ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=0$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to -\infty}\alpha^x=+\infty$.

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ell n x,\ x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x},\ x\neq 1$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

Μονάδες 5

Β2. Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ell n\left(\dfrac{x}{1-x}\right),\ x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

Β3. Αν $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$, και το σημείο $A\left(\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το Α, τις οποίες και να βρείτε.

Μονάδες 8

Γ2. Αν (ε_1): $y=-x$ και (ε_2): $y=x-\pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**, τότε να σχεδιάσετε τις (ε_1), (ε_2) και τη γραφική παράσταση της f, και να αποδείξετε ότι $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{\pi^2}{8}-1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1), (ε_2), και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}$.

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx > e-1-\pi$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0) \\ e^x\eta\mu x, & x\in[0,\pi] \end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x)=e^{5x}$, $x\in\mathbb{R}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=\pi$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΛΥΣΕΙΣ:

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 135

Α2. α) Ψ

β) $f(x) = |x|$ συνεχής στο $x_0 = 0$,αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, αφού $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1$ και $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1$.

Α3. Σχολικό Βιβλίο σελ.73

Α4.

α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β.

Β1. Τα πεδία ορισμού των f, g είναι αντίστοιχα $D_f = (0, +\infty)$ και $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της fog. Είναι

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \text{ και } \frac{x}{1-x} > 0\right\}.$$

Έχουμε

$$\frac{x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Άρα,

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \text{ και } 0 < x < 1\} = (0,1).$$

Βρίσκουμε τον τύπο της fog:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

Τελικά, έχουμε

$$(fog)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right), \quad \text{με } D_{fog} = (0,1).$$

B2. **(Πρώτος Τρόπος)**

Έστω $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $h(x_1) = h(x_2)$. Τότε, έχουμε

$$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow \ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right) = \ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right) \Rightarrow \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2}$$

$$\Rightarrow x_1 - x_1 \cdot x_2 = x_2 - x_1 \cdot x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Συνεπώς, η συνάρτηση $h = f o g$ είναι $1-1$ και άρα αντιστρέφεται. Για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση, θέτουμε $y = h(x)$ και λύνουμε ως προς x. Έχουμε

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow x = e^y - x \cdot e^y \Leftrightarrow x + x \cdot e^y = e^y$$

$$\Leftrightarrow x(1+e^y) = e^y \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{1+e^y},$$

με

$$0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{e^y}{1+e^y} < 1 \overset{1+e^y>0}{\Longleftrightarrow} 0 < e^y < 1 + e^y$$

που ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Επομένως, η αντίστροφη συνάρτηση είναι

$$h^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, \text{ με } D_{h^{-1}} = \mathbb{R}.$$

B2. **(Δεύτερος τρόπος)**

Έχουμε τη συνάρτηση

$$h(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \text{ με } x \in (0,1).$$

- Η h είναι συνεχής στο διάστημα $(0,1)$.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$ με παράγωγο
$$h'(x) = \frac{1}{x(1-x)} > 0, \text{ για κάθε } x \in (0,1).$$

Άρα, η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1)$. Επομένως, είναι και $1-1$ και άρα αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της h^{-1} είναι το σύνολο τιμών $h\big((0,1)\big)$ της συνάρτησης h. Επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα, παίρνουμε

$$D_{h^{-1}} = h\big((0,1)\big) = \left(\lim_{x\to 0^+} h(x), \ \lim_{x\to 1^-} h(x)\right).$$

Υπολογίζουμε τα όρια.

- Έχουμε:
$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$
Θέτουμε $u = \frac{x}{1-x}$. Τότε $u > 0$ για $x \in (0,1)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{1-x} = 0$. Άρα,

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty.$$

- Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

Θέτουμε $u = \frac{x}{1-x}$. Τότε $u > 0$ για $x \in (0,1)$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1^-} x \cdot \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$.

