ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΓΥΜΝΑΣΙΑ 22/06/2016

1) Ε

Από το ραβδόγραμμα παρατηρούμε ότι ο μαθητής έχει γράψει:
1ο διαγώνισμα: 14
2ο διαγώνισμα: 18
3ο διαγώνισμα: 15
4ο διαγώνισμα: 13
Για να έχει ο μαθητής μέσο όρο βαθμών και στα πέντε διαγωνίσματα 16 πρέπει το άθροισμα των βαθμών των διαγωνισμάτων του να είναι $16 \cdot 5 = 80$.
Μέχρι στιγμής το άθροισμα των βαθμών του είναι
$14 + 18 + 15 + 13 = 60$
Οπότε στο πέμπτο διαγώνισμα πρέπει να γράψει $80 - 60 = 20$

2) Δ

Μπορούμε να κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα οπότε μεγαλύτερο θα είναι εκείνο με τον μεγαλύτερο παρανομαστή. Κάτι τέτοιο , όμως, είναι χρονοβόρο και απαιτεί δύσκολες πράξεις. Επίσης θα μπορούσαμε να μετατρέψουμε τα κλάσματα σε δεκαδικούς (με προσέγγιση στο δέκατο).
Πιο εύκολα μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:
Παρατηρούμε ότι όλα τα κλάσματα είναι μικρότερα της μονάδας άρα το μεγαλύτερο θα είναι αυτό που βρίσκεται πιο κοντά στην μονάδα , δηλαδή αυτό που έχει την μικρότερη απόσταση από την μονάδα.
Για το κλάσμα $\frac{2}{3}$ έχουμε ότι η απόσταση του από την μονάδα είναι

$$1-\frac{2}{3}=\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

για το κλάσμα $\frac{19}{20}$ έχουμε ότι η απόσταση του από την μονάδα είναι

$$1-\frac{19}{20}=\frac{20}{20}-\frac{19}{20}=\frac{1}{20}$$

Ομοίως το κλάσμα $\frac{6}{7}$ απέχει από την μονάδα $\frac{1}{7}$
το κλάσμα $\frac{24}{25}$ απέχει από την μονάδα $\frac{1}{25}$
το κλάσμα $\frac{7}{8}$ απέχει από την μονάδα $\frac{1}{8}$

Η μικρότερη απόσταση από την μονάδα είναι $\frac{1}{25}$ (όλα τα κλάσματα έχουν τον ίδιο αριθμητή όποτε μικρότερο είναι αυτό με τον μεγαλύτερο παρανομαστή) επομένως το μεγαλύτερο κλάσμα είναι το $\frac{24}{25}$.

3) Δ

Αφού ο δορυφόρος Γ κάνει μια περιστροφή σε 3 ημέρες, ο Δ σε 4 ημέρες και ο Ε σε 5 ημέρες τότε για να βρούμε πότε θα βρεθούν ξανά στην ίδια θέση πρέπει να βρούμε το Ε. Κ. Π. του 3 , του 4 και του 5. Έχουμε ότι ΕΚΠ(3,4,5) = 60 , όμως επειδή έχουνε περάσει ήδη δύο μέρες τότε σε 60 – 2 = 58 μέρες θα βρεθούν ξανά στην ίδια θέση.

4) Γ

Η Μαρία ξόδεψε $\frac{8}{20}$ δηλαδή τα $\frac{8:4}{20:4}=\frac{2}{5}$ των χρημάτων της για το παντελόνι και τα $\frac{4}{15}$ των χρημάτων της για την μπλούζα. Συνολικά ξόδεψε τα

$\frac{2}{5}+\frac{4}{15}=\frac{6}{15}+\frac{4}{15}=\frac{10}{15}=\frac{10:5}{15:5}=\frac{2}{3}$ των χρημάτων της.

Οπότε της περίσσεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων της.

Όμως το $\frac{1}{3}$ είναι 40 ευρώ

τα $\frac{3}{3}$ είναι $40 \cdot 3 = 120$ ευρώ

Τελικά η Μαρία είχε 120 ευρώ.

5) Ε

Παρατηρούμε ότι έχουμε ένα μοτίβο όπου κάθε φορά που θέλουμε να μεγαλώσουμε την πλευρά του σιντριβανιού κατά 1 μ. τοποθετούμε 4 τετράγωνες πλάκες. Έτσι για φτιάξουμε πλευρά 2μ. χρειαζόμαστε να βάλουμε 4 επιπλέον πλακάκια στα ήδη αρχικά 8 , ενώ για να φτιάξουμε 3μ. χρειαζόμαστε 8 επιπλέον πλακάκια (2 τεσσάρια δηλαδή) στα ήδη αρχικά 8 . Άρα για να φτιάξουμε πλευρά 12 μέτρα πρέπει στα αρχικά 8 πλακάκια να προσθέσουμε 11 τεσσάρια , δηλαδή $8 + 11 \cdot 4 = 8 + 44 = 52$ πλακάκια.

