

Αποδείξεις του σχολικού βιβλίου

ΕΡΩΤΗΣΗ 1.

Να αποδείξεις ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

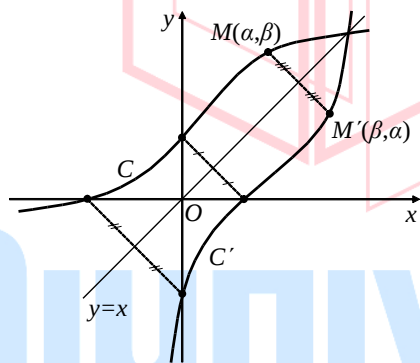
Απόδειξη:

Έστω μια 1-1 συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C' των f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Τότε για οποιοδήποτε σημείο $M(a, \beta)$ του επιπέδου ισχύει:

$$M(a, \beta) \in C \Leftrightarrow f(a) = \beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta) = a \Leftrightarrow N(\beta, a) \in C'.$$

Επομένως αν ένα σημείο $M(a, \beta)$ ανήκει στη C , τότε το σημείο $N(\beta, a)$ θα ανήκει στη C' και επειδή τα σημεία $M(a, \beta), N(\beta, a)$ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$ προκύπτει ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$, που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.



ΕΡΩΤΗΣΗ 2.

Έστω η πολυωνμική συνάρτηση $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξεις ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

— Έστω το πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.

Τότε έχουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0)$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{n-1} x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0$$

$$= a_n \lim_{x \rightarrow x_0} x^n + a_{n-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0$$

$$= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_0 = P(x_0).$$

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

Αποδείξεις του σχολικού βιβλίου

ΕΡΩΤΗΣΗ 3.

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Να αποδείξεις ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ (Θ.Ε.Τ.)

ΕΡΩΤΗΣΗ 4.

Να διατυπώσεις και να αποδείξεις το Θ.Ε.Τ.

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι $f(a) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(a) < \eta < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [a, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

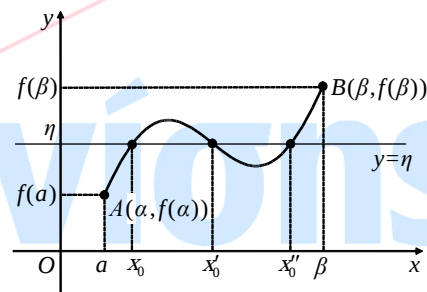
- η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $g(a)g(\beta) < 0$,

αφού

$$g(a) = f(a) - \eta < 0 \quad \text{και}$$

$$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.



Αν $f(a) > f(\beta)$, τότε εργαζόμενοι ομοίως καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.■

ΕΡΩΤΗΣΗ 5.

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 ,

τότε να αποδείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 , τότε $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Αν σε αυτήν την ισότητα θέσουμε $x = x_0 + h$, τότε έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Αποδείξεις του σχολικού βιβλίου

ΕΡΩΤΗΣΗ 6.

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0),$$

οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 . ■

ΕΡΩΤΗΣΗ 7. Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c$, $c \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $(c)' = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{c - c}{x - x_0} = 0. \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= 0, \end{aligned}$$

δηλαδή $(c)' = 0$. ■

ΕΡΩΤΗΣΗ 8.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $(x)' = 1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1,$$

δηλαδή $(x)' = 1$. ■

Αποδείξεις του σχολικού βιβλίου

ΕΡΩΤΗΣΗ 9.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = vx^{v-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $(x^v)' = vx^{v-1}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} = x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) = x_0^{v-1} + x_0^{v-1} + \dots + x_0^{v-1} = vx_0^{v-1},$$

δηλαδή $(x^v)' = vx^{v-1}$. ■

ΕΡΩΤΗΣΗ 10.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_1 = 0$

(β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

για κάθε $x \in (0, +\infty)$, δηλαδή $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$.