Άρα,

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = \lim_{u\to +\infty} \ln u = +\infty.$$

Τελικά,

$$D_{h^{-1}} = \left(\lim_{x\to 0^+} h(x),\ \lim_{x\to 1^-} h(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Βρίσκουμε τον τύπο της αντίστροφης:

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow x = e^y - x\cdot e^y \Leftrightarrow x + x\cdot e^y = e^y$$

$$\Leftrightarrow x(1+e^y) = e^y \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{1+e^y}.$$

Τελικά, η αντίστροφη της h είναι

$$h^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x},\ \text{ με πεδίο ορισμού } D_{h^{-1}} = \mathbb{R}.$$

Β3. Έχουμε $\varphi(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, με $x \in \mathbb{R}$.

- Η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

- Η φ είναι παραγωγίσιμη με

$$\varphi'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

- Η δεύτερη παράγωγος της φ είναι:

$$\varphi''(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3},\ x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε $\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, και

$$\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0.$$

Επομένως, η συνάρτηση φ είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και κοίλη στο διάστημα $[0, +\infty)$. Η φ έχει σημείο καμπής το $A(0, \varphi(0))$, δηλαδή το $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$		Σ.Κ.	

B4.

Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\underset{D.H.}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1\in\mathbb{R}.$$

Άρα, η $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $+\infty$.

Υπολογίζουμε το όριο :

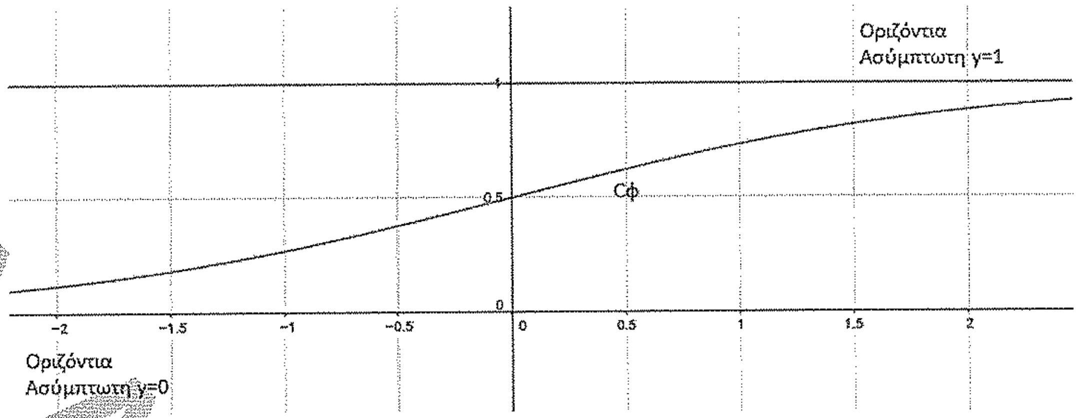
$\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=0\in\mathbb{R}$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1)=1$.

Άρα, η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $-\infty$.

Κάνουμε τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης φ:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$		$+$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$		Σ.Κ $\left(0,\frac{1}{2}\right)$	

Ακολουθεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης μαζί με τις οριζόντιες ασύμπτωτες:



<u>Σχόλιο</u> Η C_φ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες γιατί είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

<u>ΘΕΜΑ Γ.</u>

Γ1. <u>(Πρώτος Τρόπος)</u>

$f(x) = -\eta\mu x,\ x \in [0,\pi]$

Η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως τριγωνομετρική στο σύνολο $[0,\pi]$ με παράγωγο:

$f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x, x \in [0,\pi]$

Έστω $K(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης

$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0(x - x_0)$ (1)

$$A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)$$

Θεωρώ $g(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{\pi}{2}, x \in [0,\pi]$

g συνεχής στο $[0,\pi]$ ως πράξεις συνεχών

$g'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right), x \in [0,\pi]$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \text{ ή } \frac{\pi}{2} - x = 0 \overset{x\in[0,\pi]}{\Longleftrightarrow}$

$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \pi \text{ ή } x = \frac{\pi}{2}$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) > 0 \overset{x\in(0,\pi)}{\Longleftrightarrow} \frac{\pi}{2} - x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$g'(x)$	-		+
$g(x)$	Ο.Μ ↘	Ο.Ε	↗ Ο.Μ

