ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν A και A' είναι δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι για τις πιθανότητές τους ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A).$$

Μονάδες 7

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

Α3. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, τότε για τις πιθανότητές τους ισχύει $P(A) \leq P(B)$.

β) Ο σταθμισμένος αριθμητικός μέσος ή σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες, τότε ισχύει ότι:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

δ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 9

Β2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0,f(0))$.

Μονάδες 8

Β3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f'(x)-12}{x+1}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μία οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά της ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους.

Γ1. Να προσδιορίσετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος χρησιμοποιώντας ένα δενδροδιάγραμμα.

Μονάδες 4

Γ2. Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

Α: «το πρώτο παιδί είναι κορίτσι»

Β: «ο αριθμός των κοριτσιών υπερβαίνει τον αριθμό των αγοριών»

Γ: «τα δύο πρώτα παιδιά είναι του ίδιου φύλου».

Μονάδες 6

Γ3. Υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

$$\Delta = A\cap B,\quad E = A\cup B,\quad Z = \Gamma - E.$$

(μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

Η: «δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α,Β»

Θ: «πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α,Β».

(μονάδες 6)
Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Δ

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν ν υπολογιστές για να τρέξουν ένα πρόγραμμα, έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 ισοπλατείς κλάσεις πλάτους c, όπως στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα v_i
[8 ,)		20
[,)	14	15
[,)		10
[,)		v_4
ΣΥΝΟΛΟ		ν=........

Δ1. Να αποδείξετε ότι $c=4$.

Μονάδες 4

Δ2. Αν η μέση τιμή των χρόνων είναι $\bar{x}=14$, να αποδείξετε ότι $v_4=5$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ3. Αν οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες σε κάθε κλάση, να βρείτε πόσοι υπολογιστές χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά για να τρέξουν το πρόγραμμα.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση των χρόνων είναι $s=4$ και να εξετάσετε αν το δείγμα των χρόνων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

Δ5. Αντικαθιστούμε τον επεξεργαστή κάθε υπολογιστή με έναν ταχύτερο και βρίσκουμε ότι κάθε υπολογιστής τρέχει τώρα το πρόγραμμα στο 80% του χρόνου που χρειαζόταν πριν. Να εξετάσετε ως προς την ομοιογένεια το καινούργιο δείγμα χρόνων.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας, να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 150-151   Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 87

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 14

Α4. α) Σωστό β) Λάθος γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}\cdot x^2+6\cdot x-1, x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x)=x^2-5\cdot x+6=(x-2)\cdot(x-3), x\in\mathbb{R}$.

Ελέγχουμε πότε : $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-2)\cdot(x-3)=0\Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$

$f'(x)>0\Leftrightarrow x<2$ ή $x>3$

$f'(x)<0\Leftrightarrow 2<x<3$

x	$-\infty$ 2	3	$+\infty$
f΄	+	-	+
f	↗	↘	↗

Τ.Μ.   Τ.Ε.

Η f παρουσιάζει τοπ.μέγιστο στο x_1=2 το $f(2)=\frac{11}{3}$ και τοπ. ελάχιστο στο x_2=3 το $f(3)=\frac{7}{2}$.

Β2. Η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(0,f(0))$ με συντ.διεύθυνσης $f'(0)=0^2-5\cdot 0+6=6$

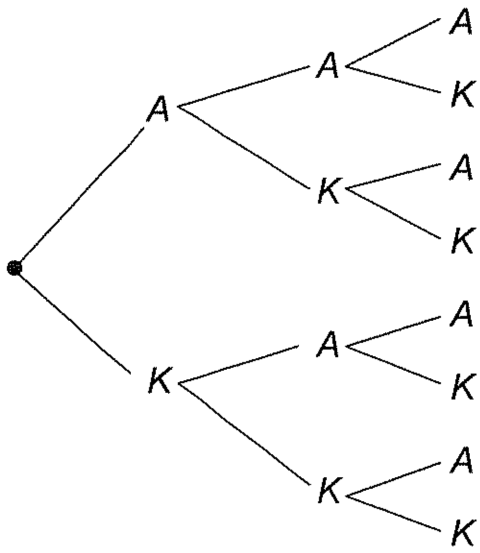
και εξίσωση $(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Leftrightarrow y+1=6\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=6x-1$

Β3. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f'(x)-12}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-5x+6-12}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-5x-6}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-6)}{x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to-1}(x-6)=-7$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



