

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

10/06/2019

ΘΕΜΑ Α.

A1. α) Σχολικό βιβλίο σελίδα 15.

β) (i) Σχολικό βιβλίο σελίδα 35.

(ii) Σχολικό βιβλίο σελίδα 35-36.

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 142.

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 135.

A4. α) Λάθος. Για παράδειγμα:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Σχολικό βιβλίο σελίδα 134.

β) Λάθος. Για παράδειγμα:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

Σχολικό βιβλίο σελίδα 71.

A5. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

ΘΕΜΑ Β.

B1. Αφού η $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda) = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2,$$

αφού:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0.$$

B2. Θεωρούμε την

$$g(x) = f(x) - x \Leftrightarrow g(x) = e^{-x} + 2 - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε:

- g συνεχής στο $[2,3]$.
- $g(2) = e^{-2} > 0$ και
 $g(3) = e^{-3} - 1 = \frac{1}{e^3} - 1 < 0$, επομένως,

$$g(2) \cdot g(3) < 0.$$

Άρα, από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2,3)$ ώστε:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 = 0.$$

Άρα, η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$. Υπολογίζουμε την παράγωγο της g :

$$g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άρα, η g είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , και επομένως, η $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο \mathbb{R} , η οποία ανήκει στο $(2,3)$.

B3. Έχουμε:

$$f'(x) = -e^{-x} < 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , επομένως είναι και 1-1 και άρα αντιστρέφεται. Εφόσον η f είναι γνησίως φθίνουσα, για το πεδίο ορισμού της αντίστροφης, έχουμε:

$$D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (2, +\infty),$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 2) = +\infty,$$

διότι,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^u = +\infty.$$

Για $y \in (2, +\infty)$, θέτουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = e^{-x} + 2 \Leftrightarrow e^{-x} = y - 2 \Leftrightarrow -x = \ln(y - 2) \Leftrightarrow x = -\ln(y - 2), \quad \text{για } y > 2.$$

Άρα,

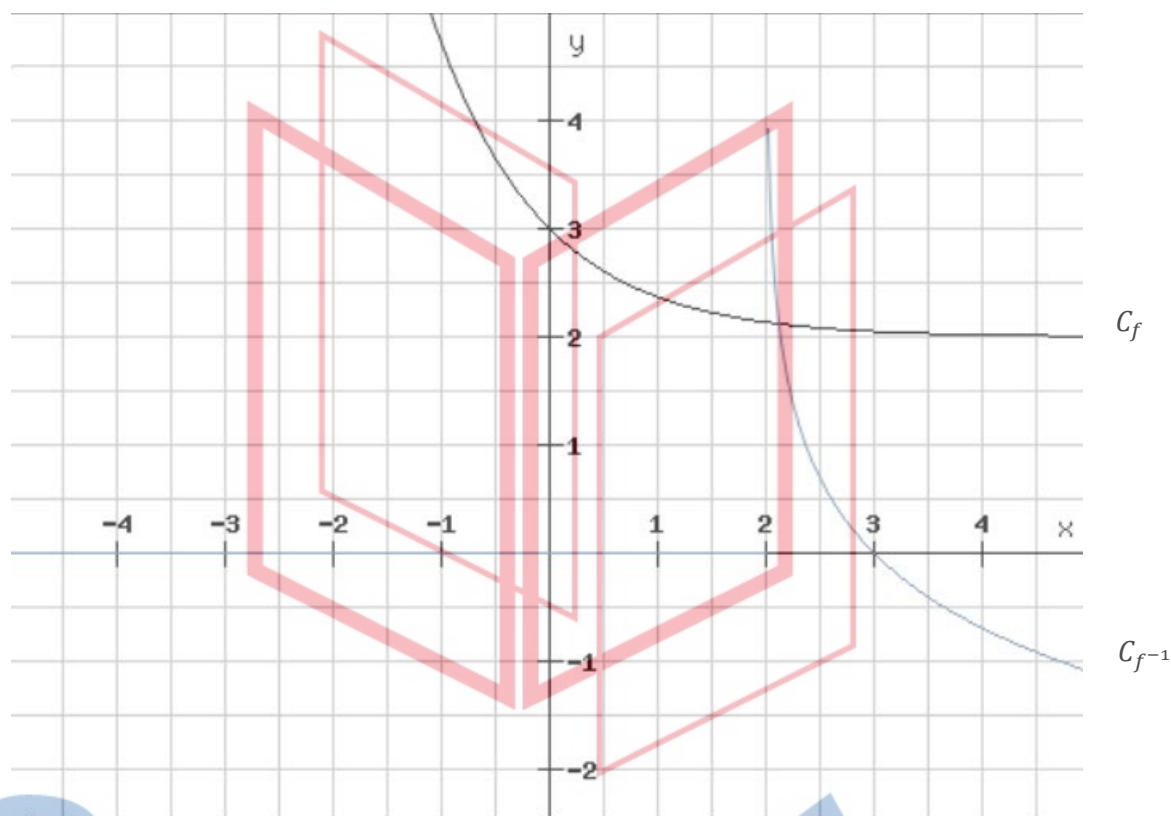
$$f^{-1}(x) = -\ln(x - 2), \quad x > 2.$$