Η g είναι φθίνουσα στο $[0,\frac{\pi}{2}]$, αύξουσα στο $[\frac{\pi}{2},\pi]$ παρουσιάζει Ο.Ε. για $x=\frac{\pi}{2}$ το $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi}{2}$, Ο.Μ. για $x=0$ και για $x=\pi$ το $g(0)=g(\pi)=0$. Άρα για κάθε $x\in[0,\pi]$ ισχύει $g(x)\leq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$ και για $x=\pi$. Άρα η $g(x)=0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $x=0, x=\pi$. Επομένως οι εφαπτομένες στα σημεία αυτά είναι:

- για $x=0$ (ε_1): $y+\eta\mu 0=-\sigma\upsilon\nu 0\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=-x$
- για $x=\pi$ (ε_2): $y+\eta\mu\pi=-\sigma\upsilon\nu\pi\cdot(x-\pi)\Leftrightarrow y=x-\pi$

Γ1. <u>(Δεύτερος Τρόπος)</u>

$f(x)=-\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$

Η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως τριγωνομετρική στο σύνολο $[0,\pi]$ με παράγωγο:

$f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x, x\in[0,\pi]$

Έστω $K(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης

$$(\varepsilon): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0(x-x_0)$$

$$A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)\in(\varepsilon)\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)\ (1)$$

Προφανείς ρίζες τις εξίσωσης (1) είναι οι x=0 και x=π

Θεωρώ $g(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\frac{\pi}{2}, x\in[0,\pi]$

Υποθέτω ότι η εξίσωση g(x)=0 έχει περισσότερες από δυο ρίζες , δηλαδή τουλάχιστον 3 ρίζες $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$ με

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in[0,\pi]$

Η g είναι συνεχής στα $[\alpha_1,\alpha_2],[\alpha_2,\alpha_3]$ ως άθροισμα, γινόμενο και διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Η g είναι παραγωγίσιμη στα $(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_2,\alpha_3)$ ως άθροισμα, γινόμενο και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$g'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$g'(\alpha_1) = g'(\alpha_2) = g'(\alpha_3) = 0$

Άρα από θεώρημα Rolle η εξίσωση $g'(x) = 0$ έχει:

α) Μια τουλάχιστον ρίζα $\beta_1 \in (\alpha_1, \alpha_2)$

β) Μια τουλάχιστον ρίζα $\beta_2 \in (\alpha_2, \alpha_3)$

Επομένως η εξίσωση $g'(x) = 0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο $(\alpha_1, \alpha_3) \subseteq (0, \pi)$

<u>άτοπο</u> διότι η εξίσωση έχει μοναδική λύση στο (0,π) αφού :

$g'(x) = 0 \underset{\eta\mu x \neq 0}{\overset{x \in (0,\pi)}{\Leftrightarrow}} \frac{\pi}{2} - x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

