $\text{ΑΒ} = 4\alpha$ και $\text{ΒΔ} = \alpha\sqrt{16+\pi^2}$, επομένως η (1) γίνεται

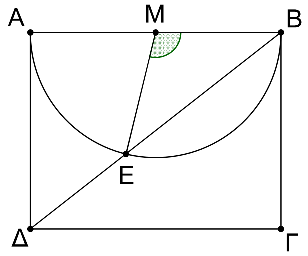
$$(4\alpha)^2 = \alpha\sqrt{16+\pi^2} \cdot \text{ΒΕ} \ \text{ ή } \ \text{ΒΕ} = \frac{16\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}.$$

Είναι $\text{ΑΔ} = \pi\alpha$ και $\text{ΒΔ} = \alpha\sqrt{16+\pi^2}$, επομένως η (2) γίνεται

22098-Λύση

$$(\pi\alpha)^2 = \alpha\sqrt{16+\pi^2}\cdot \Delta E \ \text{ ή } \ \Delta E = \frac{\pi^2\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}.$$

iii. Έστω Μ το μέσο της ΑΒ.



Τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΕ και ΜΒ είναι ακτίνες του ημικυκλίου διαμέτρου ΑΒ, επομένως

$$ME = MB = \frac{AB}{2} = \frac{4\alpha}{2} = 2\alpha.$$

Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΒΕΜ ισχύει

$$BE^2 = MB^2 + ME^2 - 2MB\cdot ME\cdot \text{συν}B\widehat{M}E \ \text{ ή } \ \text{συν}B\widehat{M}E = \frac{MB^2+ME^2-BE^2}{2MB\cdot ME}.$$

Όμως $ME = MB = 2\alpha$ και $BE = \dfrac{16\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}$, οπότε

$$\text{συν}B\widehat{M}E = \frac{(2\alpha)^2+(2\alpha)^2-\frac{256\alpha^2}{16+\pi^2}}{2\cdot 2\alpha\cdot 2\alpha} \ \text{ ή } \ \text{συν}B\widehat{M}E = \frac{\left(8-\frac{256}{16+\pi^2}\right)\alpha^2}{8\alpha^2} \ \text{ ή } \ \text{συν}B\widehat{M}E = \frac{\pi^2-16}{16+\pi^2}.$$

22100

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνίες $\widehat{\mathrm{A}} = 20^0$, $\widehat{\mathrm{B}} = 100^0$, και η διχοτόμος ΑΕ της γωνίας του $\widehat{\mathrm{A}}$. Από το Β φέρνουμε την κάθετη προς την ΑΕ και έστω Ζ , Δ τα σημεία τομής της καθέτου με τις ΑΕ, ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

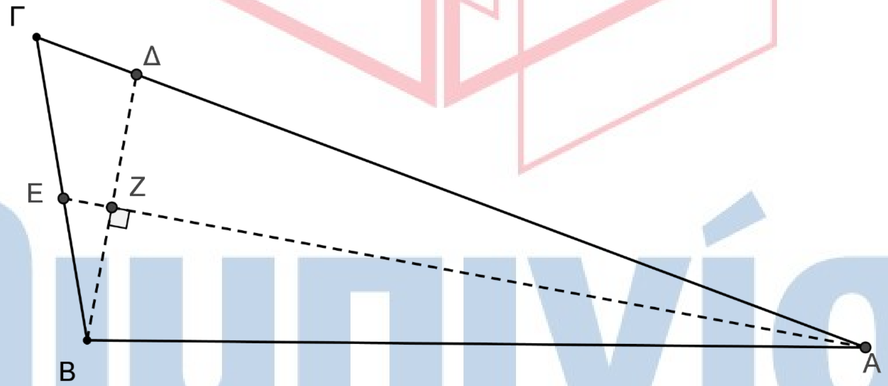
i. $\Gamma\widehat{\mathrm{B}}\Delta = \widehat{\mathrm{A}} = 20^0$ (Μονάδες 10)

ii. Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ, να γράψετε τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών τους και να αιτιολογήσετε γιατί είναι αυτές οι πλευρές ομόλογες .

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ δύο τετράπλευρα: ένα τετράγωνο με πλευρά την ΒΓ και ένα ορθογώνιο που η μία του πλευρά είναι η πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και η άλλη του πλευρά είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ. Να εξετάσετε αν τα δυο τετράπλευρα, που σχεδιάσατε, έχουν ίσα εμβαδά.

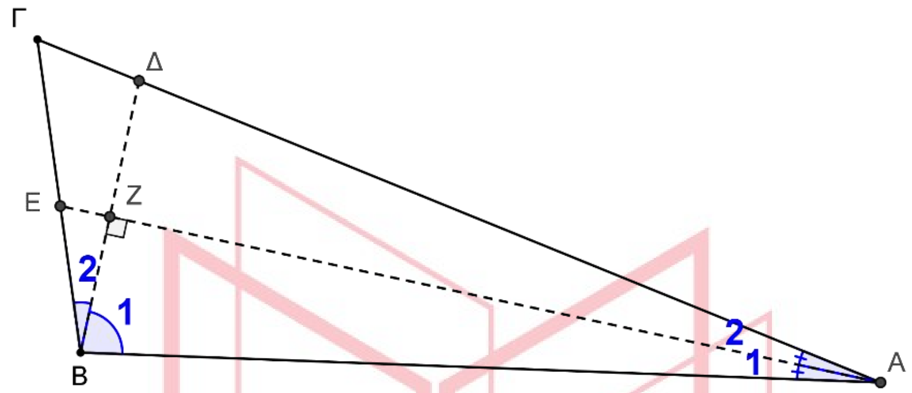
(Μονάδες 5)



22100-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



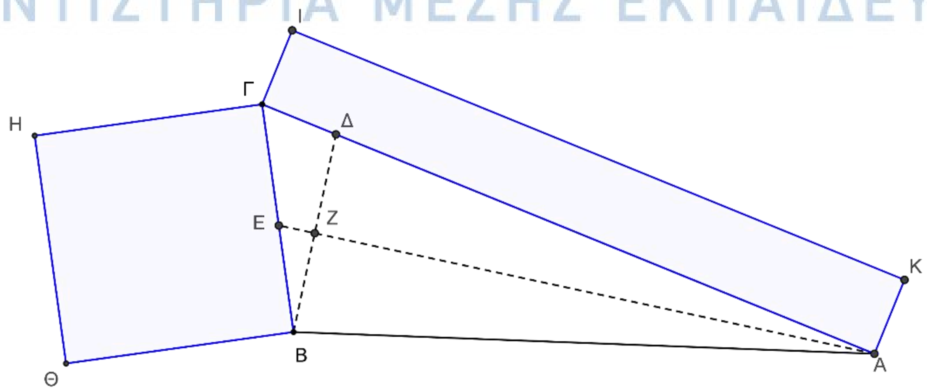
i. Αφού η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$, τότε $\widehat{\mathrm{A}}_1 = \widehat{\mathrm{A}}_2 = \frac{\widehat{\mathrm{A}}}{2} = \frac{20^0}{2} = 10^0$.

Επειδή το τρίγωνο ΒΖΑ είναι ορθογώνιο, αφού η ΒΔ είναι κάθετη στην ΑΕ, οι γωνίες του $\widehat{\mathrm{A}}_1$ και $\widehat{\mathrm{B}}_1$ είναι συμπληρωματικές και θα ισχύει $\widehat{\mathrm{A}}_1 + \widehat{\mathrm{B}}_1 = 90^0$ με $\widehat{\mathrm{A}}_1 = 10^0$. Επομένως $\widehat{\mathrm{B}}_1 = 90^0 - 10^0$ ή $\widehat{\mathrm{B}}_1 = 80^0$.

Είναι $\Gamma\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \widehat{\mathrm{B}} = 100^0$, οπότε θα είναι $\widehat{\mathrm{B}}_2 = \Gamma\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{A} - \widehat{\mathrm{B}}_1$ με $\widehat{\mathrm{B}}_1 = 80^0$. Επομένως $\widehat{\mathrm{B}}_2 = 100^0 - 80^0 = 20^0$ ή $\Gamma\widehat{\mathrm{B}}\Delta = 20^0$. Συνεπώς $\Gamma\widehat{\mathrm{B}}\Delta = \widehat{\mathrm{A}} = 20^0$.

ii. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ έχουν $\Gamma\widehat{\mathrm{B}}\Delta = \widehat{\mathrm{A}}$, από το i. ερώτημα και τη γωνία $\widehat{\Gamma}$ κοινή, οπότε θα είναι όμοια γιατί έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία. Αφού τα τρίγωνα είναι όμοια θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\Gamma\widehat{\Delta}\mathrm{B} = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma$. Συνεπώς, τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών είναι οι ΓΔ, ΒΓ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Gamma\widehat{\mathrm{B}}\Delta$ και $\widehat{\mathrm{A}}$, οι ΒΔ, ΑΒ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τη γωνία $\widehat{\Gamma}$ (κοινή) και οι ΒΓ, ΑΓ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Gamma\widehat{\Delta}\mathrm{B}$ και $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma$.

β)



22100-Λύση

Έστω ΒΓΗΘ είναι το τετράγωνο με πλευρά την ΒΓ και ΑΓΙΚ είναι το ορθογώνιο με διαστάσεις την ΑΓ και το τμήμα ΓΔ.

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΓΗΘ είναι (ΒΓΗΘ) = $\mathrm{B\Gamma}^2$ και το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΓΙΚ είναι (ΑΓΙΚ) = ΑΓ· ΓΔ.

Τα εμβαδά των τετραπλεύρων θα είναι ίσα αν ισχύει η σχέση;

$\mathrm{B\Gamma}^2$ = ΑΓ· ΓΔ ή αν ισχύει $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{B\Gamma}}$ (1)

Από το ερώτημα α) ii. τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε οι λόγοι των ομόλογων πλευρών τους θα είναι ίσοι, δηλαδή θα ισχύει $\frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\mathrm{B}\Delta}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma}}$. Επομένως, θα ισχύει ότι $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{B\Gamma}}$, άρα και $\mathrm{B\Gamma}^2$ = ΑΓ· ΓΔ.

Συνεπώς, ισχύει η σχέση (1), άρα τα τετράπλευρα ΒΓΗΘ και ΑΓΙΚ έχουν ίσα εμβαδά.

22101

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ έχουν σταθερά μήκη 3 και 4 αντίστοιχα.

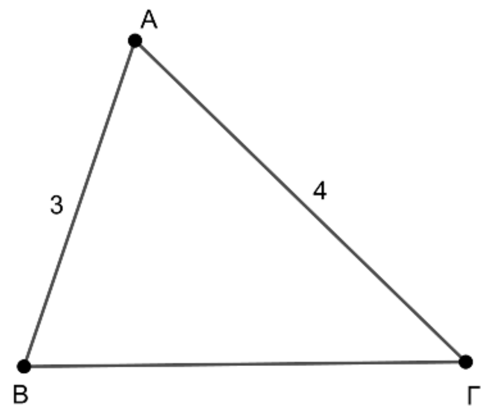
α) Αν η γωνία Α έχει μέτρο 60^o, τότε να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 08)

ii. Το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 09)

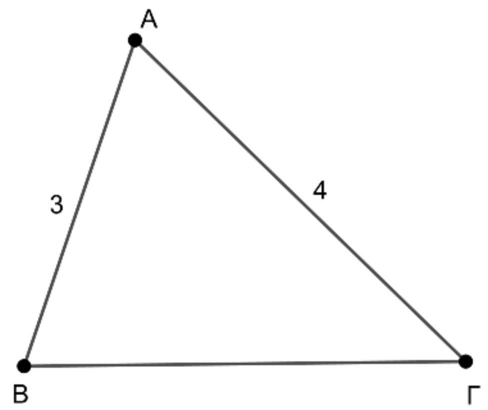
β) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας Α ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ να γίνεται μέγιστο; Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 08)



22101-Λύση

ΛΥΣΗ



α)

i. Για την εύρεση του εμβαδού του τριγώνου χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\text{Ε} = \frac{1}{2}\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{ημΑ} = \frac{1}{2}3\cdot 4\cdot \text{ημ}60^o = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

ii. Εφαρμόζουμε τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ:

$$\text{ΒΓ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 - 2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{συνΑ} = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot\text{συν}60^o = 9 + 16 - 24\cdot\frac{1}{2} = 13.$$

Άρα, ΒΓ = $\sqrt{13}$.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από τον τύπο

$$\text{Ε} = \frac{1}{2}\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{ημΑ} = \frac{1}{2}3\cdot 4\cdot\text{ημΑ} = 6\cdot\text{ημΑ}.$$

Για την γωνία Α του τριγώνου ισχύει ότι $0^o < Α < 180^o$, άρα $0 < ημΑ \le 1$. Η μέγιστη τιμή του ημΑ είναι 1, όταν η γωνία Α είναι 90^o. Επομένως, το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν η γωνία Α είναι ορθή και η μέγιστη τιμή του είναι Ε = 6·1 = 6 τ.μ.

22104

ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε σημείο Δ εσωτερικό της πλευράς του ΒΓ. Έστω Μ το μέσο Μ του τμήματος ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(ABM) = \frac{1}{2}(AB\Delta)$ (Μονάδες 8)

ii. $(ABM) + (M\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$ (Μονάδες 9)

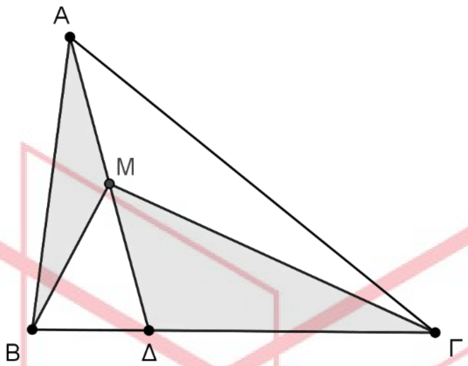
β) Να εξετάσετε αν υπάρχει θέση του σημείου Δ τέτοια ώστε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΔΓ να έχουν ίσα εμβαδά. Στην περίπτωση που υπάρχει θέση του σημείου Δ για την οποία τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΜ και ΜΔΓ είναι ίσα, να βρείτε τι μέρος του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ είναι το εμβαδόν του κάθε τριγώνου ΑΒΜ και ΜΔΓ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

22104-Λύση

ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, Δ σημείο της ΒΓ και Μ το μέσο του τμήματος ΑΔ.