Η συνάρτηση αυτή δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_1 = 0$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

(β) Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για $x > 0$. ■

Αποδείξεις του σχολικού βιβλίου

ΕΡΩΤΗΣΗ 11. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

δηλαδή $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. ■

ΕΡΩΤΗΣΗ 12. Αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ , τότε να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\begin{aligned} (f(x)g(x)h(x))' &= [(f(x)g(x)) \cdot h(x)]' = (f(x)g(x))' \cdot h(x) + (f(x)g(x)) \cdot h'(x) \\ &= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 13. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-v}$, $v \in \mathbb{N}^*$. να αποδείξετε ότι

η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -vx^{-v-1}$,

για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, δηλαδή $(x^{-v})' = -vx^{-v-1}$, για $x \neq 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f(x) = x^{-v} = \frac{1}{x^v}$, $x \neq 0$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \text{ έχουμε: } f'(x) = (x^{-v})' = \left(\frac{1}{x^v} \right)' = \frac{(1)'x^v - 1(x^v)'}{(x^v)^2} = \frac{-vx^{v-1}}{x^{2v}} = -vx^{-v-1}$$

Δηλαδή $(x^{-v})' = -vx^{-v-1}$, για $x \neq 0$. ■

ΣΧΟΛΙΟ.

Από τις ερωτήσεις 9 και 13 προκύπτει ότι, αν $k \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$, τότε

$$(x^k)' = kx^{k-1}.$$

Αποδείξεις του σχολικού βιβλίου

ΕΡΩΤΗΣΗ 14. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sin x = 0\}$

και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$, δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$, για $x \in \mathbb{R}_1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sin x}$, $x \in \mathbb{R}_1$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκo παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sin x} \right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sin x - \eta\mu x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{\sin x \sin x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x + \eta\mu^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned} \quad \text{Δηλαδή } (\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sin^2 x}, \text{ για } x \in \mathbb{R}_1. \blacksquare$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 15. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = ax^{a-1}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$,

δηλαδή $(x^a)' = ax^{a-1}$, για $x > 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $f(x) = x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επομένως για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει

$$f'(x) = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} \cdot (a \ln x)' = e^{a \ln x} \cdot a \cdot (\ln x)' = e^{a \ln x} \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a \cdot x^a \cdot \frac{1}{x} = a \cdot x^{a-1}$$

Άρα είναι $(x^a)' = ax^{a-1}$, για $x > 0$. $\blacksquare$

ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι, για $a > 1$ η f είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0 = 0$ και η παράγωγός της είναι ίση με 0, επομένως δίνεται από τον ίδιο τύπο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 16. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = a^x \ln a$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

δηλαδή $(a^x)' = a^x \ln a$, για $x \in \mathbb{R}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Αποδείξεις του σχολικού βιβλίου

Επομένως για κάθε $\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x) = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a \cdot (x)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a \cdot 1 = a^x \cdot \ln a.$$

Άρα είναι $(a^x)' = a^x \ln a$, για $x \in \mathbb{R}$. ■

ΕΡΩΤΗΣΗ 17. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, για $x \in \mathbb{R}^*$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) = \ln|x| = \ln x$, άρα τότε η f είναι

παραγωγίσιμη με $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

Για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) = \ln|x| = \ln(-x)$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

Συνοψίζοντας η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$, με $f'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Δηλαδή ισχύει $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, για $x \in \mathbb{R}^*$. ■

ΕΡΩΤΗΣΗ 18.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ

τότε να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1).

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε λόγω της (1)

είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. ■

ΕΡΩΤΗΣΗ 19.