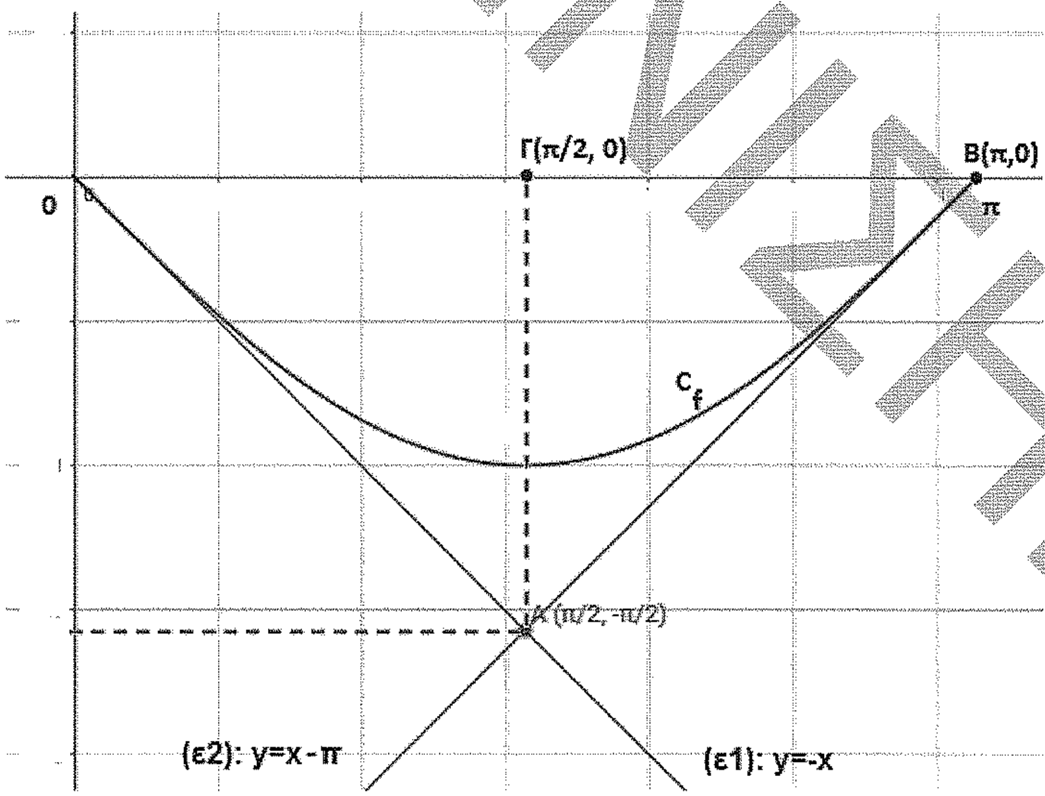
Επομένως η εξίσωση g(x)=0 έχει το πολύ δυο ρίζες στο $[0, \pi]$

Άρα η $g(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $x = 0, x = \pi$ στο $[0, \pi]$

Επομένως οι εφαπτομένες στα σημεία αυτά είναι:

- για $x = 0$ (ε_1): $y + \eta\mu 0 = -\sigma\upsilon\nu 0 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = -x$
- για $x = \pi$ (ε_2): $y + \eta\mu\pi = -\sigma\upsilon\nu\pi \cdot (x - \pi) \Leftrightarrow y = x - \pi$

Γ2. Η γραφική παράσταση μαζί με τις εφαπτομένες είναι:



$$E_2 = \int_0^{\pi} \left(-f(x)\right)dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 2$$

$$\left(\overset{\Delta}{\mathrm{OAB}}\right) = \frac{1}{2}(\mathrm{OB})\cdot(\mathrm{A\Gamma}) = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$E_1 = \left(\overset{\Delta}{\mathrm{OAB}}\right) - E_2 = \frac{\pi^2}{4} - 2 = \frac{\pi^2 - 8}{4}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2 - 8}{4}}{2} = \frac{(\pi^2 - 8)}{8} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Γ3. <u>(Πρώτος Τρόπος)</u>

$f''(x) = \eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in (0,\pi)$ άρα f κυρτή στο $[0,\pi]$ άρα από γνωστό σχόλιο $f(x) \geq x - \pi$ για κάθε $x \in [0,\pi]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = \pi$.

Άρα $f(x) > x - \pi \Leftrightarrow f(x) - x + \pi > 0$, για κάθε $x \in (0,\pi)$ (2)

$\lim\limits_{x\to\pi^-}\left(f(x) - x + \pi\right) = 0$. Άρα $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{1}{f(x) - x + \pi} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to\pi}(f(x) + x) = \pi > 0$

Επομένως $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi} = \lim\limits_{x\to\pi^-}\left(f(x)+x\right)\cdot\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{1}{f(x)-x+\pi} = +\infty$

Γ3. <u>(Δεύτερος Τρόπος)</u>

- $\lim\limits_{x\to\pi}\left(f(x)+x\right) = \pi > 0$

- $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{1}{f(x)-x+\pi} = \lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{1}{-\eta\mu x - x + \pi}(*)$

θέτω u=x-π<0 αφού x<π *και* $\lim\limits_{x\to\pi^-}\left(x-\pi\right) = 0$

Άρα το όριο (*) γράφεται: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{-\eta\mu\left(\pi+u\right)-u} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\eta\mu u - u} = +\infty$