B4. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [-\ln(x-2)] \stackrel{(u = x-2)}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} [-\ln u] = -\lim_{u \rightarrow 0^+} (\ln u) = +\infty.$$

Άρα, η $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.

Οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1 \end{cases}$$

Γ1. $A_f = \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} οπότε η f συνεχής στο \mathbb{R}

Επομένως η f συνεχής στο $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + a = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{x-1} + \beta x = 1 + a \Leftrightarrow 1 + a = 1 + \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Επίσης η f παραγωγίσιμη στο $x=1$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + a - 1 - a}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - a}{x - 1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{e^x - 1}{x-1} + \frac{ax - a}{x-1} \right) \Leftrightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{x-1} = 1}$$

$$2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a(x-1)}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$2 = 1 + a \Leftrightarrow a = 1 \text{ άρα και } \beta = 1.$$

Γ2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + x, & x < 1 \end{cases}$$

• $x > 1$ $f'(x) = 2x > 0$ για κάθε $x > 1$

• $x < 1$ $f'(x) = e^{x-1}(x-1)' + 1 = e^{x-1} + 1 > 0$ για κάθε $x < 1$

• $x = 1$ $f'(1) = 2$ από ερώτημα Γ1.

Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

f συνεχής και γν. αύξουσα στο \mathbb{R} άρα $f(\mathbb{R}) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) =$

$$= (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} + \lim_{x \rightarrow -\infty} x = 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

Γ3.

i) $f((-\infty, 0)) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)) = (-\infty, e^{-1})$

$0 \in f((-\infty, 0))$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $x_0 \in (-\infty, 0) \subseteq \mathbb{R}$ η οποία είναι μοναδική στο \mathbb{R} λόγω μονοτονίας.

ii) α' τρόπος

$$\text{Έστω } f(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0-1} + x_0 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Έχουμε ότι για } x > x_0 \Leftrightarrow \overset{f \nearrow \mathbb{R}}{f(x)} > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0, \text{ για κάθε } x > x_0$$

$$\text{Η εξίσωση γράφεται } f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) (f(x) - x_0) = 0 \xleftrightarrow{f(x) > 0 \forall x > x_0} f(x) = x_0 \quad (*)$$

$$\text{Όμως } f((x_0, +\infty)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (f(x_0, +\infty)) = (0, +\infty)$$

Άρα $x_0 \notin f(x_0, +\infty)$ αφού $x_0 < 0$

Άρα η (*) είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$

β' τρόπος

Θεωρούμε $g(x) = f^2(x) - xof(x) \quad x \geq x_0$

$$g'(x) = 2 - f(x)f'(x) - xof'(x) = f'(x)(2f(x) - xof'(x)) \quad x \geq x_0$$

Η g συνεχής στο $[x_0, +\infty)$ ως σύνθεση και διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x > x_0$$

$$-x_0 > 0 \text{ αφού } x_0 < 0$$

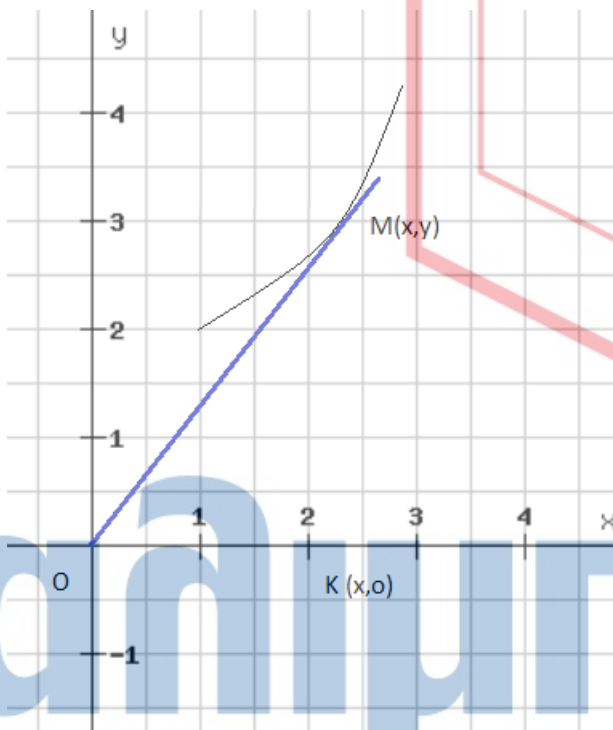
$$\text{Για } x \geq x_0 \stackrel{f' > 0}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