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ ,

τότε να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$

$$\text{να ισχύει } f(x) = g(x) + c$$

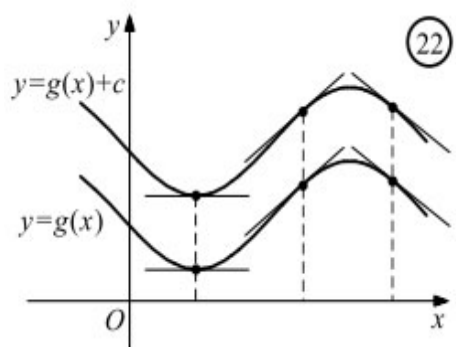
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ . Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει

$$f(x) - g(x) = c \text{ άρα } f(x) = g(x) + c$$



ΕΡΩΤΗΣΗ 20.

Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ

- αν $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ ,
τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ
- αν $f'(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ

τότε να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το διάστημα Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Θα αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση που $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Πράγματι στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ

$$\text{Επομένως υπάρχει } \xi \in (x_1, x_2) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Αποδείξεις του σχολικού βιβλίου

οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$.

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

• Στην περίπτωση που $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

ΕΡΩΤΗΣΗ 21.

Να διατυπώσεις και να αποδείξεις το Θ. FERMAT.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \text{ και}$$

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε $x < x_0 \Leftrightarrow x - x_0 < 0$ και λόγω της (1) θα είναι $f(x) - f(x_0) \leq 0$

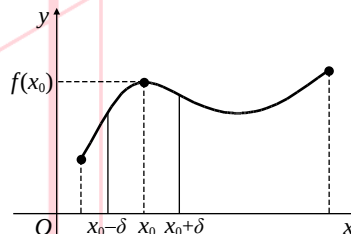
$$\text{άρα } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \text{ οπότε θα έχουμε } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε $x > x_0 \Leftrightarrow x - x_0 > 0$ και λόγω της (1), θα είναι $f(x) - f(x_0) \leq 0$

$$\text{άρα } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \text{ οπότε θα έχουμε } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■



Αποδείξεις του σχολικού βιβλίου

ΕΡΩΤΗΣΗ 22. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (a, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

i) Αν $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

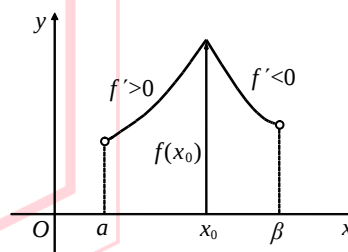
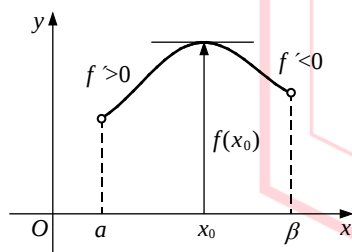
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(a, x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (a, x_0]. \quad (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta). \quad (2)$$

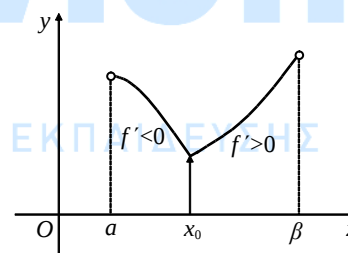
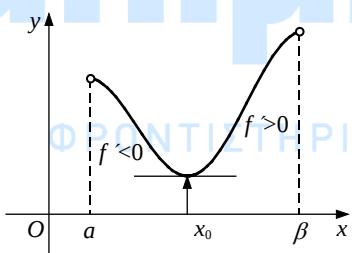


Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (a, \beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (a, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής. ■

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως



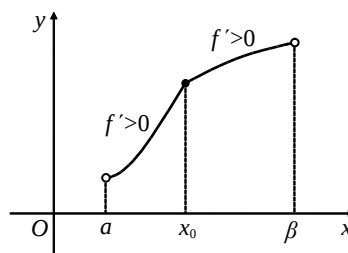
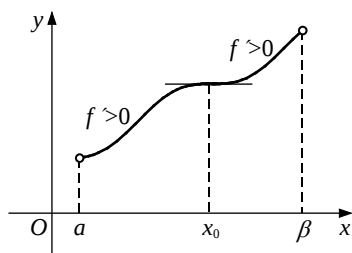
ΕΡΩΤΗΣΗ 23. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (a, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (a, β) .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι

$$f'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta).$$

Αποδείξεις του σχολικού βιβλίου



Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(a, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f . Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β) . Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (a, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(a, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β) .

