ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 19 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ(3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0\in A$;

Μονάδες 4

Α3. Αν ομαδοποιήσουμε τις παρατηρήσεις μιας μεταβλητής σε κλάσεις, τι ονομάζουμε πλάτος μιας κλάσης;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε ισχύει

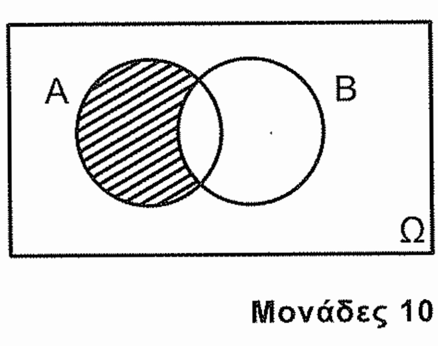
$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2\in\Delta$, με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

γ) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

δ) Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

ε) Το γραμμοσκιασμένο χωρίο στο διπλανό σχήμα αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο $B-A$.



Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές x_i και οι αντίστοιχες συχνότητες v_i που προέκυψαν από παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ.

x_i	v_i
1	2
3	3
5	4
9	1

Β1. Για τις παρατηρήσεις αυτές να υπολογιστούν :

α. η μέση τιμή $\bar{x}$ (μονάδες 6)

β. η διάμεσος δ (μονάδες 5)

γ. η διακύμανση s^2. (μονάδες 7)

Μονάδες 18

Β2. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2,f(2))$.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία (ε) του ερωτήματος **Γ2** τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

Μονάδες 4

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μία άσπρη, μία μαύρη και μία κόκκινη.
Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία άλλη μια φορά.

Δ1. Να κατασκευάσετε το δενδροδιάγραμμα που περιγράφει το παραπάνω πείραμα (μονάδες 3) και να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος. (μονάδες 2)

Μονάδες 5

Δ2. Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

Α: «η δεύτερη μπάλα που θα εξαχθεί να είναι μαύρη»

Β: «να εξαχθούν δυο μπάλες διαφορετικού χρώματος».

Μονάδες 6

Δ3. Υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω του προηγούμενου πειράματος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και A, B είναι τα ενδεχόμενα του ερωτήματος **Δ2**.

α. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:
A', $A \cap B$, $A - B$, $B - A$. (μονάδες 8)

β. Αν Γ είναι ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω, το οποίο είναι ασυμβίβαστο τόσο με το ενδεχόμενο A όσο και με το ενδεχόμενο B, να υπολογίσετε ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να έχει η πιθανότητα $P(\Gamma)$. (μονάδες 6)

Μονάδες 14

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας, να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΛΥΣΕΙΣ:

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Απόδειξη σελ.31 σχολικό βιβλίο

Α2. Ορισμός σελ.14 σχολικό βιβλίο

Α3. Ορισμός σελ. 72 σχολικό βιβλίο

Α4.

α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β:

Β1. Κατασκευάζουμε τον πίνακα που ακολουθεί:

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$	$x_i - \bar{x}$	$x_i - \bar{x})^2$	$x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
1	2	2	-3	9	18
3	3	9	-1	1	3
5	4	20	1	1	4
9	1	9	5	25	25
Σύνολο	10	40	-	-	50

α. $\bar{x} = \frac{{}_{i=1}^{4} x_i \cdot v_i}{v} = \frac{40}{10} = 4$

β. Επειδή $v = 10$ άρτιος:

$\delta = \frac{t_5 + t_6}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$

γ. $s^2 = \frac{1}{v} \quad {}_{i=1}^{4} \; x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i = \frac{50}{10} = 5$

Β2. $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{5}}{4} > \frac{1}{10}$ Δεν είναι ομοιογενές αφού $\frac{\sqrt{5}}{4} > \frac{1}{10} \qquad \sqrt{5} \cdot 10 > 4$

$500 > 16$ ισχύει.

<u>ΘΕΜΑ Γ:</u>

Γ1. $f(x) = x^2 - x + 1, x \in R.$

η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x - 1, x \in R$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$\searrow$		$\nearrow$
		Ο. Ε	

Επομένως συνάρτηση έχει ολικό ελάχιστο στο $x = \frac{1}{2}$ το $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Γ2. $f(2) = 3$

$f'(2) = 3$

άρα $(\varepsilon): y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$

$$y - 3 = 3 \cdot (x - 2)$$

άρα $\boxed{(\varepsilon): y = 3x - 3}$ (1)

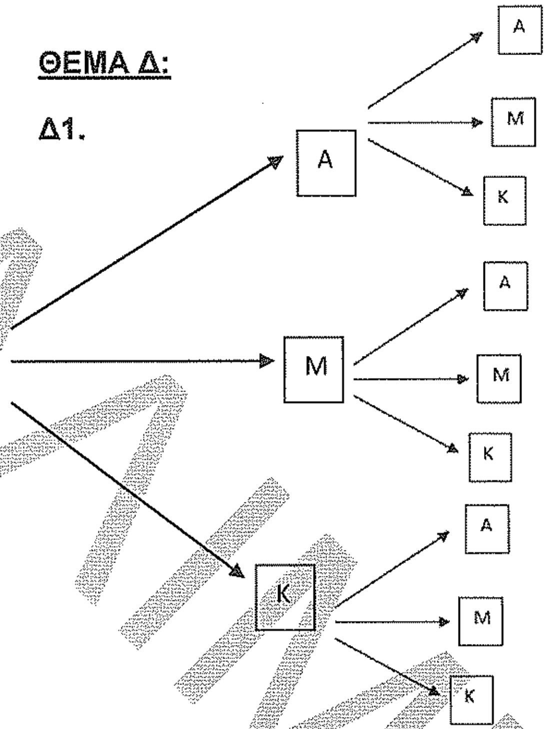
Γ3. Η (1) για $x = 0$ δίνει $y = -3$ οπότε η (ε) τέμνει τον y'y στο σημείο Α (0 ,-3).

Η (1) για $y = 0$ δίνει $x = 1$ οπότε η (ε) τέμνει τον x'x στο σημείο Β (1, 0).

Γ4. $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(\sqrt{x^2-x+1}-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)} =$
$\lim_{x\to1} \frac{x^2-x+1-1}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)} = \lim_{x\to1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)} = -\lim_{x\to1} \frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+1} = \frac{1}{2}.$

ΘΕΜΑ Δ:

Δ1.



$\Omega = \{AA, AM, AK, MA, MM, MK, KA, KM, KK\}$

Δ2. $A = \{AM, MM, KM\}$

$B = \{AM, AK, MA, MK, KA, KM\}$

Δ3. α) $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \left(\frac{N(A)}{N(\Omega)}\right) = 1 - \frac{3}{9} = \frac{2}{3}$

$A \cap B = \{AM, KM\}$

άρα $P(A \cap B) = \left(\frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}\right) = \frac{2}{9}$

$A - B = \{MM\}$ άρα $P(A - B) = \left(\frac{N(A-B)}{N(\Omega)}\right) = \frac{1}{9}$

$B - A = \{AK, MA, MK, KA\}$ άρα $P(B - A) = \left(\frac{N(B-A)}{N(\Omega)}\right) = \frac{4}{9}$

β) $\Gamma \cap A = \emptyset$ άρα $\Gamma \subseteq A'$

$\Gamma \cap B = \emptyset$ άρα $\Gamma \subseteq B'$

οπότε $\Gamma \subseteq A' \cap B' = \{KK, AA\}$

άρα $P(\Gamma) \leq P(A' \cap B') = \frac{2}{9}$

άρα $P(\Gamma)_{max} = \frac{2}{9}$.