Άρα $g'(x) > 0$ για κάθε $x \geq x_0$ άρα g γν. αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$

$$\text{Για } x > x_0 \stackrel{g' > 0}{\Leftrightarrow} g(x) > g(x_0) \Leftrightarrow g(x) > 0, \text{ για κάθε } x > x_0$$

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$

Γ4.



$$E = \frac{\beta v}{2} = \frac{(OK)(MK)}{2} = \frac{x f(x)}{2} = \frac{x(x^2+1)}{2} = \frac{x^3+x}{2}$$

$$\text{Άρα } E(t) = \frac{x^3(t) + x(t)}{2}, t \geq 0$$

$$E'(t) = \frac{1}{2} [3x^2(t)x'(t) + x'(t)] = \frac{1}{2} x'(t)(3x^2(t) + 1), t \geq 0$$

$$\text{Για } t = t_0: E'(t_0) = \frac{1}{2} x'(t_0)[3x^2(t_0) + 1] = \frac{1}{2} \cdot 2[3 \cdot 3^2 + 1] = 28 \text{ τετ. μονάδες/sec}$$

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ως πράξεις παραγωγίσιμων, με

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + (x - 1) \cdot \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ισχύει ότι:

- $f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1.$ (1)
- $f'(1) = -1 \Leftrightarrow \alpha = -1.$ (2)

Από τις (1) και (2), προκύπτει $\alpha = -1$ και $\beta = 2$.

Συνεπώς,

$$f(x) = (x - 1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δ2. Έστω

$$A(x) = f(x) - (-x + 2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Τότε:

$$\begin{aligned} A(x) &= (x - 1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2 + x - 2 \\ &= (x - 1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 1 + 1) \\ &= (x - 1) \cdot \ln((x - 1)^2 + 1), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση A είναι συνεχής στο \mathbb{R} , ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, άρα είναι συνεχής και στο $[1,2]$. Παρατηρούμε ότι για $x \in [1,2]$:

- $x - 1 \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.
- $\ln((x - 1)^2 + 1) \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$, εφόσον $(x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + 1 \geq 1$.

Άρα, $A(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [1,2]$. Συνεπώς, το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \int_1^2 |A(x)| dx = \int_1^2 A(x) dx = \int_1^2 (x - 1) \cdot \ln((x - 1)^2 + 1) dx.$$

Θέτουμε $u = (x - 1)^2 + 1$. Οπότε:

$$du = 2(x - 1)dx \Leftrightarrow \frac{du}{2} = (x - 1)dx.$$

Ακόμη,

- $x_1 = 1 \Rightarrow u_1 = 1.$
- $x_2 = 2 \Rightarrow u_2 = 2.$

Άρα,

$$E = \int_1^2 \ln u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln u \, du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln u - u]_1^2 = \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 2 + 1) = \frac{2 \ln 2 - 1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Δ3. (i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) \geq -1 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \ln((x-1)^2 + 1) + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} - 1 \geq -1,$$

που ισχύει, διότι:

$$\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$(x-1)^2 + 1 \geq 1 \stackrel{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow} \ln((x-1)^2 + 1) \geq 0.$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η ισότητα

$$\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} = 0$$

ισχύει αν και μόνο αν $x = 1$. Επίσης, η ισότητα:

$$\ln((x-1)^2 + 1) \geq 0$$

ισχύει αν και μόνο αν $x = 1$. Συνεπώς, η ισότητα $f'(x) = -1$ ισχύει αν και μόνο αν $x = 1$.

(ii) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + \left(2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq [(\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2] - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\lambda + \frac{1}{2} - \lambda} \geq -1 \quad (*)$$

Για $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύει $\lambda + \frac{1}{2} > \lambda$.

