12630

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο (1, 1).

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 8)

γ) Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία.

(Μονάδες 9)

12630-Λύση

ΛΥΣΗ

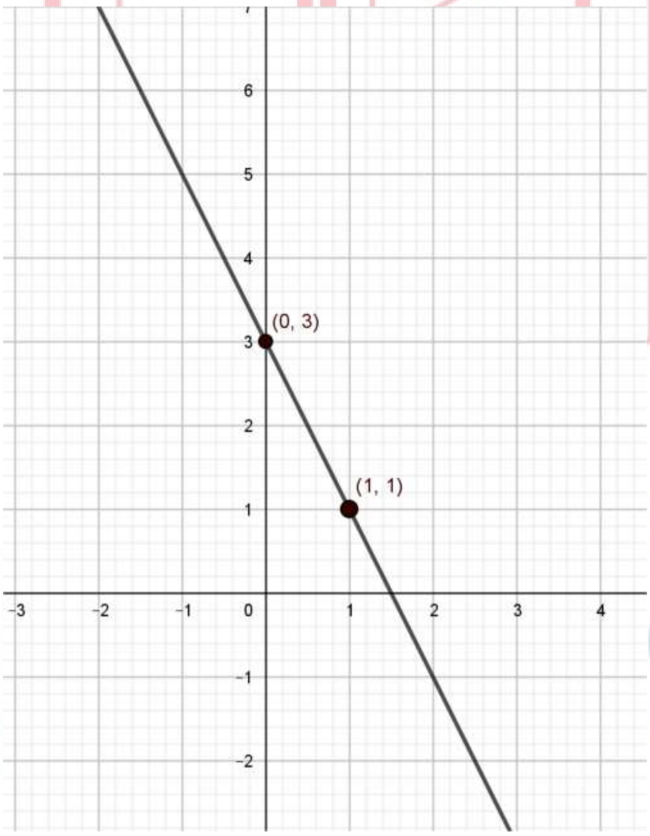
α) Η ευθεία έχει κλίση $\alpha = -2$, οπότε η εξίσωσή της γίνεται $y = -2x + \beta$. Η ευθεία διέρχεται από τη σημείο (1, 1), οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Δηλαδή: $1 = -2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3$.

Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = -2x + 3$.

β) Η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο (0, 3), αφού για $x = 0$ βρίσκουμε:

$$y = -2 \cdot 0 + 3 = 3.$$

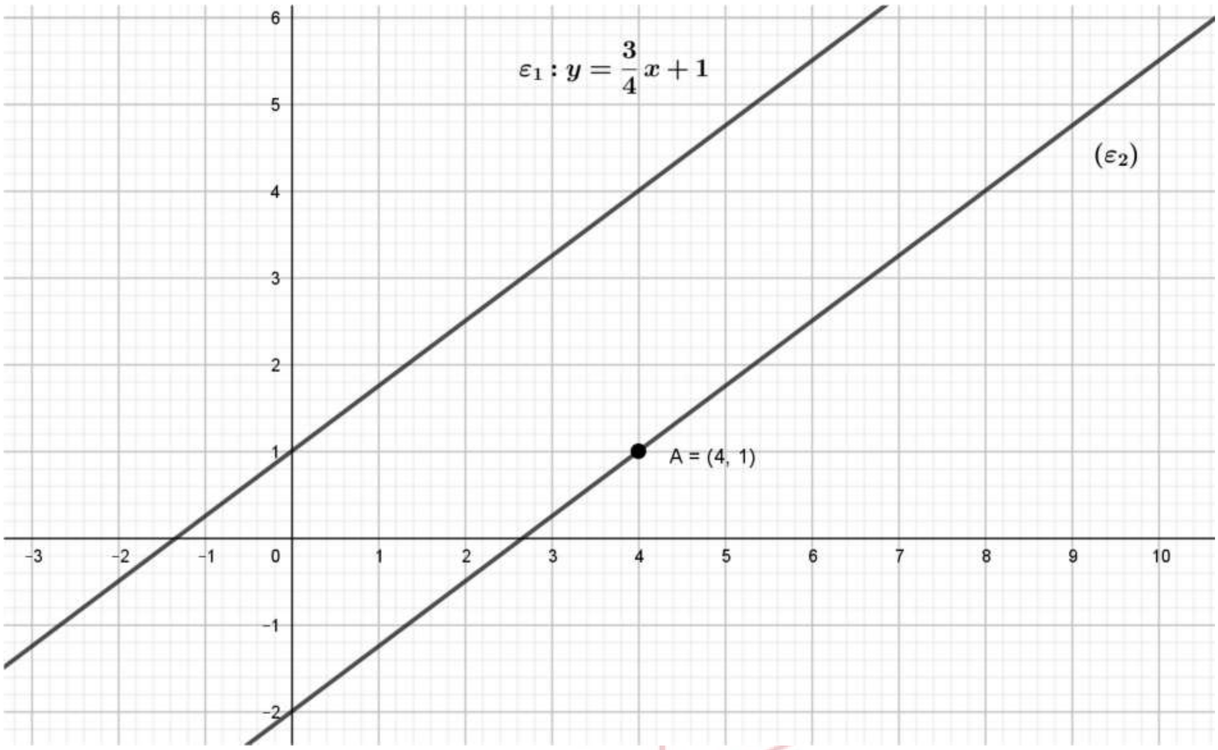
γ) Παίρνουμε στο σύστημα συντεταγμένων τα σημεία (1, 1) και (0, 3) και χαράζουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία αυτά.



12631

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο ευθείες, την (ε_1) με εξίσωση $y = \frac{3}{4}x + 1$ και την (ε_2) που διέρχεται από το σημείο Α (4, 1) και είναι παράλληλη στην (ε_1).



α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε_2). (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2). (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε_2) με τους άξονες. (Μονάδες 9)

12631-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η κλίση της ευθείας (ε_1) είναι $\alpha_1 = \frac{3}{4}$ και η ευθεία (ε_2) είναι παράλληλη στην (ε_1), οπότε έχει κλίση $\alpha_2 = \frac{3}{4}$.

β) Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y = \frac{3}{4}x + \beta$ και διέρχεται από το σημείο Α(4, 1), οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή:

$$1 = \frac{3}{4}\cdot 4 + \beta \Leftrightarrow 1 = 3 + \beta \Leftrightarrow \beta = -2 .$$

Άρα η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y = \frac{3}{4}x - 2$.

γ) Η ευθεία τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο (0, -2), αφού για x = 0 βρίσκουμε $y = \frac{3}{4}\cdot 0 - 2 = -2$ και τον άξονα *x'x* στο σημείο $(\frac{8}{3}, 0)$, αφού για y = 0 έχουμε:

$$0 = \frac{3}{4}x - 2 \quad \Leftrightarrow$$
$$2 = \frac{3}{4}x \quad \Leftrightarrow$$
$$8 = 3x \quad \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{8}{3}$$

12681

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x-3|+4-(|6-2x|+2)$ με $x\in\mathbb{R}$.

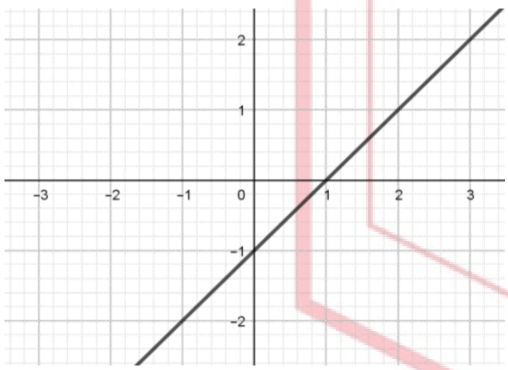
α) Να δείξετε ότι $f(x)=2-|x-3|$.

(Μονάδες 5)

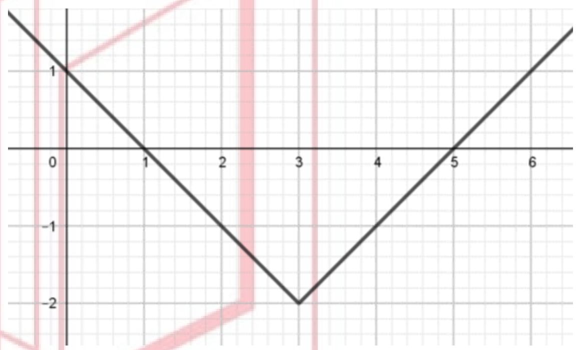
β) Αφού δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} x-1, αν\ x<3 \\ 5-x, αν\ x\geq 3\end{cases}$, να επιλέξετε το σωστό και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Η γραφική παράσταση της f είναι:

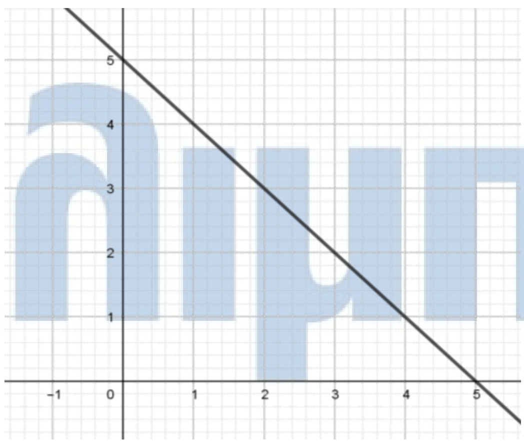
1)



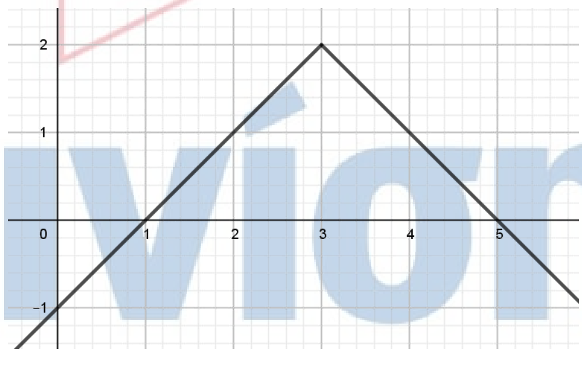
2)



3)



4)



(Μονάδες 9)

γ)

i. Στο σχήμα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να σχεδιάσετε την ευθεία $y=-1$ και με τη βοήθειά της να λύσετε την ανίσωση $2-|x-3|>-1$

(Μονάδες 5)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

(Μονάδες 6)

12681-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής, ο τύπος της $f(x)$, ισοδύναμα γίνεται:

$$f(x)=|x-3|+4-(|6-2x|+2)\Leftrightarrow$$
$$f(x)=|x-3|+4-|2(3-x)|-2\Leftrightarrow$$
$$f(x)=|x-3|-2|3-x|+2\Leftrightarrow$$
$$f(x)=2-|x-3|$$

β) Για $x\geq 3$ είναι $x-3\geq 0$, άρα $|x-3|=x-3$. Επίσης, για $x<3$ είναι $x-3<0$ οπότε $|x-3|=3-x$. Άρα:

$$f(x)=\begin{cases}2-(3-x), αν\ x<3\\ 2-(x-3), αν\ x\geq 3\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases}x-1, αν\ x<3\\ 5-x, αν\ x\geq 3\end{cases}.$$

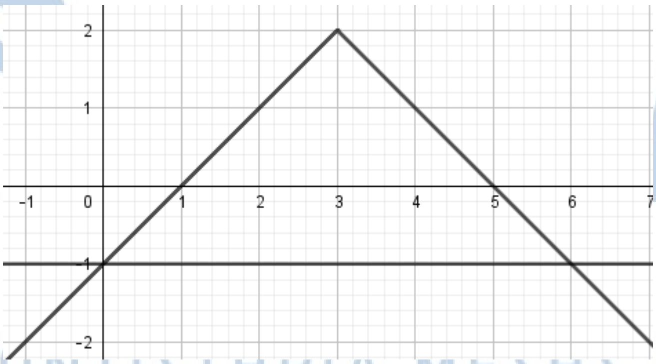
Για $x\geq 3$ η γραφική παράσταση της f συμπίπτει με την ευθεία $y=5-x$ δύο σημεία της οποίας είναι τα $(3,2)$ και $(5,0)$.

Για $x<3$ η γραφική παράσταση της f συμπίπτει με την ευθεία $y=x-1$ δύο σημεία της οποίας είναι τα $(0,-1)$ και $(1,0)$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι η (4).

γ)

i) Αν σχεδιάσουμε την ευθεία $y=-1$ προκύπτει το ακόλουθο γράφημα:



Η λύση της ανίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία $y=-1$. Από το σχήμα προκύπτει ότι $0<x<6$.

ii) Είναι:

$$f(x)>y\Leftrightarrow 2-|x-3|>-1\Leftrightarrow -|x-3|>-3\Leftrightarrow$$
$$|x-3|<3\Leftrightarrow -3<x-3<3\Leftrightarrow 0<x<6.$$

12682

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - (x-1)^2 και\ g(x) = |x-1| + 2,\ με\ \ x \in R$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \begin{cases} x+1, x \geq 1 \\ -x+3, x < 1 \end{cases}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση C_g

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

(Μονάδες 7)

12682-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Λύνουμε την ανίσωση f(x)<0. Είναι:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow 1-(x-1)^2 < 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 < -1 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} > 1 \Leftrightarrow |x-1| > 1 \Leftrightarrow x-1 < -1 \text{ ή } x-1 > 1$$

$$\Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 2\,.$$

Άρα $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

β) Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Αν $x \geq 1$, τότε $x-1 \geq 0$, οπότε $|x-1| = x-1$ και $g(x) = x-1+2 = x+1$

ii) Αν $x < 1$, τότε $x-1 < 0$, οπότε $|x-1| = -x+1$ και $g\,(x) = -x+1+2 = -x+3$.

Άρα $g\,(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ -x+3, & x < 1\,. \end{cases}$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g αποτελείται :

ι) από το τμήμα της ευθείας y=x+1 , όταν $x \geq 1$ για $x \in (1, +\infty)$, με πίνακα τιμών

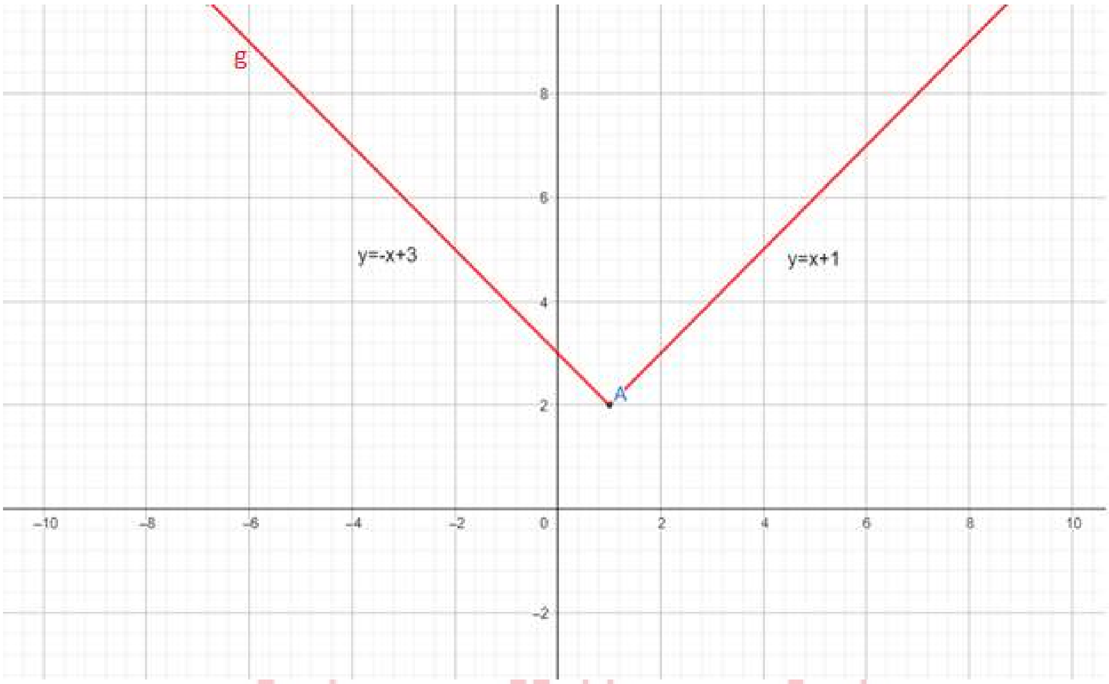
x	y
1	2
2	3

ιι) από το τμήμα της ευθείας y=-x+3 , όταν $x < 1$ για $x \in (-\infty, 1)$, με πίνακα τιμών

x	y
1	2
-2	5

Συνεπώς στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_g

12682-Λύση



γ) Είναι: $f(x) - g(x) = 1 - (x-1)^2 - |x-1| - 2 = -|x-1|^2 - |x-1| - 1$. Αν θέσουμε $|x-1| = \omega$ τότε η παραπάνω διαφορά γράφεται $-\omega^2 - \omega - 1$ και είναι πάντα αρνητική, αφού είναι τριώνυμο του ω, με $\alpha = -1 < 0$ και διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4(-1)(-1) = 1 - 4 = -3 < 0$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) - g(x) < 0$, οπότε η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

Εναλλακτική λύση:

Ισχύουν $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - (x-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq 1$ με $x \in R$ και $|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow |x-1| + 2 \geq 2 \Leftrightarrow g(x) \geq 2$ $\mu\varepsilon$ $x \in R$

Άρα f(x)<g(x), οπότε η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

12684

ΘΕΜΑ 2

Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $y=-\frac{1}{2}x-2$ και μια ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο Α (-4, 1) και είναι παράλληλη στην (ε_1).

α) Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ε_1) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2). Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες; (Μονάδες 9)

12684-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η κλίση της ευθείας (ε_1) είναι $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$ και η ευθεία αυτή τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο (0, -2), αφού για $x = 0$ βρίσκουμε $y = -\frac{1}{2}\cdot 0 - 2 = -2$.

β) Η ευθεία (ε_2) είναι παράλληλη στην (ε_1), οπότε έχει κλίση $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$. Επομένως η εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον $x'x$ άξονα ισούται με $-\frac{1}{2}$ (εφω = $-\frac{1}{2}$).

γ) Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y = -\frac{1}{2}x + \beta$ και διέρχεται από το σημείο Α (-4, 1), οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή:

$$1 = -\frac{1}{2}\cdot(-4) + \beta \Leftrightarrow 1 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1.$$

Άρα η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση: $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

Η ευθεία αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο (0, -1), αφού για $x = 0$ βρίσκουμε $y = -\frac{1}{2}\cdot 0 - 1 = -1$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(-2, 0)$, αφού για $y = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} &0 = -\frac{1}{2}x - 1 \quad \Leftrightarrow \\ &1 = -\frac{1}{2}x \quad \Leftrightarrow \\ &2 = -x \quad \Leftrightarrow \\ &x = -2 \end{aligned}$$

12689

ΘΕΜΑ 4

Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_1(t) = 150 + 50t, \quad t \in [0, 5].$$

Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_2(t) = 650 - 25t.$$

α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο;

(Μονάδες 6)

β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5^o μέχρι το 10^o λεπτό της κίνησής του; (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτέρου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα.

(Μονάδες 6)

δ)

i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει; (Μονάδες 4)

ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει; (Μονάδες 4)

12689-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Την χρονική στιγμή $t = 0$ το ελικόπτερο βρίσκεται στο ελικοδρόμιο το οποίο είναι $Y_1(0) = 150$ μέτρα πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας.

β) Μετά από 5 λεπτά, το ελικόπτερο θα βρίσκεται σε ύψος $Y_1(5) = 150 + 50\cdot 5 = 400$ μέτρα πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας. Άρα θα πετάει σταθερά στο ύψος αυτό για χρόνο $t \in [5, 10]$.

