ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε το $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha)-G(\beta)$.

β) Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

δ) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 9

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 7

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **Β1**, **Β2**, **Β3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Γ3. Αν $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Γ3**, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$$

όταν $x\in[0,+\infty)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi}\big(f(x)+f''(x)\big)\eta\mu x\,dx = \pi$
- $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=1$
- $e^{f(x)}+x=f\big(f(x)\big)+e^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(\pi)=\pi$ (μονάδες 4) και $f'(0)=1$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

Δ2. **α)** Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$. **Μονάδες 6**

Δ4. Να δείξετε ότι $0<\int_1^{e^{\pi}}\dfrac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$. **Μονάδες 6**

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ:

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο ΘΕΩΡΗΜΑ i ερώτημα , σελ. 262.

Α2. Σχολικό βιβλίο ΟΡΙΣΜΟΣ , σελ. 141.

Α3. Σχολικό βιβλίο ΘΕΩΡΗΜΑ , σελ. 246-247.

Α4. α. Λάθος β. Σωστό γ. Λάθος δ. Σωστό ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή με:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

και $\quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow x > 0.$

Κάνουμε πίνακα μονοτονίας της f:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$

Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. Η f έχει ολικό ελάχιστο για $x_0 = 0$ το $f(0) = 0$.

Β2. Η f ' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως ρητή με:

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{2(x^2+1)^2 - 2x2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1) - 8x^2}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{2x^2 + 2 - 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{2 - 6x^2}{(x^2+1)^3}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε $\quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

και $\quad f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3} > 0 \Leftrightarrow 2 - 6x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Κάνουμε πίνακα για τη συνάρτηση f:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f			Σ.Κ		Σ.Κ		

Επομένως, η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$ και $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, η f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$. Η f έχει σημεία καμπής τα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$,

δηλαδή τα σημεία $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$.

Β3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

<u>Πλάγια-Οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$</u>

Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \in \mathbb{R}.$$

Άρα, $\lambda = 0$.

Ακόμη, έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2}{x^2+1} - 0\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \in \mathbb{R}.$$

Άρα, $\beta = 1$.

Συνεπώς, η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Πλάγια-Οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\in\mathbb{R}.$$

Άρα, $\lambda=0$.

Ακόμη, έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{x^2+1}-0\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1\in\mathbb{R}.$$

Άρα, $\beta=1$.

Συνεπώς, η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

B4. (**Προαιρετικά** , ελέγχουμε αν η f είναι άρτια ή περιττή ή περιοδική.

Η f είναι άρτια στο $\mathbb{R}$ αφού για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το $-x\in\mathbb{R}$ και

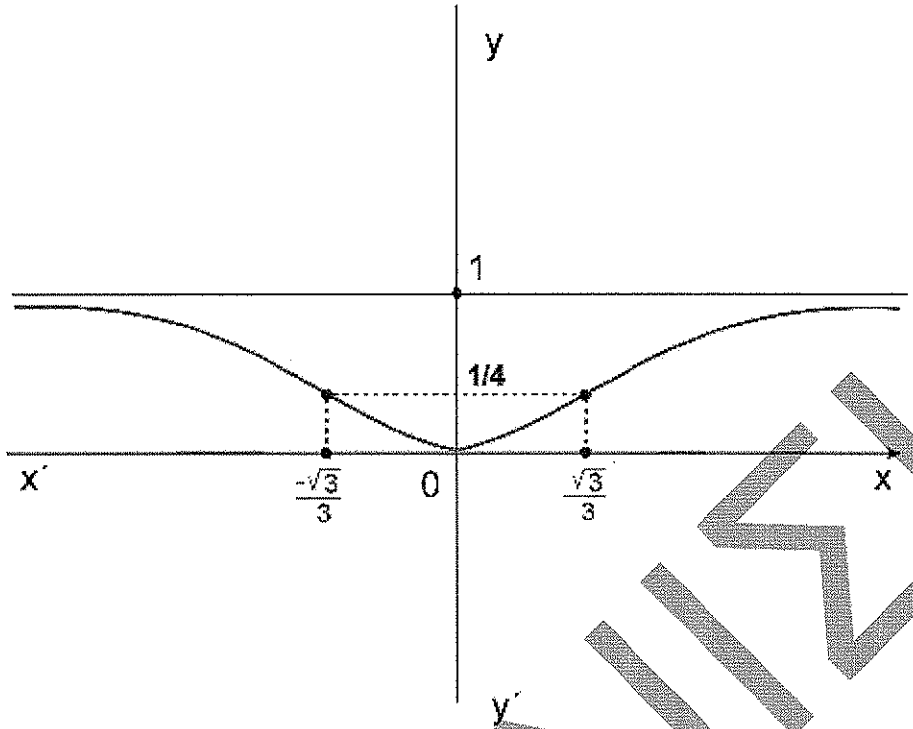
$f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}=f(x)$, για κάθε $x\in R$.

