12628

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x - 1$ και $g(x) = 3 - x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Ζ.

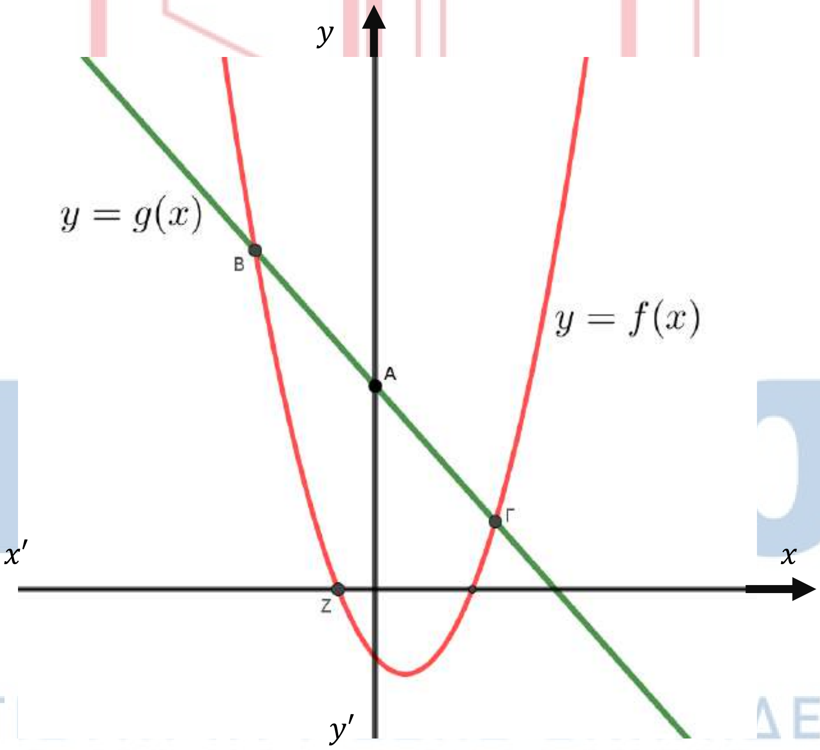
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y = g(x)$

(Μονάδες 6)

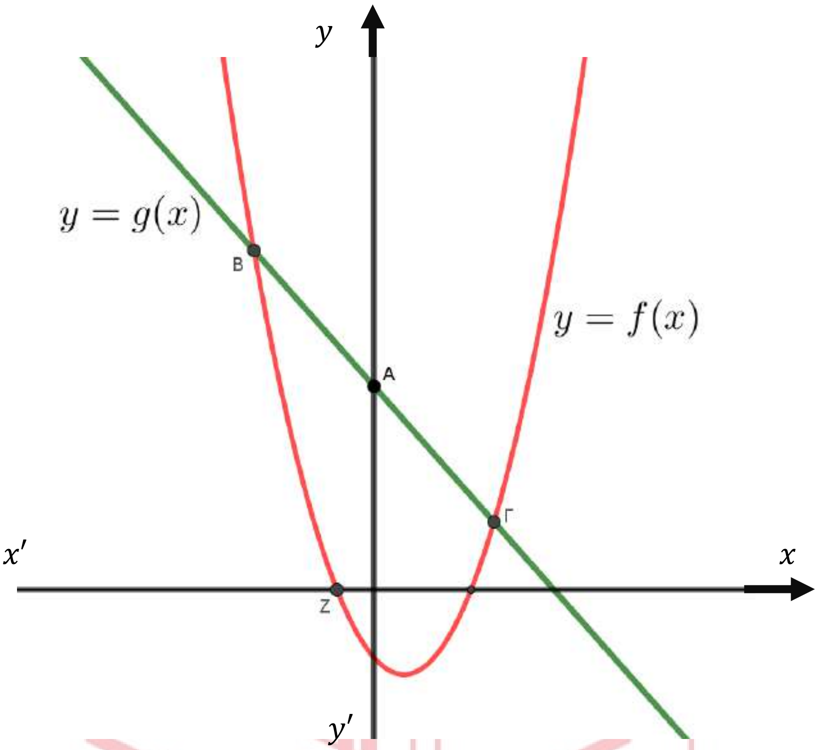
γ) Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α, η απόσταση των αριθμών $f(\alpha)$ και $-g(\alpha)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1.

(Μονάδες 9)



12628-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Το σημείο Z έχει ως τετμημένη την αρνητική λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ η οποία γράφεται $x^2 - x - 1 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$.

Άρα $x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2\cdot 1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, αφού $1 < 5 \Rightarrow \sqrt{1} < \sqrt{5} \Rightarrow 1 < \sqrt{5} \Rightarrow 1 - \sqrt{5} < 0$.

Η άλλη ρίζα είναι η $x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2\cdot 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$. Ώστε $Z\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$.

Το σημείο Α έχει τετμημένη μηδέν και τεταγμένη $g(0) = 3 - 0 = 3$, έτσι $A(0, 3)$.

Τα σημεία Β και Γ έχουν ως τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$, δηλαδή της εξίσωσης $x^2 - x - 1 = 3 - x$ η οποία γράφεται $x^2 = 4$. Οπότε $x^2 = 2^2$,

άρα $x = 2$ ή $x = -2$.

Οι τεταγμένες των σημείων Γ και Β θα είναι:

$f(2) = g(2) = 3 - 2 = 1$ και $f(-2) = g(-2) = 3 - (-2) = 5$ αντίστοιχα.

Ώστε $B(-2, 5)$, $\Gamma(2, 1)$ αφού το σημείο Β βρίσκεται πιο αριστερά από το Γ, άρα θα έχει μικρότερη τετμημένη.

β) Πρέπει $f(x) > g(x)$, δηλαδή $x^2 - x - 1 > 3 - x$, οπότε $\Leftrightarrow x^2 > 4$, σχέση που γράφεται $x^2 > 2^2$, άρα $|x| > |2|$. Ώστε $x < -2$ ή $x > 2$.

Έτσι, για $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ θα είναι $f(x) > g(x)$.

12628-Λύση

γ) Προφανώς πρέπει να αποδείξουμε ότι $|f(\alpha) - (-g(\alpha))| \geq 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό α. Η σχέση αυτή ισοδύναμα γράφεται :

$|f(\alpha) + g(\alpha)| \geq 1$, άρα $|\alpha^2 - \alpha - 1 + 3 - \alpha| \geq 1$, δηλαδή $|\alpha^2 - 2\alpha + 2| \geq 1$. (I)

Παρατηρούμε ότι $\alpha^2 - 2\alpha + 2 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 + 1 = (\alpha - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$, αφού

για κάθε $\alpha \in R$ ισχύει $(\alpha - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + 1 \geq 1$

Γνωρίζουμε όμως ότι αν $y > 0$, τότε είναι $|y| = y$.

Έτσι η σχέση (I) ισοδύναμα γράφεται $|(\alpha - 1)^2 + 1| \geq 1$, δηλαδή $(\alpha - 1)^2 + 1 \geq 1$, οπότε $(\alpha - 1)^2 \geq 0$ σχέση που ισχύει για κάθε $\alpha \in R$.

Εναλλακτικά, το τριώνυμο $\alpha^2 - 2\alpha + 2$ έχει αρνητική διακρίνουσα

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$, άρα το τριώνυμο γίνεται ομόσημο του συντελεστή του α^2 δηλαδή του 1, άρα πάντα θετικό για κάθε $\alpha \in R$. Ώστε

$|\alpha^2 - 2\alpha + 2| = \alpha^2 - 2\alpha + 2$. Έτσι η σχέση (I) γράφεται ισοδύναμα $\alpha^2 - 2\alpha + 2 \geq 1$, δηλαδή $\alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0$ άρα $(\alpha - 1)^2 \geq 0$ ισχύει για κάθε $\alpha \in R$.

12680

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο Μ(4,3) ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο Ν(-1,-2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 8)

12680-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει και αρκεί να ισχύει: $x \geq 0$ και $\sqrt{x} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το A = [0,1)U(1,+∞).

β) Έχουμε: $f(4) = \frac{3}{\sqrt{4}-1} = 3$, άρα το σημείο Μ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

γ) Το $x = -1$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. Άρα το σημείο Ν δεν μπορεί να ανήκει στη γραφική της παράσταση.

12686

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράσταση της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

12686-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται αν και μόνον αν $x-1\neq 0 \iff x\neq 1$, άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A=\mathbb{R}-\{1\}$.

β) Το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f μόνο όταν $f(2)=4$.

Είναι: $f(2)=\frac{2\cdot 2}{2-1}=4$, άρα το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

γ) Για να βρούμε τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x)=0 \iff \frac{2x}{x-1}=0 \iff 2x=0 \iff x=0.$$

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει και τους δύο άξονες στο κοινό τους σημείο $O(0,0)$.

12729

ΘΕΜΑ 2

Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή, ώστε η απόστασή του από το έδαφος (μέτρα) σε σχέση με το χρόνο (sec) να φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α. Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή;

(Μονάδες 6)

β. Ποιο το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό;

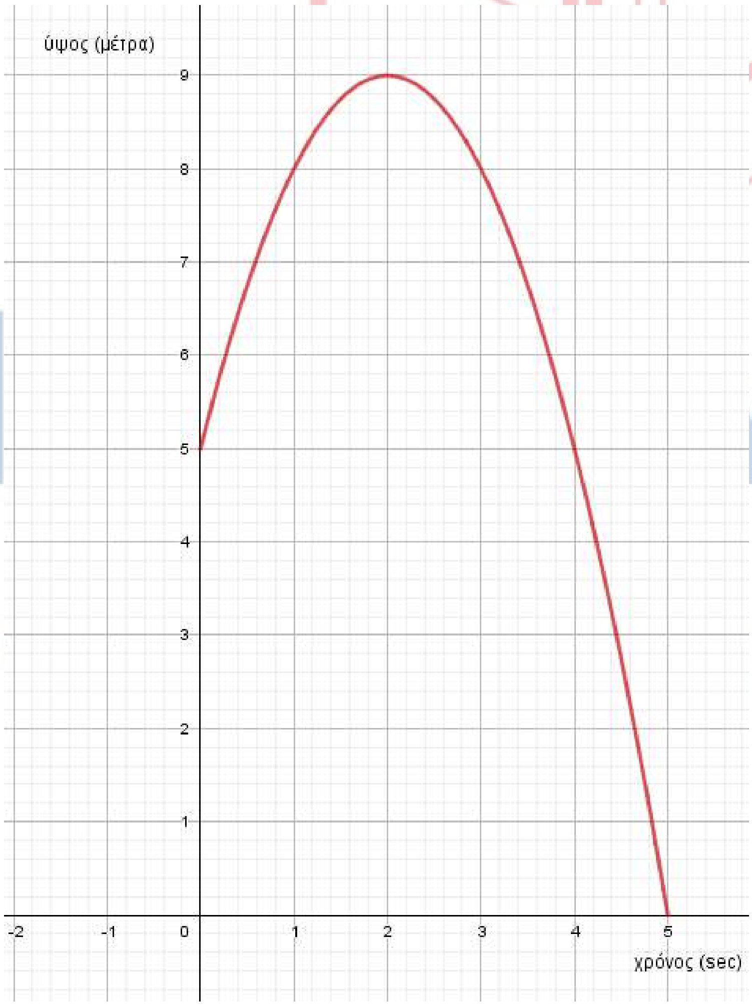
(Μονάδες 6)

γ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος.

(Μονάδες 7)

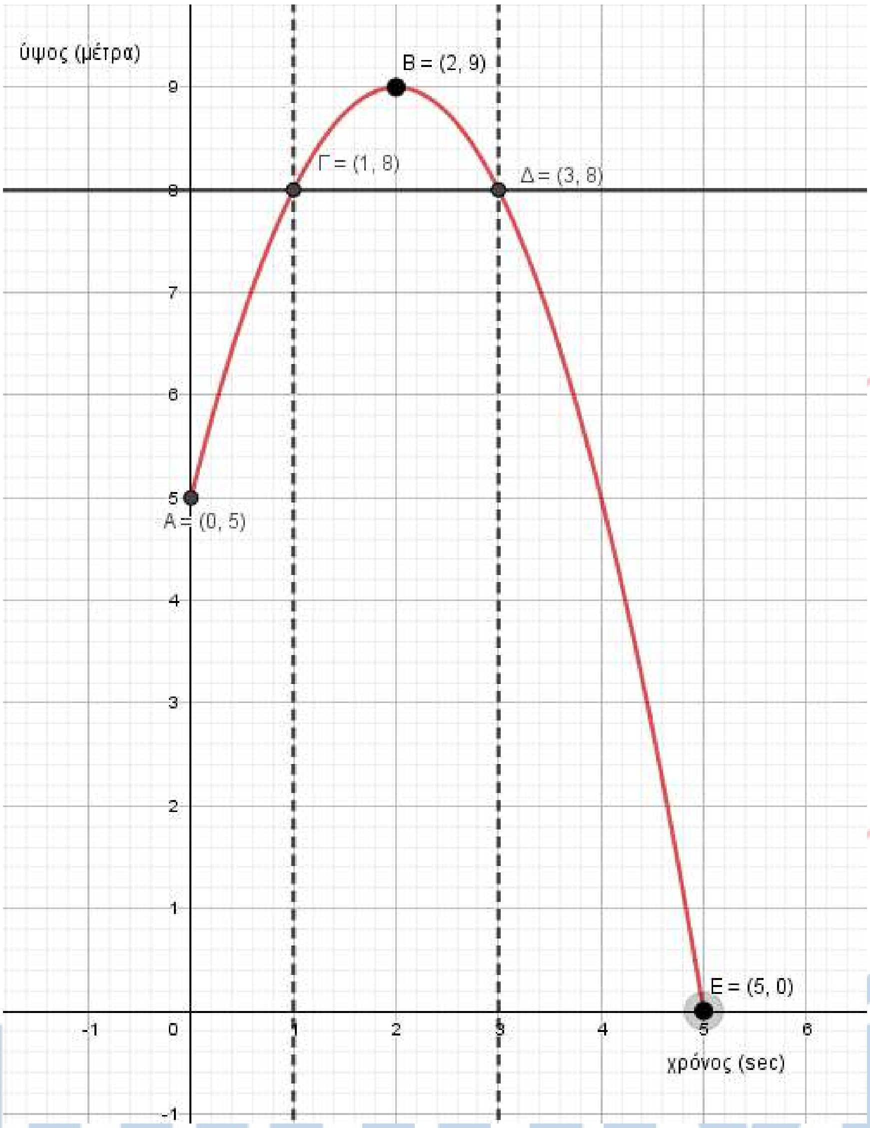
δ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα συναντά το έδαφος.

(Μονάδες 6)



12729-Λύση

ΛΥΣΗ



α. Ως αρχή της μέτρησης έχουμε το σημείο Α (0,5). Οπότε για τη χρονική στιγμή $t_1=0$ sec το σώμα βρίσκεται σε ύψος 5 μέτρα.

β. Το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το σώμα αντιστοιχεί στο σημείο Β (2,9). Οπότε για τη χρονική στιγμή $t_2=2$ sec το σώμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος 9 μέτρα.