γ) Το ελικόπτερο κατεβαίνει από το $10^{ο}$ λεπτό μέχρι να φτάσει πάλι στο ελικοδρόμιο. Θα φτάσει στο ελικοδρόμιο μετά από 10 λεπτά, επομένως το πεδίο ορισμού της $Y_2(t)$ είναι το διάστημα $[10, 20]$.

Σε ύψος 250 μέτρων από τη επιφάνεια της θάλασσας θα βρίσκεται και όταν ανεβαίνει και όταν επιστέφει στο ελικοδρόμιο. Δηλαδή θα βρούμε τη χρονική στιγμή κατά την οποία:

$$Y_1(t) = 250 \Leftrightarrow 150 + 50t = 250 \Leftrightarrow t = 2 \text{ λεπτά}$$

και

$$Y_2(t) = 250 \Leftrightarrow 650 - 25t = 250 \Leftrightarrow t = 16 \text{ λεπτά}$$

δ)

i. Όταν ανεβαίνει το ελικόπτερο, παρατηρούμε ότι κάθε λεπτό που περνάει (μέχρι το $5^{ο}$ λεπτό της κίνησής του) το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας αυξάνει σταθερά κατά 50 μέτρα, αφού:

$Y_1(t + 1) – Y_1(t) = [150 + 50(t + 1)] – (150 + 50t) = 50$ μέτρα.

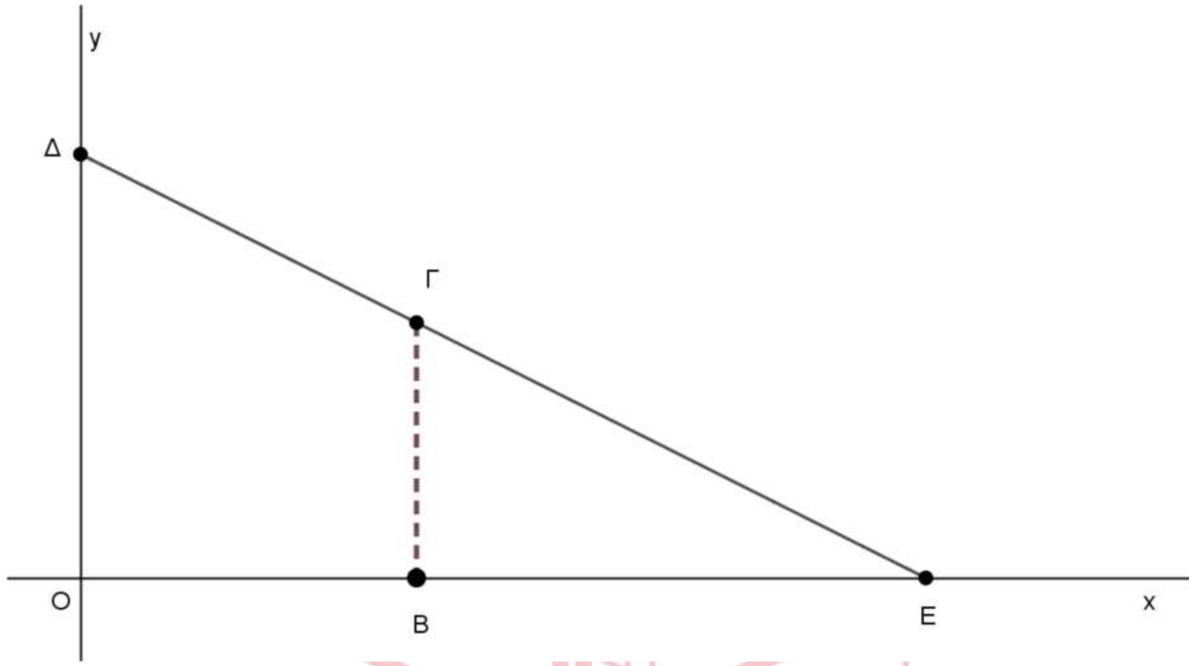
ii. Όταν επιστρέφει το ελικόπτερο στη βάση του, παρατηρούμε ότι κάθε λεπτό που περνάει (από το $10^{ο}$ μέχρι το $20^{ο}$ λεπτό της κίνησής του) το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας μειώνεται σταθερά κατά 25 μέτρα, αφού:

$Y_2(t + 1) – Y_2(t) = [650 - 25(t + 1)] – (650 - 25t) = -25$ μέτρα.

12728

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, Δ είναι ένα σημείο στον $y'y$ άξονα, E ένα σημείο του $x'x$ άξονα και O είναι η αρχή των αξόνων.



Η εξίσωση της ευθείας $\Delta\mathrm{E}$ είναι: $y+\frac{1}{2}x=4$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων E και Δ. (Μονάδες 6)

Ένα σημείο Γ(t, $y_Γ$) κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $\Delta\mathrm{E}$ και B ένα σημείο του x'x άξονα, τέτοιο ώστε $\mathrm{B}\Gamma$ να είναι παράλληλη στον y'y άξονα.

β) Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι $y_{\Gamma}=4-\frac{1}{2}t$. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(t)=4t-\frac{1}{4}t^2$ εκφράζει το εμβαδόν του τραπεζίου ΟΒΓΔ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 7)

δ) Αν το εμβαδόν του τραπεζίου ισούται με $9,75$ τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ. (Μονάδες 6)

12728-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία $y+\frac{1}{2}x=4$ τέμνει τον y'y άξονα στο σημείο Δ(0, 4) και τον x'x άξονα στο σημείο Ε(8, 0), αφού

για x = 0, έχουμε: $y+\frac{1}{2}\cdot 0=4 \Leftrightarrow y=4$ και

για y = 0, έχουμε: $0+\frac{1}{2}x=4 \Leftrightarrow x=8$.

β) Το Γ είναι σημείο του $\Delta\mathrm{E}$ ευθύγραμμου τμήματος, άρα έχει τετμημένη που παίρνει τιμές μεταξύ των τιμών που έχουν οι τετμημένες των σημείων Δ(0, 4) και Ε(8, 0). Δηλαδή:

$0 \le t \le 8$.

Οι συντεταγμένες του σημείου Γ ικανοποιούν την εξίσωση $y+\frac{1}{2}x=4$, οπότε:

$$y_\Gamma+\frac{1}{2}t=4 \Leftrightarrow y_\Gamma=4-\frac{1}{2}t.$$

γ) Το εμβαδόν του τραπεζίου δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{E}=\frac{(\mathrm{O\Delta}+\mathrm{B\Gamma})\mathrm{OB}}{2},$$

όπου: $\mathrm{O\Delta}=y_\Delta=4$,

$\mathrm{B\Gamma}=4-\frac{1}{2}t$ και

$\mathrm{OB}=x_\Gamma=t$.

Οπότε:

$$E(t)=\frac{\left(4+4-\frac{1}{2}t\right)t}{2}=\frac{8t-\frac{1}{2}t^2}{2}=\frac{8t}{2}-\frac{\frac{1}{2}t^2}{2}=4t-\frac{1}{4}t^2, \quad \text{με } t\in[0,8].$$

δ)

$$\begin{aligned}
&E(t)=9,75 \quad \Leftrightarrow\\
&4t-\frac{1}{4}t^2=9,75 \quad \Leftrightarrow\\
&16t-t^2=39 \quad \Leftrightarrow\\
&t^2-16t+39=0 \quad \Leftrightarrow\\
&t=3 \quad ή \quad t=13
\end{aligned}$$

12728-Λύση

και επειδή $t \in [0,8]$, δεκτή είναι η λύση $t = 3$. Συνεπώς το σημείο Γ έχει συνεταγμένες:

$$x_\Gamma = t = 3$$

$$y_\Gamma = 4 - \frac{1}{2}t = 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{5}{2} = 2,5$$

12730

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45^o και διέρχεται από το σημείο Α(0, 3).

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ αν η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x + 3$ και τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο με τετμημένη 2.

(Μονάδες 12)

12730-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αφού η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45^o ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας α θα ισούται με α=εφ45^o. Άρα α=1, οπότε η ευθεία παίρνει τη μορφή $y = x + \beta$.

Αφού η ευθεία διέρχεται από το σημείο Α(0,3) θα ισχύει $3 = 0 + \beta \Leftrightarrow$ β=3.

Άρα η ευθεία είναι η $y = x + 3$.

β) Αφού οι ευθείες $y = x + 3$ και $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλες θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, άρα λ=1. Οπότε η ευθεία παίρνει τη μορφή $y = x + \kappa$.

Αφού η ευθεία διέρχεται από το σημείο Β(2,0) θα ισχύει $0 = 2 + \kappa \Leftrightarrow$ κ=-2.

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $y = x - 2$.

12834

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ ώστε ΑΒ=2, ΑΔ=4, ΓΔ=6, ενώ η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και επίσης κάθετη στην ΓΔ. Το σημείο Ε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ και ονομάζουμε x την απόσταση του Ε από την ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΑΕΔ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = -2x + 12$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης;

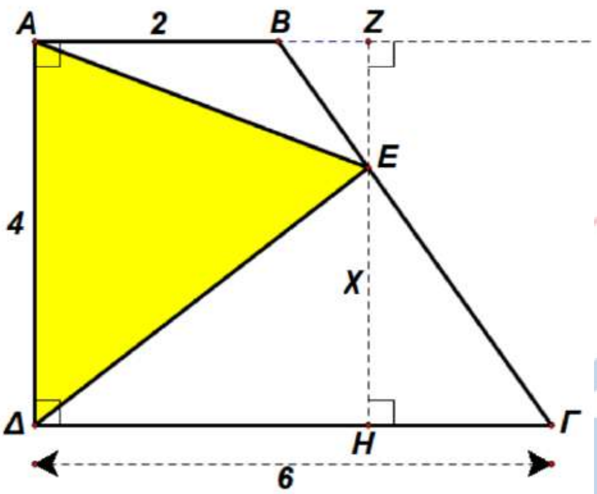
(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) \ldots + f(\frac{64}{16})$.

(Μονάδες 8)



12834-Λύση

ΘΕΜΑ 4

ΛΥΣΗ

α) Για το εμβαδόν (ΑΔΕ) ισχύει: $(ΑΔΕ) = (ΑΒΓΔ) - (ΑΒΕ) - (ΓΔΕ)$=

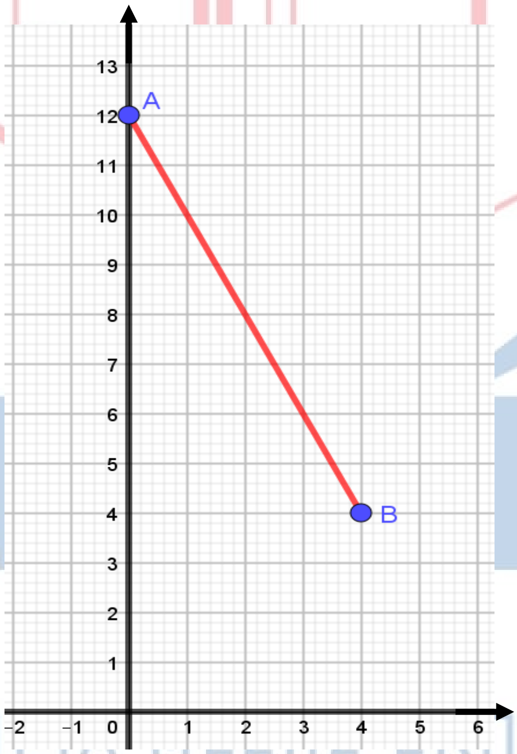
$$\frac{AB + ΓΔ}{2} \cdot AΔ - \frac{AB \cdot EZ}{2} - \frac{ΔΓ \cdot EH}{2} = \frac{2+6}{2} \cdot 4 - \frac{2(4-x)}{2} - \frac{6x}{2} = 16 - (4-x) - 3x$$

$$= 16 - 4 + x - 3x$$

Ώστε $f(x) = -2x + 12$.

Για την μεταβλητή x, πρέπει $x \in [0,4]$, αφού απαιτούμε τα μήκη ΕΗ και ΕΖ να είναι μη αρνητικοί αριθμοί, άρα πρέπει $x \geq 0$ και $4 - x \geq 0$, άρα $x \leq 4$.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2x + 12$ με $x \in R$, γνωρίζουμε ότι είναι μια ευθεία, οπότε εδώ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ θα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, με άκρα τα σημεία $A(0,12)$ και $B(4,4)$, αφού $f(0) = -2 \cdot 0 + 12 = 12$ και $f(4) = -2 \cdot 4 + 12 = -8 + 12 = 4$.



γ) $Σ = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) \ldots + f\left(\frac{64}{16}\right) =$

$(-2 \cdot \frac{1}{16} + 12) + (-2 \cdot \frac{2}{16} + 12) + \ldots + (-2 \cdot \frac{64}{16} + 12)$

$Σ = -\frac{2}{16}(1 + 2 + 3 + \ldots + 64) + 12 \cdot 64 = -\frac{1}{8} \cdot \frac{64(64+1)}{2} + 12 \cdot 64$. Τελικά:

$Σ = -4 \cdot 65 + 12 \cdot 64 = (-4 + 12) \cdot 65 - 12 = 8 \cdot 65 - 12 = 520 - 12 = 508$.

12834-Λύση

Χρησιμοποιήσαμε την ισότητα $1+2+3+\ldots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ αφού πρόκειται για άθροισμα ν διαδοχικών όρων μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) με $\alpha_1=1$, $\omega=1, \alpha_\nu=\nu$, οπότε από τον γνωστό τύπο $S_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)$ παίρνουμε $S_\nu=\frac{\nu}{2}(1+\nu)=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$.

12856

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ευθεία ε: $y=\alpha x+5$. Αν η ευθεία δ : $y=-3x-6$ είναι παράλληλη στην (ε), τότε:

α)

i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x΄x; (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y. (Μονάδες 12)

12856-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i) Ισχύει ε//δ τότε οι δύο ευθείες θα έχουν την ίδια κλίση.

Η κλίση της ευθείας δ είναι -3. Άρα α=-3, δηλαδή η κλίση της ευθείας ε είναι -3.

ii) Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον x΄x είναι αμβλεία διότι η κλίση της ε είναι $\alpha=-3<0$.

β) Η ευθεία ε έχει εξίσωση $y=-3x+5$

Η ευθεία τέμνει τον άξονα x΄x σε σημείο με τεταγμένη y=0.

Για y=0 έχουμε: $-3x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{5}$.

Άρα το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα x΄x είναι το $\left(\frac{3}{5},0\right)$

Η ευθεία τέμνει τον άξονα y΄y σε σημείο με τετμημένη x=0. Για x=0 έχουμε: y=5.

Άρα το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα y΄y είναι το (0,5)

12921

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2|\kappa|\, x - 2$ και η ευθεία ε: $y = 2x - \kappa^2$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ.

(Μονάδες 8)

γ) Για κ = -3 να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 5)

δ) Αν Α και Β τα σημεία τομής του ερωτήματος γ), να βρείτε την απόσταση (ΑΒ).

(Μονάδες 7)

12921-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο έχει $\Delta = 4\kappa^2 + 8 > 0$, άρα η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

β) Τα σημεία τομής έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης

$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 2|\kappa|x - 2 = 2x - \kappa^2 \Leftrightarrow x^2 - 2(|\kappa| + 1)x + \kappa^2 - 2 = 0$

Βρίσκουμε $\Delta = 4(|\kappa| + 1)^2 - 4(\kappa^2 - 2) = 4(2|\kappa| + 3) > 0$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$. Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες και επομένως η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ.

γ) Για κ = -3,

$f(x) = x^2 - 6x - 2$ και $y = 2x - 9$

Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4.7 = 64 - 28 = 36$, $\qquad x_{1,2} = \frac{8 \pm 6}{2}$

Άρα x_1 = 1 και $x_2 = 7$

Τα σημεία τομής είναι A(1,-7) και B(7, 5)

δ) Είναι (AB) = $\sqrt{(1-7)^2 + (-7-5)^2} = \sqrt{36 + 144} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

12939

ΘΕΜΑ 2

Έστω η ευθεία ε_1: $y = \alpha x + \beta$, η οποία τέμνει τον άξονα y'y στο A (0, -6) και τον άξονα x'x στο σημείο B(-3, 0).

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ευθεία ε_2 που είναι παράλληλη με την ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων

(Μονάδες 6)

12939-Λύση

ΛΥΣΗ

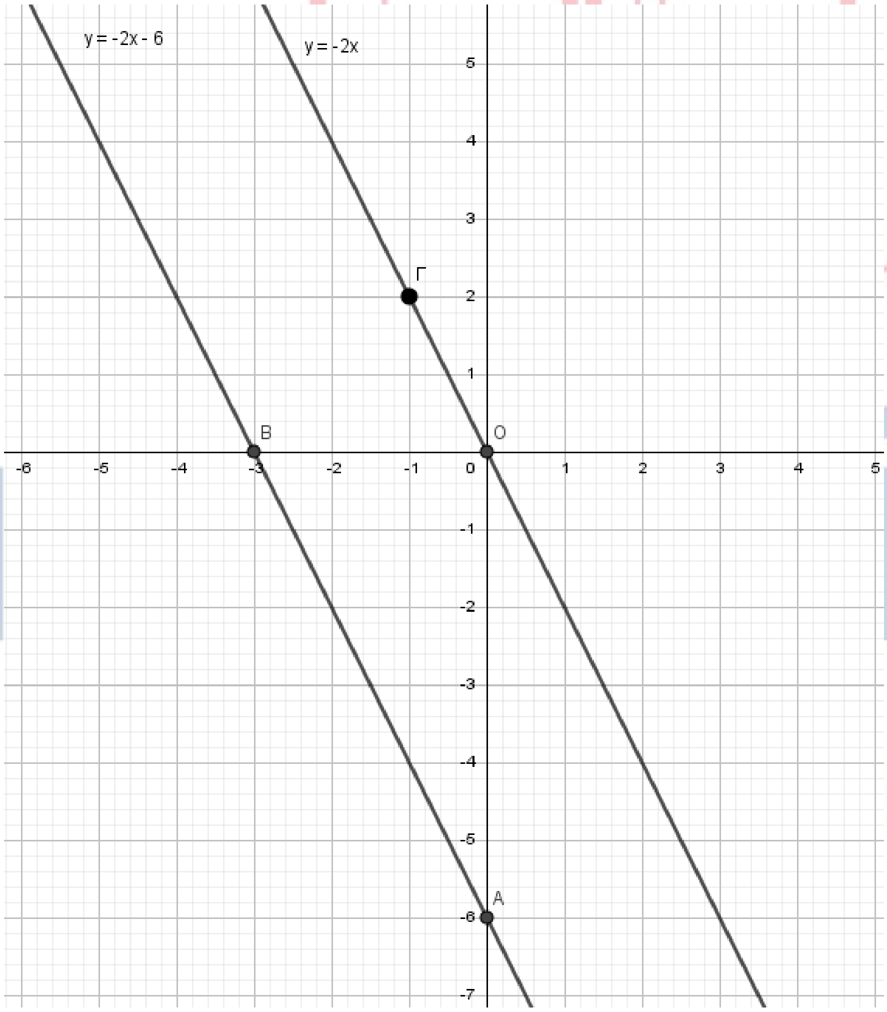
α) Αφού η ευθεία $ε_1$ διέρχεται από το σημείο Α(0,-6) ισχύει: $-6 = α \cdot 0 + β \Leftrightarrow -6 = β$.

Τότε η ευθεία $ε_1$ παίρνει τη μορφή $y = αx - 6$. Επιπλέον αφού η $ε_1$ διέρχεται και από το σημείο Β(-3,0) έχουμε $0 = α \cdot (-3) - 6 \Leftrightarrow 3α = -6 \Leftrightarrow α = -2$

Άρα η ευθεία $ε_1$ έχει τύπο $y = -2x - 6$.