αφού:

$\lim\limits_{x\to 0^-}(\eta\mu u - u) = 0$ και

για $u \neq 0$: $|\eta\mu u| < |u| \underset{|u| = -u}{\overset{u<0}{\Leftrightarrow}} |\eta\mu u| < -u \Leftrightarrow u < \eta\mu u < -u \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 < \eta\mu u - u < -2u$

Επομένως

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\left(f(x)+x\right)\cdot\lim_{x\to\pi^-}\frac{1}{f(x)-x+\pi}=+\infty$$

Γ4. <u>(Πρώτος Τρόπος)</u>

Από ερώτημα Γ3 έχω:

(2) $\Leftrightarrow f(x)>x-\pi \overset{x\in[1,e]}{\Longleftrightarrow} \frac{f(x)}{x}>\frac{x-\pi}{x}\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}>1-\frac{\pi}{x}$, άρα λόγω γνωστού θεωρήματος:

$$\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>[x-\pi\cdot lnx]_1^e\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>e-\pi lne-(1-\pi\cdot ln1)\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>e-\pi\cdot1-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>e-1-\pi$$

Γ4. <u>(Δεύτερος τρόπος)</u>

Για κάθε $x\in[1,e]$ ισχύει:

$$\eta\mu x\le1\Leftrightarrow-\eta\mu x\ge-1\overset{:x>0}{\Longleftrightarrow}-\frac{\eta\mu x}{x}\ge-\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}\ge-\frac{1}{x}$$

Επομένως:

$$\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx\ge\int_1^e-\frac{1}{x}dx\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx\ge[-\ln x]_1^e\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx\ge-1>e-1-\pi\ (\text{αφού } \pi\text{-}e>0)$$

<u>ΘΕΜΑ Δ.</u>

Δ1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το διάστημα $A_f=[-1,\pi]$.

- Για $x\in[-1,0)$, η f είναι συνεχής (ως σύνθεση των συνεχών x^4 και $\sqrt[3]{x}$).

- Για $x\in(0,\pi]$, η f είναι συνεχής (ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων e^x και $\eta\mu x$).

- Εξετάζουμε τη συνέχεια στο $x_0=0$. Έχουμε:
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0)=0.$$
Άρα, η f είναι συνεχής και στο $x_0=0$.

Τελικά, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$.

Εξετάζουμε την f ως προς την παράγωγο.

- Για $x \in (0,\pi]$, η f είναι παραγωγίσιμη με
$$f'(x) = (e^x \cdot \eta\mu x)' = e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x).$$

- Για $x \in [-1,0)$, η f γράφεται $f(x) = \sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{|x|^4} = (-x)^{\frac{4}{3}}$. Επομένως,
$$f'(x) = \frac{4}{3}(-x)^{1/3} \cdot (-x)' = -\frac{4}{3}(-x)^{1/3}.$$

- Στο σημείο $x_0 = 0$, έχουμε
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x \eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^x \cdot \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 1 \cdot 1 = 1.$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{-(-x)} = \lim_{x\to 0^-} -\sqrt[3]{\frac{(-x)^4}{(-x)^3}}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} -\sqrt[3]{-x} = 0.$$
Άρα,
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - 0} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - 0}$$
και επομένως, η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$:

- Για $x \in [-1,0)$, έχουμε
$$f'(x) = -\frac{4}{3}(-x)^{1/3} < 0.$$
Άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη στο διάστημα $[-1,0)$.

- Για $x \in (0,\pi]$, έχουμε $f'(x) = e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$. Άρα,
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \overset{e^x \neq 0}{\Longleftrightarrow} \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x.$$
Αν $\sigma\upsilon\nu x = 0$, τότε και $\eta\mu x = 0$, άτοπο. Άρα, $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ και η τελευταία εξίσωση γράφεται ισοδύναμα
$$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -1 \overset{x\in(0,\pi]}{\Longleftrightarrow} x = \frac{3\pi}{4}.$$

Επομένως, τα κρίσιμα σημεία της f είναι το $x_0 = 0$ (στο οποίο η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη) και το $x_1 = \frac{3\pi}{4}$.