Άλλος τρόπος

Σύμφωνα με το σχήμα έχουμε ότι:

1μ → 8 πλακάκια
2μ → 12 πλακάκια
3μ → 16 πλακάκια
Άρα
4μ → 20 πλακάκια
5μ → 24 πλακάκια
6μ → 28 πλακάκια

7μ → 32 πλακάκια
8μ → 36 πλακάκια
9μ → 40 πλακάκια
10μ → 44 πλακάκια
11μ → 48 πλακάκια
12μ → 52 πλακάκια

6) Γ
Το σχήμα ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο με βάση μεγάλη ΑΒ = 7 μονάδες , βάση μικρή ΓΔ = 3 μονάδες και ύψος ΑΔ = 3 μονάδες. Το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι
$E_{ΑΒΓΔ}=\frac{(7+3)\cdot 3}{2}=\frac{10\cdot 3}{2}=\frac{30}{2}=15$ τετραγ. μονάδες
Κάνοντας δοκιμές έχουμε ότι:
Η ΣΘ χωρίζει το σχήμα στο ΑΘΣΔ και στο ΘΒΓΣ. Το ΑΘΣΔ είναι τραπέζιο με βάση μεγάλη ΑΘ = 4 μον. , βάση μικρή ΣΔ = 1 μον. και ύψος ΑΔ = 3 μονάδες. Το εμβαδόν του ΑΘΣΔ είναι
$E_{ΑΘΣΔ}=\frac{(4+1)\cdot 3}{2}=\frac{5\cdot 3}{2}=\frac{15}{2}=7,5$ τετραγ. μονάδες
το οποίο είναι το μισό του εμβαδού όλου του σχήματος ΑΒΓΔ.
Οπότε η ΣΘ χωρίζει το την επιφάνεια ΑΒΓΔ σε 2 μέρη με ίδιο εμβαδόν

7) Γ
Η απόσταση του $\frac{5}{4}$ από το 0 έχει χωριστεί σε 15 διαστήματα. Το μήκος του κάθε διαστήματος θα είναι $\frac{5}{4}:15=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{15}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$.Αυτό σημαίνει ότι στην πρώτη γραμμούλα μετά το 0 θα μπει το $\frac{1}{12}$, στη δεύτερη γραμμούλα το $\frac{2}{12}$ κ.ο.κ. Οπότε η μονάδα , που είναι τα $\frac{12}{12}$, θα βρίσκεται στην δωδέκατη γραμμούλα μετά το 0 , δηλαδή στο σημείο Γ.

Άλλος τρόπος
Με αναγωγή στη μονάδα:
Τα $\frac{5}{4}$ είναι 15 γραμμές
το $\frac{1}{4}$ είναι 15:5=3 γραμμές
τα $\frac{4}{4}$ είναι $3\cdot 4=12$ γραμμές , δηλαδή το σημείο Γ.

8) Ε
Για να γίνουν πιο εύκολες οι πράξεις πρέπει να γράψουμε κάθε 16 σαν 4·4 και στην συνέχεια να κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς όχι με την σειρά που είναι γραμμένοι αλλά κάθε 25 μαζί με ένα 4, δηλαδή

25·25·25·25·25·25·25·4·4·4·16·16 =
= 25·25·25·25·25·25·25·4·4·4·4·4·4·4 =
= 25·4·25·4·25·4·25·4·25·4·25·4·25·4 =
= 100·100·100·100·100·100·100 =
=100000000000000
Άρα έχουμε συνολικά 14 μηδενικά.

9) α) Αφού έχει καταναλώσει 25 κ.μ. και τα 5 πρώτα κ.μ. χρεώνονται με 0,35 ευρώ ανά κ.μ. τότε θα πληρώσει 5·0,35 = 1,75 ευρώ και θα περισσέψουν προς χρέωση 25 – 5 = 20 κ.μ. . Για το υπόλοιπα 15 κ.μ. θα πληρώσει 15·0,64 = 9,60 ευρώ και θα περισσέψουν προς χρέωση 20 – 15 = 5 κ.μ. Αυτά τα 5 κ.μ. θα χρεωθούν προς 1,83 το ένα, οπότε θα πληρώσει 5·1,83 = 9,15 ευρώ. Συνολικά πρέπει να πληρώσει 1,75 + 9,60 + 9,15 = 20,50 ευρώ.

β) Αφού έχει πληρώσει 26,72 ευρώ σημαίνει ότι έχει χρεωθεί σε διάφορες κλίμακες. Κάθε ένα από τα 5 πρώτα κ.μ χρεώνεται με 0,35 ευρώ άρα συνολικά 5·0,35 = 1,75ευρώ και περισσεύουν 26,72 – 1,75 = 24, 97 ευρώ. Τα επόμενα 15 κ.μ χρεώνονται με 0,64 ευρώ το ένα οπότε συνολικά 15·0,64 = 9,60 ευρώ και περισσεύουν 24,97 – 9,60 = 15,37 ευρώ. Τα επόμενα 7κ.μ. χρεώνονται με 1,83 ευρώ το ένα , οπότε συνολικά 7·1,83 = 12,81 και περισσεύουν 15 ,37 – 12,81 = 2,56 ευρώ. Τα επόμενα 8 κ.μ. χρεώνονται προς 2,56 ευρώ το ένα και επειδή έχουν περισσέψει 2,56 ευρώ σημαίνει ότι έχει καταναλώσει 1 κ.μ. ακόμη. Τελικά θα έχει καταναλώσει 5 + 15 + 7 + 1 = 28 κ.μ.

10) α) Επειδή ο Ορφέας έχει τώρα τρεις καραμέλες περισσότερες από την Υπατία και συνολικά έχουν 27 καραμέλες τότε η Υπατία θα έχει τώρα
27 – 3 = 24
24:2 = 12 καραμέλες
και ο Ορφέας θα έχει τώρα 12 + 3 = 15 καραμέλες

β) Η Υπατία έχει τώρα διπλάσιες καραμέλες από ότι είχε αρχικά, οπότε αρχικά θα είχε 12:2 = 6 καραμέλες και ο Ορφέας θα είχε αρχικά
27 – 6 = 21 καραμέλες.