Άρα, η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.)

Κάνουμε τον πίνακα μεταβολών της f:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f'(x)		−		−	0	+		+	
f''(x)		−	0	+		+	0	−	
f	1	$\searrow$	ΣΚ	$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$	Σ Κ	$\nearrow$	1

Η γραφική παράσταση της f είναι:



<u>ΘΕΜΑ Γ:</u>

Γ.1. Θεωρώ τη συνάρτηση $k(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \epsilon R$. Η k είναι συνεχής στο R ως διαφορά και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Η k είναι παραγωγίσιμη στο R ως διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$k'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1), x \epsilon R$

$k'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \, ή \, e^{x^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \, ή \, e^{x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \, ή \; x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Για το πρόσημο της $e^{x^2} - 1$ έχουμε: $e^{x^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow x^2 > 0, ισχύει \, \forall x \epsilon R^*$

Τα διαστήματα μονοτονίας της k φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
2x		-	0	+	
$e^{x^2} - 1$		+	0	+	
k'(x)		-	0	+	
k		↘	O.E k(0)=0	↗	

Επομένως, λόγω του ολικού ελαχίστου ισχύει:

$k(x) \geq k(0) \Leftrightarrow k(x) \geq 0, \forall x \epsilon R$ (η ισότητα ισχύει μόνο για x=0).

Άρα $k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Γ.2. Λύνω στο R την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 = 0 \overset{(\Gamma.1)}{\Longleftrightarrow} x = 0.$$

Επομένως, $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow |f(x)| = \left|e^{x^2} - x^2 - 1\right| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |f(x)| = |k(x)| \overset{k(x) \geq 0, \forall x \epsilon R}{\Longleftrightarrow} |f(x)| = k(x), x \epsilon R.$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και διάφορη του 0 σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0), (0, +\infty)$, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά.

Άρα:

- Για $x \epsilon (-\infty, 0)$:

$$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \epsilon (-\infty, 0) \text{ ή } f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1), x \epsilon (-\infty, 0)$$

- Για $x \epsilon (0, +\infty)$:

$$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \epsilon (0, +\infty) \text{ ή } f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1), x \epsilon (0, +\infty)$$

- f(0)=0.

Επομένως,

ή $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \epsilon R$

ή $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1), x \epsilon R$

ή $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, x \leq 0 \\ -(e^{x^2} - x^2 - 1), x > 0 \end{cases}$

ή $f(x) = \begin{cases} -(e^{x^2} - x^2 - 1), x \leq 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1, x > 0 \end{cases}$

Γ.3. $f'(x) = 2x\left(e^{x^2} - 1\right), x \epsilon R$. Η f ' παραγωγίσιμη ως γινόμενο, διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο R με:

$f''(x) = 2\left(e^{x^2} - 1\right) + 2x\left(2xe^{x^2}\right) = 2\left(e^{x^2} - 1\right) + 4x^2 e^{x^2}, x \epsilon R$