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$, με

$$f'(x_0) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\lambda + \frac{1}{2} - \lambda} = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}}.$$

Όμως, από **Δ3(i)**, ισχύει $f'(x_0) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1$. Άρα, η (*) ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ4. Η ευθεία $y = -x + 2$ εφάπτεται στην C_f . Λύνουμε:

$$g(x) = -x + 2 \Leftrightarrow -x^3 - x + 2 = -x + 2$$

$$\Leftrightarrow -x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα, η $y = -x + 2$ τέμνει την C_g στο σημείο με τετμημένη 0. Η εφαπτομένη της C_g στο 0 είναι:

$$y - g(0) = g'(0)(x - 0)$$

Είναι $g'(x) = -3x^2 - 1$, άρα, $g'(0) = -1$, επομένως,

$$y - 2 = -1 \cdot x \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

Άρα, η $y = -x + 2$ είναι κοινή εφαπτομένη για C_f και C_g (στο 1 για την f και στο 0 για την g).

Έστω ότι υπάρχει μια άλλη κοινή εφαπτομένη $y = \lambda x + \mu$ που εφάπτεται με την C_f στο $x_1 \neq 1$ και με την C_g στο x_2 . Τότε:

$$f'(x_1) = \lambda > -1 \quad (\text{από } \Delta 3(i))$$

$$g'(x_2) = -3x_2^2 - 1 \leq -1, \quad \text{δηλαδή } \lambda \leq -1$$

και έχουμε καταλήξει σε άτοπο. Συνεπώς, η $y = -x + 2$ είναι η μοναδική κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g .

Δ4 (β' τρόπος).

Έστω $M(x_1, f(x_1))$ σημείο επαφής της C_f με την κοινή εφαπτομένη (ε) και $K(x_2, g(x_2))$ σημείο επαφής της C_g με την κοινή εφαπτομένη (ε) . Τότε:

$$(\varepsilon): y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1) \cdot x - x_1 \cdot f'(x_1) + f(x_1) \quad (1)$$

και

$$(\varepsilon): y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = g'(x_2) \cdot x - x_2 \cdot g'(x_2) + g(x_2) \quad (2)$$

Πρέπει:

$$f'(x_1) = g'(x_2) \quad (*)$$

$$-x_1 \cdot f'(x_1) + f(x_1) = -x_2 \cdot g'(x_2) + g(x_2) \quad (**)$$

όπου $g'(x) = -3x^2 - 1$. Έχουμε:

$$(*) \Leftrightarrow f'(x_1) = -3x_2^2 - 1 \Leftrightarrow (f'(x_1) + 1) + (3x_2^2) = 0.$$

Όμως,

- $f'(x_1) + 1 \geq 0$ για κάθε $x_1 \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_1 = 1$,
- $3x_2^2 \geq 0$ για κάθε $x_2 \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_2 = 0$.

Παρατηρούμε ότι για $x_1 = 1$ και $x_2 = 0$ επαληθεύεται και η (**).

Άρα, υπάρχει μοναδική κοινή εφαπτομένη η οποία εφάπτεται της C_f στο $M(1, f(1))$ και της C_g στο $K(0, g(0))$ και η οποία έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): y = -x + 2.$$

Δ4 (γ' τρόπος).

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = -3x^2 - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι:

- $g'(x) = -3x^2 - 1 \leq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.
- $f'(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$ (από **Δ3(i)**).

Συνεπώς

$$g'(x) \leq -1 \leq f'(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν M το σημείο επαφής της εφαπτομένης (ε) με την C_f τότε $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in \mathbb{R}$ και

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Αν K το σημείο επαφής της εφαπτομένης (η) με την C_g τότε $K(x_1, g(x_1))$ με $x_1 \in \mathbb{R}$ και

$$(\eta): y - g(x_1) = g'(x_1)(x - x_1)$$

Για να έχουν οι C_f, C_g κοινή εφαπτομένη, πρέπει οι (ε) και (η) να ταυτίζονται. Άρα, πρέπει οι συντελεστές των (ε) και (η) να είναι ίσοι μεταξύ τους. Άρα,

$$f'(x_0) = g'(x_1).$$

Όμως, $g'(x_1) \leq -1 \leq f'(x_0)$. Άρα,

$$g'(x_1) \leq -1 \text{ και } f'(x_0) \geq -1 \text{ και } f'(x_0) = g'(x_1).$$

Συνεπώς,

$$g'(x_1) = -1 \text{ και } f'(x_0) = -1$$

και οι ισότητες αυτές ισχύουν μόνο για $x_1 = 0$ και $x_0 = 1$. Τότε οι εφαπτομένες είναι οι:

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

$$(\eta): y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

Άρα, η $y = -x + 2$ είναι η μοναδική κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g .



αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