α)

i. Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΜ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΑΔ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΒΔ θα έχουν ίσα εμβαδά γιατί έχουν ίσες βάσεις, τις ΜΑ και ΜΔ αντίστοιχα και κοινό ύψος από την κορυφή Β στον φορέα της πλευράς ΑΔ. Οπότε (ΑΒΜ) = (ΜΒΔ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΔ), δηλαδή (ΑΒΜ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΔ) (1).

ii. Στο τρίγωνο ΑΓΔ η ΓΜ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΑΔ, οπότε τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΜΓΔ θα έχουν ίσα εμβαδά, γιατί έχουν ίσες βάσεις, τις ΜΑ και ΜΔ αντίστοιχα και κοινό ύψος από την κορυφή Γ στον φορέα της πλευράς ΑΔ. Οπότε (ΑΓΜ) = (ΜΔΓ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΓΔ), δηλαδή (ΜΔΓ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΓΔ) (2).

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη θα έχουμε ότι:

$$(ΑΒΜ) + (ΜΔΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΔ) + \frac{1}{2}(ΑΓΔ) = \frac{1}{2}[(ΑΒΔ) + (ΑΓΔ)] = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$$

β) Αν είναι (ΑΒΜ) = (ΜΔΓ) , τότε από τις σχέσεις (1) και (2) θα ισχύει:

$$\frac{1}{2}(ΑΒΔ) = \frac{1}{2}(ΑΓΔ) \text{ ή } (ΑΒΔ) = (ΑΓΔ)$$

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν το ίδιο ύψος από την κοινή τους κορυφή Α στον φορέα των βάσεων τους ΒΔ και ΔΓ. Επομένως για να έχουν ίσα εμβαδά αρκεί να έχουν ίσες βάσεις, δηλαδή ΒΔ = ΔΓ. Αυτό θα συμβαίνει όταν το Δ είναι το μέσο της ΒΓ.

Όταν το σημείο Δ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε (ΑΒΜ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΔ) = $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ (ΑΒΓ) = $\frac{1}{4}$ (ΑΒΓ). Όμοια (ΜΔΓ) = $\frac{1}{4}$ (ΑΒΓ).

$$\text{Δηλαδή } (ΑΒΜ) = (ΜΔΓ) = \frac{1}{4}(ΑΒΓ)$$

22141

ΘΕΜΑ 4

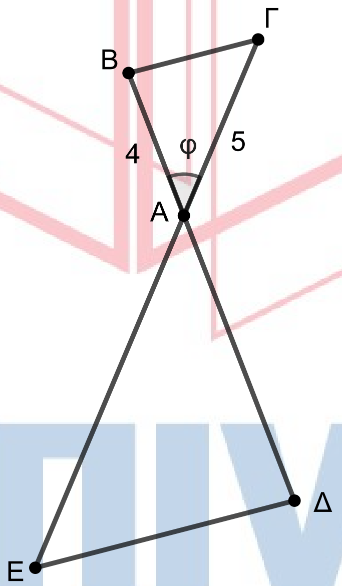
Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ έχει τα άκρα του Β και Γ στις προεκτάσεις των πλευρών ΔΑ και ΕΑ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΔΕ, έτσι ώστε να είναι παράλληλο στην πλευρά ΔΕ. Επίσης δίνονται τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, $AB = 4$ και $AΓ = 5$. Έστω ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι $\frac{(ABΓ)}{(AΔE)} = \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με λόγο $\frac{1}{2}$. (Μονάδες 10)

β) Αν $B\hat{A}Γ = φ$, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν (ΑΔΕ) του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με $40ημφ$.

(Μονάδες 07)

γ) Να βρείτε σημείο Ζ εσωτερικό της πλευράς ΑΔ, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΖ που σχηματίζεται να είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 08)



22141-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος τους Θαλή το τρίγωνο ΑΒΓ που ορίζεται από τις προεκτάσεις των πλευρών ΔΑ και ΕΑ του τριγώνου ΑΔΕ και την ΒΓ, παράλληλη προς τη ΔΕ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΔΕ. Άρα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια, με:

$$\frac{ΑΒ}{ΑΔ}=\frac{ΑΓ}{ΑΕ}=\frac{ΒΓ}{ΔΕ}$$

Επειδή ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, αν ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσος με λ , τότε:

$$\lambda^2=\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΕ)} \quad ή \quad \lambda^2=\frac{1}{4} \quad ή \quad \lambda=\frac{1}{2}$$

β) Το εμβαδόν (ΑΒΓ) του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}\cdot ΑΒ\cdot ΑΓ\cdot ημφ$ ή

$(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot ημφ$ ή $(ΑΒΓ)=10ημφ$.

Όμως $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΕ)}=\frac{1}{4}$ ή $(ΑΔΕ)=4(ΑΒΓ)$. Δηλαδή το εμβαδόν του ΑΔΕ είναι τετραπλάσιο του εμβαδού του ΑΒΓ. Άρα $(ΑΔΕ)=4\cdot 10ημφ$ ή $(ΑΔΕ)=40ημφ$.

γ) Έχουμε ότι $(ΑΒΓ)=\frac{1}{4}\cdot(ΑΔΕ)$.

Έστω σημείο Ζ εσωτερικό της ΑΔ ώστε $(ΑΓΖ)=\frac{1}{4}\cdot(ΑΔΕ)$ ή $(ΑΓΖ)=(ΑΒΓ)$ ή $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΓΖ)}=1$.

Επίσης οι γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{\omega}$, των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΓΖ αντίστοιχα είναι παραπληρωματικές. Επομένως ο λόγος των εμβαδών (ΑΒΓ) και (ΑΓΖ) των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΓΖ αντίστοιχα είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή:

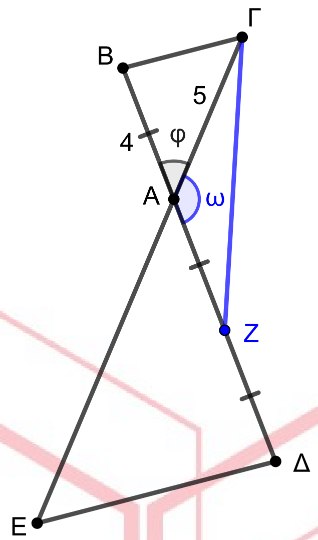
$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΓΖ)}=\frac{ΑΒ\cdot ΑΓ}{ΑΓ\cdot ΑΖ}$$

Άρα $\frac{ΑΒ\cdot ΑΓ}{ΑΓ\cdot ΑΖ}=1$ ή $\frac{ΑΒ}{ΑΖ}=1$ ή $ΑΖ=ΑΒ$ ή $ΑΖ=\frac{ΑΔ}{2}$, εφόσον οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ είναι ομόλογες σε όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ με λόγο ομοιότητας $\lambda=\frac{1}{2}$ (από το α)).

Επομένως το σημείο Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΑΔ του τριγώνου ΑΔΕ.

(Εναλλακτικά: τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΖ έχουν κοινό ύψος από την κορυφή Γ και εφόσον έχουν ίσα εμβαδά, θα έχουν και ίσες βάσεις ΑΖ = ΑΒ).

22141-Λύση



22148

ΘΕΜΑ 4

Έστω Ε σημείο στην πλευρά ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του ΑΒΓ η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ και παίρνουμε σημείο Ζ στην προέκταση $A\chi$ της πλευράς ΓΑ του τριγώνου ΑΒΓ ώστε να είναι ΑΖ = ΑΕ, όπως στο σχήμα.

α) Έστω $A\Gamma = 3AE$. Να αποδείξετε ότι:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

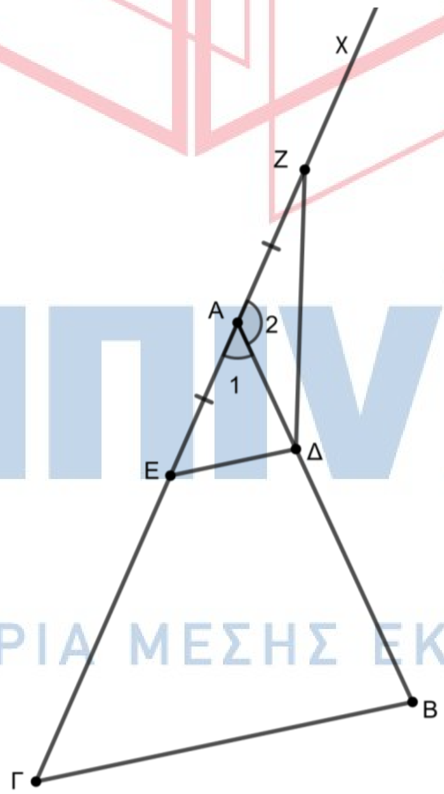
(Μονάδες 07)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του ΔΕΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του ΑΒΓ, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{AE}{A\Gamma}$.

(Μονάδες 08)



22148-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την ΔΕ, παράλληλη προς τη ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΒΓ. Άρα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, με:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ}$$

Ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι:

$$λ=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΑΕ}{3ΑΕ}=\frac{1}{3}$$

Επειδή ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, ο λόγος των εμβαδών (ΑΔΕ) και (ΑΒΓ) των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ αντίστοιχα είναι:

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

ii. Οι γωνίες $\hat{Α}_1$ και $\hat{Α}_2$, των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ αντίστοιχα είναι παραπληρωματικές. Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους (ΑΔΕ) και (ΑΔΖ) αντίστοιχα είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή:

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΖ)}=\frac{ΑΔ\cdot ΑΕ}{ΑΔ\cdot ΑΖ} \quad ή \quad \frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΖ)}=\frac{ΑΕ}{ΑΖ} \quad ή \quad \frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΖ)}=1 \text{, γιατί ΑΕ = ΑΖ}$$

Άρα τα εμβαδά των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ είναι ίσα.

(Εναλλακτικά: η ΑΔ είναι διάμεσος της πλευράς ΕΖ του τριγώνου ΔΕΖ, άρα το χωρίζει σε δύο τρίγωνα με ίσα εμβαδά, τα ΑΔΕ και ΑΔΖ).

Για το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ ισχύει ότι $(ΔΕΖ)=(ΑΔΕ)+(ΑΔΖ)=2(ΑΔΕ)$.

Επομένως:

$$\frac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{2(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=2\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=2\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{9}.$$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Έστω $λ=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$. Τότε με όμοιους συλλογισμούς με το ερώτημα α) έχουμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο λ και για τα εμβαδά τους ισχύει ότι $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=λ^2$.

Επίσης, εφόσον ΑΕ = ΑΖ τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ έχουν ίσα εμβαδά, ανεξάρτητα από την τιμή του λόγου λ και $(ΔΕΖ)=(ΑΔΕ)+(ΑΔΖ)=2(ΑΔΕ)$, όπως στο α)ii).

Άρα:

22148-Λύση

$$\frac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{2(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=2\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=2\lambda^2$$

Εφόσον το εμβαδόν του ΔΕΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του ΑΒΓ έχουμε ότι:

$$\frac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{1}{2} \text{ ή } 2\lambda^2=\frac{1}{2} \text{ ή } \lambda^2=\frac{1}{4} \text{ ή } \lambda=\frac{1}{2}$$

Άρα $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{1}{2}$.

22150

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα.

α) Αν επιπλέον το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ ενώνει την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ και το μέσο Δ της απέναντι πλευράς ΒΓ, όπως στο σχήμα, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$.

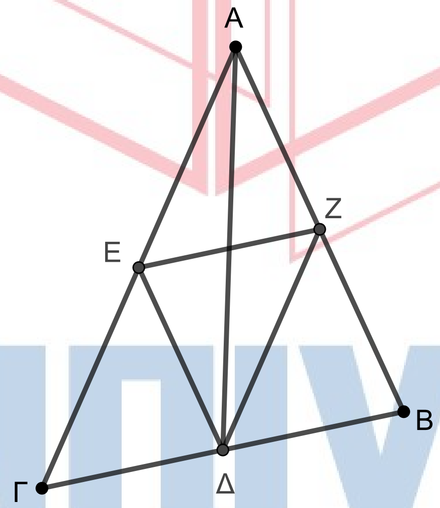
ii. Για το εμβαδόν (ΑΕΔΖ) του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ ισχύει ότι $(ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - 2(ΕΔΓ)$.

iii. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 18)

β) Αν το σημείο Δ είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, τότε ισχύει ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ;

(Μονάδες 07)



22150-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Το Ε είναι μέσο της ΑΓ, άρα $ΑΓ = 2ΓΕ$ ή $\frac{ΓΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{2}$.

Ομοίως το Δ είναι μέσο της ΒΓ, άρα $\frac{ΓΔ}{ΒΓ} = \frac{1}{2}$.

Άρα τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, εφόσον η $\hat{Γ}$ είναι κοινή γωνία. Επομένως τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας τον λόγο των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή $\frac{1}{2}$.

ii. Άρα τα εμβαδά (ΕΔΓ) και (ΑΒΓ) των τριγώνων ΕΔΓ και ΑΒΓ αντίστοιχα έχουν λόγο ίσο με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. Επομένως:

$$\frac{(ΕΔΓ)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ ή } (ΕΔΓ) = \frac{1}{4} \cdot (ΑΒΓ)$$

Με ανάλογους συλλογισμούς με εκείνους του α)i προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΖΒΔ και ΑΒΓ είναι επίσης όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$, εφόσον:

- Το Ζ είναι μέσο της ΑΒ.
- Το Δ είναι μέσο της ΒΓ.
- Η περιεχόμενη γωνία $\hat{Β}$ των ΒΖ, ΒΔ και ΑΒ, ΒΓ είναι κοινή.

Επομένως για το εμβαδόν (ΖΒΔ) του τριγώνου ΖΒΔ ισχύει ότι $(ΖΒΔ) = \frac{1}{4} \cdot (ΑΒΓ) = (ΕΔΓ)$.

