

Ερώτηση 1.

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, ποια σύνολα ονομάζουμε διαστήματα με άκρα τα α, β ;

Απάντηση:

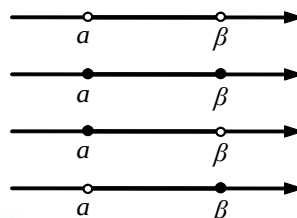
Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, τότε ονομάζουμε διαστήματα με άκρα τα α, β καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}$: ανοικτό διάστημα

$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$: κλειστό διάστημα

$[\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x < \beta\}$: κλειστό-ανοικτό διάστημα

$(\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \leq \beta\}$: ανοικτό-κλειστό διάστημα.

**Ερώτηση 2.**

Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, ποια σύνολα ονομάζουμε μη φραγμένα διαστήματα με άκρο το α ;

Απάντηση:

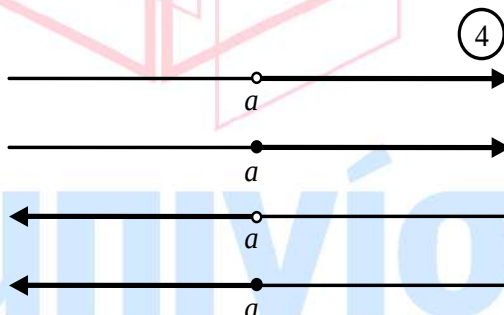
Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε ονομάζουμε μη φραγμένα διαστήματα με άκρο το α καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

$(\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \alpha\}$

$[\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \alpha\}$

$(-\infty, \alpha) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \alpha\}$

$(-\infty, \alpha] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \alpha\}$

**Ερώτηση 3.**

Ποια σημεία ενός διαστήματος Δ λέγονται εσωτερικά σημεία του Δ ;

Απάντηση:

Τα σημεία ενός διαστήματος Δ , που είναι διαφορετικά από τα άκρα του, λέγονται εσωτερικά σημεία του Δ .

Ερώτηση 4.

Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το A** και **τι ονομάζουμε τιμή της f στο $x \in A$** ;

Απάντηση:

Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Ερώτηση 5.

Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε **ανεξάρτητη μεταβλητή** και τι **εξαρτημένη μεταβλητή**;

Απάντηση:

Η μεταβλητή x , που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ η μεταβλητή y που παριστάνει την τιμή της f στο x λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Ερώτηση 6.

Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε **σύνολο τιμών της f** ;

Απάντηση:

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών της f** και συμβολίζεται με $f(A)$.

Είναι δηλαδή: $f(A) = \{y \in \mathbb{R} / y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$

Ερώτηση 7.

Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο B ;

Απάντηση:

Θα εννοούμε ότι το B είναι ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού A της f .

Ερώτηση 8.

Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και B ένα μη κενό υποσύνολο του A .

Τι συμβολίζουμε με $f(B)$;

Απάντηση:

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in B$, συμβολίζεται με $f(B)$.

Είναι δηλαδή: $f(B) = \{y \in \mathbb{R} / y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in B\}$

Ερώτηση 9.

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

Απάντηση:

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f .

Ερώτηση 10.

Ποια σχέση έχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, (-f)$;

Απάντηση:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f , γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$.

Ερώτηση 11.

Ποια σχέση έχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, |f|$;

Απάντηση:

Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

Ερώτηση 12.

Έστω οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$.

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g, f-g, f \cdot g$

Απάντηση:

Αν $A \cap B \neq \emptyset$ ορίζουμε ως **άθροισμα** $f+g$, **διαφορά** $f-g$, **γινόμενο** fg δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και fg είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g

Ερώτηση 13.

Έστω οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$.

Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$.

Απάντηση:

Αν $A_1 = \{x \mid x \in A \text{ και } x \in B, \text{ με } g(x) \neq 0\} \neq \emptyset$ τότε ορίζουμε ως **πηλίκο**

των f, g τη συνάρτηση με τύπο $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ και πεδίο ορισμού το A_1

Ερώτηση 14.

Πότε λέμε ότι δύο συναρτήσεις f, g ότι είναι ίσες;

Απάντηση:

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Ερώτηση 15.

Έστω οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$.

Πότε λέμε ότι οι δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες σε ένα υποσύνολο Γ των A και B ;

Απάντηση:

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των A και B . Αν για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι **ίσες στο σύνολο Γ** .

Ερώτηση 16.

Έστω οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$.