β) Αφού η ευθεία $ε_2$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής $y = αx$. Επιπλέον οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες άρα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης οπότε η ευθεία $ε_2$ έχει τύπο $y = -2x$.

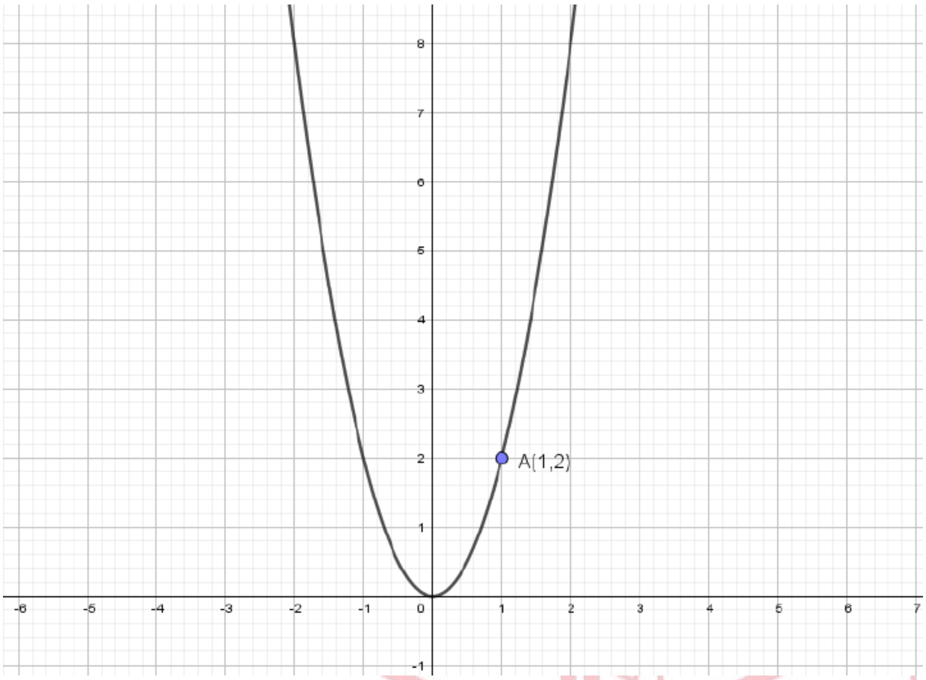
γ) Η ευθεία $ε_1$ διέρχεται από τα σημεία Α (0,-6) και Β(-3,0). Η ευθεία $ε_2$ διέρχεται από το σημείο Ο (0, 0) και Γ(-1,2). Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων είναι:



12942

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2,\ x\in\mathbb{R}$ με παράμετρο α.



α) Αν το σημείο $\mathrm{A}(1,2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι $\alpha = 2$.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $(1,6)$ και έχει κλίση $\lambda = 2$.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.

(Μονάδες4)

γ)

i. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x)<2x+4$.

(Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.

(Μονάδες 7)

12942-Λύση

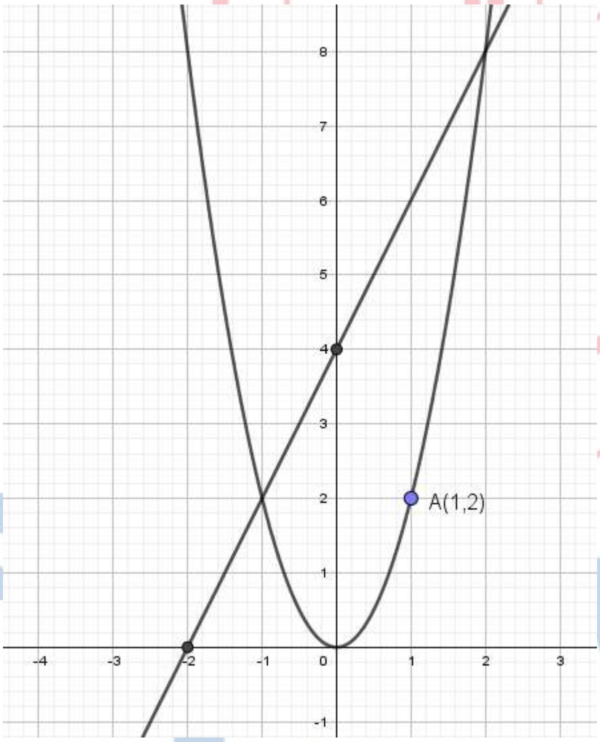
ΛΥΣΗ

α) Αφού το σημείο $A(1,2)$ ανήκει στη C_f ισχύει $f(1)=2 \Leftrightarrow \alpha\cdot 1^2=2 \Leftrightarrow \alpha=2$.

β)

i. Γνωρίζουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=\lambda x+\beta$ έχει κλίση λ, άρα $\lambda=2$. Επίσης, το σημείο $B(1,6)$ ανήκει στην ευθεία, άρα $6=2\cdot 1+\beta \Leftrightarrow \beta=4$. Άρα η ευθεία έχει εξίσωση $y=2x+4$.

ii. Για $y=0$ έχουμε $0=2x+4 \Leftrightarrow x=-2$ άρα η ε τέμνει τον $x'x$ στο $(-2,0)$. Επίσης, για $x=0$ είναι $y=2\cdot 0+4 \Leftrightarrow y=4$, άρα η ε τέμνει τον $y'y$ στο $(0,4)$. Τοποθετούμε τα παραπάνω σημεία στο σχήμα και χαράσσουμε την ευθεία ε.



γ)

i. Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<2x+4$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+4$, οπότε με βάση το παραπάνω σχήμα συμπεραίνουμε ότι $x\in(-1,2)$.

ii. Είναι $f(x)<2x+4 \Leftrightarrow 2x^2<2x+4 \Leftrightarrow 2x^2-2x-4<0 \Leftrightarrow x^2-x-2<0$.

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4(-2)=9$ και ρίζες:

$$x_1=\frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2}=\frac{1+3}{2}=2 \text{ και } x_2=\frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2}=\frac{1-3}{2}=-1.$$

12942-Λύση

Και επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $1 > 0$, το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in (-1, 2)$.

12999

ΘΕΜΑ 4

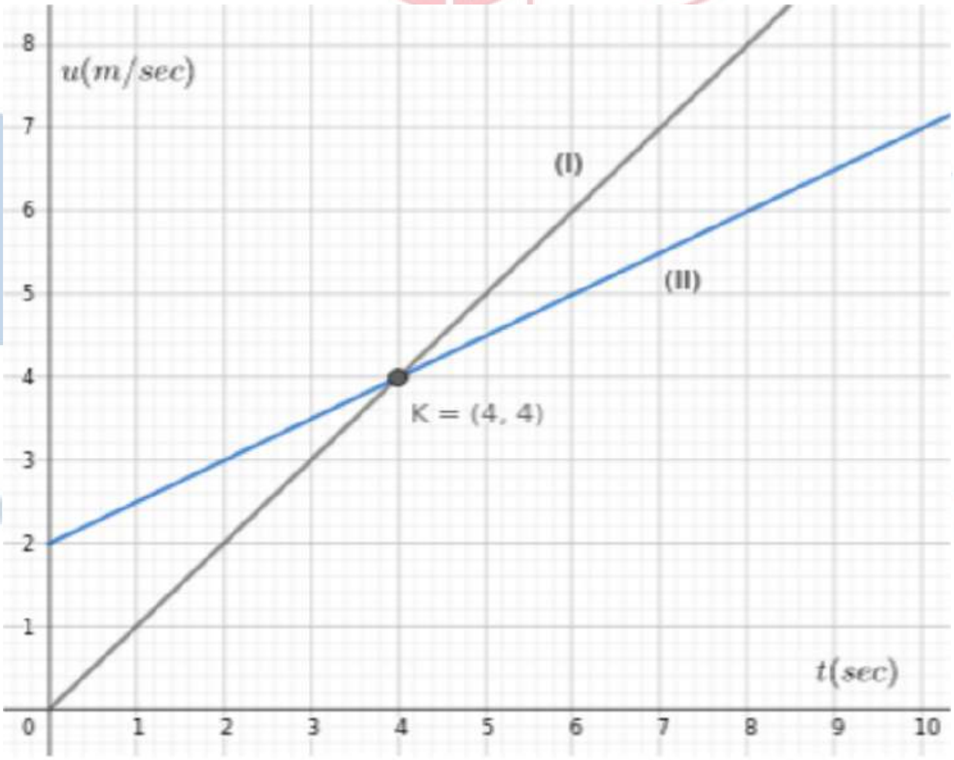
Ένα όχημα, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $u = u_0 + a \cdot t$, όπου u η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και a η σταθερή επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ u_0 η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.

α) Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς το χρόνο, να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη, ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.

(Μονάδες 6)

β) Ένα όχημα Α, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από θέση ηρεμίας και τη χρονική στιγμή 4 sec έχει ταχύτητα 4 m/sec, ενώ ένα άλλο όχημα Β, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα 2m/sec. Οι παρακάτω ευθείες (I),(II) στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.

i) Ποια από τις δύο ευθείες (I), (II) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος Α και ποια την ταχύτητα του οχήματος Β;



(Μονάδες 6)

12999

ii) Να προσδιορίσετε ποιο από τα οχήματα Α, Β κινείται ταχύτερα για κάθε χρονική στιγμή $t\ sec, t \in (3,5)$.

(Μονάδες 7)

iii) Αν ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος Α, να σχεδιάσετε στο παραπάνω διάγραμμα μία ευθεία, η οποία θα μπορούσε να περιγράφει την κίνησή του.

(Μονάδες 6)

12999-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος t και η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η ταχύτητα u. Επειδή ο χρόνος είναι μη αρνητικός, το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτηση είναι $t \in [0, +\infty)$.

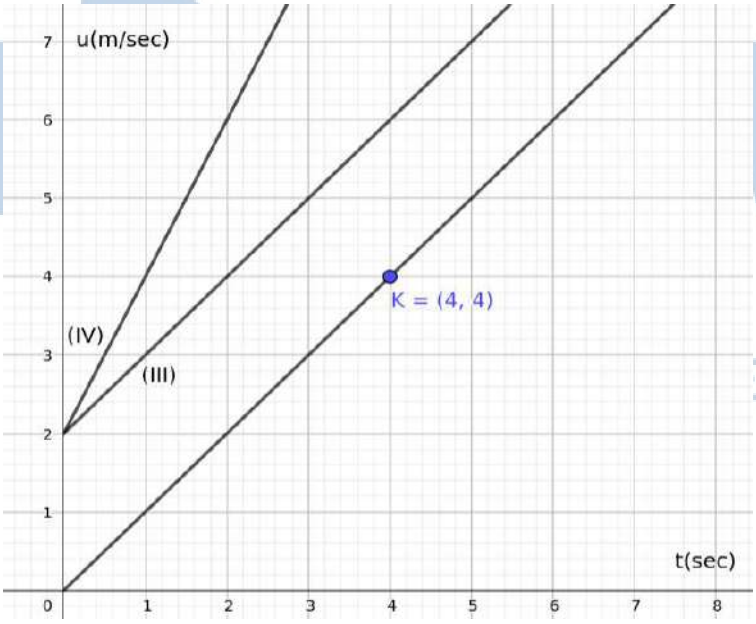
β) i) Εφόσον το όχημα Α ξεκινά από θέση ηρεμίας, η αρχική του ταχύτητα θα είναι 0m/sec, άρα αντιστοιχεί στη συνάρτηση της ταχύτητάς του ως προς το χρόνο η ευθεία (Ι).

Αντίστοιχα, εφόσον το όχημα Β ξεκινά με αρχική ταχύτητα 2m/sec αντιστοιχεί στη συνάρτηση της ταχύτητάς του ως προς το χρόνο η ευθεία (ΙΙ).

ii) Τις χρονικές στιγμές από 3 έως 4 sec το όχημα της γραμμής (ΙΙ) κινείται ταχύτερα. Τη χρονική στιγμή t=4sec τα δύο οχήματα έχουν την ίδια ταχύτητα, ενώ τις χρονικές στιγμές από 4 έως 5 sec το όχημα της γραμμής (Ι) κινείται ταχύτερα.

iii) Η επιτάχυνση α αποτελεί την κλίση της ευθείας (ΙΙΙ), η οποία θα περιγράφει την ταχύτητα ως προς το χρόνο του οχήματος Γ, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2m/sec. Για να έχει σε κάθε χρονική στιγμή ταχύτητα μεγαλύτερη από αυτήν του οχήματος Α, θα πρέπει η ευθεία (ΙΙΙ) να μην τέμνεται με την ευθεία (Ι) που περιγράφει την κίνηση του οχήματος Α. Εφόσον, αυτή ξεκινά από το σημείο Λ(0,2), θα πρέπει η κλίση της να είναι μεγαλύτερη ή ίση με αυτής της ευθείας (Ι). Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο ευθείες:

η (ΙΙΙ) περιγράφει όχημα που εκτελεί Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση ίση με του οχήματος Α, ενώ η ευθεία (IV) περιγράφει την κίνηση ενός οχήματος με επιτάχυνση μεγαλύτερη από αυτήν του οχήματος Α.



13033

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία (ε): $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

α)

i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε).

(Μονάδες 4)

ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον x΄x άξονα;

(Μονάδες 4)

β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία Α(6, 1), Β(-2, 3) και Γ(8, 0) είναι σημεία της ευθείας (ε).

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο (k, 5) να είναι σημείο της ευθείας (ε).

(Μονάδες 8)

13033-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Η κλίση της ευθείας είναι $\alpha = -\frac{1}{2}$.

ii. Επειδή $\alpha < 0$ ισχύει $\varepsilon\varphi\omega < 0$, οπότε η γωνία ω είναι αμβλεία.

β) Θα εξετάσουμε αν οι συντεταγμένες των σημείων επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Για το σημείο Α: $-\frac{1}{2}\cdot 6+4=-3+4=1$, άρα το Α είναι σημείο της ευθείας.

Για το σημείο Β: $-\frac{1}{2}\cdot(-2)+4=1+4=5\neq 3$, άρα το Β δεν είναι σημείο της ευθείας.

Για το σημείο Γ: $-\frac{1}{2}\cdot 8+4=-4+4=0$, άρα το Γ είναι σημείο της ευθείας.

γ) Θα πρέπει:

$$\begin{aligned}
&5=-\frac{1}{2}\cdot k+4 \Leftrightarrow\\
&1=-\frac{1}{2}\cdot k \Leftrightarrow\\
&2=-k \Leftrightarrow\\
&k=-2.
\end{aligned}$$

13054

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y=(3\alpha+4)x-4$ και $\varepsilon_2: y=(3-4\alpha)x+4$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Αν α=1, να βρείτε:

i. Τις εξισώσεις των ευθειών.

(Μονάδες 6)

ii. Το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες ε_1, ε_2 είναι παράλληλες.

(Μονάδες 13)

13054-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Με $\alpha = 1$ οι ευθείες είναι οι:

$$\varepsilon_1 : y = 7x - 4 \text{ και } \varepsilon_2 : y = -x + 4$$

ii. Η ευθεία ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha_1 = 7 > 0$, οπότε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία, ενώ η ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha_2 = -1 < 0$, οπότε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

β) Οι ευθείες είναι παράλληλες μόνο όταν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή μόνο όταν ισχύει $3\alpha + 4 = 3 - 4\alpha$. Είναι:

$$3\alpha + 4 = 3 - 4\alpha \Leftrightarrow 7\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{7}$$

Άρα η ευθείες είναι παράλληλες μόνο όταν $\alpha = -\frac{1}{7}$.

13055

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+5$, $x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $y=2x+\beta$, $\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(2+x)=f(2-x)$.

(Μονάδες 6)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=f(3,52)-f(0,52)+f(3,48)-f(0,48)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $\beta=-5$.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β, ώστε η C_f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία.

(Μονάδες 7)

13055-Λύση

ΛΥΣΗ

α)Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(2+x)=(2+x)^2-4(2+x)+5=x^2+4x+4-4x-8+5=x^2+1$$

και

$$f(2-x)=(2-x)^2-4(2-x)+5=x^2-4x+4+4x-8+5=x^2+1$$

οπότε $f(2+x)=f(2-x)$.

β) Με $x=1,52$ η ισότητα του ερωτήματος (α) δίνει

$$f(2+1,52)=f(2-1,52),\text{ οπότε } f(3,52)-f(0,48)=0 \quad (1)$$

ενώ με $x=1,48$ δίνει

$$f(2+1,48)=f(2-1,48),\text{ οπότε } f(3,48)-f(0,52)=0 \quad (2)$$

Με τη βοήθεια των (1) και (2) παίρνουμε:

$$A=f(3,52)-f(0,52)+f(3,48)-f(0,48)=f(3,52)-f(0,48)+f(3,48)-f(0,52)=0.$$

γ) Το πλήθος των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία είναι ίσο με το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=2x+\beta$. Με $x=-5$ έχουμε:

$$f(x)=2x-5 \Leftrightarrow x^2-4x+5=2x-5 \Leftrightarrow x^2-6x+10=0$$

που είναι αδύνατη αφού έχει διακρίνουσα $\Delta=36-40=-4<0$.

Άρα η C_f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $\beta=-5$.

δ) Η C_f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία $y=2x+\beta$, μόνο όταν η εξίσωση $f(x)=2x+\beta$ έχει μια τουλάχιστον λύση. Είναι:

$$f(x)=2x+\beta \Leftrightarrow x^2-4x+5=2x+\beta \Leftrightarrow x^2-6x+5-\beta=0$$

Η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον λύση μόνο όταν η αντίστοιχη διακρίνουσα είναι μη αρνητική. Είναι:

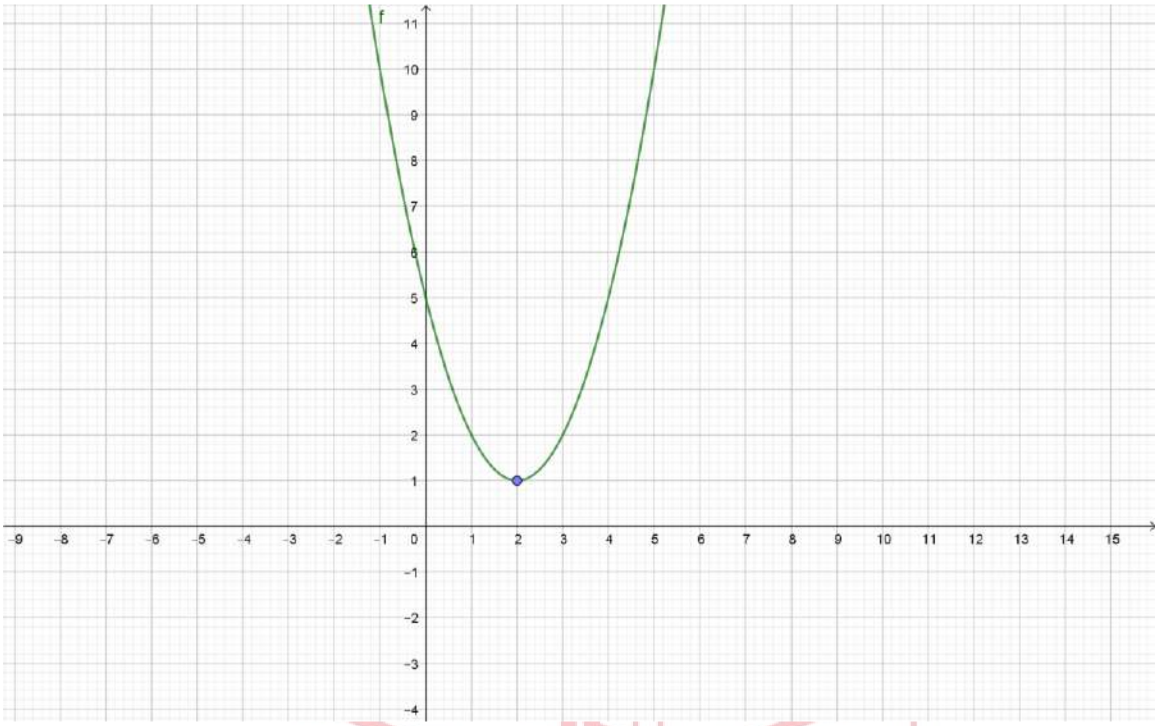
$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 36-4(5-\beta)\geq 0 \Leftrightarrow 9-5+\beta \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq -4$$

οπότε η ζητούμενη μικρότερη τιμή του β είναι η τιμή $\beta=-4$.