Επίσης για το εμβαδόν (ΑΕΔΖ) του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ ισχύει ότι:

$$(ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - (ΕΔΓ) - (ΖΒΔ) \text{ ή } (ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - 2(ΕΔΓ).$$

iii. Ή αλλιώς:

$$(ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (ΑΒΓ) = (ΑΒΓ) - \frac{1}{2} \cdot (ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot (ΑΒΓ)$$

β) Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ με το τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ της απέναντι πλευράς ΒΓ. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΓ έχουν κοινή γωνία την $\hat{Α}_1 = Δ\hat{Α}Ε$, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία $\hat{Α}_1$. Άρα $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΔΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΕ}{ΑΔ \cdot ΑΓ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{2}$, εφόσον το Ε είναι μέσο της ΑΓ.

22150-Λύση

Άρα $(ΑΔΕ)=\frac{(ΑΔΓ)}{2}$.

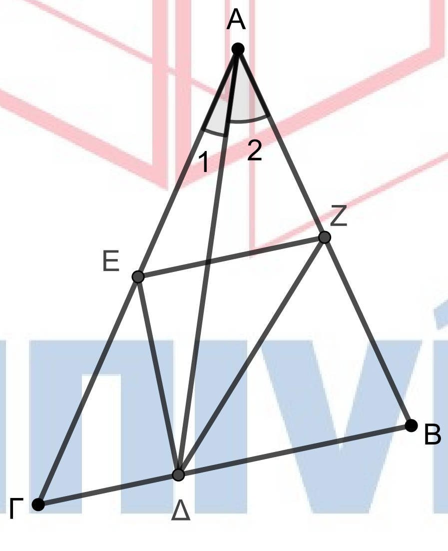
(Εναλλακτικά: Η διάμεσος ΔΕ της πλευράς ΑΓ του τριγώνου ΑΔΓ το χωρίζει σε δύο τρίγωνα με ίσα εμβαδά, τα ΑΔΕ και ΔΕΓ. Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΔΓ).

Με όμοιους συλλογισμούς για τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΔΒ έχουμε $(ΑΔΖ)=\frac{(ΑΔΒ)}{2}$.

Όμως για το εμβαδόν (ΑΕΔΖ) του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ ισχύει ότι:

$$(ΑΕΔΖ)=(ΑΔΕ)+(ΑΔΖ) \quad ή \quad (ΑΕΔΖ)=\frac{(ΑΔΓ)}{2}+\frac{(ΑΔΒ)}{2}=\frac{(ΑΔΓ)+(ΑΔΒ)}{2}=\frac{(ΑΒΓ)}{2}.$$

Άρα το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.



22243

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ζ στην πλευρά ΑΔ, ώστε $\text{ΑΖ} = \frac{3}{4}\text{ΑΒ}$.

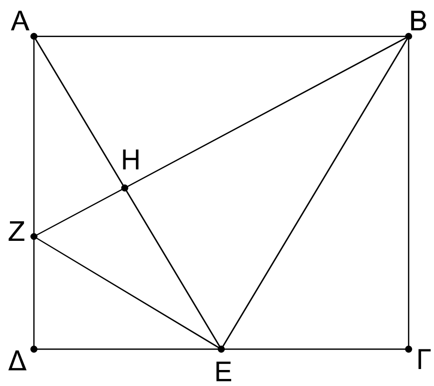
α) Να αποδείξετε ότι $\text{ΒΖ} = \frac{5}{4}\text{ΑΒ}$. (Μονάδες 6)

β) Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, Ε το μέσο της ΓΔ και Η είναι το σημείο τομής των ΑΕ, ΒΖ, να αποδείξετε ότι:

i. $\text{ΒΕ}^2 = \frac{5}{4}\text{ΑΒ}^2$ και $\text{ΖΕ}^2 = \frac{5}{16}\text{ΑΒ}^2$, (Μονάδες 6)

ii. το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια και να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών τους. (Μονάδες 8)



22243-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ έχουμε ότι

$$\text{ΒΖ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΖ}^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\text{ΑΖ} = \frac{3}{4}\text{ΑΒ}$, οπότε

$$\text{ΒΖ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \left(\frac{3}{4}\text{ΑΒ}\right)^2 \text{ ή } \text{ΒΖ}^2 = \frac{25}{16}\text{ΑΒ}^2 \text{ ή } \text{ΒΖ} = \frac{5}{4}\text{ΑΒ}.$$

β) Αφού το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, θα είναι $\text{ΑΔ} = \text{ΒΓ} = \text{ΑΒ}$.

Επιπλέον,

$$\text{ΔΖ} = \text{ΑΔ} - \text{ΑΖ} = \text{ΑΒ} - \frac{3}{4}\text{ΑΒ} = \frac{1}{4}\text{ΑΒ}.$$

i. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ έχουμε ότι

$$\text{ΒΕ}^2 = \text{ΒΓ}^2 + \text{ΓΕ}^2 \text{ ή } \text{ΒΕ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \left(\frac{1}{2}\text{ΑΒ}\right)^2 \text{ ή } \text{ΒΕ}^2 = \frac{5}{4}\text{ΑΒ}^2.$$

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ έχουμε ότι

$$\text{ΖΕ}^2 = \text{ΔΖ}^2 + \text{ΔΕ}^2 \text{ ή } \text{ΖΕ}^2 = \left(\frac{1}{4}\text{ΑΒ}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\text{ΑΒ}\right)^2 \text{ ή } \text{ΖΕ}^2 = \frac{5}{16}\text{ΑΒ}^2.$$

ii. Από το ερωτήματα α και βi έχουμε ότι

$$\text{ΒΕ}^2 + \text{ΖΕ}^2 = \frac{5}{4}\text{ΑΒ}^2 + \frac{5}{16}\text{ΑΒ}^2 = \frac{25}{16}\text{ΑΒ}^2 = \text{ΒΖ}^2.$$

Σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο με $\text{Β}\hat{\text{Ε}}\text{Ζ} = 90^\text{o}$.

γ) Είναι $\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{4}}\text{ΑΒ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ και $\frac{\text{ΖΕ}}{\text{ΕΓ}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{16}}\text{ΑΒ}}{\frac{1}{2}\text{ΑΒ}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ έχουν:

- $\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΖΕ}}{\text{ΕΓ}}$ και
- $\text{Β}\hat{\text{Ε}}\text{Ζ} = \text{Β}\hat{\text{Γ}}\text{Ε} = 90^\text{o}$.

Άρα τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

Ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, οπότε

$$\frac{(\text{ΒΕΖ})}{(\text{ΒΓΕ})} = \left(\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΒΓ}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

22244

ΘΕΜΑ 4

Ένας κηπουρός θέλει να ποτίσει το γκαζόν που έχει φυτέψει σε έναν τετράγωνο κήπο πλευράς 10 m. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί μηχανισμούς ποτίσματος τους οποίους μπορεί να ρυθμίσει, ώστε να ποτίζουν έναν κυκλικό τομέα με συγκεκριμένη γωνία και ακτίνα.

α) Ο κηπουρός τοποθετεί στις απέναντι κορυφές Α, Γ του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 10m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Να αποδείξετε ότι:

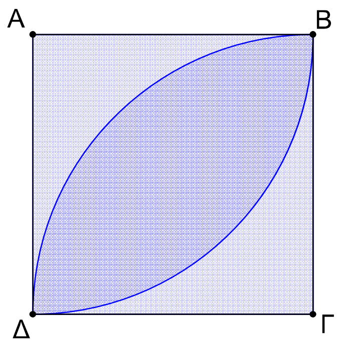
i. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζει κάθε μηχανισμός είναι $25\pi \ \mathrm{m}^2$. (Μονάδες 4)

ii. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζουν ταυτόχρονα και οι δύο μηχανισμοί είναι $50(\pi - 2)\ \mathrm{m}^2$. (Μονάδες 5)

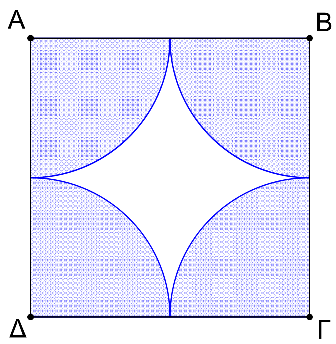
β) Ο κηπουρός τοποθετεί στις τέσσερις κορυφές του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 5m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

i. Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται. (Μονάδες 8)

ii. Για να μην μείνει απότιστη κάποια περιοχή του κήπου ο κηπουρός τοποθετεί έναν πέμπτο μηχανισμό ποτίσματος στο κέντρο του κήπου ο οποίος ποτίζει την περιοχή ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας 5m. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα και να το συγκρίνετε με την απάντηση που βρήκατε στο ερώτημα α). (Μονάδες 8)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

22244-Λύση

ΛΥΣΗ

Το εμβαδόν του τετράγωνου κήπου είναι $\mathrm{E} = 10^2 = 100\ \mathrm{m}^2$.

α) i. Ο κάθε ένας από τους δύο μηχανισμούς ποτίσματος ποτίζει έναν κυκλικό τομέα γωνίας 90^{o} και ακτίνας 10m. Το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα είναι

$$\mathrm{E}_1 = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 90}{360} = 25\pi\ \mathrm{m}^2.$$

ii. Οι δύο μηχανισμοί ποτίσματος ποτίζουν ολόκληρο τον κήπο, ενώ μια περιοχή του κήπου ποτίζεται και από τους δύο μηχανισμούς. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τομέων ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου αυξημένο κατά το εμβαδόν της περιοχής του κήπου που ποτίζεται από τους δύο μηχανισμούς. Άρα το εμβαδόν αυτής της περιοχής είναι

$$2\mathrm{E}_1 - \mathrm{E} = 50\pi - 100 = 50(\pi - 2)\ \mathrm{m}^2.$$

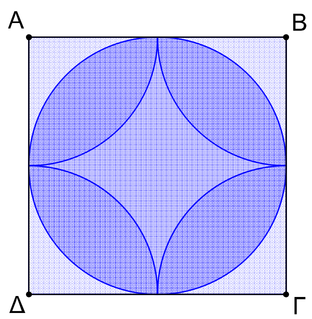
β) i. Ο κάθε ένας από τους τέσσερις μηχανισμούς ποτίσματος ποτίζει έναν κυκλικό τομέα γωνίας 90^{o} και ακτίνας 5m. Το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα είναι

$$\mathrm{E}_2 = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 90}{360} = \frac{25\pi}{4}\ \mathrm{m}^2.$$

Το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται είναι

$$\mathrm{E} - 4\mathrm{E}_2 = 100 - 25\pi = 25(4 - \pi)\ \mathrm{m}^2.$$

ii.



Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου που ποτίζει ο πέμπτος μηχανισμός είναι

$$\mathrm{E}_3 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi.$$

Οι πέντε μηχανισμοί ποτίσματος ποτίζουν ολόκληρο τον κήπο, ενώ τέσσερις περιοχές του κήπου ποτίζονται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων κυκλικών τομέων αυξημένο κατά το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου αυξημένο κατά το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς. Άρα το εμβαδόν αυτό είναι

22244-Λύση

$$4\text{E}_1 + \text{E}_3 - \text{E} = 25\pi + 25\pi - 100 = 50(\pi - 2)\ \text{m}^2.$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή του εμβαδού είναι ίση με αυτή του ερωτήματος α).

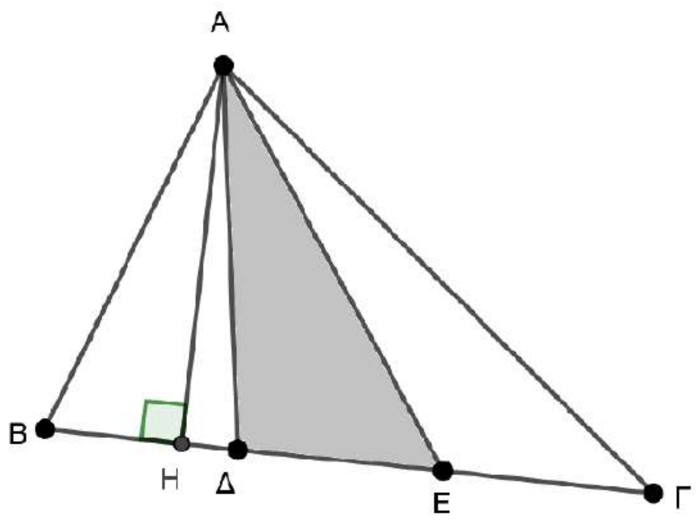
22259

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στην πλευρά του ΒΓ, τα σημεία Δ,Ε ώστε ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ. Από την κορυφή Α, φέρνουμε το ύψος ΑΗ του τριγώνου ΑΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι (ΑΔΕ) = $\frac{1}{3}$ (ΑΒΓ). (Μονάδες 13)

β) Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι (ΑΜΕ) = $\frac{1}{6}$ (ΑΒΓ). (Μονάδες 12)



22259-Λύση

ΛΥΣΗ

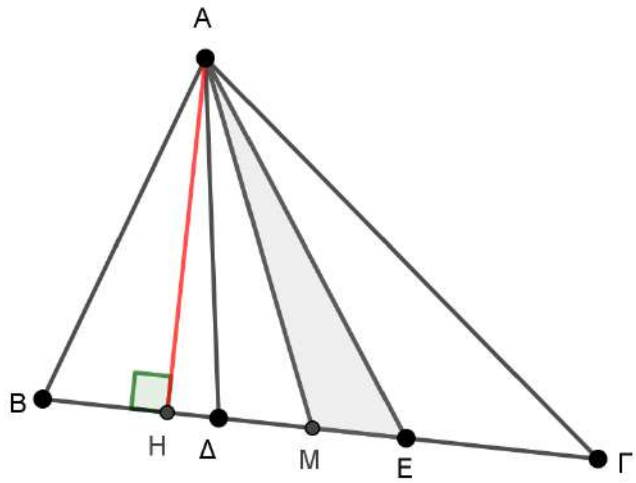
Από τα δεδομένα έχουμε: ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ = $\frac{1}{3}$ ΒΓ (1).