γ. Αν φέρουμε την ευθεία y=8 που αντιστοιχεί σε ύψος 8 μέτρων θα δούμε ότι τέμνει το διάγραμμα σε δύο σημεία. Αυτά είναι το Γ(1,8) και Δ(3,8). Οπότε το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα τις χρονικές στιγμές $t_3=1$ sec και $t_4=3$ sec.

δ. Το έδαφος αντιστοιχεί στον άξονα x'x (ύψος=0 μέτρα). Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον άξονα x'x, το Ε που αντιστοιχεί και στο τέλος της μέτρησης. Οπότε το σώμα συναντά στο έδαφος τη χρονική στιγμή $t_5=5$ sec.

12788

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(\sqrt{3}\right)+f\left(-\sqrt{3}\right)=8$

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=4$

(Μονάδες 9)

γ) Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha\neq\beta$ ώστε να ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=2$

(Μονάδες 9)

12788-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$f\left(\sqrt{3}\right)+f\left(-\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\left(-\sqrt{3}-1\right)^2=3+1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}=4+4=8$$

β) Ένα σημείο $M(x,\ f(x))$ της γραφικής παράστασης της f, βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=4$ μόνο όταν ισχύει $f(x)<4$.

Είναι:

$$f(x)<4 \Leftrightarrow (x-1)^2<4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2}<\sqrt{4} \Leftrightarrow |x-1|<2 \Leftrightarrow -2<x-1<2 \Leftrightarrow -1<x<3 \Leftrightarrow x\in(-1,\ 3)$$

Οι ακέραιοι που περιέχονται στο διάστημα $(-1,\ 3)$ είναι οι: $0,\ 1,\ 2$ και επειδή $f(0)=1,\ f(1)=0,\ f(2)=1$, τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A(0,\ 1),\ B(1,\ 0),\ \Gamma(2,\ 1)$.

γ) Αν $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε:

$$(\alpha-1)^2=(\beta-1)^2\text{, οπότε}$$

$$(\alpha-1)^2-(\beta-1)^2=0$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$(\alpha-1+\beta-1)(\alpha-1-\beta+1)=0\text{, δηλαδή}$$

$$(\alpha+\beta-2)(\alpha-\beta)=0$$

Η τελευταία ισότητα, με $\alpha\neq\beta$ δίνει:

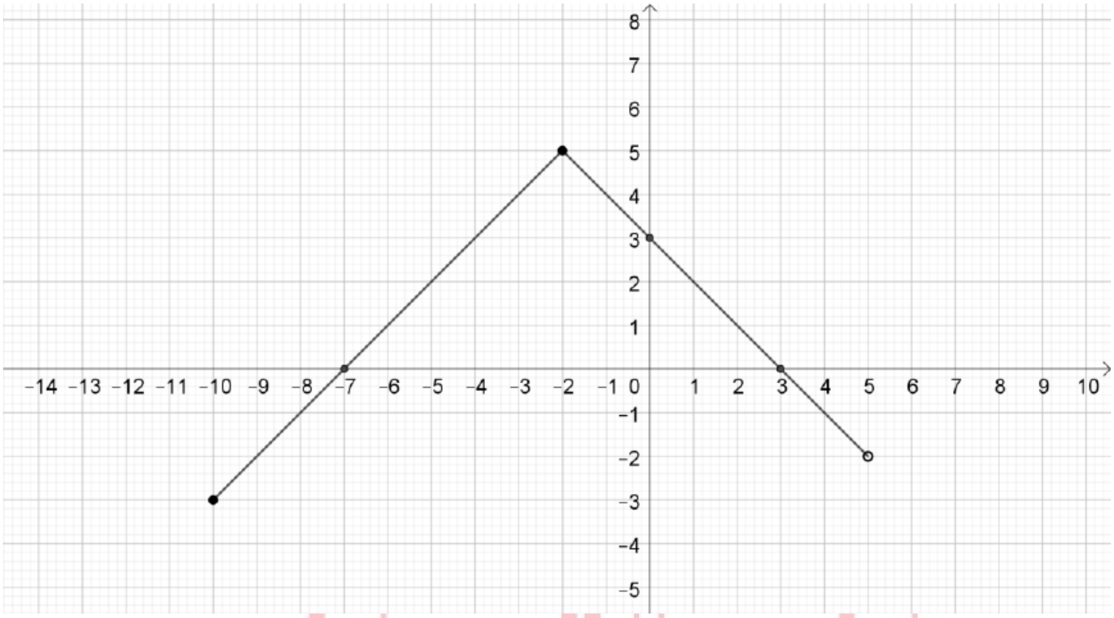
$$\alpha+\beta-2=0\text{, οπότε } \alpha+\beta=2$$

που είναι το ζητούμενο.

12910

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α και το σύνολο τιμών της f(A).

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές f(-2), f(0), f(3).

(Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες f(x) = 0.

(Μονάδες 4)

δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες f(x) < 0.

(Μονάδες 7)

12910-Λύση

ΛΥΣΗ

α) $\mathrm{A} = [-10,5)$ και $f(\mathrm{A}) = [-3,5]$.

β) f(-2) = 5 , f(0)= 3 , f(3) = 0 .

γ) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -7 \quad ή \quad x = 3$ (οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον x΄x).

δ) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [-10,-7) \cup (3,5)$ (οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον x΄x).

12913

ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2+2x-3.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της παραπάνω συνάρτησης f.

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι $f(x)=x+3$ για κάθε $x\in \mathrm{A}$.

(Μονάδες 4)

iii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

(Μονάδες 8)

12913-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Τα τριώνυμο x^2+2x-3 έχει διακρίνουσα $\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(-3)=16$, οπότε έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm4}{2}=\begin{cases}\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2}=1\\ \frac{-2-4}{2}=\frac{-6}{2}=-3\end{cases}$

και παραγοντοποιείται ως εξής : $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$.

β)

i. Πρέπει $x-1\neq0$ δηλαδή $x\neq1$ οπότε το πεδίο ορισμού είναι το $\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

ii. Από το α) ερώτημα δείξαμε ότι $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$ οπότε $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)}=x+3$ για κάθε $x\in\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{1\}$.

iii. Η γραφική παράσταση της f είναι η ευθεία με εξίσωση $y=x+3$ από την οποία θα εξαιρέσουμε το σημείο που έχει τετμημένη 1, αφού το 1 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

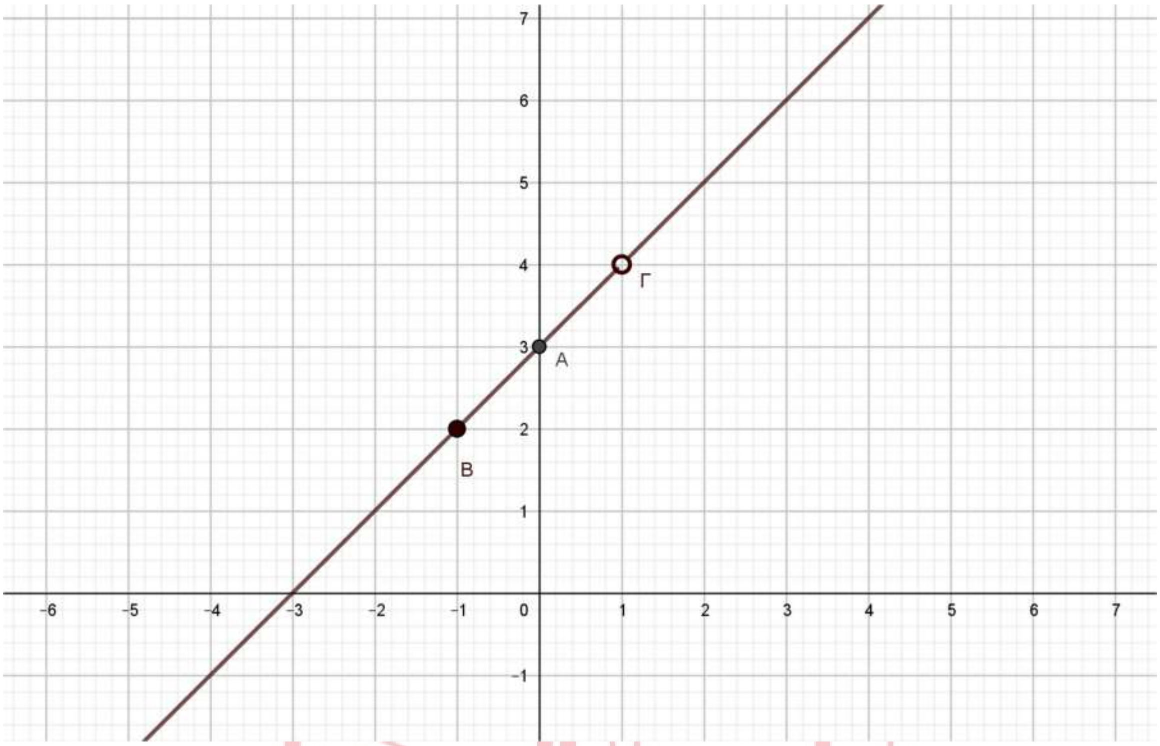
Για $x=0$ έχουμε $y=0+3$ οπότε ένα σημείο της ευθείας $y=x+3$ είναι το $\mathrm{A}(0,3)$.

Για $x=-1$ έχουμε $y=-1+3=2$ οπότε ένα σημείο της ευθείας $y=x+3$ είναι το $\mathrm{B}(-1,2)$.

Για $x=1$ έχουμε $y=1+3=4$ οπότε το σημείο της ευθείας $y=x+3$ που θα εξαιρέσουμε είναι το $\Gamma(1,4)$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

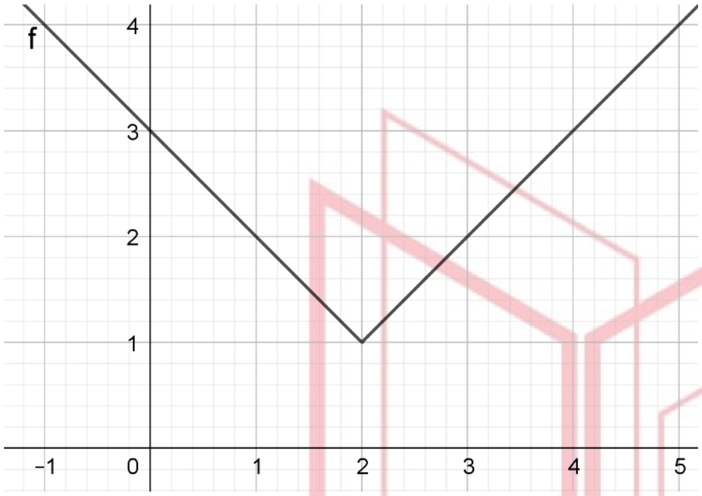
12913-Λύση



12914

ΘΕΜΑ 4

Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = c$, με παράμετρο $c \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x) = |x-2| + 1$, η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



α)

i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία;

(Μονάδες 4)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος α)i).

(Μονάδες 5)

β) Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία A, B. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3-c, c)$ και $B(c+1, c)$.

(Μονάδες 8)

γ)

i. Αν A, B τα σημεία του ερωτήματος β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος AB είναι $(AB) \leq 2$;

(Μονάδες 4)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)i).

(Μονάδες 4)

12914-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Επειδή η ευθεία $\varepsilon: y = c$ είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$, από το σχήμα προκύπτει ότι για να έχει κοινά σημεία με την γραφική παράσταση της f πρέπει $c \geq 1$.

ii. Για να έχει κοινά σημεία η ευθεία $\varepsilon: y = c$ με τη γραφική παράσταση της f, πρέπει η εξίσωση $|x-2|+1 = c \Leftrightarrow |x-2| = c-1$ να έχει λύση. Επειδή είναι $|x-2| \geq 0$, αρκεί $c-1 \geq 0 \Leftrightarrow c \geq 1$.

β) Για $c \geq 1$ η $|x-2| = c-1$ έχει λύσεις τις:

$$x-2 = c-1 \Leftrightarrow x = c+1 \text{ ή } x-2 = -(c-1) \Leftrightarrow x = 3-c.$$

Άρα τα κοινά σημεία είναι τα $A(3-c, c)$ και $B(c+1, c)$.

γ)

i. Επειδή τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη, για να είναι $(AB) \leq 2$ πρέπει το μήκος του οριζόντιου τμήματος ανάμεσα στις δύο ημιευθείες της γραφικής παράστασης της f να είναι μικρότερο ή ίσο του 2. Από το σχήμα προκύπτει ότι αυτό ισχύει για τα σημεία με τεταγμένη από 1 έως και 2. Άρα $1 \leq c \leq 2$.

ii. Επειδή τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη, το μήκος (AB) είναι $(AB) = |c+1-(3-c)| = |2c-2|$. Άρα:

$$(AB) \leq 2 \Leftrightarrow |2c-2| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2c-2 \leq 2,$$

η οποία γίνεται:

$$-1 \leq c-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq c \leq 2.$$

Αλλά από το ερώτημα α) πρέπει $c \geq 1$. Άρα τελικά $1 \leq c \leq 2$.

12941

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{9-x^2}{3-|x|}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f .

(Μονάδες 6)

α) Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x)=3+|x|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

δ) Αν $g(x)=3-x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

(Μονάδες 8)

12941-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει και αρκεί να ισχύει: $3-|x| \neq 0$

Επειδή ισχύει

$$3-|x|=0 \Leftrightarrow -|x|=-3 \Leftrightarrow |x|=3 \Leftrightarrow x=\pm 3$$

για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει και αρκεί $x \neq \pm 3$.

Επομένως η συνάρτηση f ορίζεται για $x \in (-\infty,-3) \cup (-3,3) \cup (3,+\infty)$.

β) Για $x \in (-\infty,-3) \cup (-3,3) \cup (3,+\infty)$ η συνάρτηση f παίρνει τη μορφή

$$f(x)=\frac{9-x^2}{3-|x|}=\frac{3^2-|x|^2}{3-|x|}=\frac{(3+|x|)(3-|x|)}{3-|x|}=3+|x|$$

γ) Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f με τον άξονα x'x λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow 3+|x|=0 \Leftrightarrow |x|=-3$ η οποία είναι αδύνατη. Άρα η γραφική παράσταση C_f δεν τέμνει τον άξονα x'x.

Για να βρούμε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα y'y πρέπει να βρούμε το $f(0)$.

Ισχύει $f(0)=3+|0|=3$. Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f με τον άξονα y'y είναι το A(0,3).

δ) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g λύνουμε την εξίσωση:

$$\text{Η εξίσωση } g(x)=f(x) \text{ γίνεται}$$

$$-x^2+3=3+|x| \text{ δηλαδή}$$

$$-|x|^2+3-3-|x|=0 \text{ και τελικά}$$

$$|x|^2+|x|=0$$

Επειδή $|x^2| \geq 0$ και $|x| \geq 0$ ισχύει $|x|^2+|x|=0$ αν και μόνο αν x=0.

Άρα το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g είναι το (0. 3).

12944

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x+\frac{1}{x}$ και $g(x)=x-\frac{1}{x}$, $x\neq 0$

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=f(2)+g(2)-f\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)$$

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2=4$ για οποιοδήποτε αριθμό x με $x\neq 0$

(Μονάδες 8)

γ) Θεωρούμε την ευθεία $y=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να αποδείξετε ότι $|\alpha|\geq 2$.