Τι ονομάζουμε σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g ;

Απάντηση:

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως και $f(A) \cap B \neq \emptyset$, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g** , και τη συμβολίζουμε με **$g \circ f$** , τη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$ και τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Ερώτηση 17.

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Τι ονομάζουμε σύνθεση των f, g, h ;

Απάντηση:

Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει $ho(gof) = (hog)of$. Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $hogof$.

Ερώτηση 18.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f

(α) είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

(β) είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f λέγεται

(α) **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$

(β) **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$

Ερώτηση 19.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f

(α) είναι **αύξουσα** στο διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

(β) είναι **φθίνουσα** στο διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f λέγεται

(α) **αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) \leq f(x_2)$

(β) **φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) \geq f(x_2)$

Ερώτηση 20.

Πότε λέμε : (α)ότι μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της

(β) ότι απλώς μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη

Απάντηση:

(α) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

(β) Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα Δ και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Ερώτηση 21.

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A

(α) Πότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$;

Απάντηση :

θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$

όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

(β) Πότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$;

Απάντηση :

θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$,

όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

(γ) Τι ονομάζουμε ολικά ακρότατα μιας συνάρτησης f ;

Απάντηση:

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται ολικά **ακρότατα** της f .

Ερώτηση 22.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1-1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ερώτηση 23.

Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι 1-1. Ποια συνάρτηση ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της f ;

Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι 1-1, τότε ονομάζουμε αντίστροφη συνάρτηση της f τη συνάρτηση $g: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$. Η g συμβολίζεται με f^{-1} .

Ερώτηση 24.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει **κοντά στο x_0** μια ιδιότητα P ;

Απάντηση:

Όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει **κοντά στο x_0** μια ιδιότητα P θα εννοούμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

α) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα P .

β) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0) , έχει σ' αυτό την ιδιότητα P , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0, β) .

γ) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β) , έχει σ' αυτό την ιδιότητα P , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α, x_0) .

Ερώτηση 25.

Να διατυπώσετε το Κριτήριο Παρεμβολής.

Απάντηση: Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$,

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Ερώτηση 26.

Να διατυπώσετε τα θεωρήματα ορίων και διάταξης.

Απάντηση:**ΘΕΩΡΗΜΑ 1°**

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

ΘΕΩΡΗΜΑ 2°

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Ερώτηση 27.

(α) Να δώσετε τον ορισμό της ακολουθίας (πραγματικών αριθμών).

(β) Πότε λέμε ότι η ακολουθία (a_n) έχει όριο το $l \in \mathbb{R}$;

Απάντηση: (α) **Ακολουθία** ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$.

(β) Θα λέμε ότι η ακολουθία (a_n) έχει όριο το $l \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει $|a_n - l| < \varepsilon$.

Ερώτηση 28.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0** , όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Ερώτηση 29.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Όταν:

α) δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

β) υπάρχει το όριό της στο x_0 , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0 .

Ερώτηση 30.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) του πεδίου ορισμού της**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) .

Ερώτηση 31.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$** ,

όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Ερώτηση 32.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής;

Απάντηση:

Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση**.

Ερώτηση 33.

Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του.

Απάντηση:

Θ.BOLZANO:

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

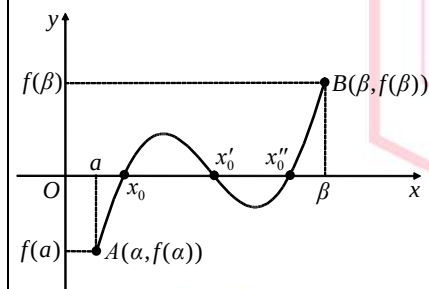
- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(a) \cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (a, β) ..

γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f που ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Bolzano στο $[a, \beta]$. Επειδή τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x' και η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα των x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο (a, β) .

**Ερώτηση 34.**

Να αναφέρετε τις συνέπειες του Θ. Bolzano.

Απάντηση:

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .

— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Ερώτηση 35.

Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.

Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και
- $f(a) \neq f(b)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta$$

Ερώτηση 36.

Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

Απάντηση:

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$, τότε η f παίρνει στο $[a, b]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Ερώτηση 37.

Έστω μια συνάρτηση f για την οποία υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ . Να δώσετε τον ορισμό της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$.

Απάντηση:

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .

Ερώτηση 38.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
Ερώτηση 39.