α) Το ΑΗ είναι ύψος στα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ, οπότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων θα ισούται με το λόγο των αντιστοίχων βάσεων. Δηλαδή:

$\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{\mathrm{\Delta E}}{\mathrm{B\Gamma}}$, η οποία λόγω της (1) γράφεται: $\frac{(\mathrm{AB\Delta})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \frac{\frac{1}{3}\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{1}{3}$,

οπότε: (ΑΔΕ) = $\frac{1}{3}$ (ΑΒΓ).

β)



Στο τρίγωνο ΑΔΕ, η ΑΜ είναι διάμεσος. Επομένως το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα. Τα ΑΜΕ και ΑΜΔ. Οπότε (ΑΜΕ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΔΕ), η οποία λόγω του ερωτήματος (α) δίνει: (ΑΜΕ) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ (ΑΒΓ) = $\frac{1}{6}$ (ΑΒΓ).

22260

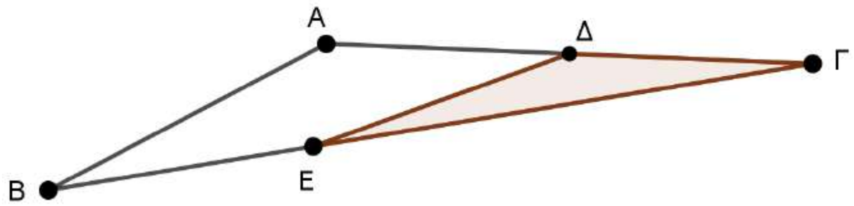
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, με ΑΒ=4, ΑΓ=6 και $\widehat{A} = 150^0$. Αν το σημείο Δ είναι το μέσον της ΑΓ και το Ε είναι σημείο της ΒΓ ώστε $ΓΕ = \frac{2}{3}ΓΒ$, τότε να υπολογίσετε:

α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Δίνεται $ημ150^0 = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 9)

β) το λόγο $\frac{(ΓΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$. (Μονάδες 9)

γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ. (Μονάδες 7)



22260-Λύση

ΛΥΣΗ

Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΒ=4, ΑΓ=6 και $\widehat{A}$ = 150^0 και ημ150^0 = $\frac{1}{2}$.

α) Είναι (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}$ ΑΒ·ΑΓ·ημΑ = $\frac{1}{2}$ ·4·6·ημ150^0 = 12·$\frac{1}{2}$ = 6.

β) Από τα δεδομένα η ΓΔ = $\frac{1}{2}$ ΓΑ. Επίσης το ΓΕ = $\frac{2}{3}$ΓΒ.

Έτσι, τα τρίγωνα ΓΔΕ και ΑΒΓ έχουν τη γωνία Γ κοινή. Άρα ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν την κοινή γωνία Γ.

Δηλαδή: $\frac{(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Gamma\Delta\cdot\Gamma E}{\Gamma A\cdot\Gamma B}$ ή $\frac{(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma A\cdot\frac{2}{3}\Gamma B}{\Gamma A\cdot\Gamma B}$ ή $\frac{(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3}$.

γ) Από το ερώτημα (β) έχουμε $\frac{(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3}$ ή (ΓΔΕ) = $\frac{1}{3}$ (ΑΒΓ)

και λόγω του ερωτήματος (α) θα είναι: (ΓΔΕ) = $\frac{1}{3}$ .6 = 2.

22310

ΘΕΜΑ 2

Το παρακάτω σχήμα (Σ) αποτελείται από το ημικύκλιο διαμέτρου AB και το ορθογώνιο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$. Το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά. Δίνεται $\mathrm{AB} = 8\ \mathrm{cm}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

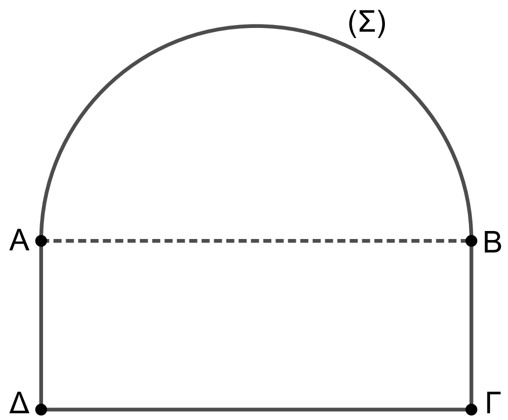
i. το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι $\mathrm{E} = 8\pi\ \ \mathrm{cm}^2$, (Μονάδες 8)

ii. το μήκος του ημικυκλίου είναι $\mathrm{L} = 4\pi\ \ \mathrm{cm}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε:

i. το μήκος της πλευράς $\mathrm{A\Delta}$ του ορθογωνίου, (Μονάδες 5)

ii. την περίμετρο του σχήματος (Σ) . (Μονάδες 4)



22310-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Επειδή η διάμετρος του ημικυκλίου είναι $\mathrm{AB} = 8\ \mathrm{cm}$, η ακτίνα του είναι

$\rho = \frac{1}{2}\,\mathrm{AB} = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4\ \mathrm{cm}$, άρα το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι

$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\cdot \pi\rho^2 = \frac{1}{2}\cdot \pi \cdot 4^2 = 8\pi\ \ \mathrm{cm}^2.$

ii) Το μήκος του ημικυκλίου είναι $\mathrm{L} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\rho = \pi\rho = 4\pi\ \ \mathrm{cm}$.

β) i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Delta} = 8\cdot \mathrm{A\Delta}\ \mathrm{cm}^2.$

Επειδή το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά , θα έχουμε

$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \mathrm{E}$ ή $8\cdot\mathrm{A\Delta} = 8\pi$ ή $\mathrm{A\Delta} = \pi\ \mathrm{cm}$.

ii) Το μήκος του ημικυκλίου από το ερώτημα (α ii) είναι $\mathrm{L} = 4\pi\ \ \mathrm{cm}$.

Στο (β i) βρήκαμε $\mathrm{A\Delta} = \pi\ \mathrm{cm}$ και επειδή το $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι ορθογώνιο, είναι

$\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{A\Delta} = \pi\ \mathrm{cm}$ και $\mathrm{\Delta\Gamma} = \mathrm{AB} = 8\ \mathrm{cm}.$

Η περίμετρος P του σχήματος (Σ) είναι

$\mathrm{P} = \mathrm{L} + \mathrm{A\Delta} + \mathrm{\Delta\Gamma} + \mathrm{B\Gamma}$ ή $\mathrm{P} = 4\pi + \pi + 8 + \pi = 6\pi + 8\ \ \mathrm{cm}$.

22331

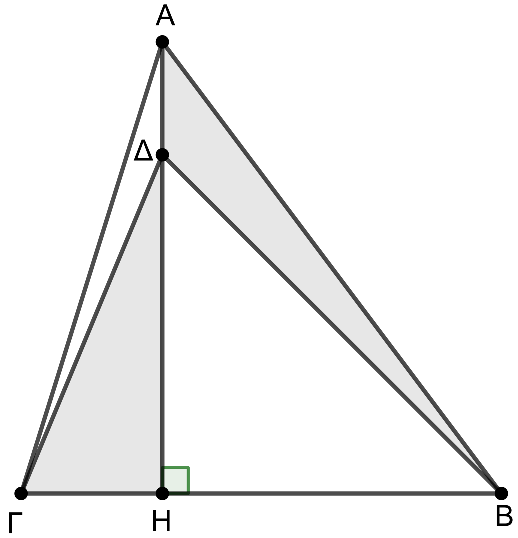
ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ του σχήματος το $ΑΗ$ είναι ύψος και το $Δ$ σημείο του $ΑΗ$. Δίνονται $ΑΒ = 20,\ ΒΗ = 12,\ ΓΗ = 5$ και ότι το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΔ$ είναι $(ΑΒΔ) = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΗ = 16$. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = 4$. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $ΓΔΗ$. (Μονάδες 6)



22331-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο AHB $\left(\widehat{\mathrm{H}}=90°\right)$, είναι $\mathrm{AB}=20$ και $\mathrm{BH}=12$, άρα από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$\mathrm{AH}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2=20^2-12^2=400-144=256=16^2$ ή $\mathrm{AH}=16$.

β) Το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση ΑΔ του τριγώνου ΑΒΔ είναι το $\mathrm{BH}=12$, και επειδή το εμβαδόν του είναι $(\mathrm{AB\Delta})=24$, θα έχουμε

$(\mathrm{AB\Delta})=\frac{\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{BH}}{2}$ ή $24=\frac{\mathrm{A\Delta}\cdot 12}{2}$ ή $6\mathrm{A\Delta}=24$ ή $\mathrm{A\Delta}=4$.

γ) Το τρίγωνο ΓΔΗ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές $\Delta\mathrm{H}=\mathrm{AH}-\mathrm{A\Delta}=16-4=12$ και $\Gamma\mathrm{H}=5$.

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΗ είναι $(\Gamma\Delta\mathrm{H})=\frac{\mathrm{H}\Gamma\cdot\mathrm{H}\Delta}{2}=\frac{5\cdot 12}{2}=30$.

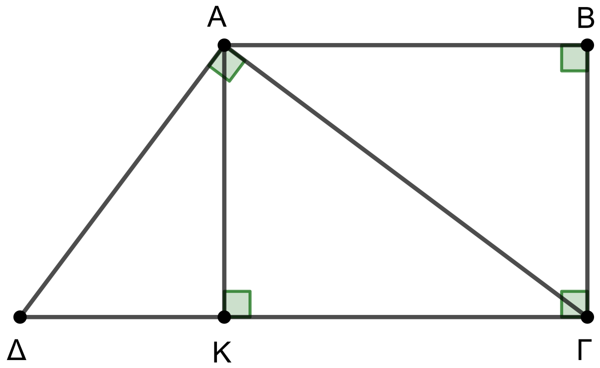
22338

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $\widehat{Β} = \widehat{Γ} = 90°$ και στο οποίο η πλευρά $ΑΔ$ και η διαγώνιος $ΑΓ$ είναι κάθετες. Έστω $Κ$ η προβολή της κορυφής $Α$ στην πλευρά $ΓΔ$, $ΚΔ = 9$ και $ΚΓ = 16.$

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΚ = 12$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$. (Μονάδες 13)



22338-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ το ΑΚ είναι το ύψος του, που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΔΓ και οι προβολές των κάθετων πλευρών ΑΔ και ΑΓ στην υποτείνουσα ΔΓ είναι αντίστοιχα $ΚΔ = 9$ και $ΚΓ = 16$. Άρα

$ΑΚ^2 = ΚΔ \cdot ΚΓ$ ή $ΑΚ^2 = 9 \cdot 16$ ή $ΑΚ^2 = 144$ ή $ΑΚ^2 = 12^2$ ή $ΑΚ = 12$.

β) Το τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει ύψος $ΑΚ = 12$ και βάσεις

$ΔΓ = ΚΔ + ΚΓ = 9 + 16 = 25$ και

$ΑΒ = ΚΓ = 16$, αφού το ΑΒΓΚ είναι ορθογώνιο $\left(\widehat{Β} = \widehat{Γ} = \widehat{Κ} = 90°\right)$.

Επομένως το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι

$(ΑΒΓΔ) = \frac{(ΔΓ+ΑΒ)\cdot ΑΚ}{2} = \frac{(25+16)\cdot 12}{2} = 246$.

22339

ΘΕΜΑ 2

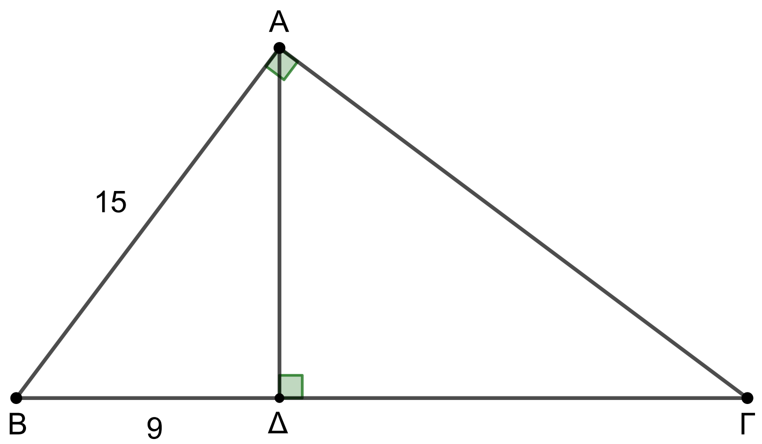
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{Α} = 90°$ και έστω Δ η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ. Έστω επίσης $ΑΒ = 15$ και $ΔΒ = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΒΓ = 25$, (Μονάδες 9)

ii. $ΑΓ = 20$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)



22339-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\widehat{Α} = 90°$), όπου είναι $ΑΒ = 15$ και $ΔΒ = 9$, έχουμε

$ΑΒ^2 = ΔΒ \cdot ΒΓ$ ή $15^2 = 9 \cdot ΒΓ$ ή $ΒΓ = \frac{225}{9}$ ή $ΒΓ = 25$.

ii) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\widehat{Α} = 90°$), όπου είναι $ΑΒ = 15$ και $ΒΓ = 25$, έχουμε

$ΑΓ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2$ ή $ΑΓ^2 = 25^2 - 15^2$ ή $ΑΓ^2 = 625 - 225$ ή $ΑΓ^2 = 400$ ή $ΑΓ = 20$.

β) Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο, το εμβαδόν του είναι

$(ΑΒΓ) = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{2} = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150$.