(Μονάδες 10)

12944-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$A=2+\frac{1}{2}+2-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{1}{2}-2\right)=4-\frac{1}{2}-2-\frac{1}{2}+2=4-1=3$$

β) Για οποιοδήποτε αριθμό x με $x\neq 0$ έχουμε:

$$\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}-x+\frac{1}{x}\right)=2x\cdot\frac{2}{x}=4$$

γ) Το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f καθορίζεται από το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\alpha$, οπότε αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f, η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει πραγματικές λύσεις. Είναι:

$$f(x)=\alpha \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=\alpha \Leftrightarrow x^2+1=\alpha x \Leftrightarrow x^2-\alpha x+1=0$$

Η εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις, οπότε ισχύει $\Delta\geq 0$. Έτσι, έχουμε:

$\Delta=\alpha^2-4\geq 0$, οπότε $\alpha^2\geq 4$, απ’ όπου προκύπτει $\sqrt{\alpha^2}\geq\sqrt{4}$, δηλαδή $|\alpha|\geq 2$, που είναι το ζητούμενο.

13030

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ $\kappa\alpha\iota$ $g(x) = |x + 3|$.

Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 10)

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g.

(Μονάδες 7)

γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g.

(Μονάδες 8)

13030-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για $x^2-4x-5 \geqslant 0$ με $x \in R$.

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=(-4)^2-4(-5)=36>0$ επομένως έχει δύο άνισες ρίζες $x_1=\frac{-(-4)+6}{2}=5$ και $x_2=\frac{-(-4)-6}{2}=-1$. Το α=1>0 και προκύπτει:

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
x^2-4x-5		+	0	-	0	+	

Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων η ανίσωση $x^2-4x-5 \geqslant 0$ αληθεύει

για $x \leq -1$ ή $x \geq 5$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f=(-\infty,-1] \cup [5,+\infty)$.

Η συνάρτηση g ορίζεται για κάθε $x \in R$.

Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι $A_g=R$.

β) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f και C_g θα λύσουμε την εξίσωση

$f(x)=g(x)$, και θα προκύψουν οι κοινές τετμημένες τους. Έχουμε:

$\sqrt{x^2-4x-5}=|x+3| \Leftrightarrow x^2-4x-5=|x+3|^2 \Leftrightarrow x^2-4x-5=x^2+6x+9 \Leftrightarrow$
$-10x=14 \Leftrightarrow x=\frac{-7}{5}$.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων έχουν ένα κοινό σημείο το $\left(\frac{-7}{5},\frac{8}{5}\right)$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g προκύπτουν από την λύση της ανίσωσης

$\sqrt{x^2-4x-5}<|x+3| \Leftrightarrow x^2-4x-5<|x+3|^2 \Leftrightarrow -10x<14 \Leftrightarrow x>\frac{-7}{5}$.

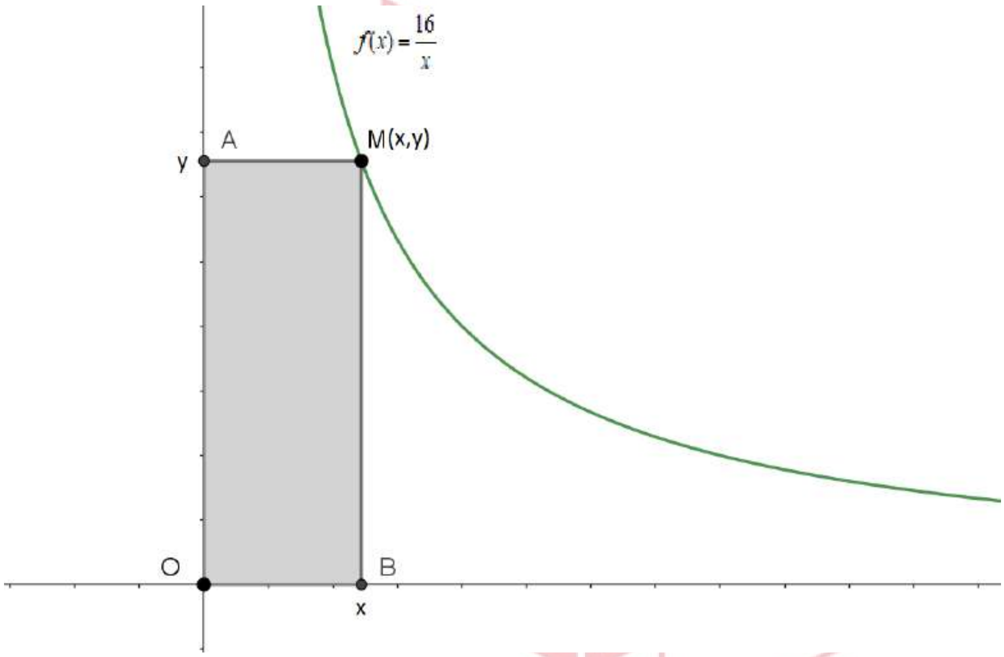
Επειδή έχουμε τον περιορισμό $x \leq -1 ή x \geq 5$ άρα $x \in \left(\frac{-7}{5},-1\right] \cup [5,+\infty)$.

13090

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{16}{x}$, $x>0$.

Ένα σημείο Μ(x,y) κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω Α και Β οι προβολές του Μ στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περίμετρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη συνάρτηση $\Pi(x)=2x+\dfrac{32}{x}$, $x>0$ όπου x η τετμημένη του Μ .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜΒ να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους.

(Μονάδες 7)

γ) Αν Μ΄ είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜ΄Β να είναι τετράγωνο τότε:

i. Να δείξετε ότι το Μ΄ έχει τετμημένη 4.

(Μονάδες 4)

ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο ΟΑΜ΄Β έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ, δηλαδή ότι $\Pi(x)\geq\Pi(4)$ για κάθε $x>0$.

(Μονάδες 6)

13090-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αφού το σημείο Μ(x,y) κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ισχύει ότι $y=f(x)=\frac{16}{x}>0$. Οι συντεταγμένες του σημείου Β είναι Β(x, 0) και του σημείου Α(0, $\frac{16}{x}$).

Το ορθογώνιο ΟΑΜΒ έχει εμβαδόν (ΟΑΜΒ) = $(\text{OA})\cdot(\text{OB})=\frac{16}{x}\cdot x=16$ τετραγωνικές μονάδες και περίμετρο $\Pi(x)=2(\text{OA})+2(\text{OB})=2\cdot\frac{16}{x}+2\cdot x=2x+\frac{32}{x}$ $,x>0$.

β) Αναζητούμε τις τιμές του $x>0$ για τις οποίες $\Pi(x)=20$ δηλαδή $2x+\frac{32}{x}=20$ και ισοδύναμα $2x^2+32=20x$ δηλαδή $2x^2-20x+32=0$ και τελικά $x^2-10x+16=0$.

Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τις $x=2$ ή $x=8$ αφού $S=2+8=10$ και $P=2\cdot8=16$.

Για $x=2$ είναι $y=\frac{16}{2}=8$ οπότε $M_1(2\ ,8)$.

Για $x=8$ είναι $y=\frac{16}{8}=2$ οπότε $M_2(8\ ,2)$.

γ)

i. Το ΟΑΜ΄Β είναι τετράγωνο αν και μόνο αν (ΟΑ) = (ΟΒ) δηλαδή ισοδύναμα αν $\frac{16}{x}=x$ οπότε $x^2=16$ και επειδή $x>0$ έχουμε ότι $x=4$.

ii. Θα δείξουμε ότι $\Pi(x)\geq\Pi(4)$ για κάθε $x>0$, δηλαδή ισοδύναμα $2x+\frac{32}{x}\geq16$ και επειδή $x>0$ έχουμε ισοδύναμα $2x^2+32\geq16x$ δηλαδή $2x^2+32-16x\geq0$ δηλαδή $x^2+16-8x\geq0$ και τελικά $(x-4)^2\geq0$ που ισχύει για κάθε $x>0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=4$, που σημαίνει ότι από όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ τη μικρότερη περίμετρο την έχει το τετράγωνο ΟΑΜ΄Β.

13120

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Για $\lambda \neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου $A(4,4)$ ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες7)

δ) Για $\lambda = -1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

13120-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για να υπάρχουν δύο σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ θα πρέπει η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες.

Άρα $\Delta > 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 + 16\lambda^2 > 0$ που ισχύει για κάθε $\lambda \epsilon \mathbb{R}$ σαν άθροισμα μη αρνητικών αριθμών οι οποίοι δεν μηδενίζονται συγχρόνως.

β) Το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2$ είναι $P = -4\lambda^2 < 0$, αφού $\lambda \neq 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες ετερόσημες για κάθε $\lambda \neq 0$.

γ) Το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα $x'x$ είναι $A'(4, -4)$ και για να ανήκει στη γραφική παράσταση της f θα ισχύει :

$f(4) = -4 \Leftrightarrow 16 - 4(\lambda - 1) - 4\lambda^2 = -4 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda = -3$.

δ) Για $\lambda = -1$

$$f(x) = x^2 + 2x - 4$$

Πρέπει $f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 < 0$

Το τριώνυμο έχει: $\Delta = 4 + 16 = 20$

και ρίζες: $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$

Αφού $\alpha = 1 > 0$ το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{5}$		$-1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f(x) = x^2 + 2x - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $f(x) < 0$ για $x \epsilon (-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5})$.

13168

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2\lambda x + \gamma$ με $x \in \mathbb{R}$ και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0, -1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\gamma = -1$

(Μονάδες 5)

ii. Η γραφική παράσταση της f δεν είναι κάτω από την ευθεία $y = -\lambda^2 - 1$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

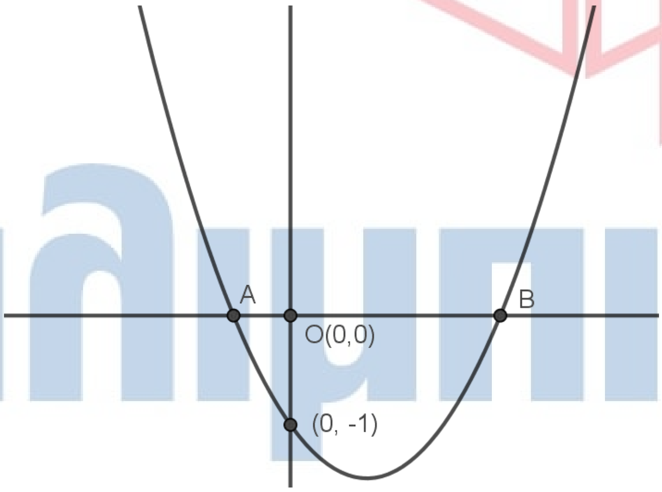
(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία A και B με συντεταγμένες $A\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0\right)$ και $B\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0\right)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των A και B είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)



13168-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Ισχύει ότι $f(0) = -1 \Leftrightarrow 0^2 + 2 \cdot \lambda \cdot 0 + \gamma = -1 \Leftrightarrow \gamma = -1$

ii. Για να μην είναι η γραφική παράσταση της f κάτω από την ευθεία $y = -\lambda^2 - 1$ αρκεί:

$f(x) \geq -\lambda^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x - 1 \geq -\lambda^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 \geq 0$,

η οποία γράφεται $(x + \lambda)^2 \geq 0$ που ισχύει.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x - 1 = 0$.

Η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta = (2\lambda)^2 - 4(-1) = 4\lambda^2 + 4 = 4(\lambda^2 + 1) > 0,$$

άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ σε δύο σημεία.

Οι τετμημένες των σημείων είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{4(\lambda^2+1)}}{2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1} \\ x_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1} \end{cases}.$$

Επίσης, $-\sqrt{\lambda^2 + 1} < \sqrt{\lambda^2 + 1}$ άρα $-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1} < -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}$.

Οπότε τα σημεία είναι τα $A\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0\right)$ και $B\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0\right)$.

γ) Η απόσταση των A και B είναι:

$(AB) = |x_2 - x_1| = \left|-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1} - \left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}\right)\right| = \left|2\sqrt{\lambda^2 + 1}\right|$.

Οπότε:

$$(AB) \geq 2 \Leftrightarrow \left|2\sqrt{\lambda^2 + 1}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2 + 1} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \lambda^2 \geq 0$$

που ισχύει.

13313

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^7-x}{x^3-x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $f(x)=x^4+x^2+1$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$.

(Μονάδες 6)

δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x)=3$ έχει λύση στο σύνολο A.

(Μονάδες 7)

13313-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει και αρκεί

$$x^3-x\neq 0 \Leftrightarrow x(x^2-1)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ \text{και} \\ x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq \pm 1 \end{cases}.$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο

$$\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{-1,0,1\}=(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty).$$

β) Επειδή το $0\notin \mathrm{A}$ η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινό σημείο με τον $y'y$.

Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ με $x\in \mathrm{A}$.

Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow x^7-x=0 \Leftrightarrow x(x^6-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ή} \\ x^6-1=0 \Leftrightarrow x^6=1 \Leftrightarrow x=\pm 1 \end{cases}.$

Επειδή $0\notin \mathrm{A}$, $-1\notin \mathrm{A}$, $1\notin \mathrm{A}$ η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο σύνολο A και επομένως η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινό σημείο με τον $x'x$.

γ) Είναι $f(x)=\dfrac{x^7-x}{x^3-x}=\dfrac{x\left(x^6-1\right)}{x\left(x^2-1\right)}=\dfrac{\left(x^2\right)^3-1}{x^2-1}=\dfrac{\left(x^2-1\right)\left(x^4+x^2+1\right)}{x^2-1}=x^4+x^2+1$ για κάθε $x\in \mathrm{A}$.

δ) Είναι $f(x)=3 \Leftrightarrow x^4+x^2+1=3 \Leftrightarrow x^4+x^2-2=0$. Θέτουμε $x^2=\omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2+\omega-2=0$ που έχει ρίζες τις $\omega=1$, $\omega=-2$ αφού $S=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-1$ και $P=\dfrac{\gamma}{\alpha}=-2$.

Για $\omega=1$ έχουμε $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$ που όμως δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού A.

Για $\omega=-2$ έχουμε $x^2=-2$ που είναι αδύνατη.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x)=3$ δεν έχει λύση στο σύνολο A.

13322

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\frac{x}{x^2+2}+\sqrt{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για $x=1,\ x=-2,\ x=2$.

(Μονάδες 9)

γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον $y'y$ άξονα;

(Μονάδες 8)

13322-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται όταν $x-1\geq 0$, δηλαδή όταν $x\geq 1$, γιατί $x^2+2\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A_g=[1,+\infty)$.

β) Για $x=1$ η τιμή της συνάρτησης είναι: $g(1)=\frac{1}{1+2}+\sqrt{1-1}=\frac{1}{3}$.

Δεν ορίζεται η τιμή της συνάρτησης για $x=-2$, διότι $-2\notin A_g$.