13091

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-4x+5$.



α) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = 7 και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

β)

i. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = λ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β)i.

(Μονάδες 7)

γ) Έστω ότι μια ευθεία y = λ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 4$.

(Μονάδες 6)

13091-Λύση

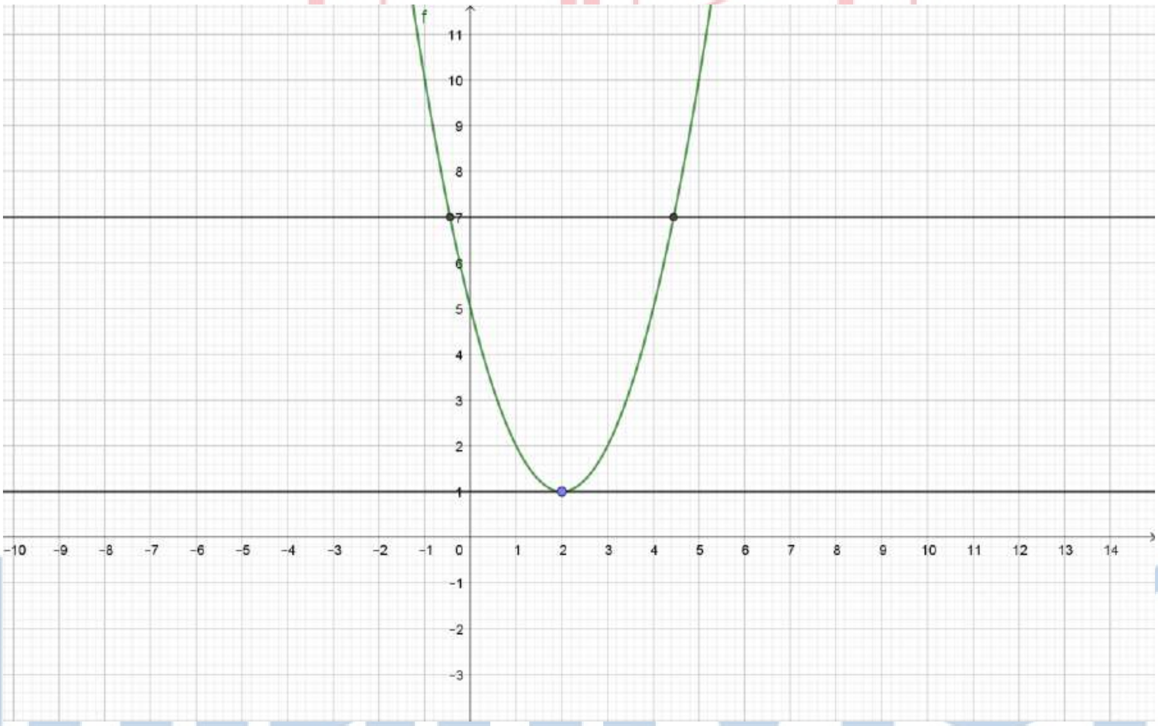
ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία y = 7 είναι παράλληλη στον x΄x και τέμνει τον y΄y στο σημείο (0,7) και όπως βλέπουμε από το σχήμα έχει 2 κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f .

Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = 7 είναι ίσο με το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $f(x)=7$. Είναι

$$f(x)=7 \Leftrightarrow x^2-4x+5-7=0 \Leftrightarrow x^2-4x-2=0 .$$

Η εξίσωση αυτή είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα Δ = 24 > 0 που σημαίνει ότι έχει δύο ρίζες άνισες και επομένως αποδείχτηκε ότι η γραφική παράσταση της f έχει με την ευθεία y = 7 ακριβώς δύο κοινά σημεία.



β)

i. Η ευθεία y = λ είναι παράλληλη στον x΄x και τέμνει τον y΄y στο σημείο (0 , λ).

Από το σχήμα βλέπουμε ότι το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = λ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, εξαρτάται από το αν η τιμή του λ είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση με 1, διότι με βάση το σχήμα βλέπουμε ότι η μικρότερη τιμή της συνάρτησης είναι 1. Συγκεκριμένα βλέπουμε από το σχήμα ότι:

- αν λ < 1 η ευθεία y = λ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f ,
- αν λ = 1 η ευθεία y = λ έχει ένα κοινό σημεία με τη γραφική παράσταση της f ,
- αν λ > 1 η ευθεία y = λ έχει δύο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f .

13091-Λύση

ii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = λ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι το ίδιο με το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda \Leftrightarrow x^2-4x+5-\lambda=0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Η εξίσωση αυτή είναι 2ου βαθμού ως προς x με διακρίνουσα

$$\Delta=(-4)^2-4(5-\lambda)=16-20+4\lambda=4\lambda-4=4(\lambda-1).$$

Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας. Συγκεκριμένα :

- αν λ < 1 τότε Δ < 0 οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη και επομένως η ευθεία y = λ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f ,
- αν λ = 1 τότε Δ = 0 οπότε η εξίσωση έχει 1 διπλή ρίζα και επομένως η ευθεία y = λ έχει ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f ,
- αν λ > 1 τότε Δ > 0 οπότε η εξίσωση έχει 2 ρίζες άνισες και επομένως η ευθεία y = λ έχει δύο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f .

γ) Αφού η ευθεία y = λ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 με $x_1<x_2$ συμπεραίνουμε αφενός ότι λ > 1 και αφετέρου ότι οι αριθμοί x_1, x_2 θα είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=\lambda \Leftrightarrow x^2-4x+5-\lambda=0$.

Η εξίσωση αυτή για λ > 1 έχει δύο ρίζες άνισες και έχουμε ότι

$$x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{-4}{1}=4.$$

13178

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σημείο $M(3,4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και από το $O(0,0)$.

(Μονάδες 9)

β) Δίνεται το σημείο $N(-3,\lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, το οποίο ανήκει στην ευθεία OM.

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

ii. Αν $N(-3,-4)$ να εξετάσετε αν τα σημεία M, N είναι συμμετρικά ως προς το O.

(Μονάδες 8)

13178-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η κλίση της ευθείας OM είναι $\alpha = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$ και η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση $y = \frac{4}{3}x$.

β)

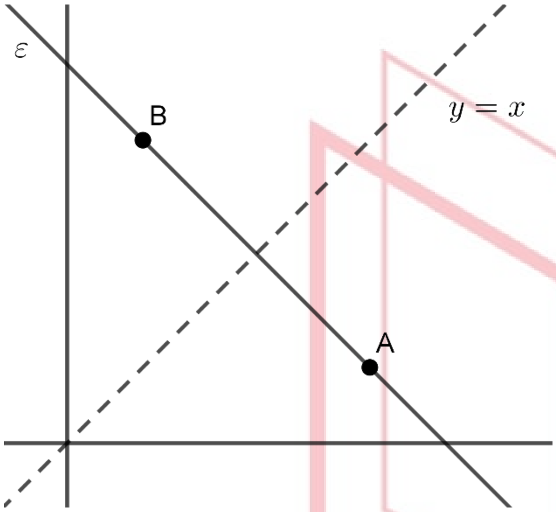
i. Το σημείο N ανήκει στην ευθεία ΟΜ οπότε οι συντεταγμένες του N επαληθεύουν την εξίσωση της OM, δηλαδή ισχύει ότι : $\lambda = \frac{4}{3}\cdot(-3) \Leftrightarrow \lambda = -4$.

ii. Τα σημεία $\mathrm{M}(3,4)$ και $\mathrm{N}(-3,-4)$ έχουν αντίθετες συντεταγμένες, οπότε είναι συμμετρικά ως προς το O.

13298

ΘΕΜΑ 4

Τα σημεία A και B είναι σημεία του 1ου τεταρτημόριου και είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο $y = x$ της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σημείου A με τις συντεταγμένες το σημείου B.

(Μονάδες 3)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από τα A κα B έχει κλίση $\alpha = -1$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $(4, \kappa^2 - 3\kappa + 1)$ και $(\kappa - 2{,}4)$ αντίστοιχα, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\kappa = 3$ και να προσδιορίσετε τα σημεία A και B.

(Μονάδες 8)

ii. Για $\kappa = 3$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.

(Μονάδες 8)

13298-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αφού τα σημεία A και B είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο του 1ου και του 3ου τεταρτημόριου θα ισχύει $x_B = y_A$ και $y_B = x_A$.

β) Η κλίση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία A , B δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A},$$

η οποία για τα $x_B = y_A$ και $y_B = x_A$, όπως προκύπτει από το ερώτημα α) γίνεται:

$$\alpha = \frac{x_A - y_A}{y_A - x_A} = -1.$$

γ)

i. Από τη σχέση $y_A = x_B$ για $y_A = \kappa^2 - 3\kappa + 1$ και $x_B = \kappa - 2$, έχουμε:

$$\kappa^2 - 3\kappa + 1 = \kappa - 2 \Leftrightarrow$$

$$\kappa^2 - 4\kappa + 3 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4 > 0$ οπότε έχει δύο άνισες ρίζες:

$$\kappa_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \text{ και } \kappa_2 = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Επειδή τα σημεία A και B ανήκουν στο 1ο τεταρτημόριο πρέπει $y_A > 0$ και $x_B > 0$.

Για $\kappa_1 = 1$ έχουμε $y_A = x_B = -1 < 0$, απορρίπτεται.

Για $\kappa_2 = 3$ έχουμε $y_A = x_B = 1 > 0$, δεκτή.

Άρα $\kappa = 3$.

Οπότε, τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $(4{,}1)$ και $(1{,}4)$ αντίστοιχα.

ii. Η ευθεία ε έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$ και κλίση $\alpha = -1$, άρα

$$y = -x + \beta.$$

Επειδή διέρχεται από το σημείο A που για $\kappa = 3$ έχει συντεταγμένες $(4{,}1)$, θα ισχύει:

$$1 = -4 + \beta \Leftrightarrow \beta = 5.$$

Άρα η εξίσωση της ε είναι η $y = -x + 5$.

13314

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-x-3$. Αν $\mathrm{A}(\alpha,0)$, $\mathrm{B}(\beta,0)$, $\Gamma(\gamma,\delta)$ σημεία της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον $x'x$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο, τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι $f(\sqrt{2})<0$.

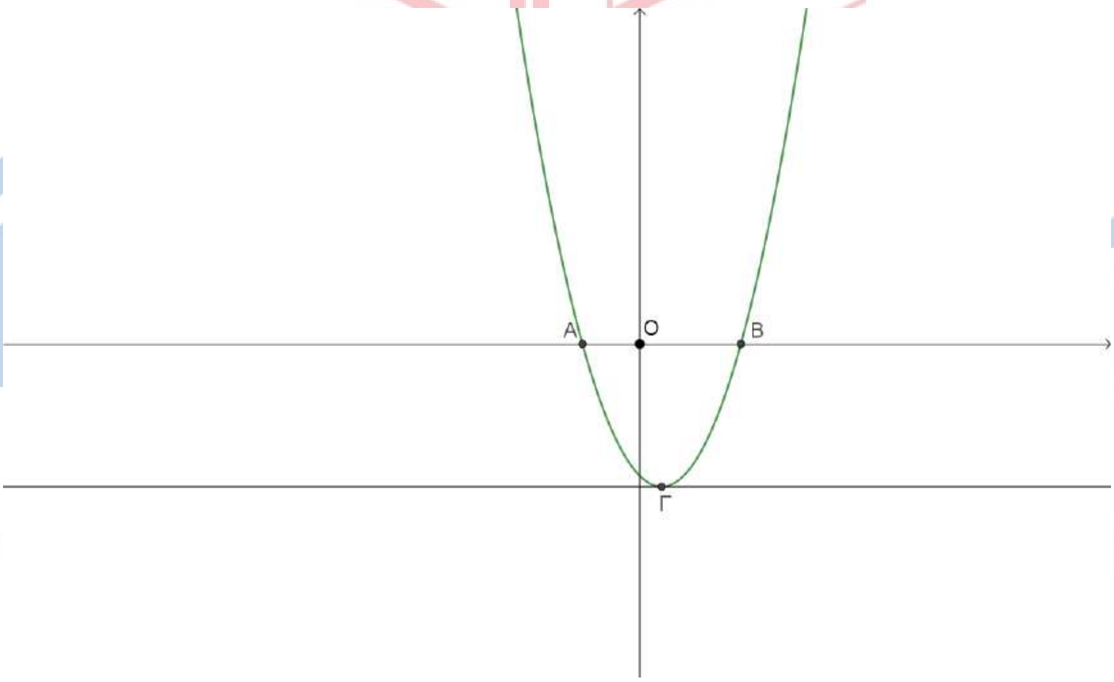
(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}<\sqrt{2}<\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τις τιμές των γ και δ.

(Μονάδες 7)



13314-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Τα σημεία A, B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$, οπότε οι τετμημένες τους α, β αντίστοιχα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$. Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x-3=0$ που είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=13$ και ρίζες τους αριθμούς $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Επειδή το σημείο A βρίσκεται αριστερά του B στον άξονα $x'x$ είναι $\alpha<\beta$ και επειδή προφανώς $\frac{1-\sqrt{13}}{2}<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$, έχουμε τελικά ότι $\alpha=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

β) Είναι $f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}-3=2-\sqrt{2}-3=-1-\sqrt{2}<0$, οπότε $f(\sqrt{2})<0$.

γ) Όπως φαίνεται από το σχήμα αλλά και όπως προκύπτει και αλγεβρικά από τον τύπο της συνάρτησης f που είναι τριώνυμο, η συνάρτηση f παίρνει αρνητικές τιμές μόνο για τις τιμές του x που είναι εντός των ριζών της, δηλαδή για $x\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$. Αφού λοιπόν δείξαμε στο β) ερώτημα ότι $f(\sqrt{2})<0$, θα πρέπει $\sqrt{2}\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$, δηλαδή $\frac{1-\sqrt{13}}{2}<\sqrt{2}<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

δ) Η παράλληλη από το $\Gamma(\gamma,\delta)$ στον $x'x$ έχει εξίσωση $y=\delta$. Αφού η ευθεία με εξίσωση $y=\delta$ έχει με τη γραφική παράσταση της f ένα κοινό σημείο, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\delta \Leftrightarrow x^2-x-3-\delta=0$ έχει μία πραγματική ρίζα και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν έχει διακρίνουσα ίση με το μηδέν. Είναι

$$\Delta=0 \Leftrightarrow (-1)^2-4(-3-\delta)=0 \Leftrightarrow 1+12+4\delta=0 \Leftrightarrow \delta=-\frac{13}{4}.$$

Επίσης η τετμημένη γ του σημείου Γ θα είναι η διπλή ρίζα της εξίσωσης $f(x)=\delta \Leftrightarrow x^2-x-3-\delta=0$, οπότε $\gamma=-\frac{-1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2}$.

13314-Λύση

Εναλλακτικά αφού το σημείο $\Gamma(\gamma,\delta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f έχουμε

$$f(\gamma)=\delta \Leftrightarrow \gamma^2-\gamma-3=-\frac{13}{4} \Leftrightarrow \gamma^2-\gamma-3+\frac{13}{4}=0 \Leftrightarrow \gamma^2-\gamma+\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow \left(\gamma-\frac{1}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \gamma=\frac{1}{2}$$

13318

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: R \to R$ με τύπο $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $x \in R$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, $f(-\sqrt{2})$, $\left[f(-\sqrt{2})\right]^2$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 13)

13318-Λύση

ΛΥΣΗ

α) $f(0) = -\,0\; +\; \sqrt{2} = \sqrt{2}.$

$f(\sqrt{2}) = -\,\sqrt{2}\; +\; \sqrt{2} = 0.$

$f(-\sqrt{2}) = -\,(-\sqrt{2})\; +\; \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$

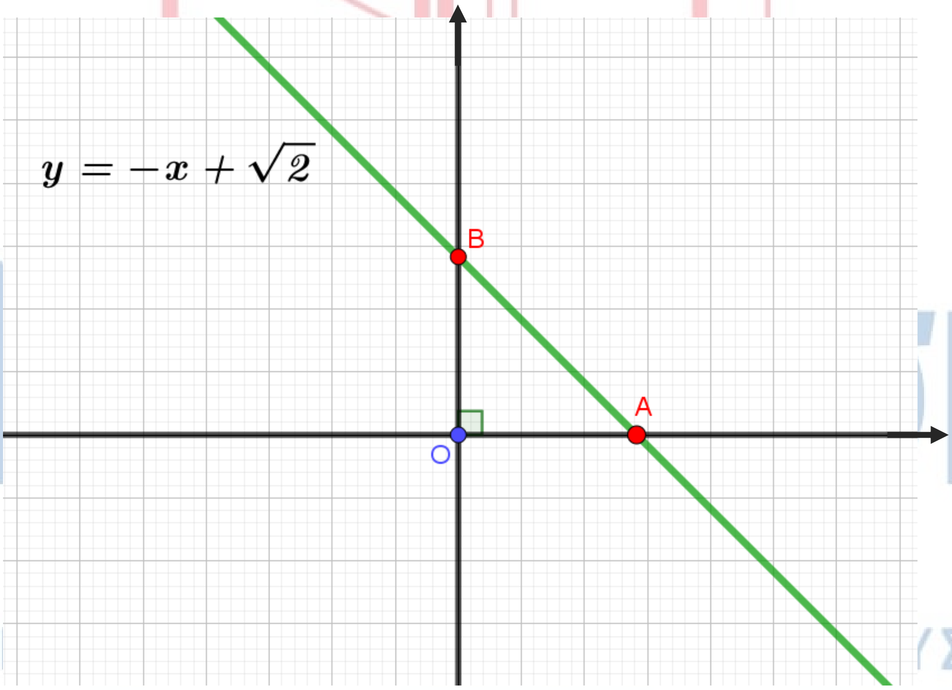
$\left[f(-\sqrt{2})\right]^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 2^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 4 \cdot 2 = 8.$

β) Για $x = 0$, έχουμε βρει από το α) ερώτημα $y = f(0) = \sqrt{2}$, ενώ για $y = 0$ παίρνουμε

$0 = -\,x\; +\; \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$, δηλαδή $f(\sqrt{2}) = 0$, τιμή που βρέθηκε στο α) ερώτημα.

Έτσι, βρήκαμε τα σημεία $B\left(0, \sqrt{2}\right)$ και $A\left(\sqrt{2}, 0\right)$, τα οποία είναι αυτά στα οποία η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι της μορφής $y = f(x) = \alpha x + \beta$ με $x \in R$, $(\alpha \cdot \beta \neq 0)$ οπότε η γραφική της παράσταση θα είναι μια ευθεία που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και επομένως αρκεί να σχεδιάσουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.



13367

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : y = (\omega^2 - 6\omega + 8)x + 2$, όπου $\omega \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\omega \in \mathbb{R}$ να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

(Μονάδες 5)

iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε.