22340

ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και το εσωτερικό σημείο Κ της πλευράς ΒΓ. Θεωρούμε σημείο Ο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΚ, ώστε $ΑΟ = \frac{3}{4}ΑΚ$. Από το Ο φέρνουμε ευθεία ε η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

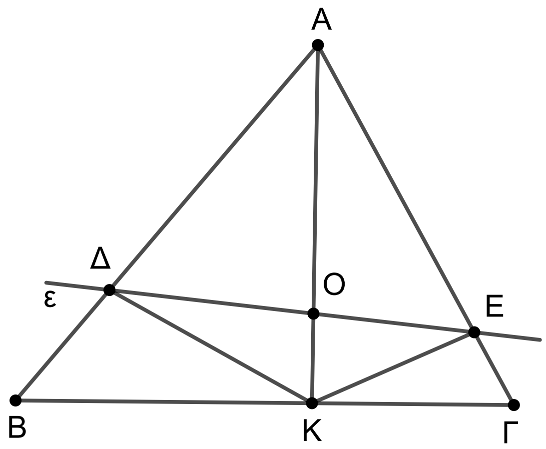
i. $(ΑΟΔ) = \frac{3}{4}(ΑΚΔ)$, (Μονάδες 7)

ii. $(ΑΟΕ) = \frac{3}{4}(ΑΚΕ)$, (Μονάδες 7)

iii. $(ΑΔΕ) = \frac{3}{4}(ΑΔΚΕ)$. (Μονάδες 7)

β) Είναι δυνατόν να ισχύει $(ΑΔΕ) = \frac{3}{4}(ΑΒΓ)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)



22340-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i)Τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΑΚΔ έχουν την $\mathrm{K\hat{A}\Delta}$ κοινή γωνία, άρα ο λόγος των εμβαδών τους, είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία αυτή. Επομένως $\frac{(\mathrm{AO\Delta})}{(\mathrm{AK\Delta})}=\frac{\mathrm{AO\cdot A\Delta}}{\mathrm{AK\cdot A\Delta}}=\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AK}}=\frac{3}{4}$, άρα $(\mathrm{AO\Delta})=\frac{3}{4}(\mathrm{AK\Delta})$.

ii) Τα τρίγωνα ΑΟΕ και ΑΚΕ έχουν την $\mathrm{K\hat{A}E}$ κοινή γωνία, άρα ο λόγος των εμβαδών τους, είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία αυτή. Επομένως $\frac{(\mathrm{AOE})}{(\mathrm{AKE})}=\frac{\mathrm{AO\cdot AE}}{\mathrm{AK\cdot AE}}=\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AK}}=\frac{3}{4}$, άρα $(\mathrm{AOE})=\frac{3}{4}(\mathrm{AKE})$.

iii) Από τα προηγούμενα ερωτήματα είναι $(\mathrm{AO\Delta})=\frac{3}{4}(\mathrm{AK\Delta})$ και $(\mathrm{AOE})=\frac{3}{4}(\mathrm{AKE})$, επομένως θα έχουμε

$$(\mathrm{A\Delta E})=(\mathrm{AO\Delta})+(\mathrm{AOE})$$
$$=\frac{3}{4}(\mathrm{AK\Delta})+\frac{3}{4}(\mathrm{AKE})$$
$$=\frac{3}{4}[(\mathrm{AK\Delta})+(\mathrm{AKE})]$$
$$=\frac{3}{4}(\mathrm{A\Delta KE}).$$

β) Το τετράπλευρο ΑΔΚΕ περιέχεται στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ, άρα το εμβαδόν του ΑΔΚΕ είναι μικρότερο του εμβαδού του ΑΒΓ.

Άρα

$$(\mathrm{A\Delta KE})<(\mathrm{AB\Gamma})$$
$$\frac{3}{4}(\mathrm{A\Delta KE})<\frac{3}{4}(\mathrm{AB\Gamma})$$
$$(\mathrm{A\Delta E})<\frac{3}{4}(\mathrm{AB\Gamma})\ \text{, από (α.iii)}$$

Επομένως δεν ισχύει $(\mathrm{A\Delta E})=\frac{3}{4}(\mathrm{AB\Gamma})$.

22369

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 8$, $B\Gamma = 7$ και $\widehat{A} = 60°$.

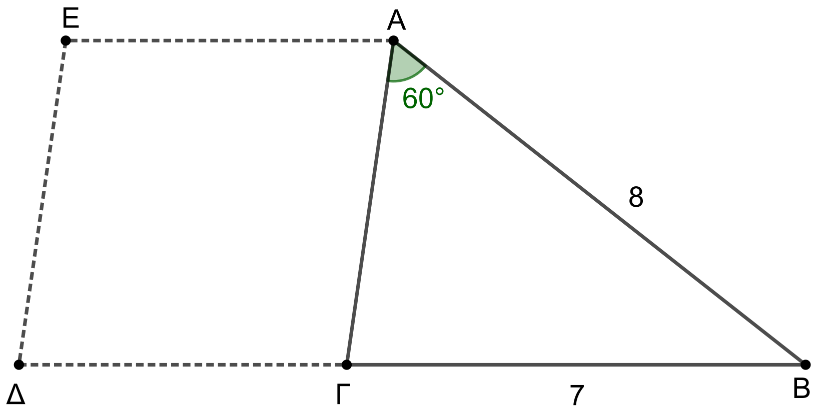
α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 3$ ή $A\Gamma = 5$. (Μονάδες 6)

β) Έστω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο όπως στο παρακάτω σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 5$. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι $(AB\Gamma) = 10\sqrt{3}$. (Μονάδες 6)

iii. Προεκτείνουμε τη ΒΓ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = A\Gamma$ και σχηματίζουμε τον ρόμβο ΑΓΔΕ. Να βρείτε το εμβαδόν του ρόμβου ΑΓΔΕ . (Μονάδες 7)



22369-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\text{ΑΒ} = 8$, $\text{ΒΓ} = 7$ και $\widehat{\text{Α}} = 60°$, οπότε από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε

$\text{ΒΓ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 - 2\text{ΑΒ} \cdot \text{ΑΓ} \cdot \text{συν}\,\text{Α}$

$7^2 = 8^2 + \text{ΑΓ}^2 - 2 \cdot 8 \cdot \text{ΑΓ} \cdot \text{συν}\,60°$

$49 = 64 + \text{ΑΓ}^2 - 16 \cdot \text{ΑΓ} \cdot \frac{1}{2}$

$\text{ΑΓ}^2 - 8 \cdot \text{ΑΓ} + 15 = 0$

$\text{ΑΓ} = 3$ ή $\text{ΑΓ} = 5$.

β) i) Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\text{ΑΒ} = 8$, $\text{ΒΓ} = 7$ και $\text{ΑΓ} = 3$ ή $\text{ΑΓ} = 5$, άρα η μεγαλύτερη πλευρά του είναι η $\text{ΑΒ} = 8$, οπότε $\text{ΑΒ}^2 = 8^2 = 64$.

Αν $\text{ΑΓ} = 3$ θα είναι $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΒΓ}^2 = 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$, οπότε

$\text{ΑΒ}^2 > \text{ΑΓ}^2 + \text{ΒΓ}^2$, άρα $\widehat{\Gamma} > 90°$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο, άτοπο.

Αν $\text{ΑΓ} = 5$ θα είναι $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΒΓ}^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$, οπότε

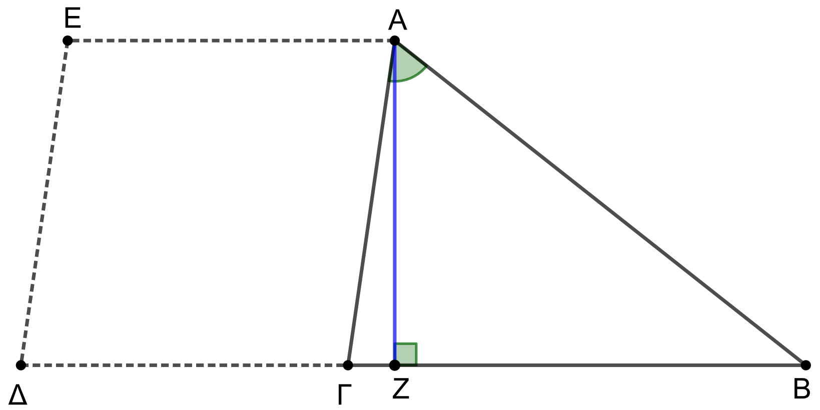
$\text{ΑΒ}^2 < \text{ΑΓ}^2 + \text{ΒΓ}^2$, άρα $\widehat{\Gamma} < 90°$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

Επομένως $\text{ΑΓ} = 5$.

ii) Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\text{ΑΒ} = 8$, $\text{ΑΓ} = 5$ και $\widehat{\text{Α}} = 60°$, οπότε από τον τριγωνομετρικό τύπο του εμβαδού έχουμε

$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2} \cdot \text{ΑΓ} \cdot \text{ΑΒ} \cdot \text{ημ}\,\text{Α} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \text{ημ}\,60° = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

iii) Έστω ΑΖ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή Α. Τότε αυτό θα είναι ύψος και του ρόμβου ΑΓΔΕ με αντίστοιχη βάση την ΓΔ . Είναι $\text{ΓΔ} = \text{ΑΓ} = 5$ επειδή το ΑΓΔΕ είναι ρόμβος.



Από το (β ii) είναι $(\text{ΑΒΓ}) = 10\sqrt{3}$. Επειδή $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2} \cdot \text{ΒΓ} \cdot \text{ΑΖ}$ και $\text{ΒΓ} = 7$, θα έχουμε

22369-Λύση

$\frac{1}{2} \cdot \text{ΒΓ} \cdot \text{ΑΖ} = 10\sqrt{3}$

$\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \text{ΑΖ} = 10\sqrt{3}$

$\text{ΑΖ} = \frac{20\sqrt{3}}{7}$.

Επομένως το εμβαδόν του ρόμβου ΑΓΔΕ είναι

$(\text{ΑΓΔΕ}) = \text{ΓΔ} \cdot \text{ΑΖ} = 5 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{7} = \frac{100\sqrt{3}}{7}$.

22375

ΘΕΜΑ 4

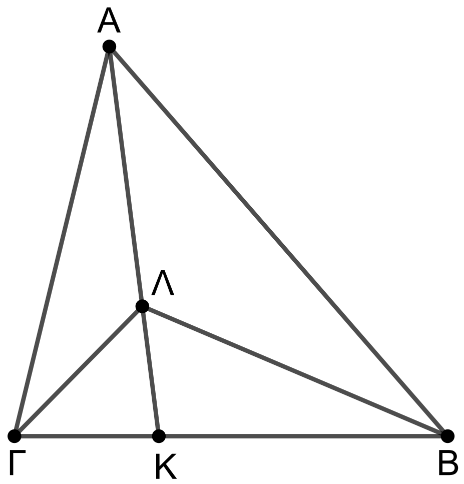
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Κ ώστε $ΚΒ = 2ΚΓ$ και στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΚ παίρνουμε σημείο Λ ώστε $ΛΑ = 2ΛΚ$. Έστω $Ε_1$, $Ε_2$, $Ε_3$ και $Ε_4$ τα εμβαδά των τριγώνων ΑΛΓ , ΓΛΚ , ΒΛΚ και ΑΛΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{Ε_1}{Ε_2} = 2$ και $\frac{Ε_4}{Ε_3} = 2$. (Μονάδες 10)

ii. $Ε_1 = Ε_3$. (Μονάδες 8)

β) Αν $Ε_1 = 10$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)



22375-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Δίνεται $ΛΑ = 2ΛΚ$.

Στα τρίγωνα $ΑΛΓ$ και $ΓΛΚ$, οι γωνίες $Α\widehat{Λ}Γ$ και $Γ\widehat{Λ}Κ$ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως

$\frac{Ε_1}{Ε_2} = \frac{ΛΓ \cdot ΛΑ}{ΛΓ \cdot ΛΚ} = \frac{ΛΑ}{ΛΚ} = \frac{2ΛΚ}{ΛΚ} = 2$ ή $\frac{Ε_1}{Ε_2} = 2$ (1) .

Στα τρίγωνα $ΑΛΒ$ και $ΒΛΚ$, οι γωνίες $Α\widehat{Λ}Β$ και $Β\widehat{Λ}Κ$ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως

$\frac{Ε_4}{Ε_3} = \frac{ΛΒ \cdot ΛΑ}{ΛΒ \cdot ΛΚ} = \frac{ΛΑ}{ΛΚ} = \frac{2ΛΚ}{ΛΚ} = 2$ ή $\frac{Ε_4}{Ε_3} = 2$ (2) .

ii) Δίνεται $ΚΒ = 2ΚΓ$.

Στα τρίγωνα $ΒΛΚ$ και $ΓΛΚ$ οι γωνίες $Λ\widehat{Κ}Β$ και $Λ\widehat{Κ}Γ$ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως

$\frac{Ε_3}{Ε_2} = \frac{ΚΛ \cdot ΚΒ}{ΚΛ \cdot ΚΓ} = \frac{ΚΒ}{ΚΓ} = \frac{2ΚΓ}{ΚΓ} = 2$ ή $\frac{Ε_3}{Ε_2} = 2$ (3) .

Από τις (1) και (3) έχουμε

$\frac{Ε_1}{Ε_2} = \frac{Ε_3}{Ε_2}$, οπότε $Ε_1 = Ε_3$ (4) .

β) Δίνεται $Ε_1 = 10$.

Από την (1) έχουμε

$\frac{Ε_1}{Ε_2} = 2$ ή $\frac{10}{Ε_2} = 2$ ή $Ε_2 = 5$.

Από την (4) έχουμε

$Ε_3 = Ε_1$ ή $Ε_3 = 10$.

Από την (2) έχουμε

$\frac{Ε_4}{Ε_3} = 2$ ή $\frac{Ε_4}{10} = 2$ ή $Ε_4 = 20$.

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$(ΑΒΓ) = Ε_1 + Ε_2 + Ε_3 + Ε_4$ ή $(ΑΒΓ) = 10 + 5 + 10 + 20 = 45.$

22380

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $\widehat{Β} = \widehat{Γ} = 90°$ και $ΒΓ = 16$, $ΓΔ = 22$ και $ΑΔ = 20$. Έστω $Κ$ η προβολή του σημείου $Α$ πάνω στην ευθεία $ΓΔ$ και $Λ$ η προβολή του σημείου $Β$ πάνω στη ευθεία $ΑΔ$.