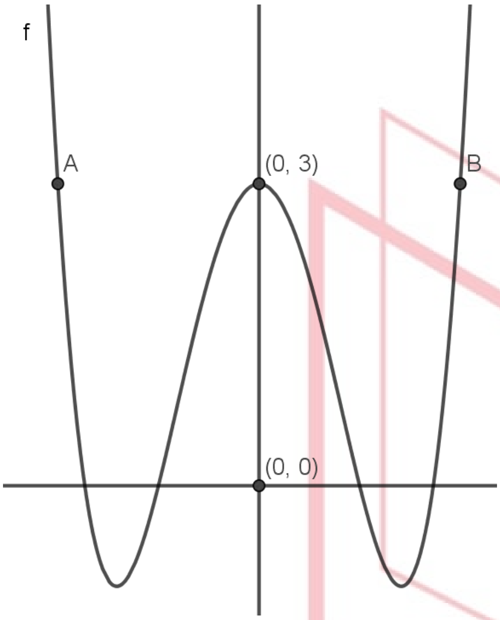
Για $x=2$ η τιμή της συνάρτησης είναι: $g(2)=\frac{2}{2^2+2}+\sqrt{2-1}=\frac{2}{6}+\sqrt{1}=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g δεν τέμνει τον $y'y$ άξονα, διότι το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

13454

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^4 - 4x^2 + \gamma$, η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.



α) Να δείξετε ότι $\gamma = 3$.

(Μονάδες 6)

β) Αν $A(\alpha^2 - 3{,}3)$ και $B(5 - 3\alpha, 3)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f, όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και να γράψετε τον τύπο της f.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος γ), να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

13454-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από τη γραφική παράσταση της f, φαίνεται ότι $f(0) = 3$ άρα $a \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + \gamma = 3$ οπότε $\gamma = 3$.

β) Επειδή η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ και τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη, θα είναι και αυτά συμμετρικά ως προς τον $y'y$. Άρα:

$$\alpha^2 - 3 = -(5 - 3\alpha) \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0.$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$ και οι ρίζες της:

$$a_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 1 \end{cases}.$$

Επειδή το σημείο A ανήκει στο 2º τεταρτημόριο πρέπει:

$$\alpha^2 - 3 < 0.$$

Για $\alpha = 2$ είναι $2^2 - 3 = 1 > 0$ άρα η λύση $\alpha = 2$ απορρίπτεται.

Για $\alpha = 1$ είναι $1^2 - 3 = -2 < 0$ άρα η λύση $\alpha = 1$ είναι δεκτή.

Οπότε, ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3.$$

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ η οποία για $x^2 = w > 0$ γίνεται $w^2 - 4w + 3 = 0$. Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 = 4 > 0$ και οι ρίζες

$$w = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = 3 \text{ ή } w = \frac{4-\sqrt{4}}{2} = 1,$$

οι οποίες είναι και οι δύο δεκτές. Άρα:

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow \{x = 1 \text{ ή } x = -1\}, \text{ ή } x^2 = 3 \Leftrightarrow \{x = \sqrt{3} \text{ ή } x = -\sqrt{3}\}.$$

δ) Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ όταν:

$$-\sqrt{3} < x < -1 \text{ ή } 1 < x < \sqrt{3}.$$

13479

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|$.

Αν $|x| \leq 4$, τότε:

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 9)

β) Αν $f(x) = 3x^2 - x - 44$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

ii. Αν το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να βρείτε την ακέραια τιμή του μ.

(Μονάδες 8)

13479-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$

Ο τύπος της συνάρτησης γράφεται:

$$f(x) = |3x-12| - |2x-8| - 3|x^2-16| =$$
$$= 3|x-4| - 2|x-4| - 3|x^2-16| =$$
$$= |x-4| - 3|x^2-16|.$$

Επειδή $x \leq 4 \Leftrightarrow x-4 \leq 0$. Άρα $|x-4| = 4-x$.

Επιπλέον $|x| \leq 4 \Leftrightarrow |x|^2 \leq 16 \Leftrightarrow x^2-16 \leq 0 \Leftrightarrow |x^2-16| = 16-x^2$.

Άρα: $\quad f(x) = 4-x-3(16-x^2) = 4-x-48+3x^2 = 3x^2-x-44.$

β)

i. Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$, δηλαδή $3x^2-x-44 = 0$.

   Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι : $\Delta = 1 + 4.3.44 = 529$ και οι ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 23}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{24}{6} = 4 \\ x_2 = \frac{-22}{6} = -\frac{11}{3} \end{cases},$$

   οι οποίες είναι δεκτές γιατί ανήκουν στο διάστημα $[-4,4]$.

   Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ είναι $A(4,0)$ και $B(-\frac{11}{3},0)$.

   Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$, θέτουμε στον τύπο της f όπου $x=0$ και βρίσκουμε $y = f(0) = -44$.

   Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$ είναι $\Gamma(0,-44)$.

ii. Αφού το σημείο $M(\mu+1,-20)$ με μ ακέραιο ανήκει στη γραφική παράσταση της f θα ισχύει: $\mu+1 \in [-4,4]$ και $f(\mu+1) = -20$.

   Είναι: $f(\mu+1) = -20 \Leftrightarrow 3(\mu+1)^2 - \mu - 1 - 44 = -20 \Leftrightarrow$

$$3\mu^2 + 6\mu + 3 - \mu - 45 + 20 = 0 \Leftrightarrow 3\mu^2 + 5\mu - 22 = 0.$$

   Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι :$\Delta = 25 - 4.3.(-22) = 289$ και οι ρίζες:

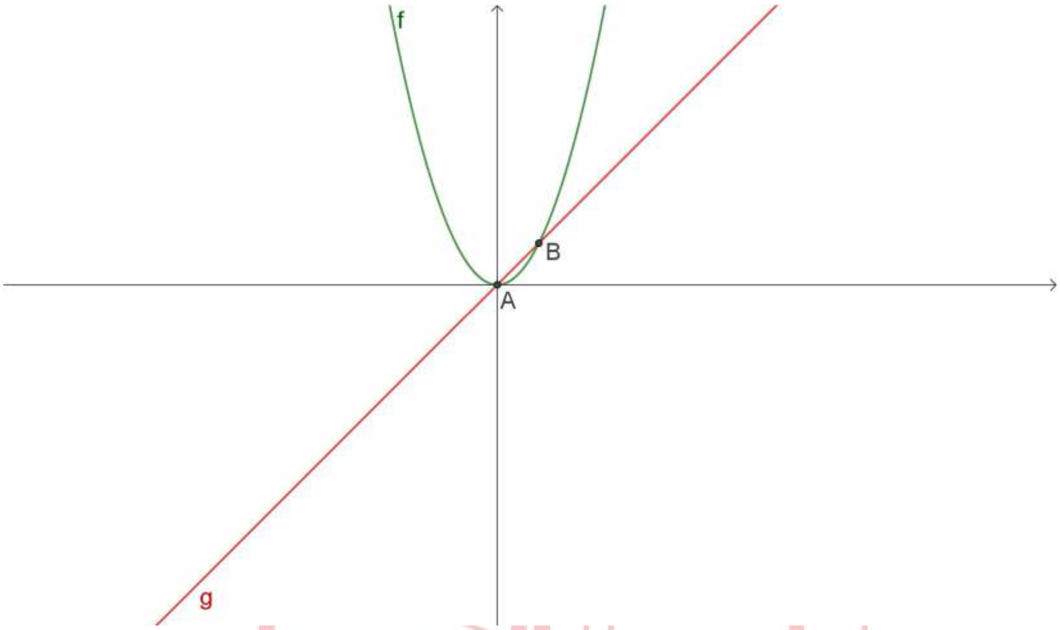
$$\mu_{1,2} = \frac{-5 \pm 17}{6} = \begin{cases} \mu_1 = \frac{12}{6} = 2 \\ \mu_2 = \frac{-22}{6} = -\frac{11}{3} \end{cases}.$$

   Από τις παραπάνω τιμές του μ δεκτή είναι η $\mu = 2$ καθώς είναι ακέραια και επιπλέον $\mu+1 \in [-4,4]$.

13557

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=x$ που τέμνονται στα σημεία A,B.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A,B.

(Μονάδες 7)

β) Αν $\mathrm{A}(0,0),\mathrm{B}(1,1)$, τότε:

i. Με βάση το σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

(Μονάδες 5)

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο i. ερώτημα.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2<\dfrac{\alpha}{\beta}$ για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς α,β με $\beta\neq 0$, να δείξετε (με βάση τα παραπάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε) ότι $|\alpha|<|\beta|$.

(Μονάδες 6)

13557-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των σημείων A,B είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$, ισοδύναμα $x^2=x$, δηλαδή $x^2-x=0$, οπότε $x(x-1)=0$ και τελικά $x=0$ ή $x=1$.

Επειδή το σημείο A είναι πιο αριστερά από το σημείο B, η τετμημένη του A είναι 0 και η τετμημένη του B είναι 1.

Για $x=0$ είναι $f(0)=0$, οπότε $\mathrm{A}(0,0)$.

Για $x=1$ είναι $f(1)=1$, οπότε $\mathrm{B}(1,1)$.

β)

i. Από το σχήμα βλέπουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g, για τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της g που είναι μεταξύ των A,B, δηλαδή για $0<x<1$.

ii. Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g για τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $x^2<x$. Η ανίσωση $x^2<x$ ισοδύναμα γίνεται $x^2-x<0$ που είναι μία ανίσωση 2ου βαθμού και η λύση της βασίζεται στο πρόσημο του τριωνύμου x^2-x, που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		+	0	-	0	+	

Συνεπώς πράγματι $x^2<x$ για $0<x<1$.

Σημείωση: Με βάση τα παραπάνω για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $x^2<x$, π.χ. $\left(\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{2}$ αφού ισοδύναμα $\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$. Συνεπώς το τετράγωνο οποιουδήποτε αριθμού δεν είναι πάντα μεγαλύτερο από τον ίδιο τον αριθμό.

γ) Αφού $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2<\frac{\alpha}{\beta}$ με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $0<\frac{\alpha}{\beta}<1$. Συνεπώς $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{\alpha}{\beta}<1$ οπότε, $\frac{|\alpha|}{|\beta|}<1$ και ισοδύναμα $|\alpha|<|\beta|$.

14072

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

β) Ανήκει το σημείο $\mathrm{M}(1,3)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f;

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

14072-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$x-2\neq 0 \Leftrightarrow$$
$$x\neq 2.$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{2\}$.

β) Το σημείο $\mathrm{M}(1,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, γιατί

$$f(1)=\frac{1-4}{1-2}=\frac{-3}{-1}=3.$$

γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $y'y$ άξονα στο σημείο $(0,2)$ και τον $x'x$ άξονα στο σημείο $(-2,0)$, αφού

για $x=0$, έχουμε: $f(0)=\dfrac{0-4}{0-2}=\dfrac{-4}{-2}=2$ και

για $y=f(x)=0$, έχουμε: $0=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, οπότε

$x^2-4=0$, δηλαδή

$(x+2)(x-2)=0$, οπότε

$x+2=0$ ή $x-2=0$ και τελικά

$x=-2$ (δεκτή) ή $x=2$ (απορρίπτεται).

14185

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^3-2x^2+x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι : $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x\in A$.

(Μονάδες 4)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=1$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία $y=1$.

(Μονάδες 8)

14185-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$x^3-2x^2+x\neq 0 \Leftrightarrow x\left(x^2-2x+1\right)\neq 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2\neq 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x\neq 0 \\ \text{και} \\ x\neq 1 \end{matrix}\right\}.$$

Άρα $A=\mathbb{R}-\{1,0\}$.

β) Έχουμε $f(x)=\dfrac{x}{x^3-2x^2+x}=\dfrac{x}{x(x-1)^2}=\dfrac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x\in A$.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1,0\}$ η εξίσωση γίνεται:

$$f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2}=1 \Leftrightarrow (x-1)^2=1 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x-1=1 \\ \text{ή} \\ x-1=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=2 \\ \text{ή} \\ x=0 \text{ απορ} \end{matrix}\right\}.$$

Άρα έχει μοναδική λύση την $x=2$.

δ) Αναζητούμε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}-\{1,0\}$ για τις οποίες ισχύει :

$$f(x)>1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2}>1 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2<1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2}<\sqrt{1} \Leftrightarrow$$

$$|x-1|<1 \Leftrightarrow -1<x-1<1 \Leftrightarrow 0<x<2$$

και επειδή $x\neq 1$, έχουμε τελικά ότι $x\in(0,1)\cup(1,2)$.

14190

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες α και $-\alpha - 1$ έχουν την ίδια τεταγμένη.

(Μονάδες 8)

γ) Θεωρούμε μεταβλητό σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $\beta > 0$. Από το Μ φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και έστω Α και Δ τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τους άξονες, όπου το Α ανήκει στον $x'x$ και το Δ στον $y'y$. Αποδείξτε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου ΟΑΜΔ είναι $\left[\sqrt{2}(\beta + 1)\right]^2$.

(Μονάδες 9)

14190-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, αφού $f(x)$ είναι οι τεταγμένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f. Παρατηρούμε ότι ο τύπος $f(x)$ της συνάρτησης είναι ένα τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$, άρα το τριώνυμο θα γίνεται ομόσημο του $\alpha = 1 > 0$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού x, δηλαδή πάντα θετικό. Ώστε $x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in R$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει $f(-\alpha - 1) = f(\alpha)$ για κάθε πραγματικό αριθμό α $\neq -\frac{1}{2}$. Πράγματι: $f(-\alpha - 1) = (-\alpha - 1)^2 + (-\alpha - 1) + 1 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 - \alpha = \alpha^2 + \alpha + 1 = f(\alpha)$.

γ) Έστω $M(\beta, f(\beta))$ και Α, Δ οι προβολές του Μ στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Τότε είναι $A(\beta, 0)$ και $\Delta(0, f(\beta))$. Η περίμετρος Ρ του ορθογωνίου ΟΑΜΔ θα είναι:

$P = 2\beta + 2f(\beta) = 2[\beta + f(\beta)] = 2(\beta + \beta^2 + \beta + 1) = 2(\beta^2 + 2\beta + 1) =$

$2(\beta + 1)^2 = \left[\sqrt{2}(\beta + 1)\right]^2.$

14225

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $f(x)=x^2-6x+8, x\in A$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία $y=3$.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x)=x^4-6x-4$ τέμνει την γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 7)

14225-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ και άρα $A=\mathbb{R}-\{1\}$.

β) Το τριώνυμο x^2-5x+4 έχει ρίζες τις 1 και 4, οπότε είναι $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$ και επομένως:

$$f(x)=\frac{(x-2)(x-4)(x-1)}{x-1}=(x-2)\cdot(x-4)=x^2-6x+8,\ x\in A.$$

γ) Έχουμε:

$$f(x)\leq 3 \Leftrightarrow x^2-6x+8\leq 3 \Leftrightarrow x^2-6x+5\leq 0.$$

x	$-\infty$ 1 5 $+\infty$
x^2-6x+5	+ 0 − 0 +

Το πρόσημο του τριωνύμου x^2-6x+5 φαίνεται στον παραπάνω πίνακα και η ανίσωση $x^2-6x+5\leq 0$ αληθεύει για $x\in[1,5]$. Όμως $x\neq 1$, οπότε $x\in(1,5]$.