Άρα ο δειγματικός χώρος είναι ο : $\Omega = \{AAA, AAK, AKA, AKK, KAA, KAK, KKA, KKK\}$

Γ2. $A = \{KAA, KAK, KKA, KKK\}$, $B = \{AKK, KAK, KKA, KKK\}$, $\Gamma = \{AAA, AAK, KKA, KKK\}$

Γ3. α) $\Delta = A \cap B = \{KAK, KKA, KKK\}$, με $P(\Delta) = \dfrac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{8}$

$E = A \cup B = \{AKK, KAA, KAK, KKA, KKK\}$, με $P(E) = \dfrac{N(E)}{N(\Omega)} = \dfrac{5}{8}$

$Z = \Gamma - E = \{AAA, AAK\}$, με $P(Z) = \dfrac{N(Z)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

β) $H = (A \cup B)' = E'$, άρα $P(H) = P(E') = 1 - P(E) = 1 - \dfrac{5}{8} = \dfrac{3}{8}$

$\Theta = (A - B) \cup (B - A)$

<u>1^{ος} τρόπος</u> $\Theta = (A - B) \cup (B - A) = \{KAA\} \cup \{AKK\} = \{KAA, AKK\}$, άρα

$$P(\Theta) = \frac{N(\Theta)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

<u>2^{ος} τρόπος</u> $\Theta = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) = E - \Delta$, άρα

$$P(\Theta) = P(E - \Delta) = P(E) - P(E \cap \Delta) = P(E) - P(\Delta) = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$\underline{\mathbf{3^{ος}\ τρόπος}}$ $P(\Theta)=P((A-B)\cup(B-A))\overset{A-B,B-A}{\underset{ξένα}{=}}P(A-B)+P(B-A)=$

$$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=$$

$$=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}-2\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{4}{8}+\frac{4}{8}-2\cdot\frac{3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Οι κλάσεις είναι [8,8+c), [8+c,8+2c), [8+2c,8+3c), [8+3c,8+4c)

άρα $8+c+\frac{c}{2}=14\Leftrightarrow 16+2\cdot c+c=28\Leftrightarrow 3\cdot c=12\Leftrightarrow c=4$

Δ2.

χρόνος	x_i	v_i	$x_i\cdot v_i$
[8,12)	10	20	200
[12,16)	14	15	210
[16,20)	18	10	180
[20,24)	22	v_4	22 v_4
Σύνολο	-	45+ v_4	590+22 v_4

$$\bar{x}=14\Leftrightarrow\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot v_i}{v}=14\Leftrightarrow\frac{590+22\cdot v_4}{45+v_4}=14\Leftrightarrow 590+22\cdot v_4=630+14\cdot v_4\Leftrightarrow v_4=5$$

Συμπληρώνουμε τον πίνακα:

χρόνος	x_i	v_i	$x_i\cdot v_i$	$x_i^2\cdot v_i$
[8,12)	10	20	200	2000
[12,16)	14	15	210	2940
[16,20)	18	10	180	3240
[20,24)	22	5	110	2420
Σύνολο	-	50	700	10600

Δ3.Αφού οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες, τουλάχιστον 9 λεπτά

χρειάστηκαν $\frac{3}{4}\cdot 20+15+10+5=45$ υπολογιστές.

Δ4. Η διασπορά είναι $s_x^2=\frac{1}{v}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{4}x_i^2\cdot v_i-\frac{\left(\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot v_i\right)^2}{v}\right\}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i^2\cdot v_i}{v}-\left(\bar{x}\right)^2=\frac{10600}{50}-14^2=$

$$=212-196=16$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι $s_x=\sqrt{s_x^2}=\sqrt{16}=4$

Συνεπώς $CV_x=\frac{s_x}{\bar{x}}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}>\frac{1}{10}$. Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Δ5. Οι νέοι χρόνοι y_i περιγράφονται από τη σχέση $y_i = 0{,}8 \cdot x_i$.

Από γνωστή εφαρμογή ισχύουν ότι : $\overline{y} = 0{,}8 \cdot \overline{x}$ και $s_y = 0{,}8 \cdot s_x$, άρα

$$CV_y = \frac{s_y}{\overline{y}} = \frac{0{,}8 \cdot s_x}{0{,}8 \cdot \overline{x}} = \frac{s_x}{\overline{x}} = CV_x = \frac{2}{7} > \frac{1}{10},$$

συνεπώς και το νέο δείγμα δεν είναι ομοιογενές.