(Μονάδες 5)

13367-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$, πρέπει να βρούμε το πρόσημο του συντελεστή διεύθυνσης.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι: $\alpha = \omega^2 - 6\omega + 8$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = 36 - 32 = 4$

και οι ρίζες:

$$\omega_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Leftrightarrow \omega_1 = 4 \text{ και } \omega_2 = 2.$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

ω	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$\omega^2 - 6\omega + 8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Αν $\omega \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ ο συντελεστής διεύθυνσης α είναι θετικός και κατά συνέπεια η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι οξεία.
- Αν $\omega \in (2,4)$ ο συντελεστής διεύθυνσης α είναι αρνητικός και κατά συνέπεια η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία.
- Αν $\omega = 2$ ή $\omega = 4$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης μηδενίζεται και η ευθεία ε σχηματίζει μηδενική γωνία με τον άξονα $x'x$, είναι δηλαδή παράλληλη στον $x'x$.

β)

i. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα για να σχηματίζει η ευθεία ε αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$ πρέπει $\omega \in (2,4)$. Επειδή όμως το ω είναι ακέραιος τότε $\omega = 3$.

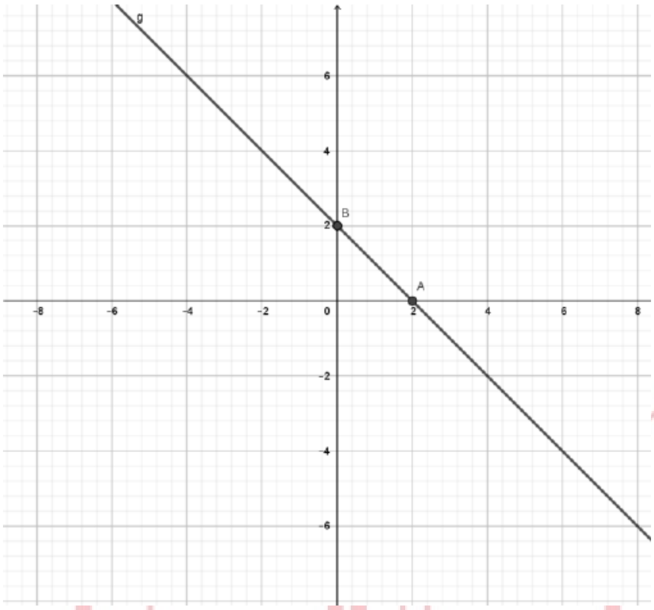
ii. Για $\omega = 3$, $\varepsilon : y = -x + 2$.

Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ θέτουμε στην εξίσωσή της $y = 0$. Δηλαδή $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι το $A(2,0)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα y'y, θέτουμε στην εξίσωσή της $x = 0$ και βρίσκουμε $y = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι το $B(0,2)$.

γ) Σημειώνουμε πάνω στους άξονες τα σημεία A και B που βρήκαμε, τα ενώνουμε και σχεδιάζουμε την ευθεία ε όπως στο παρακάτω Σχήμα.

13367-Λύση



Σχήμα

13400

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία ε: $y = -x + 2$.

α) Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

(Μονάδες 9)

γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε.

(Μονάδες 7)

13400-Λύση

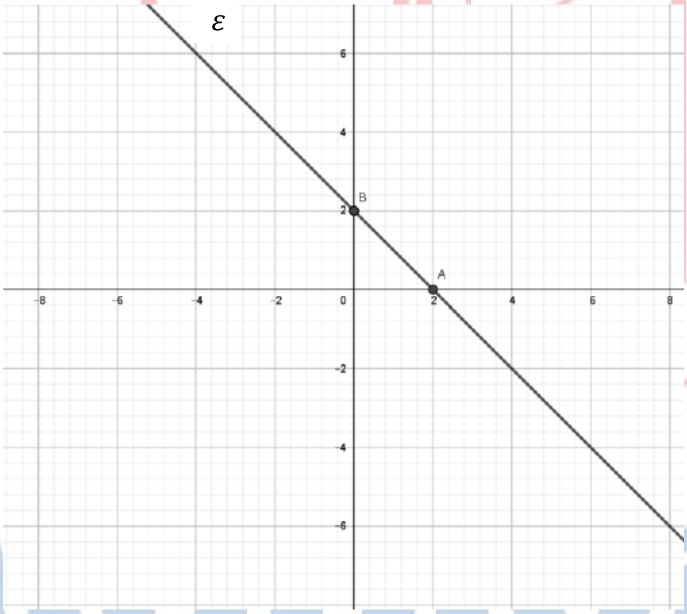
ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία ε: $y = -x + 2$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = -1 < 0$. Άρα σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ θέτουμε στην εξίσωσή της όπου $y = 0$. Δηλαδή $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow \; x = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι $A(2,0)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα y'y, θέτουμε στην εξίσωσή της όπου $x = 0$ και βρίσκουμε $y = 2$. Άρα το σημείο τομής είναι $B(0,2)$.

γ) Σημειώνουμε πάνω στους άξονες τα σημεία A και B που βρήκαμε στο ερώτημα β), τα ενώνουμε και σχεδιάζουμε την ευθεία όπως στο παρακάτω Σχήμα.



Σχήμα

13471

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τα σημεία $A(2, 1), B(-1, -5)$, $\Gamma(27, 50)$ και την ευθεία ε: $y = \lambda x - 3$. Αν το σημείο Α είναι πάνω στην ευθεία, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

(Μονάδες 11)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β είναι πάνω στην ευθεία. Κατόπιν να εξετάσετε αν και το σημείο Γ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

(Μονάδες 14)

13471-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το σημείο Α είναι πάνω στην ευθεία, οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της. Έτσι, έχουμε: $2\lambda - 3 = 1$, οπότε $2\lambda = 4$, άρα $\lambda = 2$.

β) Θα αποδείξουμε ότι οι συντεταγμένες του Β επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας που είναι η ε: $y = 2x - 3$.

Με $x = -1$ έχουμε: $y = 2(-1) - 3 = -2 - 3 = -5$, οπότε το σημείο Β είναι πάνω στην ευθεία ε.

Εξετάζουμε αν το Γ είναι πάνω στην ε.

Με $x = 27$ έχουμε: $y = 2 \cdot 27 - 3 = 54 - 3 = 51 \neq 50$, οπότε το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ευθεία ε.

Άρα το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ίδια ευθεία με τα Α και Β.

13473

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παράσταση Α=$\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{1-2x+x^2}$.

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

(Μονάδες 6)

Δίνεται επιπλέον $1 \leq x \leq 3$.

β) i. Να δείξετε ότι Α=2.

(Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x-3|-|x-1|=2$.

(Μονάδες 5)

γ) i. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(x)=$3-x$ και $\mathrm{g(x)}=x-1$ για $1 \leq x \leq 3$.

(Μονάδες 6)

ii. Για ποιες τιμές του x είναι $|\mathrm{f(x)}-\mathrm{g(x)}|$=2.

(Μονάδες 4)

13473-Λύση

ΛΥΣΗ

α) $A=\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x-1)^2}=|x-3|+|x-1|$.

β) i. Από $1\leq x\leq 3$ έχουμε $|x-3|=-x+3$ και $|x-1|=x-1$,

τότε A= -x+3+x-1=2.

ii. -x+3-x+1=2⟺-2x+4=2⟺ $x=1$.

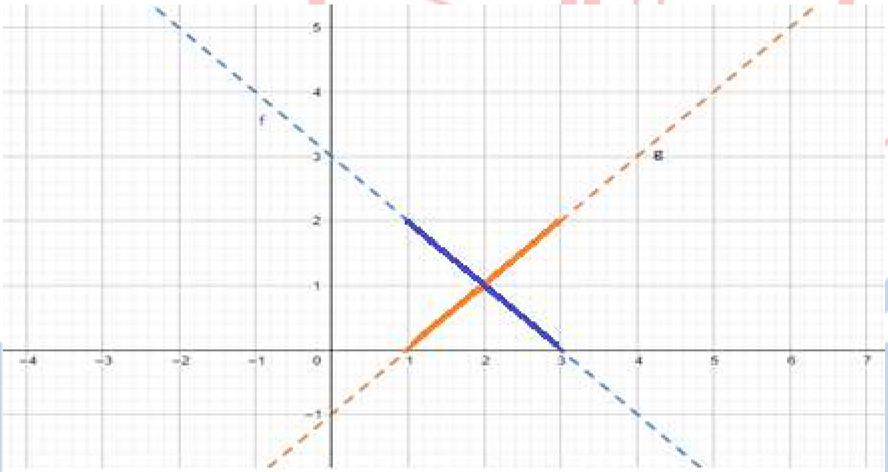
γ) i. Για την f(x)=3-x για $1\leq x\leq 3$ προκύπτει ο πίνακας τιμών:

x	y
1	2
3	0

Ομοίως για την g(x)=x-1 για $1\leq x\leq 3$ προκύπτει ο πίνακας τιμών:

x	y
1	0
3	2

Επομένως, στο ίδιο σύστημα αξόνων, έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση:



ii. Από την γραφική παράσταση του ερωτήματος γ) i παρατηρούμε πως $|f(x)-g(x)|$=2 έχουμε για x=1 ή x=3.

14184

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 4)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 8)

γ) Αν είναι $f(x)=x+2,\ x\neq -1$, τότε:

i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τη γραφική παράσταση της $g(x)=x^2$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

(Μονάδες 6)

14184-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$1+(x+2)x \neq 0 \text{, δηλαδή}$$

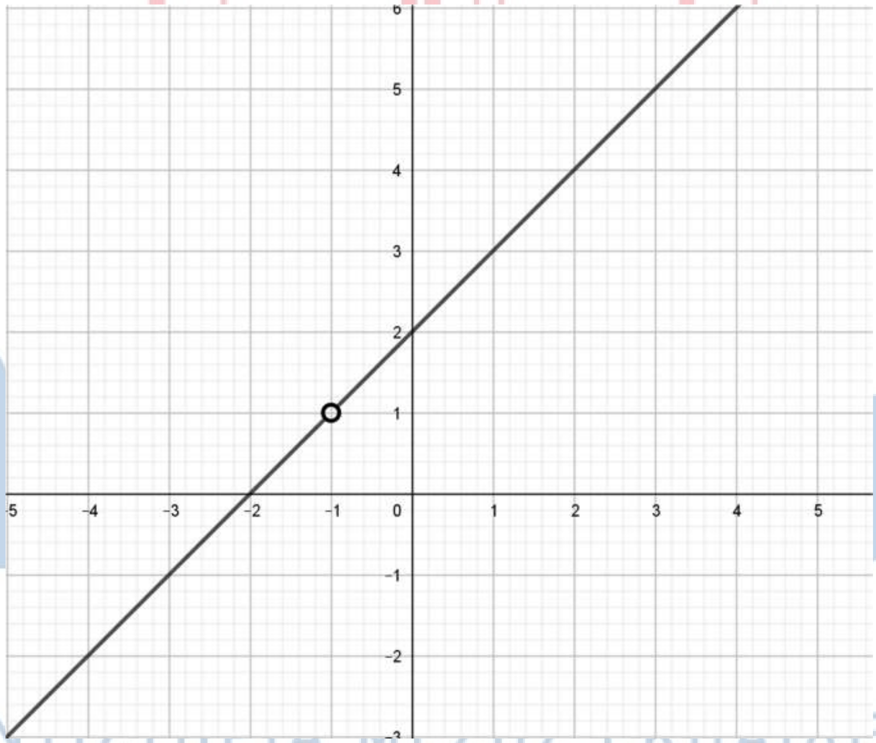
$$x^2+2x+1 \neq 0 \text{, οπότε}$$

$$(x+1)^2 \neq 0 \text{ και τελικά}$$

$$x \neq -1.$$

Άρα $A_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

β) Έχουμε: $f(x) = \dfrac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x} = \dfrac{(x+2)(x+1)^2}{(x+1)^2} = x+2$ και η γραφική της παράσταση είναι ευθεία με εξίσωση $y = x+2$ και $x \neq -1$.



γ)

i. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημεία των οποίων οι τετμημένες είναι λύσεις της εξίσωσης: $x+2 = x^2$, για $x \neq -1$.

Έχουμε λοιπόν $x+2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ που είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες που έχουν άθροισμα $-\dfrac{-1}{1} = 1$ και γινόμενο $\dfrac{-2}{1} = -2$. Άρα $x_1 = 2$ και $x_2 = -1$ (απορρίπτεται).

Άρα οι γραφικές παραστάσεις έχουν ένα κοινό σημείο, το $(2,4)$, αφού $f(2) = g(2) = 4$.

14184-Λύση

ii. Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g για τις τιμές του x οι οποίες είναι λύσεις της ανίσωσης:

$$x+2>x^2 \Leftrightarrow x^2-x-2<0.$$

Η ανίσωση είναι 2^{ου} βαθμού με $\alpha=1>0$ και ρίζες $x_1=2$ και $x_2=-1$, οπότε αληθεύει για $x\in(-1,2)$.

14320

ΘΕΜΑ 4

Σε κάποιο τόπο, μια χειμερινή μέρα, ξεκινάμε να μετράμε τη θερμοκρασία από τις 6 το πρωί και μετά. Ο τύπος που δίνει τη θερμοκρασία, x ώρες μετά τις 6 το πρωί, είναι:

$$f(x)=\begin{cases}2x+4, & x\in[0,6]\\ 16, & x\in(6,9]\\ 25-x, & x\in(9,12]\end{cases}$$

και μετριέται σε βαθμούς Κελσίου.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία στον τόπο αυτό, στις 6 το πρωί, στις 12 το μεσημέρι και στις 5 το απόγευμα.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε σε ποιο χρονικό διάστημα της ημέρας η θερμοκρασία:

i. Διατηρείται σταθερή.

ii. Είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου.

(Μονάδες 4+7=11)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

14320-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η θερμοκρασία στις 6 το πρωί, προκύπτει για $x=0$ και είναι ίση με $f(0)=4$.

Η θερμοκρασία στις 12 το μεσημέρι, προκύπτει για $x=6$ και είναι ίση με $f(6)=2\cdot 6+4=16$.

Η θερμοκρασία στις 5 το απόγευμα, προκύπτει για $x=11$ και είναι ίση με $f(11)=25-11=14$.

β) i. Η θερμοκρασία διατηρείται σταθερή και ίση με 16 βαθμούς Κελσίου, ανάμεσα στην 6^{η} και την 9^{η} ώρα μετά τις 6 το πρωί, δηλαδή στο διάστημα από τις 12 έως τις 3 το μεσημέρι.

ii. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

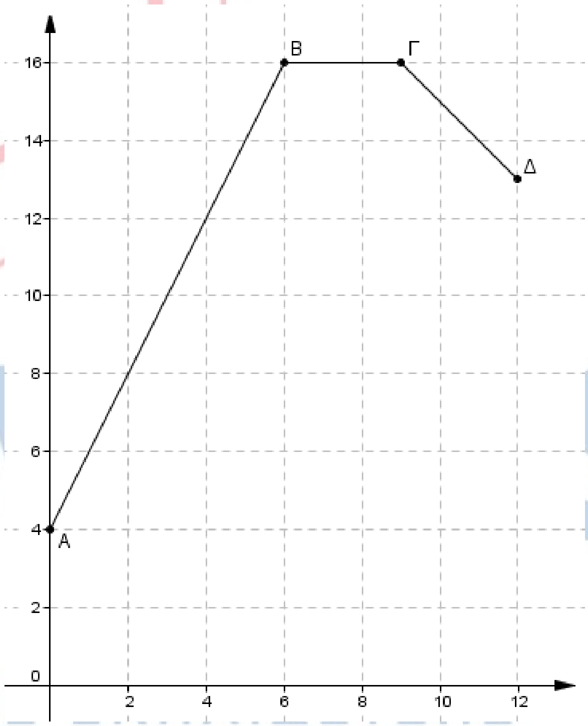
- Αν $x\in[0,\,6]$ τότε: $f(x)>14 \Leftrightarrow 2x+4>14 \Leftrightarrow x>5$
- Αν $x\in(6,\,9]$ τότε: $f(x)=16>14$
- Αν $x\in(9,\,12]$ τότε: $f(x)>14 \Leftrightarrow 25-x>14 \Leftrightarrow x<11$

Επομένως η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου, ανάμεσα στην 5^{η} και 11^{η} ώρα μετά τις 6 το πρωί, δηλαδή από τις 11 το πρωί μέχρι τις 5 το απόγευμα.

γ)Η γραφική παράσταση C_f της f αποτελείται από τρία ευθύγραμμα τμήματα.

- Το πρώτο τμήμα ΑΒ έχει άκρα τα σημεία $A(0,\,4)$ και $B(6,\,16)$
- Το δεύτερο τμήμα ΒΓ είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$ και έχει άκρα το Β και το $\Gamma(9,\,f(9))$ δηλαδή το $\Gamma(9,\,16)$
- Το τρίτο τμήμα ΓΔ έχει άκρα το σημείο Γ και το $\Delta(12,\,f(12))$ δηλαδή το $\Delta(12,\,13)$

Η C_f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

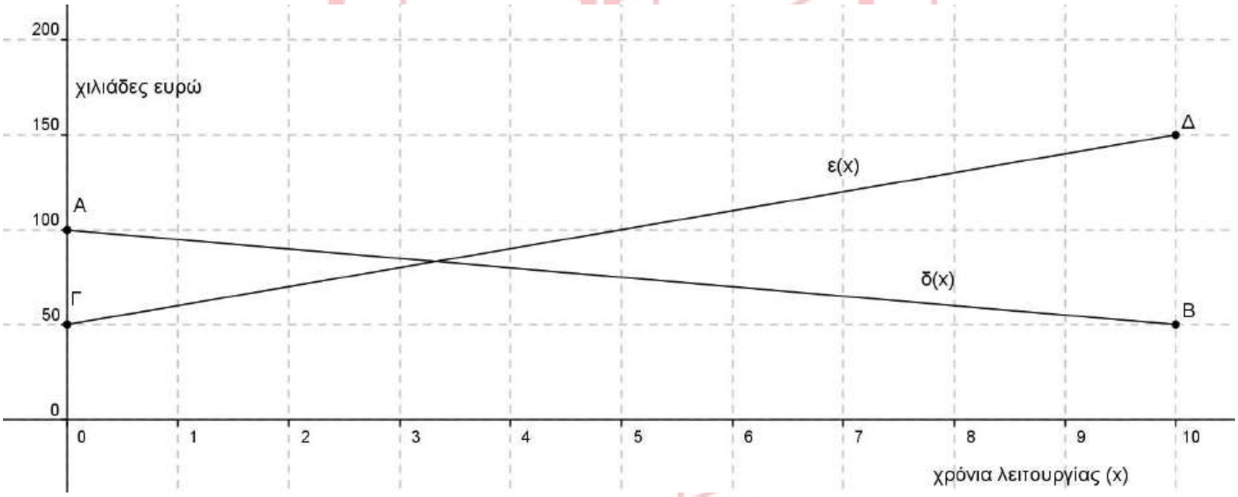


14477

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων η ευθεία AB με $\mathrm{A}(0,100)$ και $\mathrm{B}(10,50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Η ευθεία $\Gamma\Delta$ με $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τις δαπάνες τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.

(Μονάδες 4)

β)

i. Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές.

(Μονάδες 15)

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών AB και $\Gamma\Delta$ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 6)

14477-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας ($x=5$), με τη βοήθεια της ευθείας $\Gamma\Delta$ των εσόδων, εκτιμούμε ότι η εταιρεία θα έχει περίπου 100 ευρώ έσοδα ($y=100$ είναι η τεταγμένη του σημείου της ευθείας $\Gamma\Delta$ με τετμημένη $x=5$).

Τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας ($x=5$), με τη βοήθεια της ευθείας AB των δαπανών, εκτιμούμε ότι οι δαπάνες της εταιρείας θα είναι περίπου 75 ευρώ ($y=75$ είναι η τεταγμένη του σημείου της ευθείας AB με τετμημένη $x=5$).

β)

i. Η ευθεία $\Gamma\Delta$, που αναπαριστά τη συνάρτηση των εσόδων $\varepsilon(x)$, διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\alpha=\dfrac{150-50}{10-0}=\dfrac{100}{10}=10$ και εξίσωση $\Gamma\Delta: y=10x+50$.