δ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της g με τη γραφική παράσταση της f είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$g(x)=f(x)\Leftrightarrow x^4-6x-4=x^2-6x+8\Leftrightarrow x^4-x^2-12=0,$$

η οποία θέτοντας $x^2=\omega$ γίνεται

$\omega^2-\omega-12=0$ με ρίζες $\omega=-3$ (απορρίπτεται) και $\omega=4$ (δεκτή).

Άρα $x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Για $x=-2$ έχουμε $f(-2)=(-2)^2-6(-2)+8=4+12+8=24$

και για $x=2$ έχουμε $f(2)=2^2-6\cdot 2+8=4-12+8=0$.

Τελικά τα ζητούμενα κοινά σημεία είναι $B(-2,24)$ και $\Gamma(2,0)$.

14306

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{5} + 3$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης .

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το f(-24).

(Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο (1,3) ανήκει στην γραφική παράσταση;

(Μονάδες 8)

14306-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται όταν $1-\mathrm{x} \geq 0$, δηλαδή όταν $\mathrm{x} \leq 1$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $\mathrm{A_f}=(-\infty, 1]$.

β) Για $\mathrm{x}=-24$ <1 η τιμή της συνάρτησης είναι:

$$f(-24)=\frac{\sqrt{1-(-24)}}{5}+3=\frac{\sqrt{25}}{5}+3=1+3=4.$$

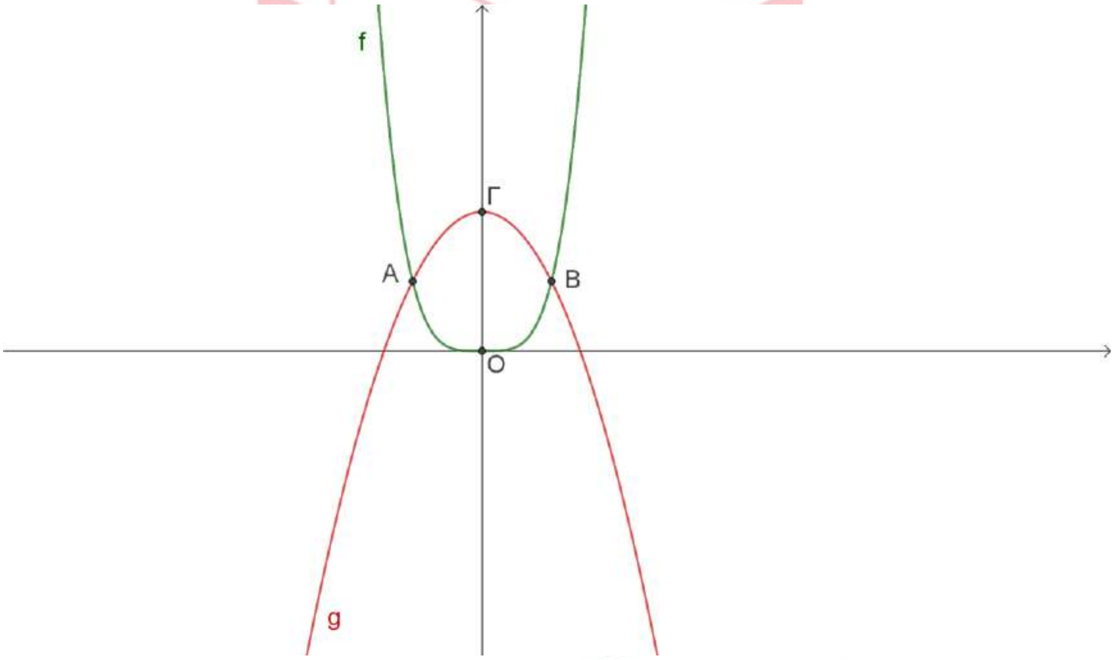
γ) Για $x=1$ η τιμή της συνάρτησης είναι: $\mathrm{f}(1)=\frac{\sqrt{1-1}}{5}+3=0+3=3$.

Άρα το σημείο (1,3) ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης.

14307

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^4$ και $g(x)=2-x^2$. Τα σημεία A,B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f,g ενώ Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma$.

(Μονάδες 9)

Αν $\mathrm{A}(-1,1),\mathrm{B}(1,1),\Gamma(0,2)$

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

(Μονάδες 6)

γ) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση σας στο ερώτημα β).

(Μονάδες 10)

14307-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των σημείων A,B είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^4=2-x^2\Leftrightarrow x^4+x^2-2=0$. Θέτουμε $x^2=\omega$

και η εξίσωση γίνεται $\omega^2+\omega-2=0$ που έχει ρίζες τις $\omega=1$ ή $\omega=-2$.

Για $\omega=-2$ έχουμε $x^2=-2$ που είναι αδύνατη.

Για $\omega=1$ έχουμε $x^2=1$ οπότε $x=1$ ή $x=-1$.

Επειδή το σημείο A βρίσκεται πιο αριστερά από το B, το σημείο A θα έχει μικρότερη τετμημένη, οπότε η τετμημένη του σημείου A είναι -1 και η τετμημένη του σημείου B είναι 1.

Για $x=-1$ είναι $f(-1)=1$ οπότε $\mathrm{A}(-1,1)$.

Για $x=1$ είναι $f(1)=1$ οπότε $\mathrm{B}(1,1)$.

Αφού Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$, το σημείο Γ θα έχει τετμημένη 0 και τεταγμένη $g(0)=2$, οπότε $\Gamma(0,2)$.

β) Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, για τις τιμές του x που είναι μεταξύ των τετμημένων των σημείων A,B δηλαδή για $x\in(-1,1)$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, για τις τιμές του x που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<g(x)\Leftrightarrow x^4<2-x^2\Leftrightarrow x^4+x^2-2<0$. Θέτουμε $x^2=\omega$ και η ανίσωση γίνεται $\omega^2+\omega-2<0$. Το τριώνυμο $\omega^2+\omega-2$ έχει ρίζες τις $\omega=1$ ή $\omega=-2$ και $\alpha=1>0$ οπότε γίνεται αρνητικό για τις τιμές του ω που είναι μεταξύ των ριζών του, δηλαδή για $-2<\omega<1$ και άρα $-2<x^2<1$ Όμως η ανίσωση $-2<x^2$ αληθεύει για κάθε πραγματική τιμή του x, οπότε πρέπει και αρκεί $x^2<1\Leftrightarrow|x|^2<1\Leftrightarrow|x|<1\Leftrightarrow-1<x<1\Leftrightarrow x\in(-1,1)$ που επαληθεύει την απάντηση στο β) ερώτημα.

14459

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ και η ευθεία $y=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι αν $0<\alpha<1$, τότε η C_f έχει με την ευθεία δυο κοινά σημεία των οποίων να βρείτε τις τετμημένες.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $|xf(x)|\le\dfrac{1}{2}$.

(Μονάδες 10)

14459-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε x^2+1, οπότε $\frac{1}{x^2+1}>0$, δηλαδή $f(x)>0$, η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει δυο λύσεις και να τις προσδιορίσουμε.

Είναι:

$$f(x)=\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1}=\alpha \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2+1=\frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{\alpha}-1,\ (1)$$

και επειδή $0<\alpha<1$, έχουμε $\frac{1}{\alpha}>1$ οπότε $\frac{1}{\alpha}-1>0$.

Επομένως η (1) έχει δυο (αντίθετες) λύσεις τις $x_1=\sqrt{\frac{1}{\alpha}-1}$ και $x_2=-\sqrt{\frac{1}{\alpha}-1}$ που είναι και οι τετμημένες των κοινών σημείων τους.

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\left|\frac{x}{x^2+1}\right|\le\frac{1}{2}, \text{ ή αρκεί, } \frac{|x|}{x^2+1}\le\frac{1}{2}, \text{ ή αρκεί, } 2|x|\le x^2+1$$

που ισχύει, αφού από την προφανή ανισότητα $(|x|-1)^2\ge 0$ και την ισότητα $|x|^2=x^2$ έπεται ότι $x^2+1\ge 2|x|$.

14596

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+1}$ με $x \neq -1$.

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι $f(x) = x - 3$ για κάθε $x \neq -1$.

(Μονάδες 13)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$.

(Μονάδες 12)

14596-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για να απλοποιήσουμε τον τύπο της συνάρτησης παραγοντοποιούμε το τριώνυμο x^2-2x-3.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου x^2-2x-3 είναι: $\Delta=4-4\cdot(-3)=16$

και οι ρίζες:.

$$x_{1,2}=\frac{2\pm4}{2}\Leftrightarrow x_1=3 \text{ και } x_2=-1.$$

Άρα: $x^2-2x-3=(x+1)\cdot(x-3)$.

Επομένως έχουμε : $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x+1}=\frac{(x+1)\cdot(x-3)}{x+1}=x-3$.

β) Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f από το σημείο $A(1,-4)$ θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση της συνάρτησης. Δηλαδή θα πρέπει $f(1)=-4$.

Είναι $f(1)=-2\neq-4$. Άρα το σημείο $A(1,-4)$ δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

14603

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με: $f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\leq 3\\ x^2, & 3<x<10\end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

(Μονάδες 6)

β) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $y'y$ άξονα.

(Μονάδες 9)

14603-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$f(-1)=2(-1)-5=-7$,

$f(3)=2\cdot 3-5=1$ και

$f(5)=5^2=25$.

β) Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων, πρέπει $f(0)=0$. Όμως $f(0)=2\cdot 0-5=-5\neq 0$, οπότε η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Για τον $y'y$ άξονα είναι $x=0$ και $f(0)=2\cdot 0-5=-5$, οπότε το σημείο τομής με τον $y'y$ άξονα είναι το $(0,-5)$.

14604

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f , με: $f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\le 3\\ x^2, & 3<x<10\end{cases}$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1), f(3)$ και $f(5)$.

(Μονάδες 6)

γ) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη $y=21$.

(Μονάδες 7)

14604-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι σε μορφή διαστήματος το εξής:

$$A = [-\infty, 10)\,.$$

β) Έχουμε:

$f(-1) = 2(-1) - 5 = -7$,

$f(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$ και

$f(5) = 5^2 = 25$.

γ) Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων, πρέπει $f(0) = 0$. Όμως $f(0) = 2 \cdot 0 - 5 = -5 \neq 0$, οπότε η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Έχουμε δυο περιπτώσεις:

- $y = f(x) = 21 \Leftrightarrow 2x - 5 = 21 \Leftrightarrow 2x = 26 \Leftrightarrow x = 13 \notin (-\infty, 3]$
- $y = f(x) = 21 \Leftrightarrow x^2 = 21 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{21}$. Από τις δυο αυτές τιμές του x δεκτή είναι η $\sqrt{21}$ διότι $\sqrt{21} \in (3, 10)$.

Κατά συνέπεια το ζητούμενο σημείο είναι $\left(\sqrt{21}, 21\right)$.

14628

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x}, x\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(4,3)$.

(Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4,-3)$ είναι σημείο της C_f.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y=3$.

(Μονάδες 10)

14628-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(4)=3$.

Με $x=4$ έχουμε: $f(4)=\frac{4^2-4}{4}=\frac{16-4}{4}=\frac{12}{4}=3$, οπότε η C_f διέρχεται από το σημείο $A(4,\,3)$

β) Ισχύει:

$$f(-4)=\frac{(-4)^2-4}{-4}=\frac{16-4}{-4}=-\frac{12}{4}=-3$$

οπότε και το σημείο $B(-4,\,-3)$ είναι πάνω στην C_f.

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=3$.

Με $x\neq 0$ έχουμε:

$$f(x)=3 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x}=3 \Leftrightarrow x^2-4=3x \Leftrightarrow x^2-3x-4=0$$

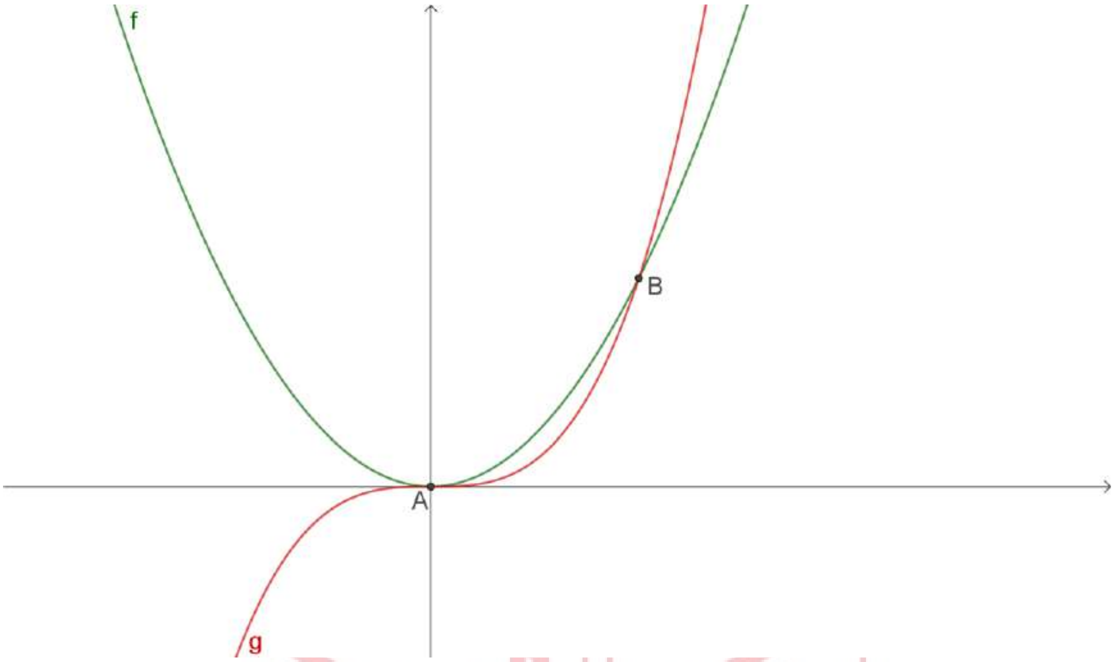
Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 4. Επιπλέον, $f(-1)=3$ και $f(4)=3$, οπότε τα αντίστοιχα σημεία της C_f έχουν τεταγμένη $y=3$.

Επομένως, τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία είναι το $A(4,\,3)$ και το $\Gamma(-1,\,3)$.

14665

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=x^3$ που τέμνονται στα σημεία A,B.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A,B.

(Μονάδες 8)

Έστω $\mathrm{A}(0,0),\mathrm{B}(1,1)$.

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει ότι $x^3<x^2$.

(Μονάδες 6)

γ) Είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

δ) Για τον πραγματικό αριθμό $\pi=3{,}1415...$ να δείξετε ότι

i. $(\pi-3)^3<(\pi-3)^2$.

(Μονάδες 3)

ii. $\pi^3-10\pi^2+33\pi-36<0$.

(Μονάδες 3)

14665-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των σημείων A,B είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ ισοδύναμα $x^2=x^3$, δηλαδή $x^2-x^3=0$, οπότε $x^2(1-x)=0$ και άρα $x=0$ ή $x=1$.

Για $x=0$ είναι $f(0)=0$ οπότε $\mathrm{A}(0,0)$.

Για $x=1$ είναι $f(1)=1$ οπότε $\mathrm{B}(1,1)$.