Έστω μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;

Τι ονομάζουμε κλίση της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;

Απάντηση:

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0 . Δηλαδή, είναι $\lambda = f'(x_0)$, οπότε η εξίσωση της ε φαπτομένης ε είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και κλίση της C_f στο A ή κλίση της f στο x_0 .

Ερώτηση 40.

Έστω μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Ποιος είναι ο συμβολισμός για την παράγωγο της f στο x_0

(α) του Leibniz (β) του Lagrange

Απάντηση:

(α) Ο Leibniz συμβολίζει την παράγωγο της f στο x_0 με $\frac{df(x_0)}{dx}$ ή $\frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0}$.

(β) Ο Lagrange συμβολίζει την παράγωγο της f στο x_0 με $f'(x_0)$

Ερώτηση 41.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f

(α) είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της A ή απλά παραγωγίσιμη

(β) είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της

(γ) είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της

Απάντηση:

(α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

(β) Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

(γ) Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}.$$

Ερώτηση 42.

Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πρώτη παράγωγο της f ή απλά παράγωγο της f ;

Απάντηση:

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} f': A_1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f'(x), \end{aligned}$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της f** ή απλά **παράγωγος της f** . Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται και με $\frac{df}{dx}$ που διαβάζεται “ντε εφ προς ντε χι”. Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση $y = f'(x)$ θα τη συμβολίζουμε και με $y = (f(x))'$.

Ερώτηση 43.

Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε δεύτερη παράγωγο της f και τι ονομάζουμε νιοστή παράγωγο της f ;

Απάντηση:

Αν υποθέσουμε ότι το πεδίο ορισμού A της f' είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f' , αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της f** και συμβολίζεται με f'' . Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος της f** , με $n \geq 3$, και συμβολίζεται με $f^{(n)}$. Δηλαδή

$$f^{(n)} = [f^{(n-1)}]', \quad n \geq 3.$$

Ερώτηση 44.

Τι ονομάζεται συνάρτηση θέσης, μέση ταχύτητα, στιγμιαία ταχύτητα ενός σώματος που κινείται κατά μήκος ενός άξονα.

Απάντηση:

• Ας θεωρήσουμε ένα σώμα που κινείται κατά μήκος ενός άξονα και ας υποθέσουμε ότι $s = s(t)$ είναι η τετμημένη του σώματος αυτού τη χρονική στιγμή t , $t \geq 0$.

Η συνάρτηση s καθορίζει τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t και ονομάζεται **συνάρτηση θέσης** του κινητού.

• Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι το κινητό κάποια χρονική στιγμή t_0 βρίσκεται στη θέση M_0 και ότι μετά από παρέλευση χρόνου h , δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = t_0 + h$, βρίσκεται στη θέση M , τότε η μετατόπιση του κινητού είναι ίση με $s(t) - s(t_0)$. Άρα, η **μέση ταχύτητα** του κινητού σ' αυτό το χρονικό διάστημα είναι

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρόνος}}$$

• Το όριο της μέσης ταχύτητας, καθώς το t τείνει στο t_0 , το ονομάζουμε **στιγμιαία ταχύτητα** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και τη συμβολίζουμε με $v(t_0)$. Δηλαδή:

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Άρα η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = s(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 .

Δηλαδή, είναι $v(t_0) = s'(t_0)$.

Ερώτηση 45.

Να διατυπώσετε τον κανόνα της αλυσίδας

Απάντηση:

Αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Δηλαδή, αν $u = g(x)$, τότε $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$.

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$,

έχουμε τον τύπο $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας**.

Ερώτηση 46.

Αν τα μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$, όπου f είναι μια συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τι ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής** του y ως προς x στο σημείο x_0 ;

Απάντηση:

Αν τα μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$, όπου f είναι μια συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0 , ονομάζουμε την παράγωγο $f'(x_0)$.

Ερώτηση 47.

Στην οικονομία το κόστος παραγωγής K , η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Τι ονομάζεται **οριακό κόστος**

στο x_0 , οριακή είσπραξη στο x_0 , οριακό κέρδος στο x_0 ;

Απάντηση:

Ο ρυθμός μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ λέγεται οριακό κόστος στο x_0

Ο ρυθμός μεταβολής της είσπραξης E ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ λέγεται οριακή είσπραξη στο x_0

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους P ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ λέγεται οριακό κέρδος στο x_0

Ερώτηση 48.