<u>1ος τρόπος</u>

Όμως: $e^{x^2} - 1 \geq 0, \forall x \epsilon R, \mu\varepsilon\ \tau o\ \ "=" \ \mu \acute{o} \nu o\ \gamma\iota\alpha\ x = 0$. (από Γ.1)

και $4x^2 e^{x^2} \geq 0, \forall x \epsilon R, \mu\varepsilon\ \tau o\ \ "=" \ \mu \acute{o} \nu o\ \gamma\iota\alpha\ x = 0$.

Άρα, $f''(x) \geq 0,\ \forall x \epsilon R, \mu\varepsilon\ \tau o\ "="\ \mu \acute{o} \nu o\ \gamma\iota\alpha\ x = 0.$

Οπότε $\left.\begin{array}{l} f''(x) > 0, \forall x \epsilon (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ f' \sigma \upsilon \nu \varepsilon \chi \acute{\eta} \varsigma\ \sigma \tau o\ x_0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f' \nearrow$ R

Άρα η f είναι κυρτή στο R.

<u>2^{ος} τρόπος</u>

$$f^{(3)}(x) = 4xe^{x^2} + 8xe^{x^2} + 8x^3e^{x^2} = 12xe^{x^2} + 8x^3e^{x^2} = 4xe^{x^2}(3+2x^2),\ \ x \in \mathbb{R}$$

$$f^{(3)}(x) = 0 \Leftrightarrow 4xe^{x^2}(3+2x^2) = 0 \underset{3+2x^2>0}{\overset{e^{x^2}>0}{\Leftrightarrow}} x = 0$$

$$f^{(3)}(x) > 0 \Leftrightarrow 4xe^{x^2}(3+2x^2) > 0 \underset{3+2x^2>0}{\overset{e^{x^2}>0}{\Leftrightarrow}} x > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f^{(3)}(x)$	-	0	+
$f''(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα η f'' παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 και είναι το $f''(0) = 0$

Άρα, $f''(x) \geq 0,\ \forall x \epsilon R, \mu\varepsilon\ \tau o\ "="\ \mu \acute{o} \nu o\ \gamma\iota\alpha\ x = 0.$

Οπότε $\left.\begin{array}{l} f''(x) > 0, \forall x \epsilon (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ f' \sigma \upsilon \nu \varepsilon \chi \acute{\eta} \varsigma\ \sigma \tau o\ x_0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f' \nearrow$ R

Άρα η f είναι κυρτή στο R.

Γ.4 $f(|\eta\mu|x| + 3|) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x),\ \ x\epsilon[0, +\infty)$ (1)

<u>1^{ος} τρόπος</u>

Θεωρώ $\varphi(x) = f(x+3) - f(x), x \geq 0$

Η φ συνεχής στο $[0, +\infty)$ ως σύνθεση και διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Η φ παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\varphi'(x) = f'(x+3) - f'(x), x \geq 0$$

Για κάθε $x\epsilon[0, +\infty)$ έχω:

$x + 3 > x \overset{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(x+3) > f'(x) \Rightarrow \varphi'(x) > 0$

Άρα φ $\nearrow [0, +\infty)$, άρα φ '1 − 1' στο $[0, +\infty)$.

(1) $\Leftrightarrow \varphi(|\eta\mu x|) = \varphi(x) \xLeftrightarrow{\text{"1-1" } \sigma\tau o\ [0,+\infty)} |\eta\mu x| = x \overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow x = 0$

(Από σχολικό σελ. 170 $|\eta\mu x| \leq |x|, \forall x \epsilon R$, η ισότητα μόνο στο x_0=0).

2ος τρόπος

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 0 είναι ρίζα της εξίσωσης (1).

Θα δείξουμε ότι είναι μοναδική ρίζα .