β) Από το σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x\in(0,1)$, δηλαδή για τις τετμημένες των σημείων μεταξύ των Α και Β, η γραφική παράσταση της g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της f, πράγμα που σημαίνει ότι $x^3<x^2$.

Εναλλακτικά για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $x^2>0$ και $0<x<1$ οπότε $x\cdot x^2<1\cdot x^2$ δηλαδή $x^3<x^2$.

γ) Με βάση τα παραπάνω για κάθε $x\in\left(0,1\right)$ είναι $x^3<x^2$, π.χ. $\left(\frac{1}{2}\right)^3<\left(\frac{1}{2}\right)^2$ αφού ισοδύναμα $\frac{1}{8}<\frac{1}{4}$. Συνεπώς δεν είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του.

δ)

i. Αφού $3<\pi<4$ είναι $3-3<\pi-3<4-3$ δηλαδή $0<\pi-3<1$ οπότε με βάση το β) ερώτημα είναι $(\pi-3)^3<(\pi-3)^2$.

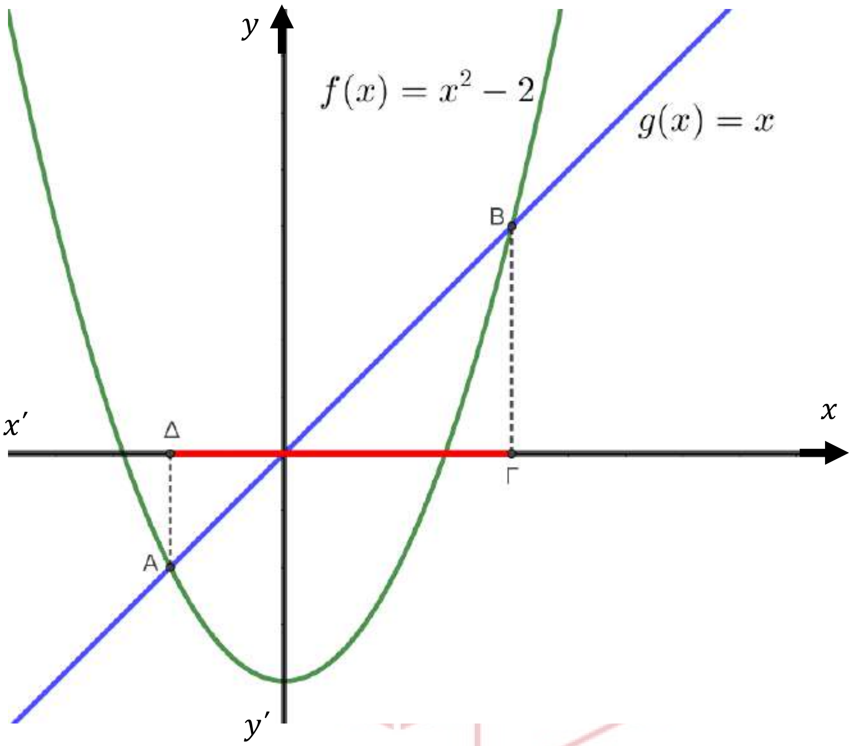
ii. Είναι

$$(\pi-3)^3<(\pi-3)^2 \Leftrightarrow$$
$$\pi^3-9\pi^2+27\pi-27<\pi^2-6\pi+9 \Leftrightarrow$$
$$\pi^3-10\pi^2+33\pi-36<0$$

14673

ΘΕΜΑ 3

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 2$ και $g(x) = x$.



α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β είναι $A(-1,-1)$ και $B(2,2)$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - x - 2 < 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\omega^2 - |\omega| - 2 < 0$.

(Μονάδες 8)

14673-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμονται στα σημεία Α και Β, άρα οι τετμημένες των σημείων Α και Β θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ δηλαδή της εξίσωσης $x^2 - 2 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$, η διακρίνουσα της οποίας είναι

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$, άρα $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}$. Ώστε $x = 2$ ή $x = -1$.

Τότε $f(2) = g(2) = 2$ και $f(-1) = g(-1) = -1$.

β) Για το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχουμε βρει ότι οι ρίζες του είναι οι αριθμοί

$x = 2$ ή $x = -1$.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	−	+	

Άρα οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης είναι $-1 < x < 2$.

Σημείωση: Η ανίσωση μπορεί να λυθεί και γεωμετρικά με βάση το α) ερώτημα.

γ) Έχουμε $\omega^2 - |\omega| - 2 < 0 \Leftrightarrow |\omega|^2 - |\omega| - 2 < 0$ η οποία γράφεται στη μορφή $x^2 - x - 2 < 0$, αν θέσουμε $|\omega| = x$.

Με βάση το α) ερώτημα παίρνουμε $-1 < |\omega| < 2$.

Αλλά η σχέση $-1 < |\omega|$ ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Έτσι, πρέπει να ισχύει $|\omega| < 2$, η οποία γράφεται $-2 < \omega < 2$.

Ώστε οι λύσεις της ανίσωσης $\omega^2 - |\omega| - 2 < 0$ είναι οι αριθμοί $\omega \in (-2, 2)$.

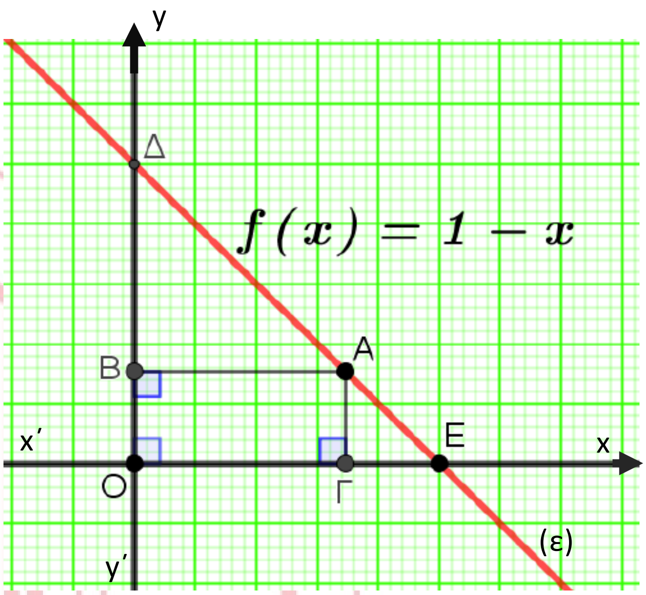
14744

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι $x - x^2 \leq \frac{1}{4}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. Πότε ισχύει το ίσον;

(Μονάδες 8)

β) Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί η γραφική παράσταση (ε) της συνάρτησης $f(x) = 1 - x,\ \ x \in R$, η οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Ένα μεταβλητό σημείο Α, με τετμημένη α, κινείται επί της ευθείας (ε) και μεταξύ των σημείων Δ και Ε. Φέρνουμε από το Α καθέτους στους άξονες και έστω Β και Γ τα σημεία τομής με $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα.



i. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΟΓ.

(Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του εμβαδού του μεταβλητού ορθογωνίου ΑΒΟΓ είναι $\frac{1}{4}$. Για ποια θέση του σημείου Α επιτυγχάνεται αυτή η τιμή;

(Μονάδες 7)

14744-Λύση

ΛΥΣΗ

α) $x - x^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, ισχύει.

Το ίσον ισχύει αν και μόνον αν $x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

β)

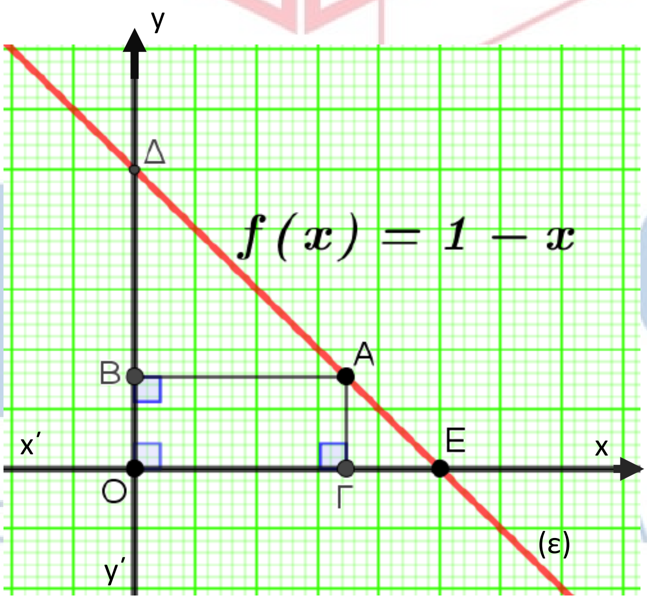
i. Αρχικά παρατηρούμε ότι το σημείο Δ έχει τετμημένη μηδέν και τεταγμένη $f(0) = 1$, ενώ αν είναι k η τετμημένη του σημείου Ε, η τεταγμένη του θα είναι $f(k) = 0 = 1 - k$, άρα $k = 1$. Ώστε $\Delta(0,1)$ και $E(1,0)$.

   Έστω τώρα ότι α είναι η τετμημένη του σημείου Α, με $0 \leq \alpha \leq 1$, οπότε το σημείο Α έχει τεταγμένη $f(\alpha) = 1 - \alpha$.

   Έτσι έχουμε $\Gamma(\alpha, 0)$, $A(\alpha, 1 - \alpha)$, $B(0, 1 - \alpha)$.

   Επομένως το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΟΓ είναι $E = \alpha \cdot (1 - \alpha) = \alpha - \alpha^2$.

ii. Σύμφωνα με το α) ερώτημα είναι $E \leq \frac{1}{4}$, δηλαδή για οποιαδήποτε τιμή του α, το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται το πολύ $\frac{1}{4}$. Το ίσον ισχύει αν και μόνον αν $\alpha = \frac{1}{2}$, οπότε σε αυτή την περίπτωση είναι $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, δηλαδή το ΑΒΟΓ θα γίνει τετράγωνο.



14745

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$. Κάποια σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν ακέραιες συντεταγμένες έχουν σημειωθεί με έντονο τρόπο.

α) Να λύσετε την ανίσωση $-2 \leq g(x) \leq 0$.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|g(x)| \leq 2$.

(Μονάδες 7)

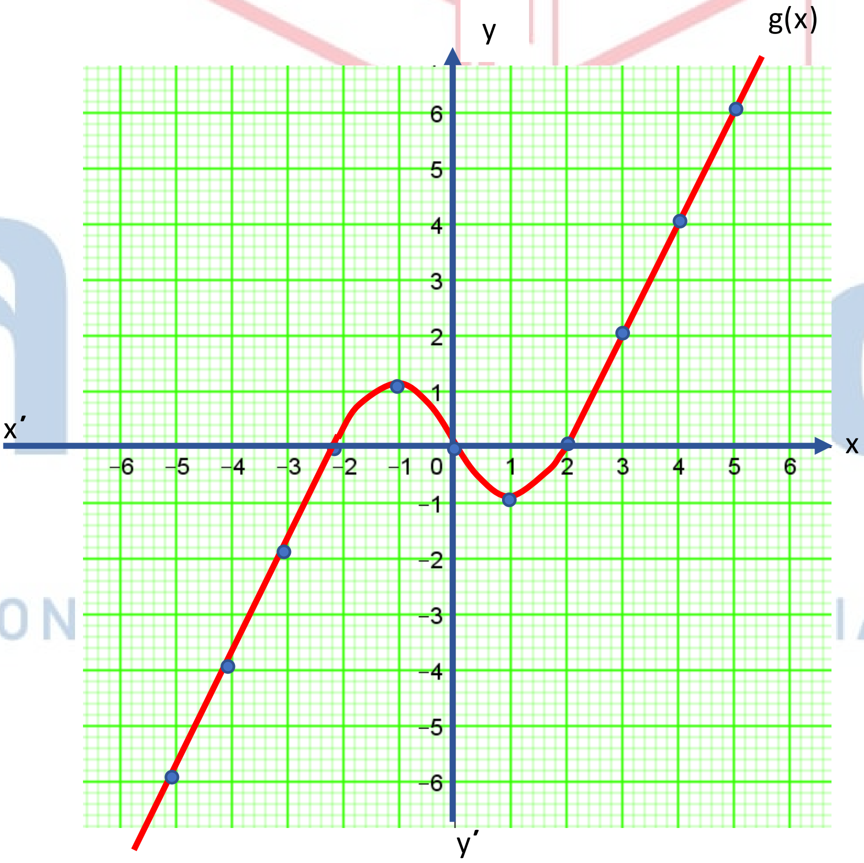
γ)

i. Να βρείτε το πλήθος λύσεων των εξισώσεων $g(x) = \frac{4}{5}$ και $g(x) = -1$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k.

(Μονάδες 6)



14745-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Ζητάμε τις τετμημένες x των σημείων της γραφικής παράστασης των οποίων οι τεταγμένες $g(x)$ κυμαίνονται από -2 έως μηδέν. Παρατηρούμε ότι αυτό συμβαίνει για $x \in [-3, -2] \cup [0, 2]$.

β) Καθώς $|g(x)| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq g(x) \leq 2$, ζητάμε τις τετμημένες x των σημείων της γραφικής παράστασης των οποίων οι τεταγμένες $g(x)$ κυμαίνονται από -2 έως 2. Παρατηρούμε ότι αυτό συμβαίνει για $x \in [-3, 3]$.

γ)

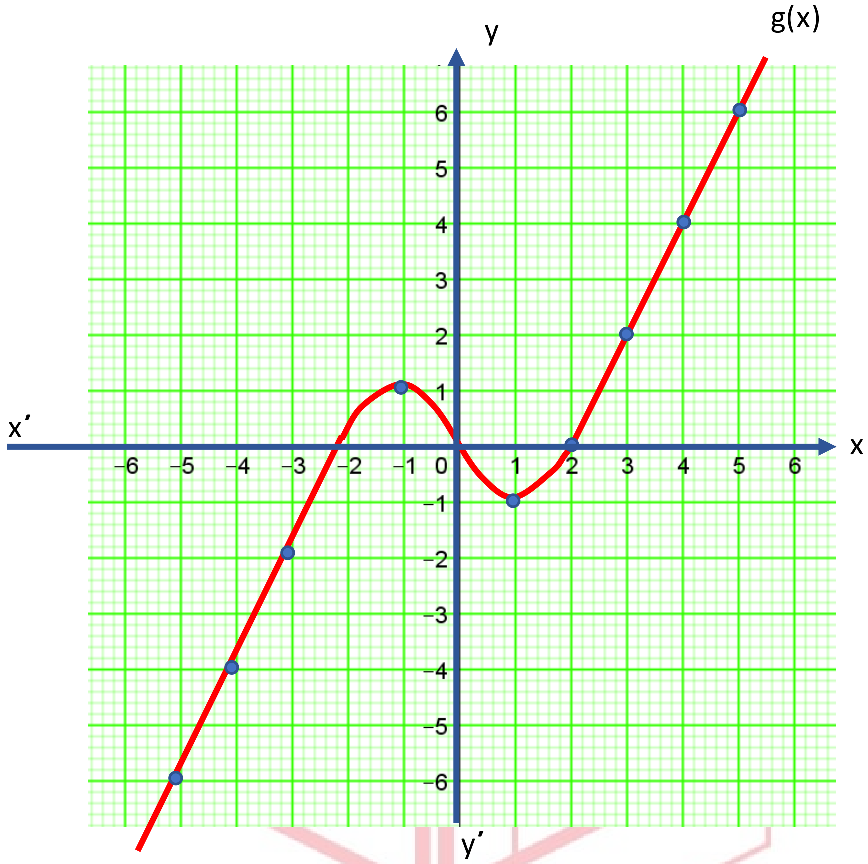
i. Ελέγχουμε πόσα σημεία της γραφικής παράστασης έχουν τεταγμένη $\frac{4}{5}$ και διαπιστώνουμε ότι αυτά είναι 3. Βοηθητικά, σχεδιάζουμε την ευθεία με εξίσωση $y = \frac{4}{5}$, της οποίας όλα τα σημεία έχουν τεταγμένη $\frac{4}{5}$ (αυτή η ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$) και παρατηρούμε ότι έχει 3 κοινά σημεία με την γραφική παράσταση.