Έστω ένα κινητό που κινείται κατά μήκος ενός άξονα. Τι ονομάζεται **επιτάχυνση** αυτού του σώματος τη χρονική στιγμή t_0 ;

Απάντηση:

Ο ρυθμός μεταβολής της στιγμιαίας ταχύτητας u του κινητού ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 λέγεται επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $a(t_0)$.

Είναι δηλαδή

$a(t_0) = u'(t_0) = S''(t_0)$, όπου $S(t)$ η συνάρτηση θέσης του κινητού τη χρονική στιγμή t .

Ερώτηση 49.

Να διατυπώσετε και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θ. Rolle

Απάντηση:

Αν μια συνάρτηση f είναι

- συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο (a, β)
- $f(a) = f(\beta)$

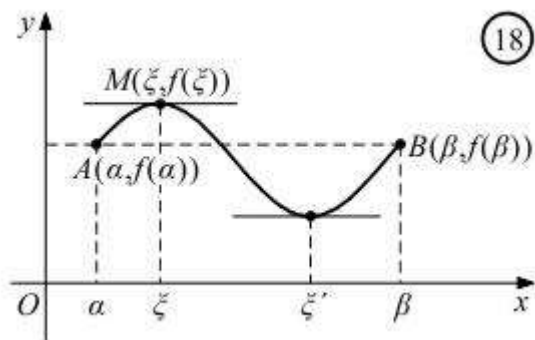
τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Γεωμετρική Ερμηνεία του Θ. Rolle

Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $[a, \beta]$,

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f

στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x



Ερώτηση 50.

Να διατυπώσετε και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

Απάντηση:

Αν μια συνάρτηση f είναι

- συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο (a, β)

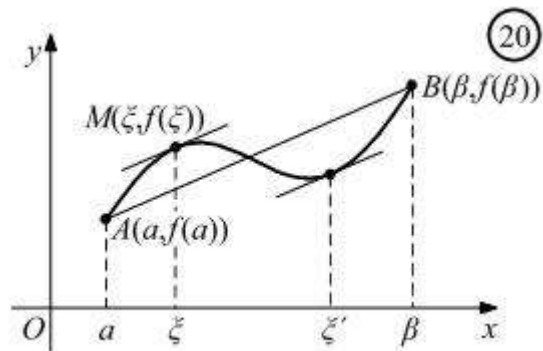
τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$

Γεωμετρική Ερμηνεία του Θ.Μ.Τ.

Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[a, \beta]$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, \beta)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f

στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB .



ασημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Ερώτηση 51.

(α) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της f** .

(β) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Απάντηση:

Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της f** .

(γ) Έστω μια συνάρτηση f . Τι ονομάζουμε τοπικά ακρότατα ή, απλά ακρότατα της f και τι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της;

Απάντηση:

Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f ονομάζονται τοπικά ακρότατα ή, απλά ακρότατα της f ενώ τα σημεία που η f παρουσιάζει τα τοπικά ακρότατα λέγονται θέσεις των τοπικών ακροτάτων της;

αθιμπινίσης

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Ερώτηση 52.

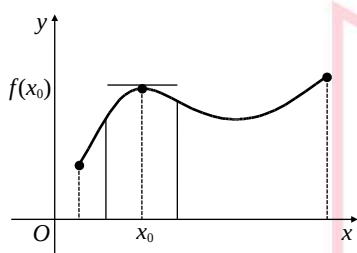
Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat και να δώσετε και τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

Γεωμετρική Ερμηνεία Του Θ.Fermat

Αν σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και επιπλέον είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι οριζόντια, δηλαδή ισχύει $f'(x_0) = 0$.



Ερώτηση 53.

Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση:

Οι **πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων** μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Ερώτηση 54.

Έστω μιας συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο Δ ;

Απάντηση:

Τα **εσωτερικά** σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ .

Ερώτηση 55.

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή και πότε λέμε ότι είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Ερώτηση 56.

Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f .

Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f .

ΣΧΟΛΙΟ 1

Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f , τότε λέμε ότι η f **παρουσιάζει στο x_0 καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**.

ΣΧΟΛΙΟ 2

Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f “διαπερνά” την καμπύλη.

Ερώτηση 57.

Πότε λέμε ότι η ευθεία με εξίσωση $Y = X_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ;

Απάντηση:

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f .

Ερώτηση 58.

Πότε λέμε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = \ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) ;

Απάντηση:

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

Ερώτηση 59.