Έστω ότι υπάρχει $x_0 > 0$ ρίζα της εξίσωσης.Τότε :

$$f\left(|\eta\mu x_0|+3\right)-f\left(|\eta\mu x_0|\right)=f\left(x_0+3\right)-f\left(x_0\right) \quad (*)$$

Ισχύουν προφανώς $|\eta\mu x_0|<|\eta\mu x_0|+3$, $x_0<x_0+3$

καθώς επίσης $|\eta\mu x_0|<x_0$ (ως γνωστόν $|\eta\mu x|\leq|x|$ με ισότητα μόνο για $x=0$)

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $|\eta\mu x_0|+3<x_0$

  Τότε $|\eta\mu x_0|<|\eta\mu x_0|+3<x_0<x_0+3$

  Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[|\eta\mu x_0| , |\eta\mu x_0|+3\right]$, $\left[x_0 , x_0+3\right]$ ως διαφορά και σύνθεση συνεχών.

  Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left(|\eta\mu x_0| , |\eta\mu x_0|+3\right)$, $\left(x_0 , x_0+3\right)$ ως διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων.

  Άρα από ΘΜΤ υπάρχουν $\xi_1\in\left(|\eta\mu x_0| , |\eta\mu x_0|+3\right)$, $\xi_2\in\left(x_0 , x_0+3\right)$ ώστε :

$$f'\left(\xi_1\right)=\frac{f\left(|\eta\mu x_0|+3\right)-f\left(|\eta\mu x_0|\right)}{|\eta\mu x_0|+3-|\eta\mu x_0|}=\frac{f\left(|\eta\mu x_0|+3\right)-f\left(|\eta\mu x_0|\right)}{3}$$

$$f'\left(\xi_2\right)=\frac{f\left(x_0+3\right)-f\left(x_0\right)}{x_0+3-x_0}=\frac{f\left(x_0+3\right)-f\left(x_0\right)}{3}$$

Από (*) προκύπτει

$$\frac{f\left(|\eta\mu x_0|+3\right)-f\left(|\eta\mu x_0|\right)}{3}=\frac{f\left(x_0+3\right)-f\left(x_0\right)}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'\left(\xi_1\right)=f'\left(\xi_2\right) \underset{\substack{\alpha\varphi o\acute{\upsilon} \\ f'\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}}{\overset{f'\ 1-1}{\Leftrightarrow}} \xi_1=\xi_2$$

άτοπο αφού τα ξ_1 , ξ_2 ανήκουν σε ξένα διαστήματα .

- $x_0 \le |\eta\mu x_0| + 3$

Τότε $|\eta\mu x_0| < x_0 \le |\eta\mu x_0| + 3 < x_0 + 3$

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[|\eta\mu x_0|, x_0\right], \left[|\eta\mu x_0|+3, \ x_0+3\right]$ ως διαφορά και σύνθεση συνεχών.

Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left(|\eta\mu x_0|, x_0\right), \left(|\eta\mu x_0|+3, \ x_0+3\right)$ ως διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων.

Άρα από ΘΜΤ υπάρχουν $\xi_1 \in \left(|\eta\mu x_0|, x_0\right)$, $\xi_2 \in \left(|\eta\mu x_0|+3, \ x_0+3\right)$ ώστε :

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(|\eta\mu x_0|)}{x_0 - |\eta\mu x_0|}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_0+3) - f(|\eta\mu x_0|+3)}{x_0 + 3 - |\eta\mu x_0| - 3} = \frac{f(x_0+3) - f(|\eta\mu x_0|+3)}{x_0 - |\eta\mu x_0|}$$

Από (*) προκύπτει

$$f(|\eta\mu x_0|+3) - f(|\eta\mu x_0|) = f(x_0+3) - f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) - f(|\eta\mu x_0|) = f(x_0+3) - f(|\eta\mu x_0|+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(|\eta\mu x_0|)}{x_0 - |\eta\mu x_0|} = \frac{f(x_0+3) - f(|\eta\mu x_0|+3)}{x_0 - |\eta\mu x_0|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi_1) = f'(\xi_2) \underset{\substack{\alpha\varphi o\acute{\upsilon} \\ f'\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}}{\overset{f'\ 1-1}{\Leftrightarrow}} \xi_1 = \xi_2$$

άτοπο αφού τα ξ_1 , ξ_2 ανήκουν σε ξένα διαστήματα .