Ανάλογα, η εξίσωση $g(x) = -1$ έχει 2 λύσεις.

ii. Το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k, ταυτίζεται με το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας $y = k$ (παράλληλη προς τον άξονα $x'x$) με την γραφική παράσταση. Αποτυπώνουμε τα αποτελέσματα στον παρακάτω πίνακα.

Τιμές του k	Πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$
$k < -1$ ή $k > 1$	1
$k = -1$ ή $k = 1$	2
$-1 < k < 1$	3

14745-Λύση



14752

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι το σημείο $\mathrm{M}(1,-\sqrt{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες xx', yy'.

(Μονάδες 10)

14752-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει : $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$ και $x^2-5x+6\geq 0$.

Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει ρίζες τις $x_1=2$, $x_2=3$ αφού $2+3=5$ και $2\cdot 3=6$ και το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		+	0	-	0	+	

Συνεπώς $x^2-5x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 2 \quad ή \quad x\geq 3$.

Τελικά $\mathrm{A}=(-\infty,2)\cup[3,+\infty)$.

β) Το σημείο $\mathrm{M}(1,-\sqrt{2})$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν $f(1)=-\sqrt{2}$.

Είναι

$$f(1)=\frac{\sqrt{1^2-5\cdot 1+6}}{1-2}=\frac{\sqrt{2}}{-1}=-\sqrt{2}$$

οπότε το σημείο $\mathrm{M}(1,-\sqrt{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

γ) Για $x=0$ έχουμε:

$$f(0)=\frac{\sqrt{0^2-5\cdot 0+6}}{0-2}=\frac{\sqrt{6}}{-2}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον yy' στο σημείο $(0,-\frac{\sqrt{6}}{2})$.

Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον xx' είναι οι λύσεις της εξίσωσης :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-5x+6}=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2 \quad ή \quad x=3$$

Η λύση $x=2$ απορρίπτεται, αφού $2\notin \mathrm{A}$, ενώ η $x=3$, είναι δεκτή, αφού $3\in \mathrm{A}$, οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον xx' στο σημείο $(3,0)$.

ΘΕΜΑ 3

α) Να δείξετε ότι $x^2+2x+4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left|\dfrac{x^3-8}{x-2}\right|$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

(Μονάδες 4)

γ) Να δείξετε ότι $f(x)=x^2+2x+4$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$.

(Μονάδες 6)

δ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της g, όπου $g(x)=6x$.

(Μονάδες 8)

14754-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $x^2+2x+4=x^2+2x+1+3=(x+1)^2+3>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Εναλλακτικά, το τριώνυμο x^2+2x+4 έχει διακρίνουσα $\Delta=-12<0$, οπότε είναι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ομόσημο του $\alpha=1>0$, δηλαδή $x^2+2x+4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x\neq 2$, οπότε $\mathrm{A}=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

γ) Είναι: $f(x)=\left|\dfrac{x^3-8}{x-2}\right|=\left|\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}\right|=\left|x^2+2x+4\right|=x^2+2x+4$, αφού δείξαμε στο α) ερώτημα ότι $x^2+2x+4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς $f(x)=x^2+2x+4$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$.

δ) Το πεδίο ορισμού της g είναι το $\mathbb{R}$. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f,g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ με $x\neq 2$.

Είναι:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2+2x+4=6x\Leftrightarrow x^2+2x+4-6x=0\Leftrightarrow x^2-4x+4=0\Leftrightarrow (x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2$$

Η λύση $x=2$ που βρήκαμε απορρίπτεται οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f,g δεν έχουν κοινά σημεία.

14760

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x-12}}\right]^3 \cdot (x^2-16)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

14760-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει και αρκεί : $x^2 - x - 12 > 0$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ είναι: $\Delta = 1 + 48 = 49$

και οι ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x_1 = -3 \text{ και } x_2 = 4.$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$x^2 - x - 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $A_g = (-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$.

β) Είναι:

$g(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x - 12}}\right]^3 \cdot (x^2 - 16) = \frac{1}{x^2 - x - 12} \cdot (x^2 - 16) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - x - 12} = \frac{(x-4)\cdot(x+4)}{(x+3)\cdot(x-4)} = \frac{x+4}{x+3}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της A_g.

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g και του άξονα $x'x$.

Έχουμε:

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x+3} = 0 \Leftrightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$ είναι $A(-4,0)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $y'y$, πρέπει να θέσουμε στον τύπο της g όπου $x = 0$. Αυτό όμως δε μπορεί να συμβεί γιατί το $x = 0$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

Άρα δεν υπάρχει σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $y'y$.

14763

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3\sqrt{x^2-8x+\lambda}}{x-4} + 2,$ για $x \neq 4$ και $\lambda \geq 16.$

α) Να βρείτε το $\lambda \geq 16$ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο της $M(0,-1).$

(Μονάδες 7)

β) Αν $\lambda = 16$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 4 \\ 5, & x > 4 \end{cases}.$

(Μονάδες 7)

ii. Να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της $f.$

(Μονάδες 5)

iii. Για $x < 4,$ να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f των οποίων η απόστασή τους από το σημείο $A(-1,-1)$ είναι 10 μονάδες μήκους.

(Μονάδες 6)

14763-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αφού το σημείο $M(0,-1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f θα ισχύει $f(0)=-1$ δηλαδή:

$$\frac{3\sqrt{\lambda}}{-4}+2=-1 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{\lambda}}{-4}=-3 \Leftrightarrow 3\sqrt{\lambda}=12 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}=4 \Leftrightarrow \lambda=16.$$

β) Για $\lambda=16$,

i. Είναι:

$$f(x)=\frac{3\sqrt{x^2-8x+16}}{x-4}+2=\frac{3\sqrt{(x-4)^2}}{x-4}+2=\frac{3|x-4|}{x-4}+2, \qquad x\neq 4$$

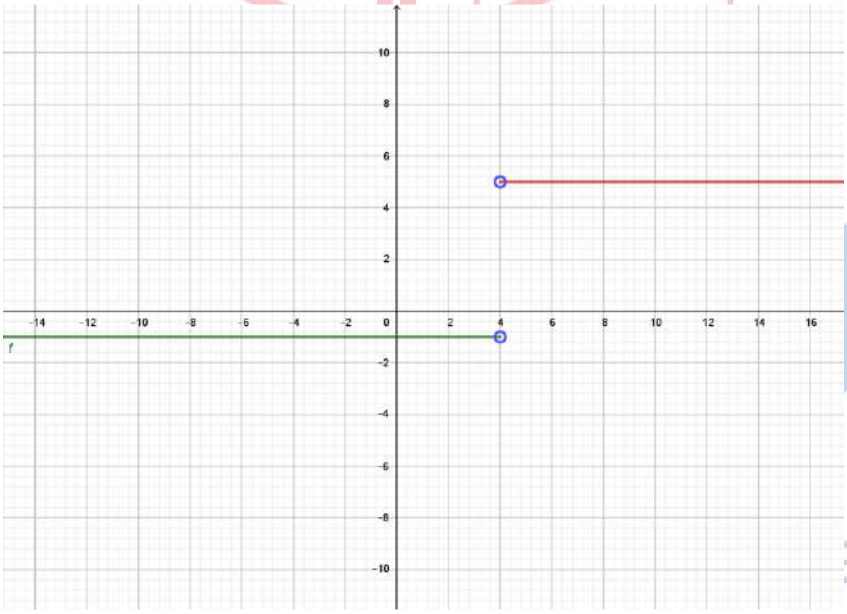
Αν $x<4$ τότε $x-4<0$ και $|x-4|=-(x-4)$. Άρα :

$$f(x)=\frac{-3(x-4)}{x-4}+2=-3+2=-1.$$

Αν $x>4$ τότε $x-4>0$ και $|x-4|=x-4$. Άρα : $f(x)=\frac{3(x-4)}{x-4}+2=3+2=5.$

Άρα : $f(x)=\begin{cases}-1, & x<4\\ 5, & x>4\end{cases}$.

ii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αποτελείται από δύο ημιευθείες παράλληλες προς τον άξονα $x'x$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



iii. Το σημείο $A(-1,-1)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης στην πρώτη ημιευθεία.

Αφού $x<4$ το ζητούμενο σημείο ανήκει στον κλάδο $f(x)=-1$. Αν ονομάσουμε B το σημείο θα έχει συντεταγμένες $(x,-1)$. Τότε:

$$(AB)=|x+1|=10 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=10 \Leftrightarrow x=9\\ x+1=-10 \Leftrightarrow x=-11\end{cases}.$$

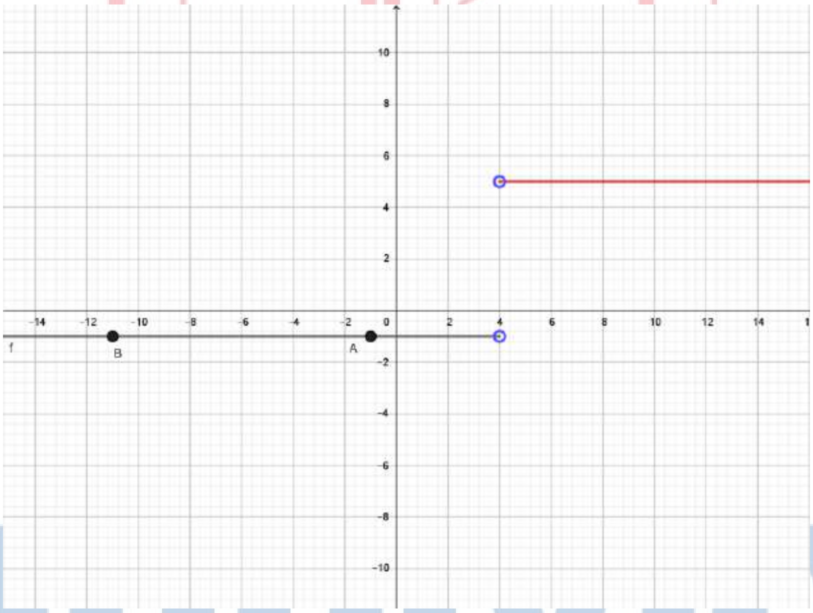
14763-Λύση

Το $x = 9 > 4$ απορρίπτεται. Επομένως $x = -11 < 4$ και το ζητούμενο σημείο είναι $B(-11, -1)$.

Εναλλακτικά σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, αφού το ζητούμενο σημείο B βρίσκεται στην ημιευθεία $y = -1$ θα έχει τεταγμένη $y_B = -1$ και θα βρίσκεται δέκα θέσεις δεξιά ή δέκα αριστερά του A πάνω στην ημιευθεία $y = -1$. Δηλαδή θα έχει τετμημένη:

$x_B = -1 + 10 = 9$ απορρίπτεται ή $x_B = -1 - 10 = -11$.

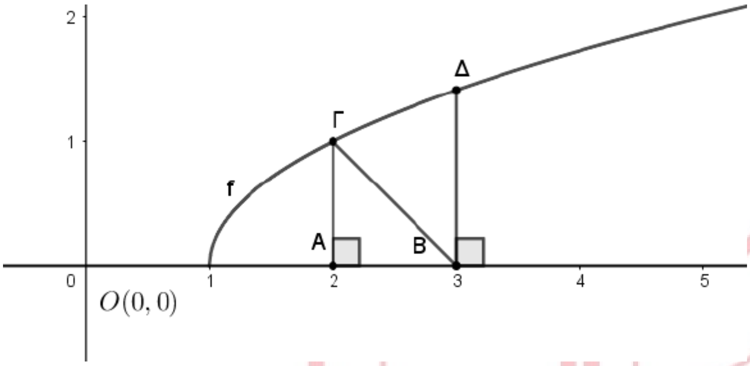
Άρα το ζητούμενο σημείο είναι $B(-11, -1)$.



14771

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x-\alpha}$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.



α) Με βάση το σχήμα, να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

(Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha = 1$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 5)

γ)

i. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ είναι $(2,1)$ και $(3,\sqrt{2})$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος $B\Gamma$.

(Μονάδες 4)

iii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 5)

14771-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από το σχήμα προκύπτει ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο 1 άρα:

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-\alpha} = 0$$

οπότε $1 - \alpha = 0$. Άρα, $\alpha = 1$.

β) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει και αρκεί $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = [1, +\infty)$.

γ)

i. Από το σχήμα βλέπουμε ότι η τετμημένη του σημείου Γ είναι 2, άρα η τεταγμένη του είναι $f(2) = \sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1$. Αντίστοιχα η τετμημένη του σημείου Δ είναι 3 και η τεταγμένη του $f(3) = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$.

ii. Το μήκος του τμήματος $B\Gamma$ είναι $(B\Gamma) = \sqrt{(2-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

iii. Παρατηρούμε ότι $(B\Delta) = \left|\sqrt{2} - 0\right| = \sqrt{2} = (B\Gamma)$. Άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $(B\Delta) = (B\Gamma)$.

14786

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 1)$ και $B(2-\lambda^2, \mu)$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

α) Αν τα σημεία A, B είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$, να βρείτε τις τιμές των λ, μ.

(Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον το σημείο A βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, να βρείτε την τιμή του λ.

(Μονάδες 6)

γ) Για $\lambda = -2$ και $\mu = -1$

i. Να βρείτε την απόσταση των σημείων A ,B.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB, όπου O η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 5)

14786-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για να είναι τα σημεία A, B είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} \lambda = 2-\lambda^2 \\ \kappa\alpha\iota \\ \mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2+\lambda-2 = 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \mu = -1 \end{cases}.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $\lambda^2+\lambda-2$ είναι:

$\Delta = 1-4\cdot(-2) = 9$ και οι ρίζες:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1\pm 3}{2} \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ και } \lambda_2 = -2.$$

Άρα $\lambda = 1$ ή $\lambda = -2$ και $\mu = -1$.

β) Επειδή θέλουμε το σημείο A να βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, θα πρέπει να έχει αρνητική τετμημένη.