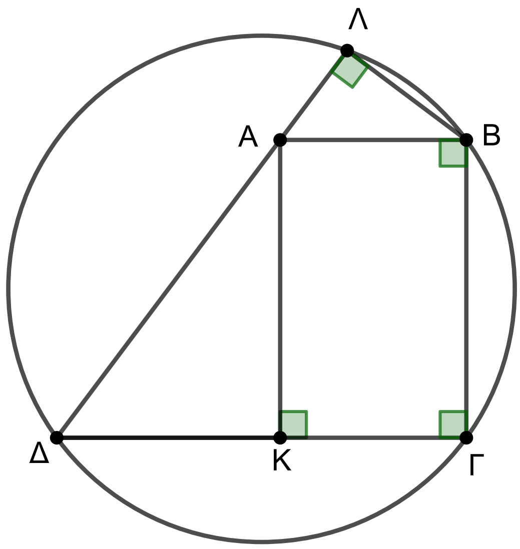
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΚΔ = 12$, (Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΚΔ$ είναι 96 . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΚΔ$ και $ΒΛΑ$ είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $ΒΛΑ$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέτρου του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $ΒΓΔΛ$. (Μονάδες 5)



22380-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Το τετράπλευρο $\mathrm{ΑΒΓΚ}$ είναι ορθογώνιο αφού έχει τρεις ορθές γωνίες, άρα

$\mathrm{ΑΚ} = \mathrm{ΒΓ} = 16$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{ΑΚΔ}$ $\left(\mathrm{Α}\widehat{\mathrm{Κ}}\mathrm{Δ} = 90°\right)$, έχουμε

$\mathrm{ΚΔ}^2 = \mathrm{ΑΔ}^2 - \mathrm{ΑΚ}^2$

$\mathrm{ΚΔ}^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144 = 12^2$

$\mathrm{ΚΔ} = 12$.

ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $\mathrm{ΑΚΔ}$ είναι

$(\mathrm{ΑΚΔ}) = \frac{1}{2}\mathrm{ΚΔ} \cdot \mathrm{ΑΚ} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$.

β) Τα τρίγωνα $\mathrm{ΑΚΔ}$ και $\mathrm{ΒΛΑ}$ είναι ορθογώνια $\left(\mathrm{Α}\widehat{\mathrm{Κ}}\mathrm{Δ} = \mathrm{Β}\widehat{\mathrm{Λ}}\mathrm{Α} = 90°\right)$ και έχουν

$\widehat{\mathrm{Δ}} = \mathrm{Λ}\widehat{\mathrm{Α}}\mathrm{Β}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων $\mathrm{ΑΒ}$ και $\mathrm{ΔΓ}$ που τέμνονται από την $\mathrm{ΛΔ}$. Άρα τα τρίγωνα $\mathrm{ΑΚΔ}$ και $\mathrm{ΒΛΑ}$ είναι όμοια.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων $\mathrm{ΑΚΔ}$ και $\mathrm{ΒΛΑ}$ είναι

$\lambda = \frac{\mathrm{ΑΔ}}{\mathrm{ΒΑ}}$ ή $\lambda = \frac{20}{10}$ ή $\lambda = 2$,

αφού $\mathrm{ΒΑ} = \mathrm{ΚΓ}$ από το ορθογώνιο $\mathrm{ΑΒΓΚ}$ και $\mathrm{ΚΓ} = \mathrm{ΓΔ} - \mathrm{ΚΔ} = 22 - 12 = 10$.

Επειδή τα τρίγωνα $\mathrm{ΑΚΔ}$ και $\mathrm{ΒΛΑ}$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = 2$, ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $\mathrm{ΑΚΔ}$ και $\mathrm{ΒΛΑ}$ ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, άρα

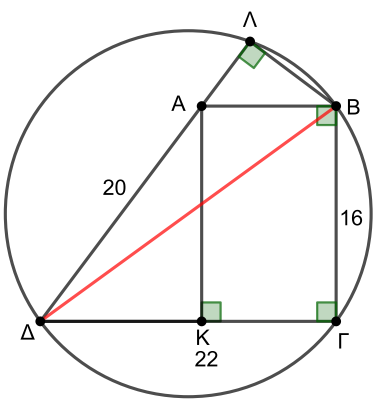
$$\frac{(\mathrm{ΑΚΔ})}{(\mathrm{ΒΛΑ})} = \lambda^2$$

$$\frac{96}{(\mathrm{ΒΛΑ})} = 2^2$$

$$(\mathrm{ΒΛΑ}) = \frac{96}{4}$$

$$(\mathrm{ΒΛΑ}) = 24.$$

γ) Φέρνουμε τη $\mathrm{ΒΔ}$, η οποία είναι διάμετρος του παραπάνω κύκλου, αφού $\mathrm{Β}\widehat{\mathrm{Γ}}\mathrm{Δ} = 90°$.



22380-Λύση

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ $\left(\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta = 90°\right)$, έχουμε

$\mathrm{B}\Delta^2 = \mathrm{B}\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$

$\mathrm{B}\Delta^2 = 16^2 + 22^2 = 256 + 484 = 740 = 4 \cdot 185$

$\mathrm{B}\Delta = 2\sqrt{185}$.

Επομένως η διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΒΓΔΛ έχει μήκος $2\sqrt{185}$.

22389

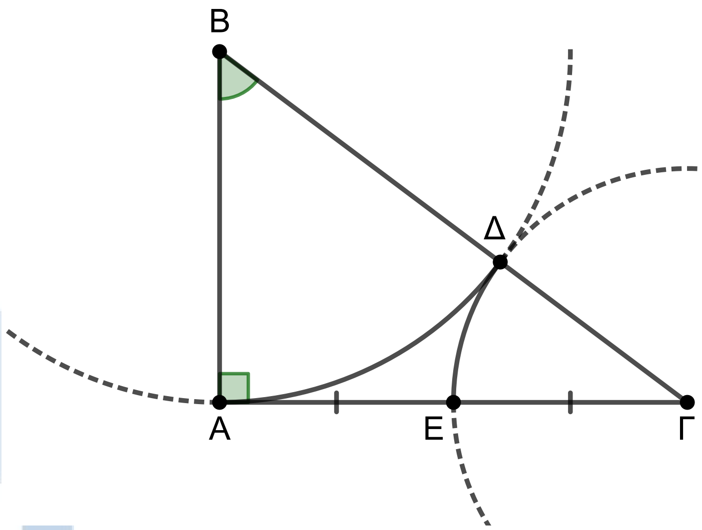
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90°$. Με κέντρο το σημείο Β και ακτίνα $R = BA$ γράφουμε τον κύκλο (B, R) ο οποίος τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ. Με κέντρο το σημείο Γ και ακτίνα $\rho = \Gamma\Delta$ γράφουμε τον κύκλο (Γ, ρ) ο οποίος τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Έστω ότι το Ε είναι το μέσο της ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $\rho = \frac{2}{3}R$. (Μονάδες 8)

β) Έστω E_1 το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ και E_2 το εμβαδόν του κύκλου (B, R). Να αποδείξετε ότι $\frac{E_2}{E_1} = \frac{3\pi}{2}$. (Μονάδες 8)

γ) Έστω $\widehat{B} = \mu°$ και E_3 και E_4 είναι το εμβαδά των κυκλικών τομέων $B\widehat{A\Delta}$ και $\Gamma\widehat{\Delta E}$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\frac{E_4}{E_3} = \frac{4(90-\mu)}{9\mu}$. (Μονάδες 9)



22389-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι $ΒΑ = ΒΔ = R$ και $ΓΔ = ΓΕ = ρ$.

Επειδή το $Ε$ είναι το μέσο της $ΑΓ$, είναι $ΑΓ = 2ΓΕ = 2ρ$.

Επίσης είναι $ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ = R + ρ$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\widehat{Α} = 90°$) έχουμε

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$

$(R + ρ)^2 = R^2 + (2ρ)^2$

$R^2 + 2Rρ + ρ^2 = R^2 + 4ρ^2$

$2Rρ = 3ρ^2$

$ρ = \frac{2}{3}R$.

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι

$E_1 = \frac{1}{2}ΑΓ \cdot ΑΒ = \frac{1}{2} \cdot 2ρ \cdot R = \frac{2}{3}R \cdot R = \frac{2}{3}R^2$

και του κύκλου $(Β, R)$, $E_2 = πR^2$, άρα

$\frac{E_2}{E_1} = \frac{πR^2}{\frac{2}{3}R^2} = \frac{3π}{2}$.

γ) Ο κυκλικός τομέας $Β\,\widehat{ΑΔ}$ είναι ακτίνας R και γωνίας $\widehat{Β} = μ°$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$E_3 = \frac{πR^2μ}{360}$.

Ο κυκλικός τομέας $Γ\,\widehat{ΔΕ}$ είναι ακτίνας $ρ = \frac{2}{3}R$ και γωνίας $\widehat{Γ} = 90° - μ°$, οπότε το εμβαδόν του είναι

$E_4 = \frac{πρ^2(90-μ)}{360} = \frac{4πR^2(90-μ)}{9 \cdot 360}$.

Άρα

$\frac{E_4}{E_3} = \frac{4πR^2(90-μ) \cdot 360}{9 \cdot 360 \cdot πR^2μ} = \frac{4(90-μ)}{9μ}$.

22396

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$ και έστω Δ η προβολή του σημείου B πάνω στην ευθεία $\mathrm{A\Gamma}$. Έστω $\mathrm{A\Delta} = 3$ και $\Delta\Gamma = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\mathrm{B\Delta} = 4$. (Μονάδες 6)

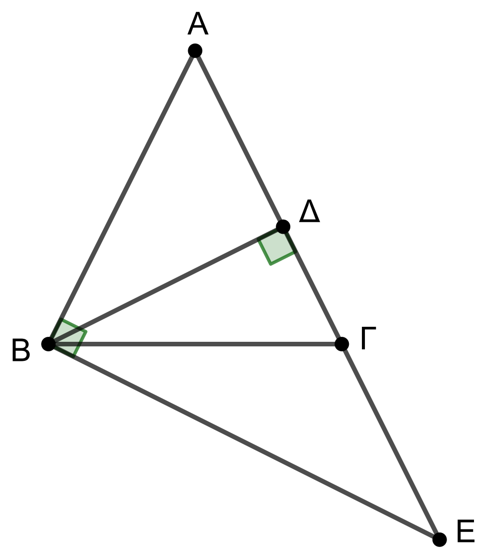
ii. $(\mathrm{AB\Gamma}) = 10$. (Μονάδες 6)

β) Έστω ότι η κάθετη της AB στο σημείο B, τέμνει την προέκταση της $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο E.

Να βρείτε:

i. Το μήκος του $\Delta\mathrm{E}$. (Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{B\Gamma E}$. (Μονάδες 7)



22396-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ορθογώνιο με $\widehat{\Delta} = 90°$,

$\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A\Delta} + \Delta\Gamma = 3 + 2 = 5$

και $\mathrm{A\Delta} = 3$.

Επομένως από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουμε

$\mathrm{B\Delta}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{A\Delta}^2$

$\mathrm{B\Delta}^2 = 5^2 - 3^2$

$\mathrm{B\Delta}^2 = 16$

$\mathrm{B\Delta} = 4$.

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{B\Delta}}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10 \ .$$

β) i) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ορθογώνιο με $\mathrm{A\widehat{B}E} = 90°$, άρα για το ύψος του ΒΔ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΑΕ , θα έχουμε

$\mathrm{B\Delta}^2 = \Delta\mathrm{A} \cdot \Delta\mathrm{E}$

$4^2 = 3 \cdot \Delta\mathrm{E}$

$\Delta\mathrm{E} = \frac{16}{3}$.

ii) Είναι $\Gamma\mathrm{E} = \Delta\mathrm{E} - \Delta\Gamma = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΕ είναι

$$(\mathrm{B\Gamma E}) = \frac{\Gamma\mathrm{E}\cdot\mathrm{B\Delta}}{2} = \frac{\frac{10}{3}\cdot 4}{2} = \frac{20}{3} .$$

22404

ΘΕΜΑ 4

Το σημείο Μ διαιρεί εσωτερικά την πλευρά ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ σε λόγο $\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΓ}}$ και το σημείο Ν διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ σε λόγο $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΝΜ}}$.

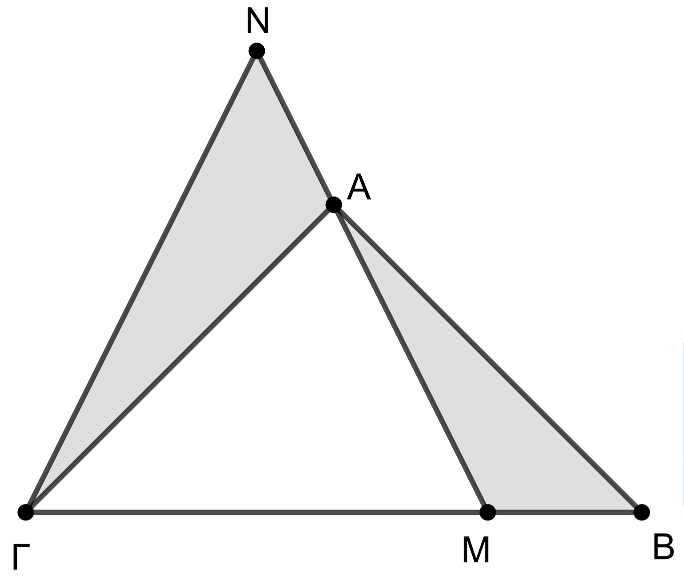
α) Έστω $\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΓ}} = \frac{1}{3}$ και $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΝΜ}} = \frac{1}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{(\text{ΑΜΒ})}{(\text{ΑΜΓ})} = \frac{1}{3}$. (Μονάδες 7)

ii. $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΑΜ}} = \frac{1}{3}$. (Μονάδες 6)

iii. $(\text{ΑΜΒ}) = (\text{ΑΝΓ})$. (Μονάδες 6)

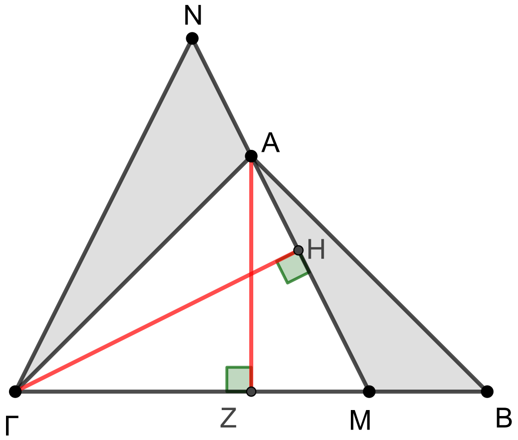
β) Έστω $\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΓ}} = 1$ και $(\text{ΑΜΒ}) = (\text{ΑΝΓ})$. Να βρείτε τον λόγο $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΝΜ}}$ στον οποίο το σημείο Ν διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ. (Μονάδες 6)



22404-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



i. Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Α, το ΑΖ, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

Άρα $\frac{(\mathrm{AMB})}{(\mathrm{AM\Gamma})} = \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{M\Gamma}} = \frac{1}{3}$.