Πότε λέμε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$ αντιστοίχως στο $-\infty$;

Απάντηση:

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Η ασύμπτωτη $y = \lambda x + \beta$ είναι **οριζόντια** αν $\lambda = 0$, ενώ αν $\lambda \neq 0$ λέγεται **πλάγια** ασύμπτωτη.

Ερώτηση 60.

Να διατυπώσετε τον 1^ο κανόνα del' Hospital (μορφή $\frac{0}{0}$)

Απάντηση:

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ερώτηση 61.

Να διατυπώσετε τον 2^ο κανόνα del' Hospital (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Απάντηση:

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

Ερώτηση 62.

Τι ονομάζουμε αρχική ή παράγουσα μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

Απάντηση:

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . **Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Ερώτηση 63.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$, με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$. Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω .

Απάντηση:

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$, με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = a$, $x = \beta$. Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω εργαζόμαστε ως εξής:

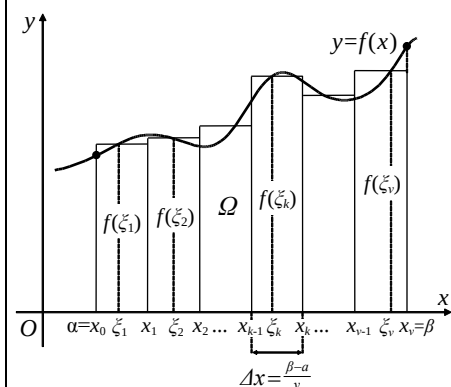
- Χωρίζουμε το διάστημα $[a, \beta]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \frac{\beta - a}{n}$, με τα σημεία $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta$.

- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_k και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_k)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_n)\Delta x = [f(\xi_1) + \dots + f(\xi_n)]\Delta x.$$

- Υπολογίζουμε το $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_k . Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν** του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $E(\Omega)$.



Ερώτηση 64.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$.

Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος της f στο $[a, \beta]$

Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση f σ υ ν ε χ ή ς στο $[a, \beta]$. Με τα σημεία $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_v = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[a, \beta]$ σε v ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta - a}{v}$.

Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, v\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

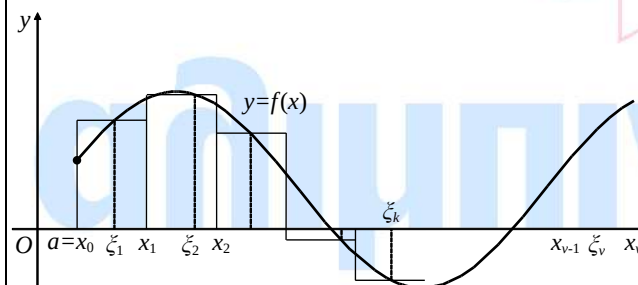
$$S_v = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_k)\Delta x + \dots + f(\xi_v)\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής: $S_v = \sum_{k=1}^v f(\xi_k)\Delta x^{(1)}$.

Αποδεικνύεται ότι,

“Το όριο του αθροίσματος S_v , δηλαδή το $\lim_{v \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^v f(\xi_k)\Delta x \right)$ (1) υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_k ”. Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το a στο β , συμβολίζεται με $\int_a^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα της f από το a στο β ”. Δηλαδή,

$$\int_a^\beta f(x)dx = \lim_{v \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^v f(\xi_k)\Delta x \right)$$



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Ερώτηση 65.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$, με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Τι εκφράζει γεωμετρικά το $\int_a^\beta f(x)dx$;

Απάντηση:

Αν f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x' και τις ευθείες $x=a$ και $x=\beta$.

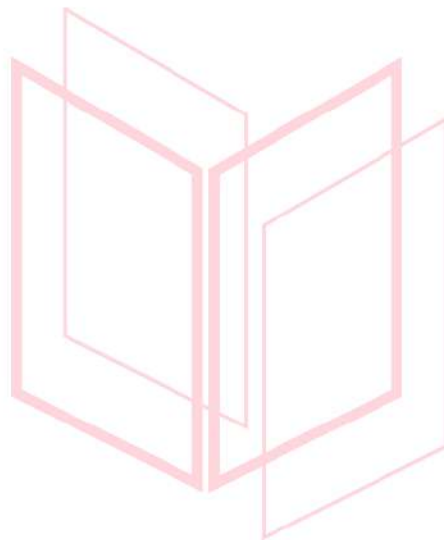
Ερώτηση 66.

Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

Απάντηση:

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε

$$\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$$



αθιμπινίσης

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