Η ευθεία AB, που αναπαριστά τη συνάρτηση των δαπανών $\delta(x)$, διέρχεται από τα σημεία $A(0,100)$ και $B(10,50)$ οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\alpha=\dfrac{100-50}{0-10}=\dfrac{50}{-10}=-5$ και εξίσωση $AB: y=-5x+100$.

Παρατηρούμε ότι:

Το σημείο της ευθείας $\Gamma\Delta$ με τετμημένη $x=5$ έχει τεταγμένη:

$y=10\cdot 5+50=50+50=100$.

Το σημείο της ευθείας AB με τετμημένη $x=5$ έχει τεταγμένη:

$y=-5\cdot 5+100=-25+100=75$.

Επομένως οι εκτιμήσεις που κάναμε ήταν σωστές.

ii. Η τετμημένη του σημείου τομής των ευθειών AB και $\Gamma\Delta$ είναι η λύση της εξίσωσης:

$$10x+50=-5x+100, \text{ δηλαδή}$$

$$15x=50, \text{ οπότε}$$

$$x=\frac{50}{15}=3\frac{1}{3} \text{ και}$$

η τεταγμένη του σημείου τομής είναι: $y=-5\cdot\dfrac{50}{15}+100=-\dfrac{50}{3}+100=\dfrac{250}{3}\approx 83,3$

Συνεπώς $3\dfrac{1}{3}$ έτη (3 έτη και 4 μήνες) μετά την έναρξη λειτουργίας, τα έσοδα της εταιρείας είναι όσα και οι δαπάνες της ($83,3$ χιλιάδες ευρώ).

14556

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α , β σταθεροί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $x \in R$. Θεωρούμε τα σημεία Α και Β της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$, των οποίων οι προβολές στους άξονες x΄x, y΄y είναι τα σημεία Η,Δ και Κ,Ε αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΗΚ και ΔΕ έχουν μήκη 6 και 9 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -\frac{3}{2}$

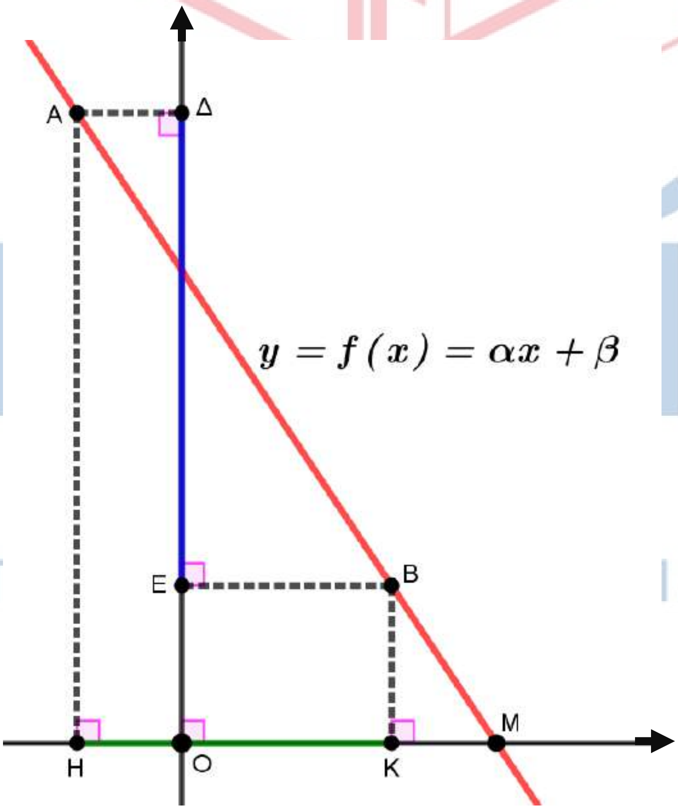
(Μονάδες 9)

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το σημείο Μ έχει τετμημένη 6, να αποδείξτε ότι $\beta = 9$.

(Μονάδες 7)

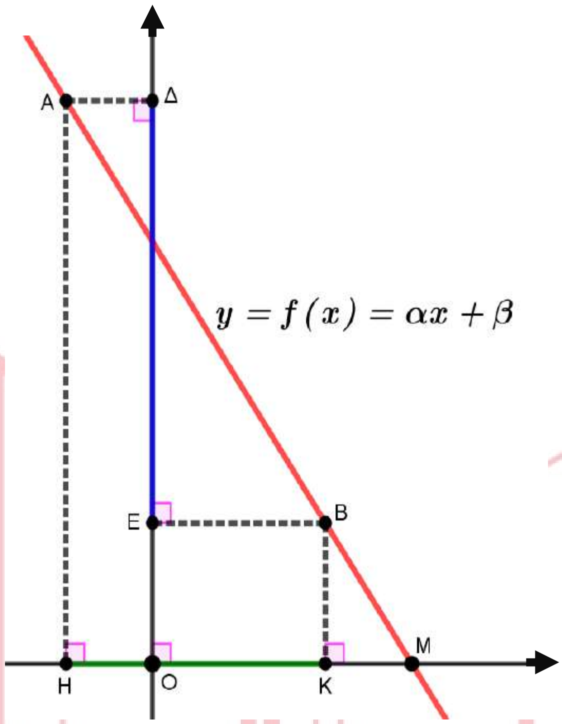
γ) Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΟΚ έχει μήκος 4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία διέρχεται από το σημείο Ε και είναι παράλληλη προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

(Μονάδες 9)



14556-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Έστω $A\big(x_1, f(x_1)\big), B\big(x_2, f(x_2)\big)$ τα σημεία του σχήματος. Αφού (ΗΚ)=6 θα είναι $x_2 - x_1 = 6$ και (ΔΕ)=9, άρα $f(x_1) - f(x_2) = 9$, οπότε $\alpha x_1 + \beta - (\alpha x_2 + \beta) = 9$, δηλαδή $\alpha(x_1 - x_2) = 9$, έτσι $\alpha(-6) = 9$. Ώστε $\alpha = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$.

β) Το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $M(6, f(6))$. Αφού είναι σημείο του άξονα x΄x, θα είναι $f(6) = 0$, άρα $-\frac{3}{2} \cdot 6 + \beta = 0$, άρα $\beta = 9$.

γ) Αφού είναι (ΟΚ)=4, τότε και η τετμημένη του σημείου Β θα είναι επίσης 4. Άρα η τεταγμένη του σημείου Β θα είναι $y = -\frac{3}{2} \cdot 4 + 9 = 3$. Οπότε έχουμε $E(0, 3)$, καθώς τα σημεία Ε και Β έχουν την ίδια τεταγμένη. Αφού οι ευθείες είναι παράλληλες, θα έχουν την ίδια κλίση $-\frac{3}{2}$. Έτσι, η εξίσωση της ευθείας (δ) θα είναι $y = -\frac{3}{2} \cdot x + 3$.

14575

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x$, για κάθε $x\in \mathrm{A}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 9)

14575-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για $x \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει:

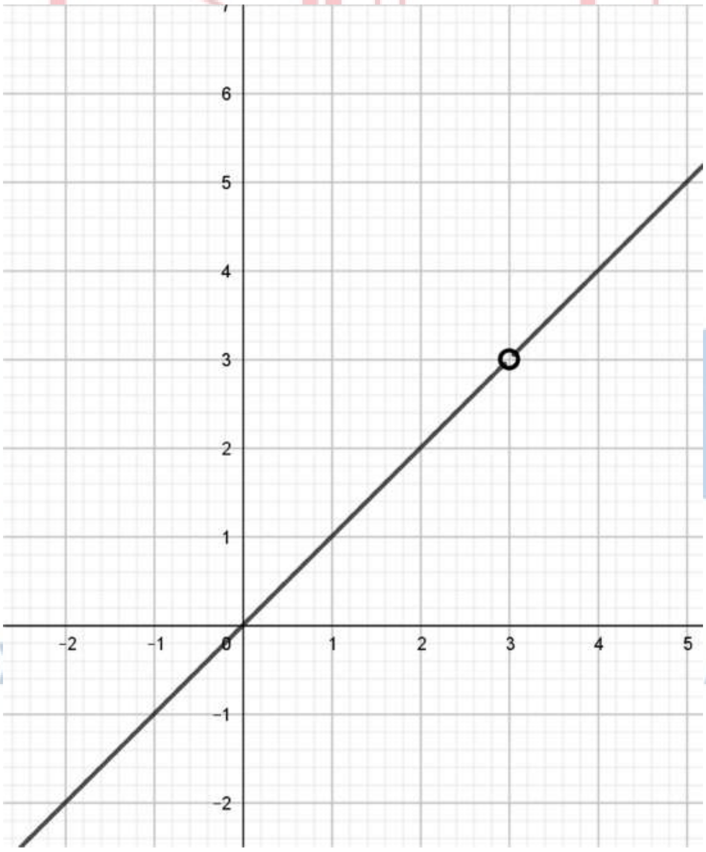
$$x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$x \neq 3.$$

Κατά συνέπεια το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathrm{A} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

β) Έχουμε: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 3} = \dfrac{x(x-3)}{(x-3)} = x$, για κάθε $x \in \mathrm{A}$.

γ) Η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας.

Από την ευθεία θα εξαιρεθεί το σημείο $(3,3)$, διότι $3 \notin \mathrm{A}$. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



14576

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=|x|$, για κάθε $x\in \mathrm{A}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, για $x>0$.

(Μονάδες 5)

14576-Λύση

ΛΥΣΗ

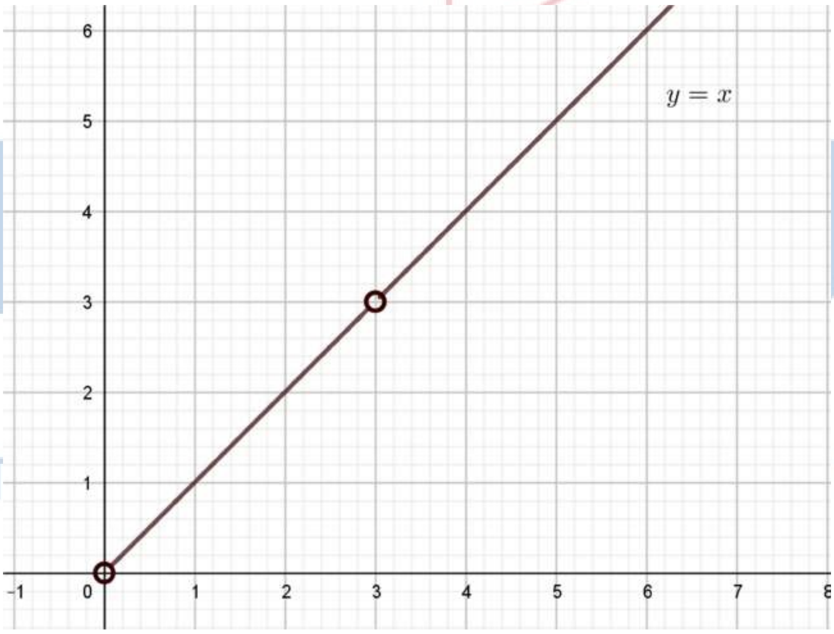
α) Η συνάρτηση ορίζεται για $x \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει:

$$2|x|-6 \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$2|x| \neq 6 \Leftrightarrow$$
$$|x| \neq 3 \Leftrightarrow$$
$$x \neq \pm 3.$$

Κατά συνέπεια το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathrm{A}=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$.

β) Έχουμε: $f(x)=\dfrac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}=\dfrac{2|x|^2-6|x|}{2|x|-6}=\dfrac{2|x|(|x|-3)}{2(|x|-3)}=|x|$, για κάθε $x \in \mathrm{A}$.

γ) Η συνάρτηση f για $x>0$ έχει τύπο $f(x)=x$ της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων (όμως το $(0,0)$ θα εξαιρεθεί από τη γραφική παράσταση, αφού $x>0$). Από την ευθεία θα εξαιρεθεί επίσης το σημείο $(3,3)$, διότι $3 \notin \mathrm{A}$. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



14641

ΘΕΜΑ 2

Η παρακάτω ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^o.

α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε.

(Μονάδες 7)

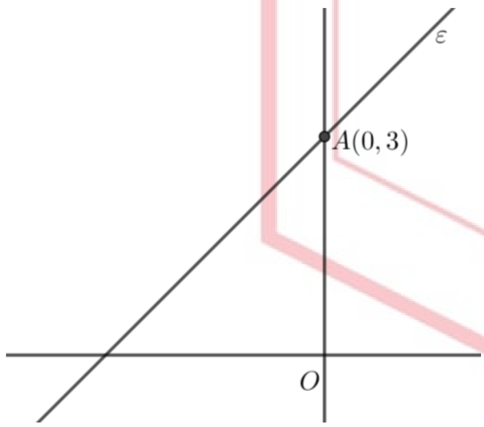
β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ε.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$.

(Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^o = 1$)

(Μονάδες 9)



14641-Λύση

Λύση

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι $\alpha = \varepsilon\varphi 45^o = 1$.

β) Η ευθεία ε έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$. Από το ερώτημα α) γνωρίζουμε ότι $\alpha = 1$. Άρα, $\varepsilon: y = x + \beta$. Επίσης, η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,3)$ οπότε, $\beta = 3$. Άρα, η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = x + 3$.

γ) Η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο για το οποίο

$$y = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3.$$

Άρα, το σημείο τομής είναι το $(-3,0)$.

14731

ΘΕΜΑ 1

Α. Σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε Σωστό (Σ), αν η πρόταση που διατυπώνεται είναι σωστή και Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει ότι $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{a}+\sqrt{\beta}$.

β) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι $|\alpha+\beta| \leq |-\alpha|+|\beta|$.

γ) Κάθε ευθεία η οποία έχει θετική κλίση, σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.

δ) Η εξίσωση $x^3=-8$ είναι αδύνατη στους πραγματικούς αριθμούς.

ε) Αν είναι $\alpha\beta>1$, τότε θα ισχύει αναγκαστικά $\alpha>1 \; και \; \beta>1$.

(Μονάδες 15)

Β. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha \neq 0$. Αν έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2, τότε να αποδείξετε ότι το άθροισμά τους είναι ίσο με $x_1+x_2=\frac{-\beta}{\alpha}$.

(Μονάδες 10)

14731-Λύση

ΛΥΣΗ

Α. α) ΛΑΘΟΣ. Για α=9 και β= 16 έχουμε $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$, ενώ $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}$=5 . Άρα δεν ισχύει η ισότητα για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς α,β.

β) ΣΩΣΤΟ. Ισχύει ότι $|\alpha|=|-\alpha|$, για κάθε α πραγματικό αριθμό. Οπότε από την τριγωνική ανισότητα $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$, προκύπτει το ζητούμενο.

γ) ΣΩΣΤΟ. Η κλίση μίας ευθείας είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x'x. Οι οξείες γωνίες έχουν θετική εφαπτομένη, ενώ οι αμβλείες έχουν αρνητική εφαπτομένη.

δ) ΛΑΘΟΣ. Για x=-2 η εξίσωση επαληθεύεται.

ε) ΛΑΘΟΣ. Αν α=-1, β=-2, τότε αβ=2>1.

Β. Δείτε απόδειξη στην παράγραφο 3.3 του σχολικού βιβλίου.

14829

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Αν $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ τότε $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$

ii. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει $|-\alpha| = \alpha$.

iii. Η γραφική παράταση μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.

iv. Αν το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$.

v. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \alpha_2 x + \beta_2$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, τότε $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α, β και γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$.

(Μονάδες 15)

14829-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Λ

ii. Λ

iii. Σ

iv. Λ

v. Σ

β) Θεωρία σελ. 126.

33894

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} x-3, & x>2 \\ -x+3, & x<2 \end{cases}$.

(Μονάδες 7)

γ)

i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 4)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$.

(Μονάδες 5)

33894-Λύση

ΛΥΣΗ

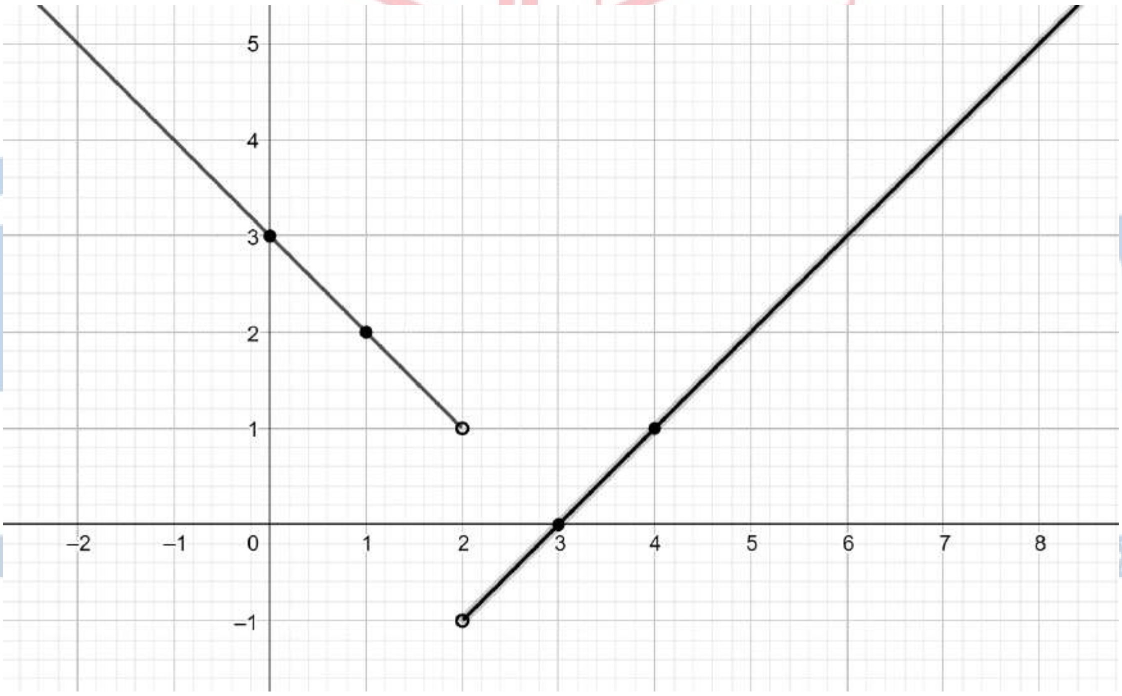
α) Πρέπει $|2-x| \neq 0 \Leftrightarrow 2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. Άρα $A_f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

β) Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει άθροισμα ριζών $S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = 5$ και γινόμενο ριζών $P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 6$, άρα οι ρίζες του είναι: $x_1 = 2, x_2 = 3$. Οπότε $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$.

Έχουμε $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2-x|} = \frac{(x-2)(x-3)}{|2-x|} = \begin{cases} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)} = x-3, & x > 2 \\ \frac{(x-2)(x-3)}{(2-x)} = -x+3, & x < 2 \end{cases}$

γ)

i. Για $x > 2$ η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία με εξίσωση $y = x - 3$. Δυο σημεία από τα οποία διέρχεται η ευθεία είναι τα $(3,0)$ και $(4,1)$. Για $x < 2$ η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία με εξίσωση $y = -x + 3$. Δυο σημεία από τα οποία διέρχεται η ευθεία είναι τα $(1,2)$ και $(0,3)$. Άρα η γραφική παράσταση της f είναι:



ii. Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ άξονα στο σημείο $(3,0)$ και τον $y'y$ άξονα στο $(0,3)$.

33894-Λύση

δ) Από το γi. ερώτημα, παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ για $x \in (2,3)$ και τέμνει τον $x'x$ στο $(3,0)$ (δηλαδή $f(3)=0$). Άρα η ανίσωση $f(x) \leq 0$ αληθεύει για $x \in (2,3]$.