Τελικά ο αριθμός 0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

ΘΕΜΑ Δ:

Δ1. Ισχύει ότι

$$\int_0^{\pi}(f(x)+f''(x))\cdot ημx\,dx=π \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\cdot ημx+f''(x)\cdot ημx\,dx=π \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\cdot ημx\,dx+\int_0^{\pi} f''(x)\cdot ημx\,dx=π \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\cdot ημx\,dx+\int_0^{\pi} (f'(x))'\cdot ημx\,dx=π \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\cdot ημx\,dx+\left[f'(x)\cdot ημx\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\cdot συνx\,dx=π \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\cdot ημx\,dx+f'(π)\cdot ημπ-f'(0)\cdot ημ0-\int_0^{\pi} f'(x)\cdot συνx\,dx=π \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\cdot ημx\,dx-\int_0^{\pi} f'(x)\cdot συνx\,dx=π \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\cdot ημx\,dx-\left[f(x)\cdot συνx\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f(x)\cdot ημx\,dx=π \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -f(π)\cdot συνπ+f(0)\cdot συν0=π \Leftrightarrow f(π)+f(0)=π \quad (1)$$

Ακόμη στο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{ημx}=1$, θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{ημx} \Leftrightarrow f(x)=g(x)\cdot ημx$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$.

Εφόσον η f είναι συνεχής στο x_o=0, τότε

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(g(x)\cdot ημx)=\lim_{x\to 0} g(x)\cdot \lim_{x\to 0} ημx=1\cdot 0=0.$$

Άρα η σχέση (1) γίνεται $(1) \Leftrightarrow f(π)+f(0)=π \overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} f(π)=π$.

Ακόμη η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο x_o=0 συνεπώς

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)ημx}{x}=\lim_{x\to 0} g(x)\cdot \lim_{x\to 0}\frac{ημx}{x}=1\cdot 1=1$$

Δ2. α)Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_o. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο x_o. Το x_o είναι εσωτερικό του $\mathbb{R}$, άρα από Θεώρημα Fermat ισχύει ότι $f'(x_o)=0$. Παραγωγίζοντας τη δοθείσα κατά μέλη έχουμε

$$e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^x,\ x\in\mathbb{R} \text{ άρα } e^{f(x)}\cdot f'(x)+1=f'(f(x))\cdot f'(x)+e^x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Για x=x_o έχουμε

$$e^{f(x_o)}\cdot f'(x_o)+1=f'(f(x_o))\cdot f'(x_o)+e^{x_o} \Leftrightarrow$$
$$e^{f(x_o)}\cdot 0+1=f'(f(x_o))\cdot 0+e^{x_o} \Leftrightarrow 1=e^{x_o} \Leftrightarrow e^0=e^{x_o} \Leftrightarrow 0=x_o$$

άρα $f'(0)=0$. Άτοπο γιατί f'(0)=1.

Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $\mathbb{R}$.

β) Από (α) ερώτημα $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με f ' συνεχής στο $\mathbb{R}$, αφού f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R συνεπώς διατηρεί πρόσημο. Εφόσον f'(0)=1>0 τότε η f'(x)>0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα άρα το σύνολο τιμών της είναι $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$ συνεπώς $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Για κάθε $x > 0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$

Έχουμε λοιπόν για κάθε $x > 0$: $\left|\frac{\eta\mu x}{f(x)}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|f(x)|} = \frac{1}{|f(x)|} \cdot |\eta\mu x| \leq \frac{1}{f(x)}$, άρα

$$\left|\frac{\eta\mu x}{f(x)}\right| \leq \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \leq \frac{\eta\mu x}{f(x)} \leq \frac{1}{f(x)}$$

Εφόσον $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{f(x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = 0$, τότε από κριτ.παρεμβολής έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu x}{f(x)}\right) = 0$.