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$. ■

ΕΡΩΤΗΣΗ 24. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να δείξετε ότι :

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε

$$G'(x) = F'(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{για κάθε } x \in \Delta. \quad \blacksquare$$

Αποδείξεις του σχολικού βιβλίου

ΕΡΩΤΗΣΗ 25.

Να δοθεί εποπτική απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος .

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in \Delta,$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ . Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ως εξής:

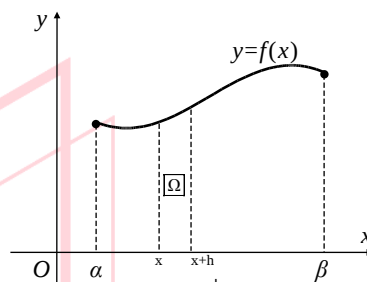
$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_x^{x+h} f(t)dt \\ &= \text{Εμβαδόν του χωρίου } \Omega. \\ &\approx f(x) \cdot h, \quad \text{για μικρά } h > 0. \end{aligned}$$

Άρα, για μικρά $h > 0$ είναι

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x),$$

οπότε

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \blacksquare$$



Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

ΕΡΩΤΗΣΗ 26.

Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε

$$\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c. \quad (1)$$

Από την (1), για $x = a$, έχουμε $G(a) = F(a) + c = \int_a^a f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(a)$.

Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(a),$$

οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(a) = \int_a^\beta f(t)dt + G(a)$$

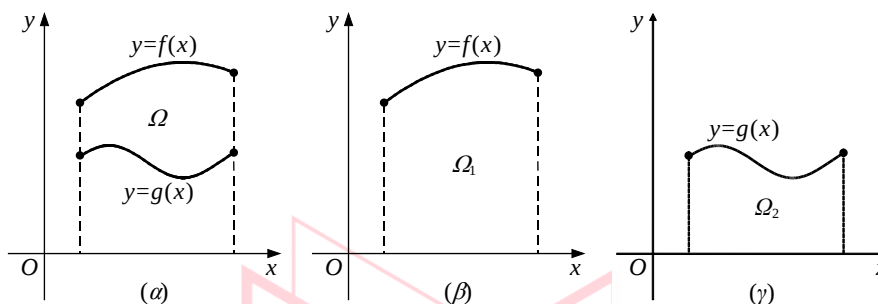
και άρα $\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$. $\blacksquare$

Αποδείξεις του σχολικού βιβλίου

ΕΡΩΤΗΣΗ 27.

Έστω δυο συναρτήσεις f και g , συνεχείς στο διάστημα $[a, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$, να δείξετε ότι $E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x))dx$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Παρατηρούμε ότι

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_a^\beta f(x)dx - \int_a^\beta g(x)dx = \int_a^\beta (f(x) - g(x))dx.$$

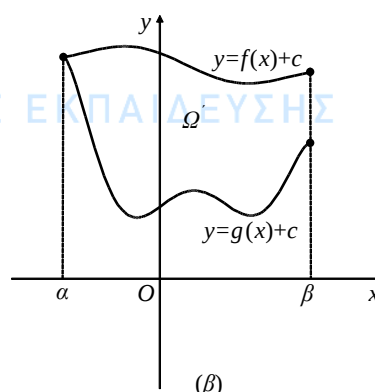
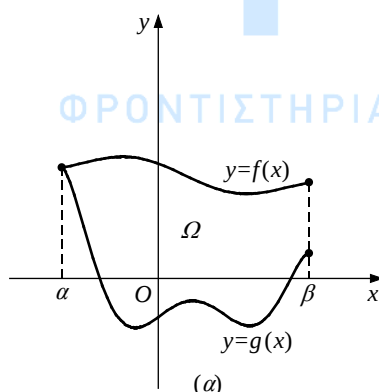
Επομένως, $E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x))dx$ (1) ■

ΕΡΩΤΗΣΗ 28.