33895

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=2x-\alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,-1)$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 5)

33895-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $2x-3\neq 0 \Leftrightarrow 2x\neq 3 \Leftrightarrow x\neq \frac{3}{2}$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι

$A_f=\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$.

β) Θα παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο στον αριθμητή του τύπου της συνάρτησης f. Έχουμε:

$4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha=4x^2-2\alpha x-6x+3a=2x(2x-a)-3(2x-a)=(2x-a)(2x-3)$.

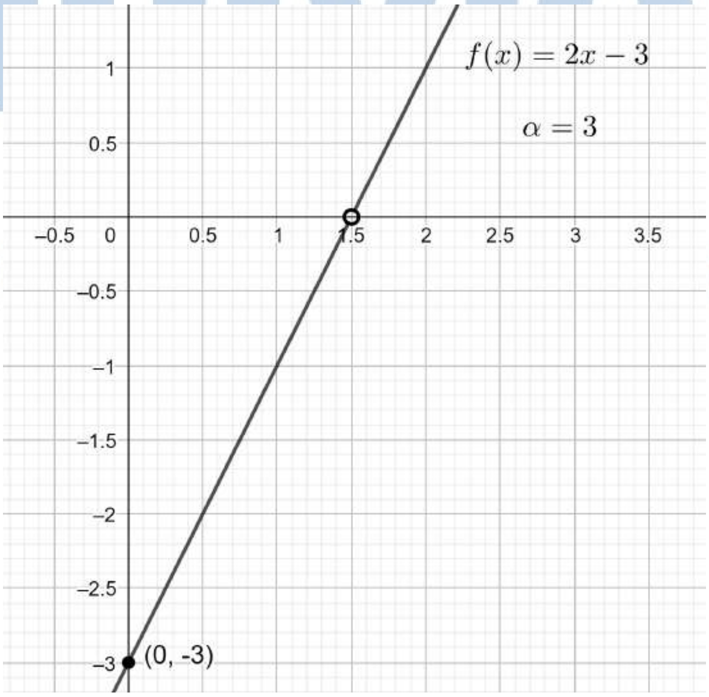
Άρα:

$f(x)=\dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}=\dfrac{(2x-\alpha)(2x-3)}{2x-3}=2x-\alpha$, για κάθε $x\neq\frac{3}{2}$.

γ) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,-1)$, δηλαδή $f(1)=-1$,οπότε $2\cdot 1-\alpha=-1$ και τελικά $\alpha=3$.

δ) Η γραφική παράσταση της $f(x)=2x-\alpha$ είναι ευθεία, εκτός του σημείου με τετμημένη $\frac{3}{2}$, δηλαδή του σημείου $\left(\frac{3}{2},3-\alpha\right)$.

Αν $\alpha=3$, η ευθεία δεν έχει σημείο τομής με τον $x'x$ άξονα (το σημείο $\left(\frac{3}{2},0\right)$ δεν είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f). Τέμνει τον $y'y$ άξονα στο $(0,-3)$, γιατί $f(0)=2\cdot 0-\alpha=-\alpha=-3$.



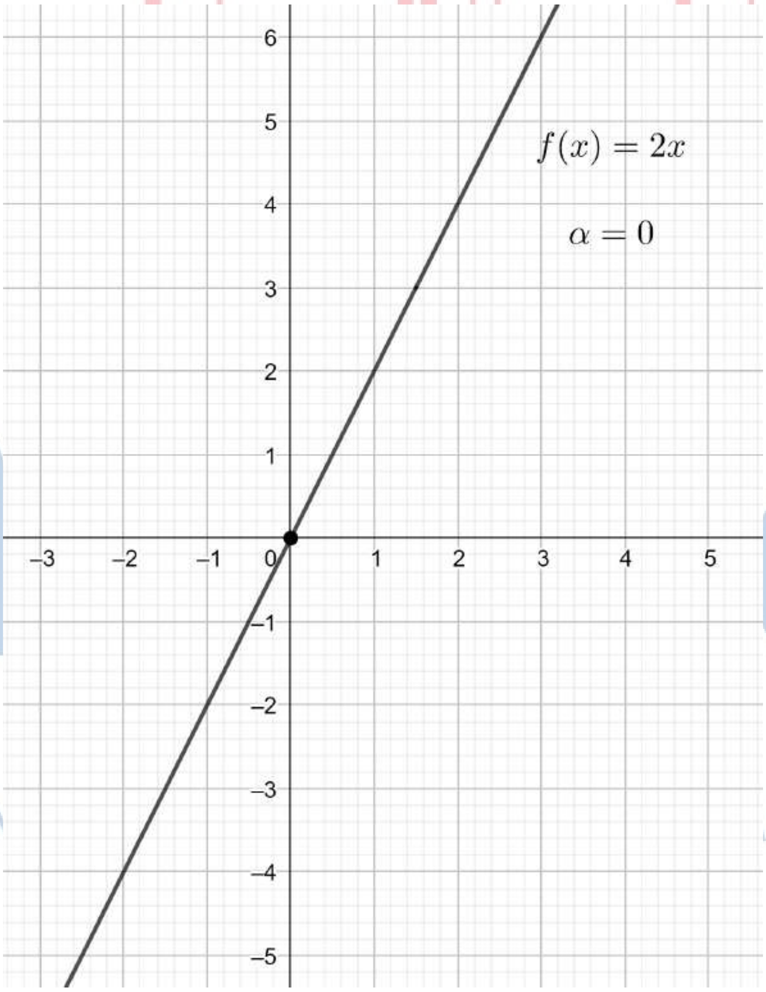
33895-Λύση

Αν $\alpha \neq 3$:

Για $y=0$ έχουμε $0=2x-\alpha \Leftrightarrow x=\frac{\alpha}{2}$ και η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ άξονα στο σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{\alpha}{2},0\right)$.

Για $x=0$, έχουμε $y=2\cdot 0-\alpha=-\alpha$ και η γραφική παράσταση της f τέμνει τον τον $y'y$ άξονα στο $\mathrm{B}(0,-\alpha)$.

Ειδικά στην περίπτωση που $\alpha=0$, τα παραπάνω σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $(0,0)$, οπότε η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.



34183

ΘΕΜΑ 4

Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία ταξί με το όνομα «RED» χρεώνει τον πελάτη 1 ευρώ με την είσοδο στο ταξί και $0,6$ ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει. Μια άλλη εταιρεία ταξί με το όνομα «YELLOW» χρεώνει τον πελάτη 2 ευρώ με την είσοδο στο ταξί και $0,4$ ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α)

i. Αν $f(x)$ είναι το ποσό (σε ευρώ) που χρεώνει η εταιρεία «RED» για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

$x\,(km)$	0	2	8
$f(x)$ (ευρώ)			

(Μονάδες 3)

ii. Αν $g(x)$ είναι το ποσό (σε ευρώ) που χρεώνει η εταιρεία «YELLOW» για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

$x\,(km)$			
$g(x)$ (ευρώ)	2	$3,2$	$4,8$

(Μονάδες 3)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f, g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας «RED» είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

δ) Αν δυο πελάτες $Α$ και $Β$ μετακινηθούν με την εταιρεία «RED» και ο πελάτης $Α$ διανύσει 3 χιλιόμετρα περισσότερα από τον $Β$, να βρείτε πόσα περισσότερα χρήματα θα πληρώσει ο $Α$ σε σχέση με τον $Β$.

(Μονάδες 3)

34183-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Για απόσταση $0km$, η εταιρεία «RED» χρεώνει 1 ευρώ, για απόσταση $2km$ χρεώνει $1+2\cdot 0,6=2,2$ ευρώ και για απόσταση $8km$ χρεώνει $1+8\cdot 0,6=5,8$. Οπότε ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

$x\ (km)$	0	2	8
$f(x)$ (ευρώ)	1	$2,2$	$5,8$

ii. Η εταιρεία «YELLOW» χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο ταξί, δηλαδή για απόσταση $0km$. Χρεώνει $3,2$ ευρώ για $3km$, διότι για τα χιλιόμετρα που διάνυσε θα πληρώσει $3,2-2=1,2$ ευρώ. Η εταιρεία χρεώνει $0,4$ ευρώ το χιλιόμετρο, άρα θα διανύσει $1,2\div 0,4=3km$. Όμοια, θα χρεώσει $4,8$ ευρώ για 7 χιλιόμετρα. Οπότε ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

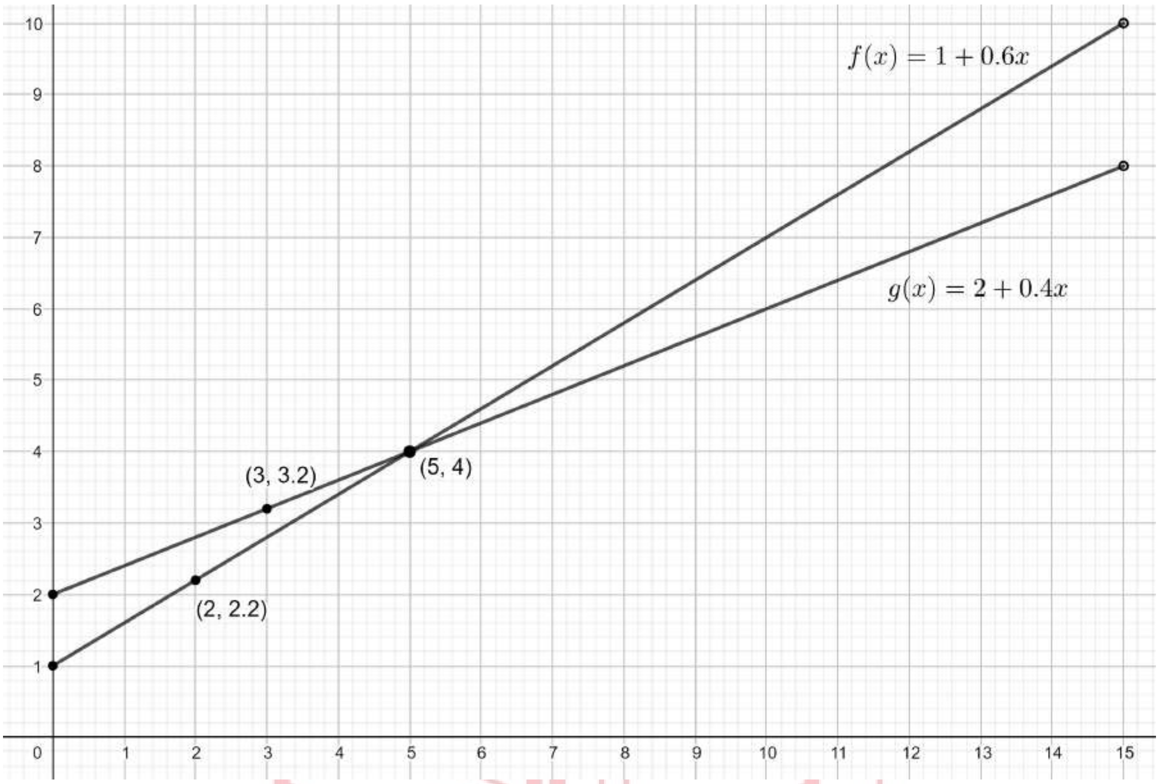
$x\ (km)$	0	3	7
$g(x)$ (ευρώ)	2	$3,2$	$4,8$

β) Όσον αφορά τη συνάρτηση f, πελάτης πληρώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο ταξί και $0,6$ ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει, οπότε για x χιλιόμετρα θα πληρώσει (σε ευρώ): $f(x)=1+0,6x$, $x\in[0,15)$.

Όσον αφορά τη συνάρτηση g, πελάτης πληρώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο ταξί και $0,6$ ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει, οπότε για x χιλιόμετρα θα πληρώσει (σε ευρώ) $g(x)=2+0,4x$, $x\in[0,15)$.

γ) Από τους πίνακες τιμών του α) ερωτήματος παίρνουμε δυο σημεία και χαράσσουμε τις γραφικές παραστάσεις των f και g, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

34183-Λύση



Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την γραφική παράσταση της g για $x \in [0,5)$ οπότε για αποστάσεις κάτω των 5 χιλιομέτρων η επιλογή της εταιρείας «RED» είναι πιο οικονομική.

δ) Αν ο πελάτης B διανύσει x χιλιόμετρα θα πληρώσει $(1+0,6x)$ ευρώ και ο πελάτης A θα διανύσει $(x+3)$ χιλιόμετρα και θα πληρώσει $1+0,6(x+3)=(1+0,6x)+1,8$, δηλαδή θα πληρώσει $1,8$ ευρώ περισσότερα από τον πελάτη B.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, όπου α,β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(1,6)$, $\mathrm{B}(-1,4)$, να βρείτε τις τιμές των α, β.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha=1$ και $\beta=5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,6)$ αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned} f(1)=6 &\Leftrightarrow \alpha\cdot 1+\beta=6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha+\beta=6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \beta=6-\alpha \quad (1) \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(-1,4)$ αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned} f(-1)=4 &\Leftrightarrow \alpha\cdot(-1)+\beta=4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\alpha+\beta=4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow -\alpha+6-\alpha=4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2\alpha=-2 \Leftrightarrow \alpha=1 \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή $\alpha=1$ στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\beta=6-1 \Leftrightarrow \beta=5$$

β) Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\mathrm{A}(-5,0)$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0)=0+5=5$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\mathrm{B}(0,5)$.

36652

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x+2$ και $g(x)=x^2-9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε ένα σημείο του ημιάξονα Ox.

(Μονάδες 7)

36652-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$ προσδιορίζονται από τις ρίζες της εξίσωσης $g(x)=0$. Είναι:

$$g(x)=0 \Leftrightarrow x^2-9=0 \Leftrightarrow x=-3 \text{ ή } x=3$$

Επομένως, τα ζητούμενα σημεία είναι τα $M(-3,\,0)$ και $N(3,\,0)$.

β) Είναι:

$$f(3)=4\cdot 3+2=14\neq 0 \text{ και } f(-3)=4\cdot(-3)+2=-10\neq 0$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $M(-3,\,0)$ και $N(3,\,0)$.

γ) Έστω ότι υπάρχει κοινό σημείο $(x_o,\,0)$ του άξονα $x'x$ στο οποίο τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των f, g. Τότε ισχύει:

$$\left(f(x_o)=0 \text{ και } g(x_o)=0\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_o+2=0 \\ x_o^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o=-\dfrac{1}{2} \\ x_o=\pm 3 \end{cases}$$

που είναι άτοπο. Άρα οι C_f, C_g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα $x'x$.

Έστω ότι οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα $y'y$. Τότε έχουμε:

$$f(0)=g(0) \Leftrightarrow 2=-9$$

που είναι άτοπο. Άρα οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω στον άξονα $y'y$.

δ) Η γραφική παράσταση της h είναι ευθεία, οπότε ο τύπος της είναι της μορφής $h(x)=\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(0,\,3)$, οπότε έχουμε:

$$h(0)=3 \Leftrightarrow \alpha\cdot 0+\beta=3 \Leftrightarrow \beta=3$$

Επομένως έχουμε $h(x)=\alpha x+3,\ \alpha\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, η γραφική παράσταση της h τέμνει την γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox οπότε ισχύει:

$$h(3)=g(3) \Leftrightarrow 3\alpha+3=0 \Leftrightarrow \alpha=-1$$

Τελικά η συνάρτηση h έχει τύπο $h(x)=-x+3$.

36655

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β.

(Μονάδες 8)

36655-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται μόνο όταν:

$$9-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<9 \Leftrightarrow |x|<3 \Leftrightarrow -3<x<3$$

Άρα, $A_f=(-3,\ 3)$.

β) Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο όταν για κάποιο $x \in A_f$ ισχύει $f(x)=0$. Είναι:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

Επομένως η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-2,\ 0)$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0)=\frac{0+2}{\sqrt{9-0}}=\frac{2}{3}$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B\left(0,\ \frac{2}{3}\right)$.

γ) Έστω $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta$ η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α, Β είναι:

$$\alpha=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\frac{2}{3}-0}{0-(-2)}=\frac{\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{3}$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας γράφεται

$$(\varepsilon): y=\frac{1}{3}x+\beta$$

Επιπλέον η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(-2,\ 0)$, οπότε οι συντεταγμένες του Α την επαληθεύουν. Έτσι, έχουμε:

$$0=\frac{1}{3}(-2)+\beta \Leftrightarrow \beta-\frac{2}{3}=0 \Leftrightarrow \beta=\frac{2}{3}$$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι $(\varepsilon): y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$.

36659

ΘΕΜΑ 4

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες;

(Μονάδες 5)

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i. Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x)=30-\frac{3}{4}x$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β (i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

(Μονάδες 4)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 9)

36659-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Ο αθλητής όταν κολυμπάει ύπτιο, καίει 9 θερμίδες το λεπτό. Άρα σε 32 λεπτά θα έχει κάψει $9 \cdot 32 = 288$ θερμίδες.

Ο αθλητής όταν κολυμπάει πεταλούδα, καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Αν υποθέσουμε ότι κολυμπάει με αυτό το στυλ x λεπτά, τότε θα κάψει $12 \cdot x$ θερμίδες. Επειδή ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες, ισχύει:

$$288 + 12x = 360 \Leftrightarrow 12x = 72 \Leftrightarrow x = 6$$

Άρα ο αθλητής πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα 6 λεπτά.

β) i. Έστω x ο χρόνος σε λεπτά που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο και y ο χρόνος σε λεπτά που ο αθλητής κολυμπάει πεταλούδα. Τότε, για να κάψει 360 θερμίδες κολυμπώντας και με τα δυο στυλ, πρέπει να ισχύει:

$$9x + 12y = 360 \Leftrightarrow 12y = 360 - 9x \Leftrightarrow y = 30 - \frac{3}{4}x$$

Άρα $f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$.

ii Επειδή οι x, $f(x)$ είναι μεταβλητές χρόνου, πρέπει: $x \geq 0$ και $f(x) \geq 0$. Έτσι, έχουμε:

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 30 - \frac{3}{4}x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x \leq 30 \Leftrightarrow 3x \leq 120 \Leftrightarrow x \leq 40$$

οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι: $A_f = [0,\ 40]$.

γ) Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο της με τεταγμένη $y = 0$, δηλαδή $f(x) = 0$. Είναι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 30 - \frac{3}{4}x = 0 \Leftrightarrow 3x = 120 \Leftrightarrow x = 40.$$

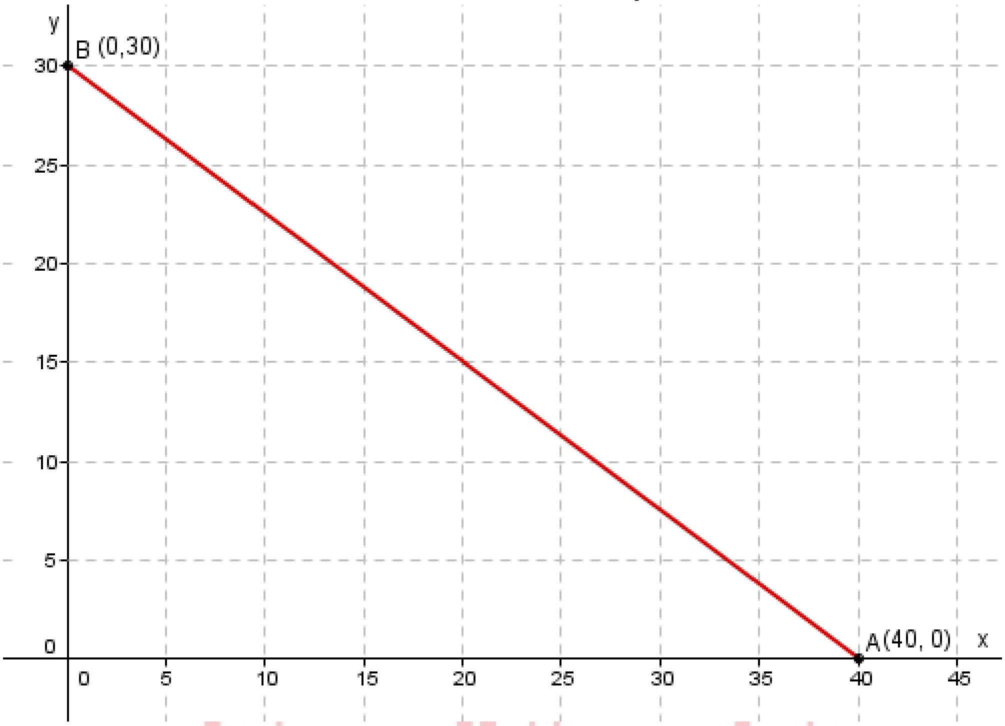
Επομένως η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(40,\ 0)$. Επιπλέον,

$$f(0) = 30 - \frac{3}{4} \cdot 0 = 30$$

οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,\ 30)$.