Δ2. <u>(Πρώτος Τρόπος)</u>

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}, & x \in [-1,0) \\ e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x), & x \in (0,\pi] \end{cases}$$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

- Ισχύει $f^{'}(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,0)$ (από **Δ1**) και f συνεχής στο $[-1,0]$. Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,0]$.
- Έχουμε $f^{'}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$, η $f^{'}$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ και $f^{'}\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2} > 0$. Επομένως, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ και μάλιστα $f^{'}(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$. Επιπλέον, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$. Συνεπώς, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$.
- Ομοίως, έχουμε $f^{'}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$, η $f^{'}$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ και $f^{'}(\pi) = e^{\pi}(-1) < 0$. Επομένως, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ και μάλιστα $f^{'}(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$. Επιπλέον, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$. Συνεπώς, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$.

x	-1	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f^{'}(x)$	$-$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	↗		↘

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

- Στο $x = -1$, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1) = 1$.
- Στο $x = 0$, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$.
- Στο $x = \frac{3\pi}{4}$, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{3\pi/4}$.
- Στο $x = \pi$, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(\pi) = 0$.

ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Έστω $\Delta_1 = [-1,0]$, $\Delta_2 = \left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ και $\Delta_3 = \left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$.

- Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 και συνεχής σε αυτό το διάστημα, έχουμε ότι
$$f(\Delta_1) = [f(0), f(-1)] = [0,1].$$

- Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2 και συνεχής σε αυτό το διάστημα, έχουμε ότι

$$f(\Delta_2) = \left[f(0), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right].$$

- Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_3 και συνεχής σε αυτό το διάστημα, έχουμε ότι

$$f(\Delta_1) = \left[f(\pi), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right].$$

Ισχύει ότι $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} > 1$, διότι

$$\frac{3\pi}{4} > 1 \Rightarrow e^{\frac{3\pi}{4}} > e > \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} > 1.$$

Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f(A_f) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[0,\ \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right].$$

Δ2. <u>(ΔεύτεροςΤρόπος)</u>

Έχουμε

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}, & x \in [-1,0) \\ e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x), & x \in (0,\pi] \end{cases}$$

<u>ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ</u>

- Ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,0)$ (από **Δ1**) και f συνεχής στο $[-1,0]$. Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,0]$.

- Για $x \in (0,\pi)$, έχουμε $f'(x) = e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = e^x \eta\mu\chi(1 + \sigma\varphi x)$.
- Άρα,

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x \eta\mu\chi(1 + \sigma\varphi x) > 0 \xLeftrightarrow{e^x \eta\mu\chi > 0} \sigma\varphi x > -1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sigma\varphi x > \sigma\varphi\frac{3\pi}{4} \xLeftrightarrow{\sigma\varphi\chi \downarrow} 0 < x < \frac{3\pi}{4}$$

Επιπλέον, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$.
Συνεπώς, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$.

- $$f'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x \eta\mu\chi(1 + \sigma\varphi x) < 0 \xLeftrightarrow{e^x \eta\mu\chi > 0} \sigma\varphi x < -1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sigma\varphi x < \sigma\varphi\frac{3\pi}{4} \xLeftrightarrow{\sigma\varphi\chi \downarrow} \frac{3\pi}{4} < x < \pi$$

Επιπλέον, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

Συνεπώς, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

Άρα προκύπτει:

x	-1	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f'(x)$	$-$ ‖	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	↗		↘

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

- Στο $x = -1$, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1) = 1$.
- Στο $x = 0$, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$.
- Στο $x = \frac{3\pi}{4}$, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{3\pi/4}$.
- Στο $x = \pi$, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(\pi) = 0$.

ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Έστω $\Delta_1 = [-1,0]$, $\Delta_2 = \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ και $\Delta_3 = \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

- Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 και συνεχής σε αυτό το διάστημα, έχουμε ότι
$$f(\Delta_1) = [f(0), f(-1)] = [0,1].$$
- Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2 και συνεχής σε αυτό το διάστημα, έχουμε ότι
$$f(\Delta_2) = \left[f(0), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right].$$
- Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_3 και συνεχής σε αυτό το διάστημα, έχουμε ότι
$$f(\Delta_1) = \left[f(\pi), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right].$$

Ισχύει ότι $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} > 1$, διότι

$$\frac{3\pi}{4} > 1 \Longrightarrow e^{\frac{3\pi}{4}} > e > \sqrt{2} \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} > 1.$$

Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f(A_f) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[0, \ \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = g(x) - f(x) = e^{5x} - e^{x} \cdot \eta\mu x, \ \ A_h = [0, \pi].$$

Για την h ισχύει ότι

$$h(x) = e^{5x} - e^x \cdot \eta\mu x = e^x(e^{4x} - \eta\mu x),\ \ x \in [0, \pi].$$

και

$$0 \le x \le \pi \Leftrightarrow 0 \le 4x \le 4\pi \Leftrightarrow 1 \le e^{4x} \le e^{4\pi} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 - \eta\mu x \le e^{4x} - \eta\mu x \le e^{4\pi} - \eta\mu x.$$

Άρα,

$$0 \le 1 - \eta\mu x \le e^{4x} - \eta\mu x, \text{ για κάθε } x \in [0, \pi].$$

Τελικά,

$$h(x) \ge 0, \text{ για κάθε } x \in [0, \pi].$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το:

$$E = \int_0^\pi |g(x) - f(x)|\, dx = \int_0^\pi |h(x)|\, dx = \int_0^\pi h(x)\, dx = \int_0^\pi (e^{5x} - e^x \cdot \eta\mu x)\, dx$$
$$= \int_0^\pi e^{5x}\, dx - \int_0^\pi e^x \cdot \eta\mu x\, dx = \left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cdot \eta\mu x\, dx$$
$$= \frac{e^{5\pi}}{5} - \frac{1}{5} - \int_0^\pi e^x \cdot \eta\mu x\, dx \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε

$$I = \int_0^\pi e^x \cdot \eta\mu x\, dx = \int_0^\pi (e^x)' \cdot \eta\mu x\, dx = [e^x \cdot \eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x\, dx$$
$$= -\int_0^\pi (e^x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x\, dx = -[e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \cdot (-\eta\mu x)\, dx$$
$$= e^\pi + 1 - \int_0^\pi e^x \cdot \eta\mu x\, dx = e^\pi + 1 - I.$$

Άρα,

$$2I = e^\pi + 1 \Leftrightarrow I = \int_0^\pi e^x \cdot \eta\mu x\, dx = \frac{e^\pi + 1}{2}.$$

Τελικά, από την σχέση (1) παίρνουμε ότι το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \frac{e^{5\pi}}{5} - \frac{1}{5} - \frac{e^\pi + 1}{2}.$$

Δ4. Για $x \in [-1, \pi]$, λύνω την εξίσωση:

$$16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2} \xLeftrightarrow{:\, 16e^{-\frac{3\pi}{4}} \neq 0}$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow f(x) - \left(\frac{4x - 3\pi}{4}\right)^2 = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right) - f(x) + \left(\frac{4x - 3\pi}{4}\right)^2 = 0 \quad \textbf{(1)}$$

Έχω $f([-1, \pi]) = [0, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}]$, άρα για κάθε $x \in [-1, \pi]$:

$f(x) \le \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right) - f(x) \ge 0$ **(2)** (η ισότητα ισχύει μόνο στο $x = \frac{3\pi}{4}$, αφού $f_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$, μόνο για $x = \frac{3\pi}{4}$)

$\left(\frac{4x-3\pi}{4}\right)^2 \geq 0, \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in [-1, \pi]$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \frac{3\pi}{4}$) **(3)**

$(\mathbf{2}) + (\mathbf{3}) \Rightarrow \left(f\left(\frac{3\pi}{4}\right) - f(x)\right) + \left(\frac{4x-3\pi}{4}\right)^2 \geq 0, \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in [-1, \pi]$ την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 3\pi/4$.

Άρα η αρχική εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το $x = \frac{3\pi}{4}$.