Έστω δυο συναρτήσεις f και g , συνεχείς στο διάστημα $[a, \beta]$ με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$, να δείξετε ότι $E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x))dx$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ.α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω' (Σχ.β).



Επομένως έχουμε:

$$E(\Omega) = E(\Omega') = \int_a^\beta [(f(x) + c) - (g(x) + c)]dx = \int_a^\beta (f(x) - g(x))dx.$$

Άρα $E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x))dx$ ■

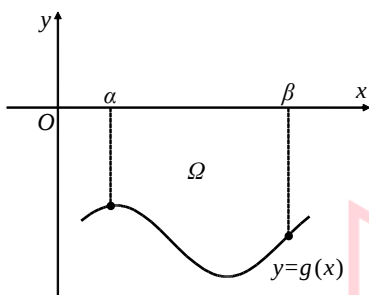
Αποδείξεις του σχολικού βιβλίου

ΕΡΩΤΗΣΗ 29.

Μια συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g και τις ευθείες με εξισώσεις $x=a$ και $x=\beta$ είναι $E(\Omega) = -\int_a^\beta g(x)dx$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0$,

Το χωρίο Ω που περικλείεται από τη C_g , τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες με εξισώσεις $x=a$ και $x=\beta$ είναι το χωρίο που περικλείεται από τη C_g , τη C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $x=a$ και $x=\beta$. Επειδή ισχύει $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$

το εμβαδό του χωρίου Ω είναι

$$E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x))dx = \int_a^\beta [-g(x)]dx = -\int_a^\beta g(x)dx.$$

Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$,

τότε $E(\Omega) = -\int_a^\beta g(x)dx$. ■

ΕΡΩΤΗΣΗ 30.

Έστω συναρτήσεις f, g που είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ και η διαφορά $f(x)-g(x)$ δε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες με εξισώσεις $x=a$ και $x=\beta$

είναι $E(\Omega) = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx$.

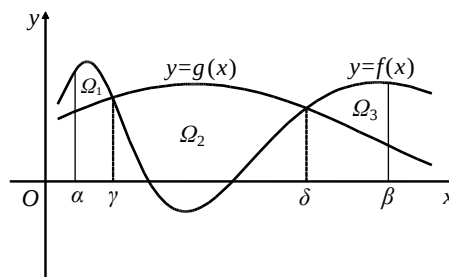
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν

διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a, \beta]$,

όπως στο διπλανό σχήμα, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις

γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x=a$ και $x=\beta$



Αποδείξεις του σχολικού βιβλίου

είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 . Δηλαδή

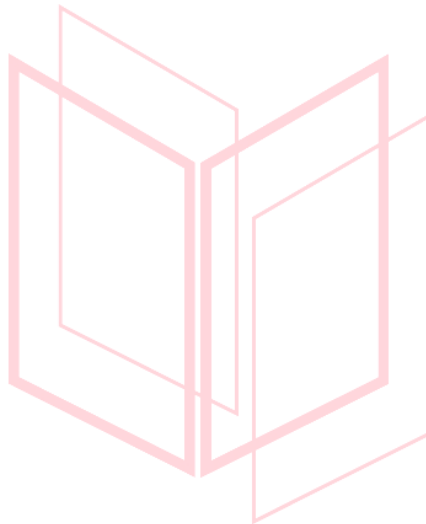
$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3)$$

$$= \int_a^\gamma (f(x) - g(x))dx + \int_\gamma^\delta (g(x) - f(x))dx + \int_\delta^\beta (f(x) - g(x))dx$$

$$= \int_a^\gamma |f(x) - g(x)| dx + \int_\gamma^\delta |f(x) - g(x)| dx + \int_\delta^\beta |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx .$$

$$\text{Επομένως } E(\Omega) = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx \quad \blacksquare$$



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