Η γραφική παράσταση της f είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (τμήμα της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α, Β). Επομένως είναι:

36659-Λύση



Το σημείο Α δείχνει ότι όταν ο αθλητής δεν κολυμπάει πεταλούδα χρειάζεται 40 λεπτά ύπτιο για να κάψει 360 θερμίδες ενώ το σημείο Β δείχνει ότι όταν ο αθλητής δεν κολυμπάει ύπτιο χρειάζεται 30 λεπτά πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

36682

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω $\mathrm{M}(x,y)$ σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x-1|<3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

(Μονάδες 10)

36682-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο x^2+x+1 έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 1-4 = -3 < 0$$

οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι ομόσημο του συντελεστή του x^2, δηλαδή του $\alpha = 1 > 0$.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$x^2+x+1>0 \Leftrightarrow f(x)>0$$

που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$ και άρα δεν τέμνει τον $x'x$.

β) Οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$ είναι οι λύσεις της ανίσωσης

$$\begin{aligned}&f(x)<2x+3 \Leftrightarrow\\&x^2+x+1<2x+3 \Leftrightarrow\\&x^2-x-2<0\end{aligned}$$

Το τριώνυμο x^2-x-2 έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1+8 = 9 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{1-3}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου x^2-x-2 φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	-∞		-1		2		+∞
x^2-x-2		+	0	-	0	+	

Συνεπώς $x^2-x-2<0 \Leftrightarrow x\in(-1,2)$.

γ) Αφού $|2x-1|<3$, έχουμε ισοδύναμα ότι

$$\begin{aligned}&|2x-1|<3 \Leftrightarrow\\&-3<2x-1<3 \Leftrightarrow\\&-3+1<2x-1+1<3+1 \Leftrightarrow\\&-2<2x<4 \Leftrightarrow\\&-1<x<2\end{aligned}$$

36682-Λύση

Αφού για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει $-1<x<2$ τότε, όπως δείξαμε στο ερώτημα β), το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

36683

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f, με

$$f(x)=\begin{cases}-x+2, & \alpha\nu \quad x<0\\ x+2, & \alpha\nu \quad x\geq 0\end{cases}$$

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 3)

β)

i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y=3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

(Μονάδες 5)

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ)

i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 8)

36683-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αντικαθιστούμε στον τύπο της f, και συγκεκριμένα στον κλάδο $x+2$ όπου $x=0$ και βρίσκουμε: $f(0)=0+2=2$.

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\mathrm{M}(0,2)$.

β)

i) Για $x=-1$ είναι: $f(-1)=-(-1)+2=1+2=3$.

Για $x=-2$ είναι: $f(-2)=-(-2)+2=2+2=4$.

Άρα η ημιευθεία $y=-x+2$ διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-1,3)$ και $\mathrm{B}(-2,4)$.

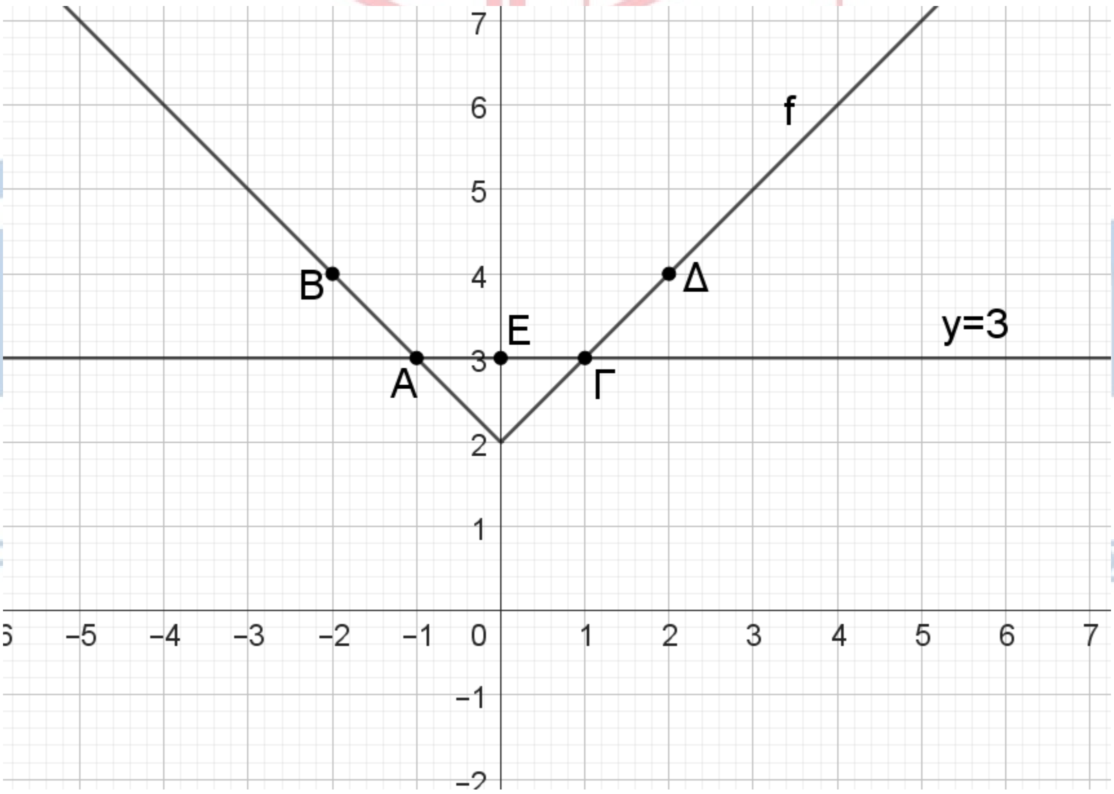
Για $x=1$ είναι: $f(1)=1+2=3$.

Για $x=2$ είναι: $f(2)=2+2=4$.

Άρα η ημιευθεία $y=x+2$ διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(1,3)$ και $\Delta(2,4)$.

Η ευθεία $y=3$ είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{E}(0,3)$.

Η γραφική παράσταση C_f και η ευθεία $y=3$ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα .



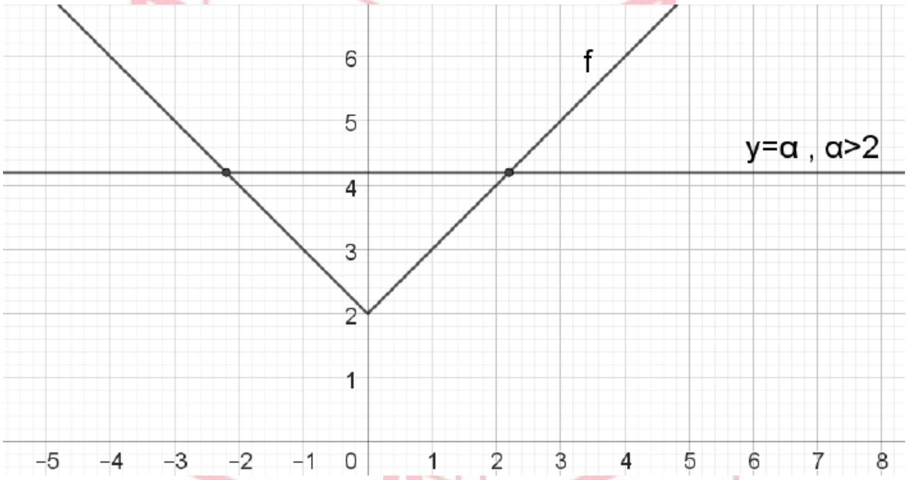
Από τη γραφική παράσταση διαπιστώνουμε ότι τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=3$ είναι τα $\mathrm{A}(-1,3)$ και $\Gamma(1,3)$.

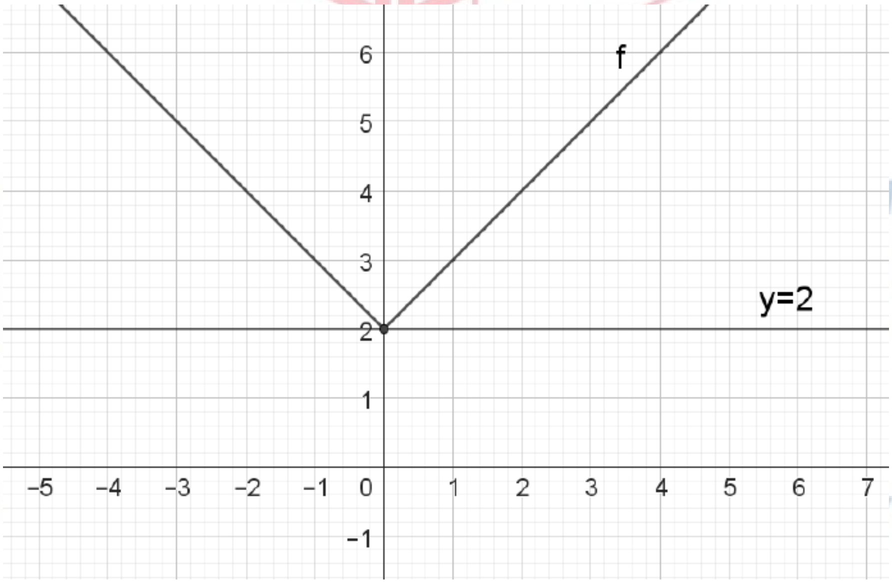
36683-Λύση

ii) Τα σημεία $A(-1,3)$ και $\Gamma(1,3)$ έχουν αντίθετες τετμημένες και ίσες τεταγμένες. Άρα είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.

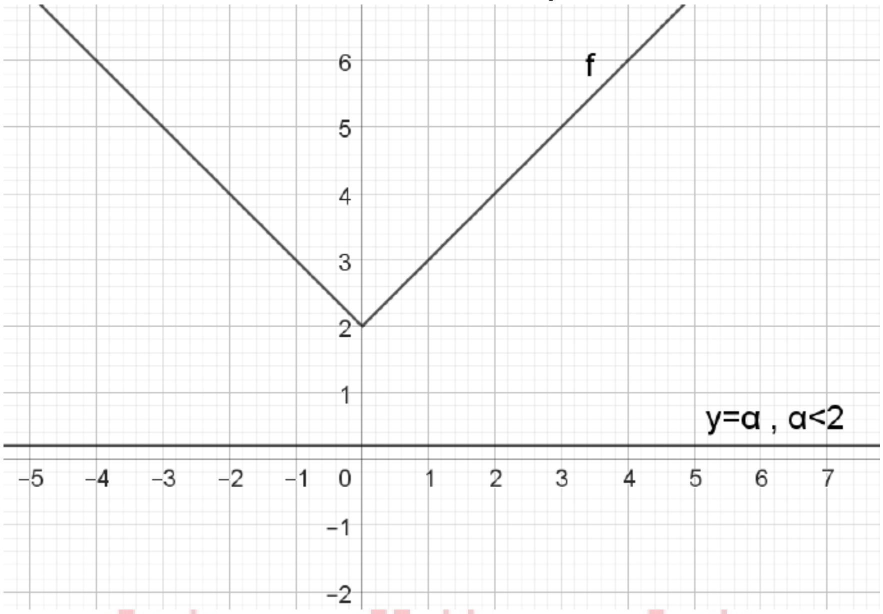
γ)

i) Η ευθεία $y=\alpha$ είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $(0,\alpha)$.Όπως διαπιστώνουμε και από τα παρακάτω σχήματα, η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δύο σημεία αν και μόνο αν $\alpha>2$.





36683-Λύση



ii) Ο τύπος της f γράφεται: $f(x)=|x|+2$, $x\in\mathbb{R}$.

Οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=\alpha \Leftrightarrow |x|+2=\alpha \Leftrightarrow |x|=\alpha-2$.

Αν $\alpha<2 \Leftrightarrow \alpha-2<0$ η εξίσωση $|x|=\alpha-2$ είναι αδύνατη και επομένως η C_f με την ευθεία $y=\alpha$ δεν έχουν κοινά σημεία, όπως φαίνεται και στο τελευταίο σχήμα.

Αν $\alpha=2$ η εξίσωση $|x|=\alpha-2 \Leftrightarrow |x|=0 \Leftrightarrow x=0$ και επομένως η C_f με την ευθεία $y=2$ έχουν ένα κοινό σημείο το $(0,2)$ όπως φαίνεται και στο προτελευταίο σχήμα.

Αν $\alpha>2$ η εξίσωση $|x|=\alpha-2 \Leftrightarrow x=\alpha-2$ ή $x=-\alpha+2$ δηλαδή δύο λύσεις διαφορετικές και επομένως η C_f με την ευθεία $y=\alpha$ έχουν δύο κοινά σημεία τα $(\alpha-2,\alpha)$ και $(-\alpha+2,\alpha)$ όπως φαίνεται και στα δύο πρώτα σχήματα.

37183

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(0)=5 \text{ και } f(1)=3.$$

α) Να αποδείξετε ότι α=-2 και β = 5.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία, στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

37183-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι:

$$f(0) = 5 \Leftrightarrow a \cdot 0 + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 5 \quad (1)$$

Ακόμα:

$$f(1) = 3 \Leftrightarrow a \cdot 1 + \beta = 3 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$
$$a + 5 = 3 \Leftrightarrow a = -2.$$

Οπότε: $\alpha = -2$ και $\beta = 5$.

β) Ο τύπος της f γίνεται: $f(x) = -2x + 5$.

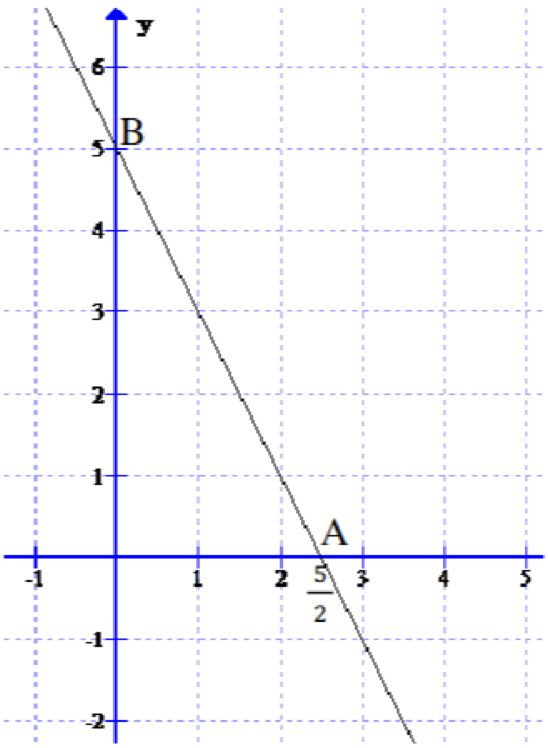
Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

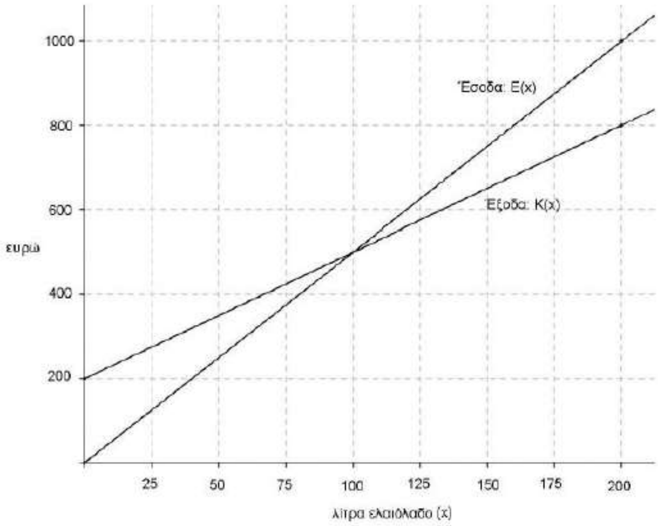
Επίσης έχουμε: $f(0) = 0 + 5 = 5$,οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,5)$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α και Β, οπότε είναι:



37203

ΘΕΜΑ 4



Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παραπάνω σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.

(Μονάδες 6)

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;

(Μονάδες 5)

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά;

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)

(Μονάδες 8)

37203-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από το γράφημα συμπεραίνουμε ότι το κοινό σημείο των δύο ευθειών είναι κατ' εκτίμηση το $A(100,500)$.

Η ερμηνεία του είναι η εξής:

Αν η εταιρεία πουλήσει 100 λίτρα λάδι, τα έσοδα και τα έξοδα είναι 500 ευρώ, δηλαδή δεν έχει ούτε κέρδος ούτε ζημιά.

β) Τα πάγια έξοδα της εταιρείας είναι 200 ευρώ, διότι $K(0)=200$. Δηλαδή ακόμα και αν δεν παραχθεί λάδι $(x=0)$, υπάρχουν έξοδα.

γ) Για να μην έχει η εταιρεία ζημιά πρέπει τα έσοδα να είναι ίσα με τα έξοδα ή μεγαλύτερα από αυτά. Από το γράφημα συμπεραίνουμε ότι αυτό συμβαίνει για παραγωγή $x \geq 100$ λίτρων λαδιού.

δ) Έστω $y=ax$ η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας (ε) που περιγράφει η συνάρτηση εσόδων $E(x)$. Η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο $A(100,500)$, οπότε

$$1000 = 200\alpha \Leftrightarrow \alpha = 5$$

Τελικά η ευθεία (ε) έχει εξίσωση;

$$y=5x$$

Επομένως η συνάρτηση των εσόδων είναι $E(x)=5x$, $x \geq 0$

Έστω $y=\alpha_1 x+\beta_1$ η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας (ε_1) που περιγράφει η συνάρτηση εξόδων $\mathrm{K}(x)$. Η ευθεία (ε_1) διέρχεται από τα σημεία $B(0,200)$ και $\Gamma(200,800)$, οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης τον:

$$\alpha_1 = \frac{800-200}{200-0} = \frac{600}{200} = 3$$

Τότε η ευθεία (ε_1) γράφεται:

$$y=3x+\beta_1$$

Επειδή η ευθεία (ε_1) διέρχεται από το σημείο $B(0,200)$, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της. Οπότε:

$$200=0+\beta_1 \Leftrightarrow \beta_1=200$$

Τελικά η εξίσωση (ε_1) έχει εξίσωση $y=3x+200$ και η συνάρτηση των εξόδων είναι:

$$K(x)=3x+200\,,\ x \geq 0$$

Για να μην έχει ζημιά η εταιρεία πρέπει:

37203-Λύση

$$E(x) \geq K(x) \Leftrightarrow 5x \geq 3x + 200 \Leftrightarrow$$
$$2x \geq 200 \Leftrightarrow x \geq 100$$

Επομένως η εκτίμηση που κάναμε στο ερώτημα γ) ήταν σωστή.