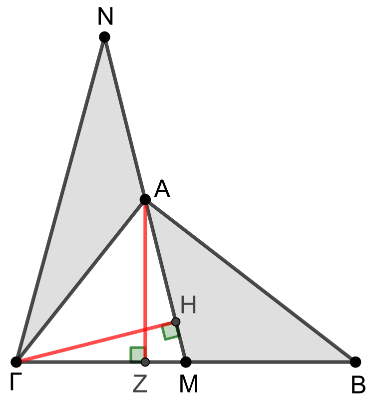
ii. Είναι $\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NM}} = \frac{1}{4}$, άρα $\mathrm{NM} = 4\mathrm{NA}$ ή $\mathrm{NA} + \mathrm{AM} = 4\mathrm{NA}$ ή $\mathrm{AM} = 3\mathrm{NA}$ ή $\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{AM}} = \frac{1}{3}$.

Εναλλακτικά: $\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NM}} = \frac{1}{4}$ ή $\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NM}-\mathrm{NA}} = \frac{1}{4-1}$ ή $\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{AM}} = \frac{1}{3}$.

iii. Τα τρίγωνα ΑΝΓ και ΑΜΓ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Γ, το ΓΗ, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων. Άρα $\frac{(\mathrm{AN\Gamma})}{(\mathrm{AM\Gamma})} = \frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{AM}} = \frac{1}{3}$.

Επίσης από το α) i) είναι $\frac{(\mathrm{AMB})}{(\mathrm{AM\Gamma})} = \frac{1}{3}$, οπότε $\frac{(\mathrm{AMB})}{(\mathrm{AM\Gamma})} = \frac{(\mathrm{AN\Gamma})}{(\mathrm{AM\Gamma})}$ ή $(\mathrm{AMB}) = (\mathrm{AN\Gamma})$.

β) Είναι $\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{M\Gamma}} = 1$, άρα το Μ είναι το μέσο της ΒΓ, οπότε $(\mathrm{AMB}) = (\mathrm{AM\Gamma})$, αφού έχουν ίσες βάσεις $\mathrm{MB} = \mathrm{M\Gamma}$ και το ίδιο ύψος ΑΖ. Όμως δίνεται $(\mathrm{AMB}) = (\mathrm{AN\Gamma})$, άρα $(\mathrm{AM\Gamma}) = (\mathrm{AN\Gamma})$ και αφού έχουν το ίδιο ύψος ΓΗ, θα έχουν ίσες τις αντίστοιχες βάσεις $\mathrm{NA} = \mathrm{AM}$. Επομένως το Α είναι το μέσο του ΝΜ άρα $\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NM}} = \frac{1}{2}$.



22406

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα η ΒΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και επίσης είναι $ΒΓ = 2ΑΒ$.

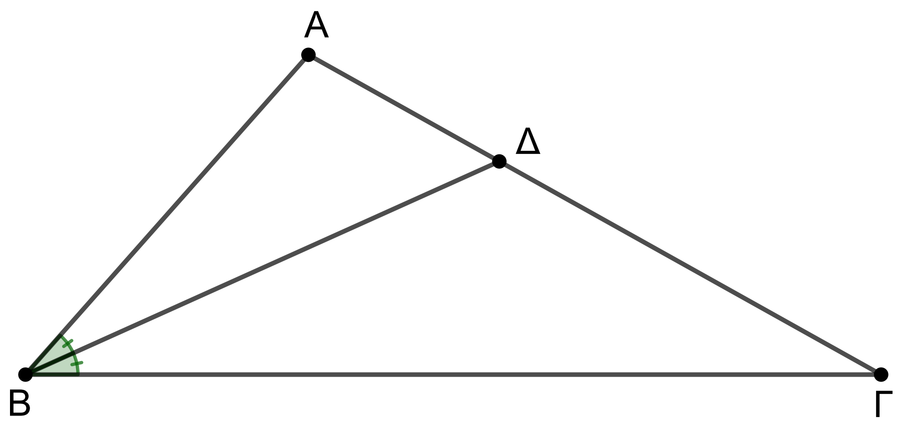
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΔ. (Μονάδες 6)

β) Να χωρίσετε το τρίγωνο ΑΒΓ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα. (Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι $ΑΒ = 12$ και $ημ\,Β = \frac{3}{4}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 108. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων ΔΒΓ και ΑΒΔ. (Μονάδες 6)



22406-Λύση

ΛΥΣΗ

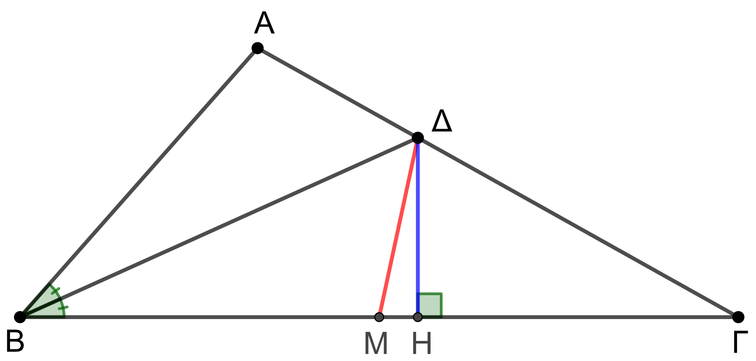
α) Στα τρίγωνα ΔΒΓ και ΑΒΔ, οι γωνίες $\Delta\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{B}\Delta$ είναι ίσες, αφού η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα

$$\frac{(\Delta B\Gamma)}{(AB\Delta)} = \frac{B\Delta \cdot B\Gamma}{B\Delta \cdot BA} = \frac{B\Gamma}{BA} = \frac{2BA}{BA} = 2 \text{, άρα } (\Delta B\Gamma) = 2(AB\Delta).$$

β) Έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Τότε η διάμεσος ΔΜ του τριγώνου ΔΒΓ το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΜΓ, αφού αυτά έχουν ίσες βάσεις $MB = M\Gamma$ και κοινό ύψος το ΔΗ από την κορυφή Δ. Επομένως θα έχουμε

$(\Delta MB) = (\Delta M\Gamma) = \frac{1}{2}(\Delta B\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 2(AB\Delta) = (AB\Delta)$, άρα

$(AB\Delta) = (\Delta MB) = (\Delta M\Gamma)$.



γ)

i. Είναι $AB = 12$, $B\Gamma = 2AB = 2 \cdot 12 = 24$ και $\eta\mu B = \frac{3}{4}$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot BA \cdot \eta\mu B$

ή $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 \cdot \frac{3}{4}$ ή $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 \cdot \frac{3}{4} = 108$ ή $(AB\Gamma) = 108$.

ii. Στο α) ερώτημα βρήκαμε ότι $(\Delta B\Gamma) = 2(AB\Delta)$ και στο γ) i) $(AB\Gamma) = 108$.

Όμως $(\Delta B\Gamma) + (AB\Delta) = (AB\Gamma)$, άρα $2(AB\Delta) + (AB\Delta) = (AB\Gamma)$ ή $3(AB\Delta) = 108$ ή $(AB\Delta) = 36$.

Επίσης θα είναι $(\Delta B\Gamma) = 2 \cdot 36 = 72$.

22407

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα η ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και η ΑΚ είναι η προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ευθεία ΑΒ. Δίνονται $AB = 10, A\Gamma = 15$ και $AK = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι:

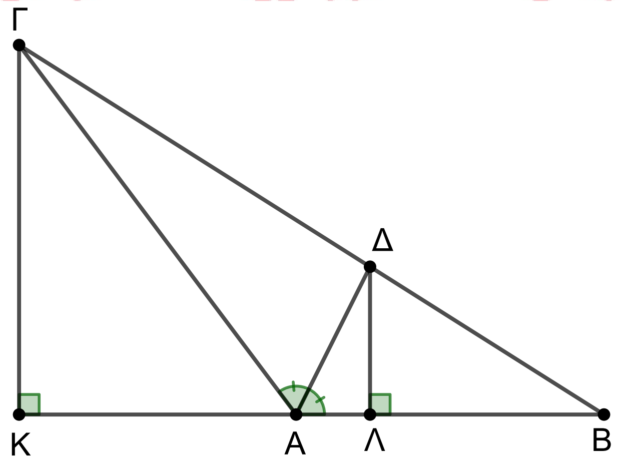
i. $\Gamma K = 12$ και $(AB\Gamma) = 60$. (Μονάδες 8)

ii. $(A\Delta B) = 24$ και $(A\Delta\Gamma) = 36$. (Μονάδες 10)

β) Έστω Λ η προβολή του σημείου Δ πάνω στην ευθεία ΑΒ.

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{\Delta\Lambda}{\Gamma K} = \frac{2}{5}$. (Μονάδες 3)

ii. Να βρείτε τον λόγο $\frac{\Lambda B}{\Lambda K}$ στον οποίο το σημείο Λ διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΒΚ. (Μονάδες 4)



22407-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ ($\widehat{\mathrm{K}} = 90°$), είναι $\mathrm{ΑΓ} = 15$ και $\mathrm{ΑΚ} = 9$,
οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$\mathrm{ΓΚ}^2 = \mathrm{ΑΓ}^2 - \mathrm{ΑΚ}^2 \text{ ή } \mathrm{ΓΚ}^2 = 15^2 - 9^2 \text{ ή } \mathrm{ΓΚ}^2 = 144 \text{ ή } \mathrm{ΓΚ}^2 = 12^2 \text{ ή } \mathrm{ΓΚ} = 12.$$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$(\mathrm{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\mathrm{ΑΒ} \cdot \mathrm{ΓΚ} \text{ ή } (\mathrm{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \text{ ή } (\mathrm{ΑΒΓ}) = 60.$$

ii. Στα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ, οι γωνίες $\mathrm{Δ}\widehat{\mathrm{Α}}\mathrm{Β}$ και $\mathrm{Δ}\widehat{\mathrm{Α}}\mathrm{Γ}$ είναι ίσες, αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{Α}}$ του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα

$$\frac{(\mathrm{ΑΔΒ})}{(\mathrm{ΑΔΓ})} = \frac{\mathrm{ΑΔ} \cdot \mathrm{ΑΒ}}{\mathrm{ΑΔ} \cdot \mathrm{ΑΓ}} = \frac{\mathrm{ΑΒ}}{\mathrm{ΑΓ}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \text{ άρα } (\mathrm{ΑΔΒ}) = \frac{2}{3}(\mathrm{ΑΔΓ}).$$

Στο ερώτημα α) i) βρήκαμε ότι $(\mathrm{ΑΒΓ}) = 60$ και επειδή $(\mathrm{ΑΔΒ}) + (\mathrm{ΑΔΓ}) = (\mathrm{ΑΒΓ})$,
έχουμε $\frac{2}{3}(\mathrm{ΑΔΓ}) + (\mathrm{ΑΔΓ}) = 60$ ή $5(\mathrm{ΑΔΓ}) = 180$ ή $(\mathrm{ΑΔΓ}) = 36$.

Επίσης θα είναι $(\mathrm{ΑΔΒ}) = \frac{2}{3}(\mathrm{ΑΔΓ})$ $(\mathrm{ΑΔΒ}) = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24$.

β)

i. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΒΓ έχουν κοινή βάση την ΑΒ και αντίστοιχα ύψη ΔΛ και ΓΚ, άρα ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών.
Στο (α) ερώτημα βρήκαμε $(\mathrm{ΑΒΓ}) = 60$ και $(\mathrm{ΑΔΒ}) = 24$, επομένως έχουμε

$$\frac{(\mathrm{ΑΔΒ})}{(\mathrm{ΑΒΓ})} = \frac{\mathrm{ΔΛ}}{\mathrm{ΓΚ}} \text{ ή } \frac{24}{60} = \frac{\mathrm{ΔΛ}}{\mathrm{ΓΚ}} \text{ ή } \frac{\mathrm{ΔΛ}}{\mathrm{ΓΚ}} = \frac{2}{5}.$$

ii. Οι ευθείες ΔΛ και ΓΚ είναι παράλληλες, ως κάθετες στην ευθεία ΑΒ. Επομένως τα τρίγωνα ΔΛΒ και ΓΚΒ έχουν πλευρές ανάλογες, άρα έχουμε

$$\frac{\mathrm{ΛΒ}}{\mathrm{ΚΒ}} = \frac{\mathrm{ΔΛ}}{\mathrm{ΓΚ}} \text{ ή } \frac{\mathrm{ΛΒ}}{\mathrm{ΚΒ}} = \frac{2}{5} \text{ ή } \frac{\mathrm{ΛΒ}}{\mathrm{ΚΒ} - \mathrm{ΛΒ}} = \frac{2}{5-2} \text{ ή } \frac{\mathrm{ΛΒ}}{\mathrm{ΛΚ}} = \frac{2}{3}.$$

22509

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2α και ΑΔ = α. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Μ με ΜΒ = x και στην προέκταση της ΑΔ σημείο Ν με ΔΝ = 2x.