Ομοίως για κάθε $x > 0$: $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|} = \frac{1}{|f(x)|} \cdot |\sigma\upsilon\nu x| \leq \frac{1}{f(x)}$, άρα

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right| \leq \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{1}{f(x)}.$$

Εφόσον $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{f(x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = 0$, τότε από κριτ. παρεμβολής έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right) = 0$.

Τελικά $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{f(x)} + \lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0 + 0 = 0$

Δ4.

<u>1ος τρόπος</u>

Για το ολοκλήρωμα $\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx$ θέτουμε lnx=u άρα $\frac{1}{x} dx = du$ και

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = e^\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = \pi \end{cases}$, συνεπώς $\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^\pi f(u) du$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$0 < \int_0^\pi f(u) du < \pi^2.$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα

$$0 \le x \le \pi \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0) \le f(x) \le f(\pi) \Leftrightarrow 0 \le f(x) \le \pi$$

Συνεπώς $0 \le f(x)$ για κάθε $x \in [0,\pi]$, η ισότητα ισχύει μόνο για x=0, άρα από γνωστό θεώρημα ισχύει ότι $0 < \int_0^{\pi} f(x)dx \ (2)$

και

$f(x) \le \pi \Rightarrow \pi - f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [0,\pi]$, η ισότητα ισχύει μόνο για x=π, άρα από γνωστό θεώρημα ισχύει ότι $\int_0^{\pi}(\pi - f(x))dx > 0 \Rightarrow \int_0^{\pi}\pi dx - \int_0^{\pi} f(x)dx > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}\pi dx > \int_0^{\pi} f(x)dx \Rightarrow \pi\cdot(\pi - 0) > \int_0^{\pi} f(x)dx \Rightarrow \pi^2 > \int_0^{\pi} f(x)dx \ (3)$$

Τελικά από σχέσεις (2) και (3) έχουμε $0 < \int_0^{\pi} f(x)dx < \pi^2$

<u>2ος τρόπος</u>

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα

$$1 \le x \le e^{\pi} \Leftrightarrow \ln 1 \le \ln x \le \ln e^{\pi} \Leftrightarrow 0 \le \ln x \le \pi \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0) \le f(\ln x) \le f(\pi) \Leftrightarrow 0 \le f(\ln x) \le \pi \overset{1\le x\le e^{\pi}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{1\le x\le e^{\pi}}{\Leftrightarrow} 0 \le \frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{\pi}{x}$$

Συνεπώς $0 \le \frac{f(\ln x)}{x}$ για κάθε $x \in \left[1, e^{\pi}\right]$, η ισότητα ισχύει μόνο για x=1, άρα από γνωστό θεώρημα ισχύει ότι $0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx \ (2)$

και $\frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{\pi}{x} \Leftrightarrow 0 \le \frac{\pi}{x} - \frac{f(\ln x)}{x}$ για κάθε $x \in [0,\pi]$, η ισότητα ισχύει μόνο για $x = e^{\pi}$, άρα από γνωστό θεώρημα ισχύει ότι

$$\int_1^{e^{\pi}}\left(\frac{\pi}{x} - \frac{f(\ln x)}{x}\right)dx > 0 \Rightarrow \int_1^{e^{\pi}}\frac{\pi}{x}dx - \int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{e^{\pi}}\frac{\pi}{x}dx > \int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx \Rightarrow [\pi \ln x]_1^{e^{\pi}} > \int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx \Rightarrow \pi^2 > \int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx \ (3)$$

Τελικά από σχέσεις (2) και (3) έχουμε $0 < \int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$