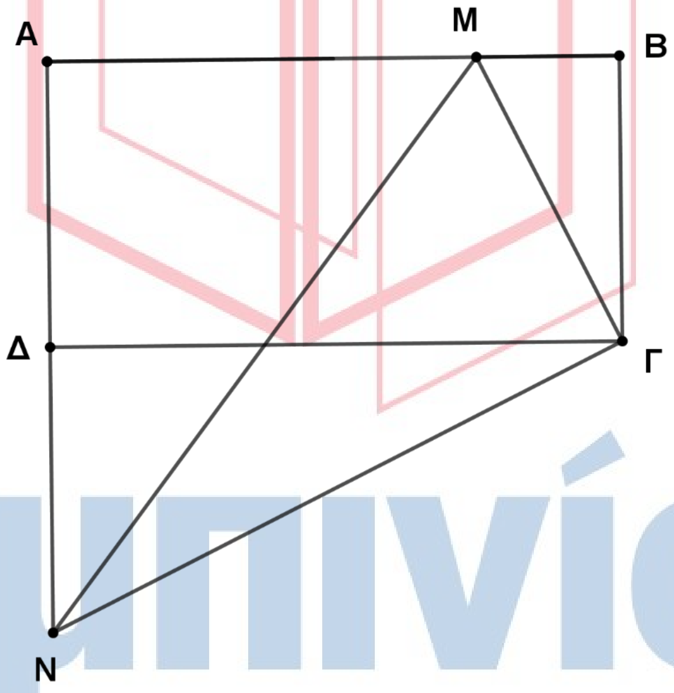
α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση των α, x τα $ΜΓ^2$, $ΝΓ^2$ και $ΜΝ^2$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε συναρτήσει των α, x τα εμβαδά των τριγώνων ΑΜΝ και ΓΜΝ.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ, πάνω στην ΑΒ ώστε τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΓΜΝ να είναι ισεμβαδικά. (Μονάδες 5)



22509-Λύση

ΛΥΣΗ

Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΒ = ΔΓ = 2α, ΑΔ = ΒΓ = α, ΜΒ = x και ΑΜ = $2\alpha - x$

α) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΜΒΓ έχουμε: $\text{ΜΓ}^2 = \text{ΜΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2 = \alpha^2 + \text{x}^2$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΝΓ έχουμε:

$\text{ΝΓ}^2 = \text{ΝΔ}^2 + \text{ΔΓ}^2 = (2\text{x})^2 + (2\alpha)^2 = 4\text{x}^2 + 4\alpha^2$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΝ έχουμε:

$\text{ΜΝ}^2 = \text{ΑΝ}^2 + \text{ΑΜ}^2 = (\alpha + 2\text{x})^2 + (2\alpha - \text{x})^2 = \alpha^2 + 4\text{x}^2 + 4\alpha\text{x} + 4\alpha^2 + \text{x}^2 - 4\alpha\text{x} =$

$5\alpha^2 + 5\text{x}^2$.

β) Από το α) έπεται $\text{ΜΓ}^2 + \text{ΓΝ}^2 = \alpha^2 + x^2 + 4x^2 + 4\alpha^2 = 5\alpha^2 + 5x^2 = \text{ΜΝ}^2$,

κατά συνέπεια το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΜΝ.

γ) Από τα δεδομένα και το ερώτημα α) τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΓΜΝ είναι ορθογώνια οπότε:

$(\text{ΑΜΝ}) = \frac{1}{2}\,\text{ΑΜ}\cdot\text{ΑΝ} = \frac{1}{2}\,(2a - x)(a + 2x) = \frac{1}{2}(2a^2 + 4ax - ax - 2x^2) =$

$\frac{1}{2}(2a^2 + 3ax - 2x^2)$.

$(\text{ΜΓΝ}) = \frac{1}{2}\,\text{ΜΓ}\cdot\text{ΓΝ} = \frac{1}{2}\,\sqrt{a^2 + x^2}\cdot\sqrt{4a^2 + 4x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4(a^2 + x^2)^2} = \frac{1}{2}\cdot 2\,(a^2 + x^2) =$

$a^2 + x^2$.

δ) Λόγω του ερωτήματος β) έχουμε:

$(\text{ΑΜΝ}) = (\text{ΜΝΓ}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\,(2a^2 + 3ax - 2x^2) = a^2 + x^2 \Leftrightarrow 2a^2 + 3ax - 2x^2 = 2a^2 + 2x^2$

$\Leftrightarrow 4x^2 = 3ax \overset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} x = \frac{3}{4}\,a$, οπότε ΑΜ = $\frac{3}{4}\,a$, άρα γνωστή η θέση του Μ.

22510

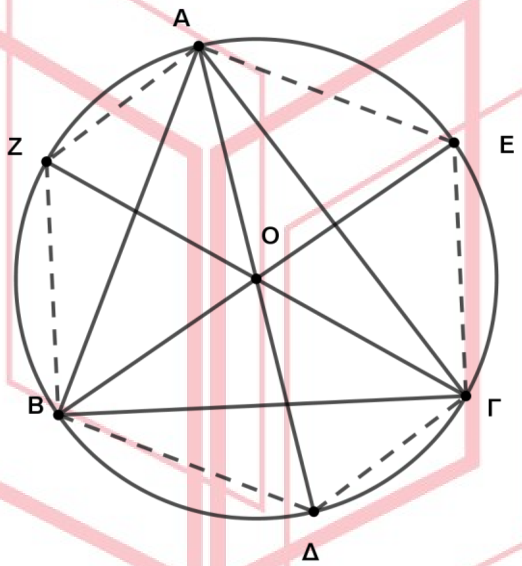
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Θεωρούμε τις διαμέτρους ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Να αποδείξετε ότι:

α) (ΑΟΒ) = (ΒΟΔ) και (ΑΟΓ) = (ΔΟΓ) (Μονάδες 8)

β) (ΒΔΓ) = (ΑΟΒ) + (ΑΟΓ) – (ΒΟΓ) (Μονάδες 8)

γ) (ΑΖΒΔΓΕ) = 2(ΑΒΓ) (Μονάδες 9)



22510-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΟ είναι διάμεσος, οπότε χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΔ σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα. Επομένως (ΑΟΒ) = (ΒΟΔ).

Ομοίως στο τρίγωνο ΑΓΔ η ΓΟ είναι διάμεσος, οπότε (ΑΟΓ) = (ΓΟΔ).

β) Από το α) ερώτημα έχουμε (ΑΟΒ) = (ΒΟΔ) (1)

και (ΑΟΓ) = (ΓΟΔ) (2).

Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη παίρνουμε (ΑΟΒ) + (ΑΟΓ) = (ΒΟΔ) + (ΓΟΔ), οπότε (ΑΟΒ) + (ΑΟΓ) = (ΒΟΓΔ).

Αφαιρώντας από τα δύο μέλη το (ΒΟΓ) έχουμε (ΑΟΒ) + (ΑΟΓ) –(ΒΟΓ) = (ΒΔΓ).

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε (ΑΟΒ) + (ΑΟΓ) –(ΒΟΓ) = (ΒΔΓ) (3).
Ομοίως αποδεικνύεται ότι (ΒΟΓ) + (ΑΟΒ) – (ΑΟΓ) = (ΓΕΑ) (4)

και (ΒΟΓ) + (ΑΟΓ) – (ΒΟΑ) = (ΑΖΒ) (5).
Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3), (4), (5) παίρνουμε (ΑΟΒ) + (ΒΟΓ) + (ΑΟΓ) = (ΔΒΓ) + (ΕΓΑ) + (ΖΑΒ), άρα (ΑΒΓ) = (ΒΔΓ) + (ΓΕΑ) + (ΑΖΒ).

Επομένως 2(ΑΒΓ) =(ΑΒΓ) + (ΔΒΓ) + (ΕΓΑ) + (ΖΑΒ) = (ΑΖΒΔΓΕ).

22511

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 2, ΑΓ = 3 και $\widehat{A} = 60^o$. Να υπολογίσετε:

α) το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 9)

β) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

γ) το ύψος $υ_α$. (Μονάδες 8)

22511-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 - 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{A\Gamma} \cdot \text{συν}\mathrm{A} = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 7,$$

επομένως $\mathrm{B\Gamma} = \sqrt{7}$.

β) Έχουμε $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{A\Gamma} \cdot \text{ημ}\mathrm{A} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

γ) Έχουμε $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \upsilon_\alpha$, άρα $\upsilon_\alpha = \frac{2(\mathrm{AB\Gamma})}{\alpha} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$.

22513

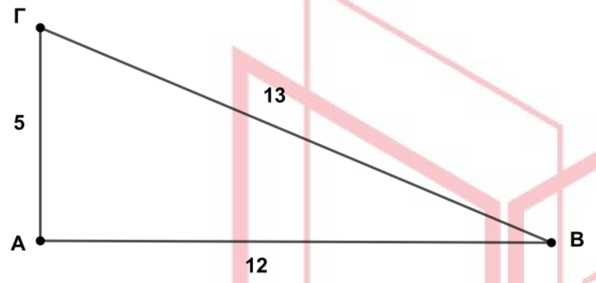
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 12, ΑΓ =5 και ΒΓ =13.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{A} = 90^o$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος υ_α . (Μονάδες 9)



22513-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, αρκεί να αποδείξουμε ότι $Β\Gamma^2 = Α\Gamma^2 + ΑΒ^2$.

Έχουμε $Β\Gamma^2 = 13^2 = 169$ και $Α\Gamma^2 + ΑΒ^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Άρα $Β\Gamma^2 = ΑΒ^2 + Α\Gamma^2$, οπότε $\hat{Α} = 90^o$.

β) Επειδή $\hat{Α} = 90^o$ έχουμε $(ΑΒ\Gamma) = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot Α\Gamma = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$.

γ) Ισχύει $(ΑΒ\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \upsilon_\alpha$, άρα $\upsilon_\alpha = \frac{(ΑΒ\Gamma)}{2\alpha} = \frac{2 \cdot 30}{13} = \frac{60}{13}$.

22568

ΘΕΜΑ 4

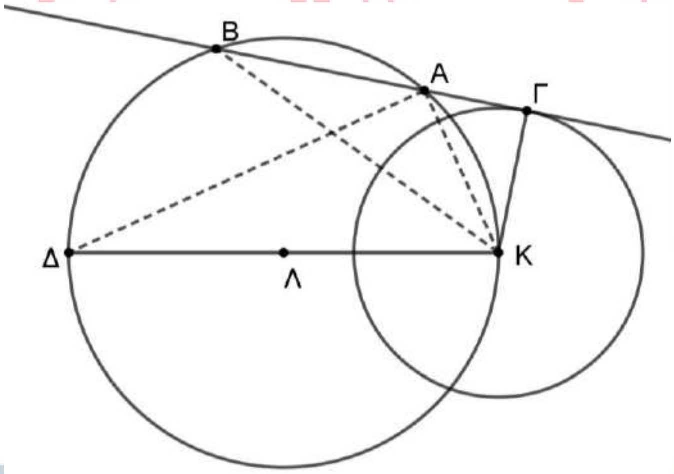
Δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο Λ και ακτίνα R=10, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο ενός άλλου κύκλου με κέντρο το σημείο Κ και ακτίνα ρ=6. Η εφαπτομένη του κύκλου (Κ,ρ) στο σημείο του Γ τέμνει τον κύκλο (Λ,R) στα σημεία Α και Β. Η προέκταση της ΚΛ προς το Λ τέμνει τον κύκλο (Λ,R) στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ είναι όμοια. (Μονάδες 8)

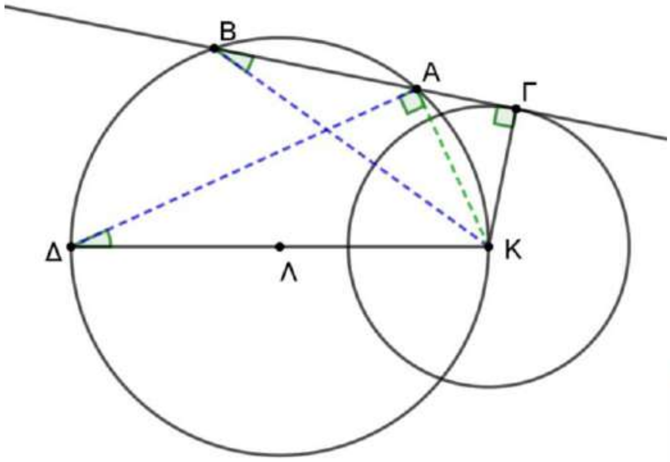
ii. ΚΑ·ΚΒ=120 (Μονάδες 9)

β) Αν είναι ΚΒ=15, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΚ. (Μονάδες 8)



22568-Λύση

ΛΥΣΗ



α)

i. Οι γωνίες $K\hat{B}\Gamma$ και $K\hat{\Delta}A$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες του κύκλου (Λ,R) που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΚΑ, άρα είναι ίσες. Η ευθεία ΓΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου (Κ,ρ) στο σημείο του Γ, επομένως η γωνία $K\hat{\Gamma}B$ είναι ορθή. Η ΚΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Λ,R) και η γωνία $K\hat{A}\Delta$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα είναι ορθή. Τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ έχουν $K\hat{\Gamma}B = K\hat{A}\Delta$ (ορθές) και $K\hat{B}\Gamma = K\hat{\Delta}A$, επομένως έχοντας δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια.

ii. Η ΚΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Λ,R), άρα ΚΔ=2·R=20 και η ΚΓ είναι ακτίνα του κύκλου (Κ,ρ), άρα ΚΓ=ρ=6. Εφόσον τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ είναι όμοια, έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή $\frac{K\Gamma}{KA}=\frac{KB}{K\Delta}=\frac{\Gamma B}{\Delta A}$. Από την ισότητα $\frac{K\Gamma}{KA}=\frac{KB}{K\Delta}$ έχουμε ότι $\frac{6}{KA}=\frac{KB}{20}$ ή $KA\cdot KB=120$.

β) Αφού είναι ΚΒ=15 και $KA\cdot KB=120$ τότε $15\cdot KA=120$, άρα ΚΑ=8. Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΚΑΓ έχουμε $K\Gamma^2+\Gamma A^2=KA^2$ ή $36+\Gamma A^2=64$ ή $\Gamma A^2=28$ ή $\Gamma A=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$.Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΓΚ είναι $(A\Gamma K)=\frac{K\Gamma\cdot AK}{2}=\frac{6\cdot 2\sqrt{7}}{2}=6\sqrt{7}$.