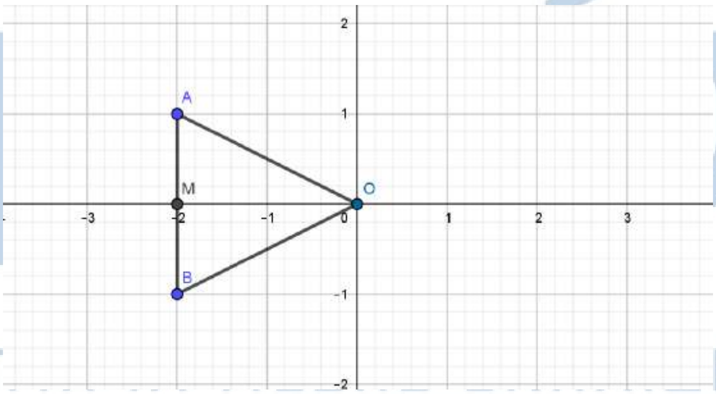
Άρα: $\lambda = -2$.

γ) Για $\lambda = -2$ και $\mu = -1$ είναι $A(-2,1)$ και $B(-2,-1)$.

i. Επειδή τα σημεία $A(-2,1)$ και $B(-2,-1)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ το τμήμα AB είναι κάθετο στον άξονα $x'x$ και η απόστασή τους είναι:

   $(AB) = |-1-1| = 2$

ii. Το μήκος της βάσης του τριγώνου OAB είναι $(AB) = 2$ μονάδες μήκους και το αντίστοιχο ύψος $(OM) = 2$ μονάδες μήκους, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Άρα το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι:

$(OAB) = \frac{(AB)\cdot(OM)}{2} = \frac{2\cdot 2}{2} = 2$ τετραγωνικές μονάδες.

14810

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-7x+\kappa,\ \kappa\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y=10$.

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa=10$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

γ) Έστω $A(\alpha,\ f(\alpha))$ και $B(\beta,\ f(\beta))$, $\alpha<\beta$ δυο σημεία της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha<\dfrac{2\alpha+3\beta}{5}<\beta$

(Μονάδες 6)

ii. Να εξετάσετε αν το σημείο της C_f με τετμημένη $x_o=\dfrac{2\alpha+3\beta}{5}$ βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα x΄x.

(Μονάδες 8)

14810-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η C_f διέρχεται από το σημείο $(0, 10)$, οπότε ισχύει: $f(0)=10$. Άρα $\kappa=10$.

β) Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα x΄x για τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)<0$. Το τριώνυμο $x^2-7x+10$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 5. Επιπλέον ο συντελεστής του όρου x^2 είναι ίσος με τη μονάδα, οπότε το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα προσήμων.

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$x^2-7x+10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα x΄x για όλες τις τιμές του x που περιέχονται στο διάστημα $(2, 5)$.

γ) Τα σημεία Α, Β της C_f βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x, οπότε ισχύει $2<\alpha<\beta<5$.

i. Για την απόδειξη της ζητούμενης ανισότητας, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$5\alpha<2\alpha+3\beta \quad \text{και} \quad 2\alpha+3\beta<5\beta$$

Η πρώτη γράφεται $3\alpha<3\beta$ και ισχύει, αφού $\alpha<\beta$ και η δεύτερη γράφεται $2\alpha<2\beta$ και επίσης ισχύει για τον ίδιο λόγο.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι $2<\alpha<x_o<\beta<5$, οπότε ο αριθμός x_o περιέχεται ανάμεσα στις ρίζες του τριωνύμου $x^2-7x+10$. Επομένως, $f(x_o)<0$, οπότε το σημείο της C_f με τετμημένη x_o βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

14813

ΘΕΜΑ 1

Α1. Στις τέσσερις πρώτες ερωτήσεις να γράψετε στην κόλλα σας το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι σωστή ή το γράμμα Λ αν η πρόταση είναι λάθος, μετά από τον αριθμό της ερώτησης. Στην πέμπτη ερώτηση να γράψετε το γράμμα της σωστής απάντησης μετά από τον αριθμό της ερώτησης.

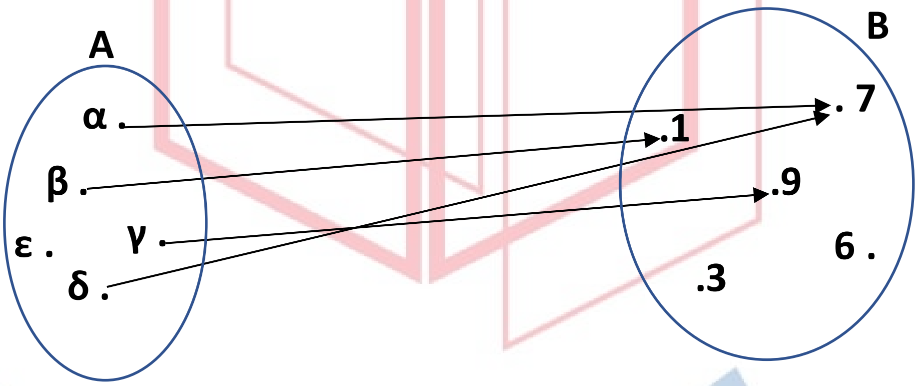
i) Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, τότε ισχύει $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = |\alpha|$.

ii) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$ μπορεί να τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ακριβώς δύο σημεία.

iii) Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (α_ν) με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω. Το άθροισμα S_ν των ν πρώτων διαδοχικών όρων της (α_ν) δίνεται από την σχέση $S_\nu = \frac{\nu}{2}[\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]$.

iv) Η εξίσωση $\alpha \cdot x + \beta = 0$ είναι αδύνατη ως προς x, όταν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$

v)



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται μια αντιστοιχία στοιχείων ενός συνόλου Α σε στοιχεία ενός συνόλου Β. Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό;

Α) η αντιστοιχία αυτή παριστάνει συνάρτηση από το σύνολο Α στο σύνολο Β.

Β) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι στο 3 και στο 6 δεν αντιστοιχεί κανένα στοιχείο του Α.

Γ) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι τα διαφορετικά στοιχεία α και δ του συνόλου Α αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο του συνόλου Β, το 7.

Δ) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι το στοιχείο ε δεν αντιστοιχεί σε κανένα στοιχείο του Β.

(Μ10)

Α2. Έστω x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο πραγματικές ρίζες του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $x \in R$. Να αποδείξετε ότι, αν για την μεταβλητή x ισχύει $x < x_1$ ή $x > x_2$ τότε τότε το τριώνυμο $f(x)$ γίνεται ομόσημο του α.

14813

(M15)

14813-Λύση

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1.

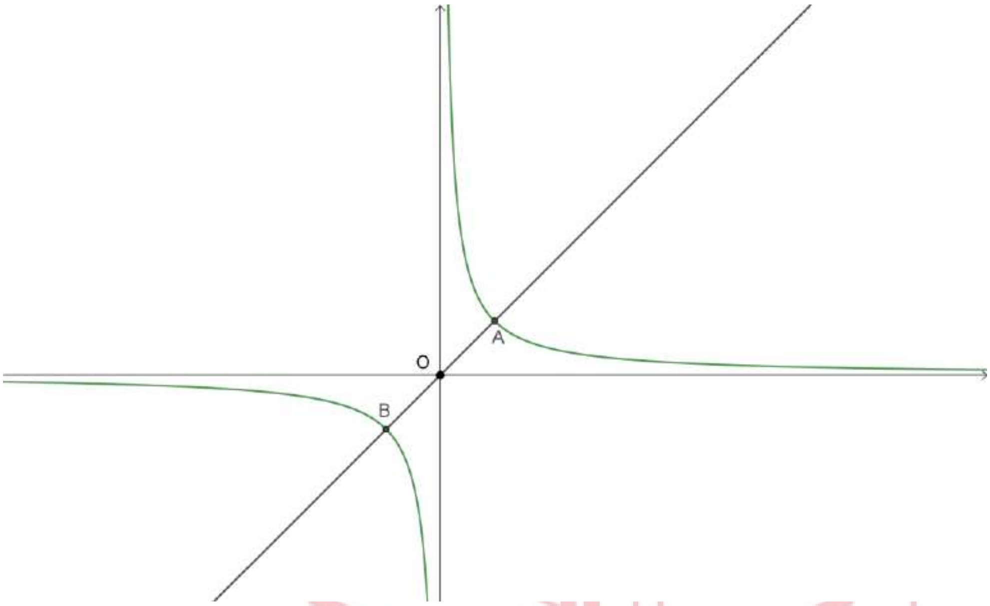
i) Σ ii) Λ iii) Λ iv) Σ v) Δ

Α2. Απόδειξη σελ. 108 σχολ. βιβλ.

14925

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{x}$ και η ευθεία AB με εξίσωση $y=x$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των A,B και να δείξετε ότι το $\mathrm{O}(0,0)$ είναι το μέσο του AB.

(Μονάδες 9)

Έστω $\mathrm{M}(x,y)$ τυχαίο σημείο της γραφική παράστασης της f.

β) Να δείξετε ότι και το συμμετρικό M' του M ως προς το O(0,0) ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $\mathrm{A}(1,1),\mathrm{B}(-1,-1)$, $\mathrm{M}'(-x,-y)$ να δείξετε ότι $(\mathrm{AB})\le(\mathrm{MM}')$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ και να εξετάσετε πότε $(\mathrm{AB})=(\mathrm{MM}')$.

(Μονάδες 8)

14925-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Τα σημεία A,B είναι τα σημεία τομής της ευθείας $y=x$ με τη γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{x}$, οπότε οι τετμημένες των A,B είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$\frac{1}{x}=x \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$.

Όμως από το σχήμα βλέπουμε ότι το σημείο Β είναι στο 3ο τεταρτημόριο οπότε έχει αρνητική τετμημένη και το σημείο Α στο 1ο οπότε έχει θετική τετμημένη. Συνεπώς $\mathrm{A}(1, f(1))$ δηλαδή $\mathrm{A}(1,1)$ και $\mathrm{B}(-1, f(-1))$ δηλαδή $\mathrm{B}(-1,-1)$.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία A,B έχουν αντίθετες συντεταγμένες οπότε είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $\mathrm{O}(0,0)$, δηλαδή το $\mathrm{O}(0,0)$ είναι το μέσο του AB.

β) Αφού $\mathrm{M}(x,y)$ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f, είναι $x\neq 0$ και $f(x)=y$ δηλαδή $y=\frac{1}{x}$ (1).

Το συμμετρικό του Μ ως προς το Ο(0,0) είναι το $\mathrm{M}'(-x,-y)$ και για να ανήκει στη γραφική παράσταση της f, πρέπει και αρκεί $f(-x)=-y$ ισοδύναμα $-y=-\frac{1}{x}$ ισοδύναμα $y=\frac{1}{x}$ που ισχύει από την (1).

Σημείωση : Αυτό γραφικά σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f έχει κέντρο συμμετρίας το O.

γ) Ισοδύναμα έχουμε

$$(\mathrm{AB})\leq(\mathrm{MM}') \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(1+1)^2+(1+1)^2} \leq \sqrt{(x+x)^2+(\frac{1}{x}+\frac{1}{x})^2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{8} \leq \sqrt{4x^2+\frac{4}{x^2}} \Leftrightarrow$$

$$8 \leq 4x^2+\frac{4}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$2 \leq x^2+\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$0 \leq x^2+\frac{1}{x^2}-2 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq \left(x-\frac{1}{x}\right)^2$$

που ισχύει για κάθε $x\neq 0$.

14925-Λύση

Τέλος, $(\mathrm{AB}) = (\mathrm{MM}') \Leftrightarrow 0 = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{x} \overset{\alpha)}{\Leftrightarrow} x = \pm 1$

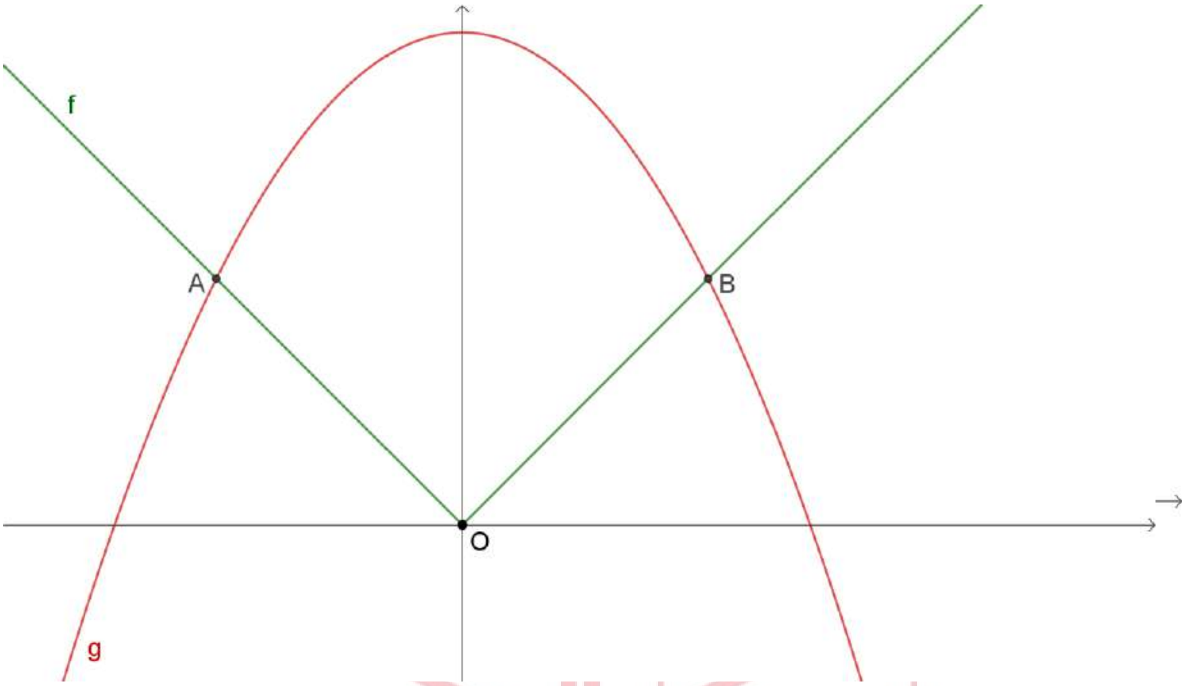
που σημαίνει ότι ισχύει όταν τα σημεία Μ, Μ΄ ταυτίζονται με τα σημεία Α , Β.

Σημείωση: αυτό σημαίνει ότι η απόσταση ΑΒ είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων της υπερβολής που είναι συμμετρικά ως προς το (0,0).

14926

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=|x|$ και $g(x)=2-x^2$. Τα A,B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f,g.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\mathrm{A}(-1,1)$ και $\mathrm{B}(1,1)$,

i.Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι : $f(x)<g(x)$.

(Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x)<g(x)$ επαληθεύοντας την απάντηση στο ερώτημα βi).

(Μονάδες 9)

14926-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των σημείων A,B είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow |x|=2-x^2 \Leftrightarrow x^2+|x|-2=0 \Leftrightarrow |x|^2+|x|-2=0$.

Θέτουμε $|x|=\omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2+\omega-2=0$ που έχει ρίζες τις $\omega=1$ ή $\omega=-2$.

Για $\omega=-2$ έχουμε $|x|=-2$ που είναι αδύνατη.

Για $\omega=1$ έχουμε $|x|=1$ οπότε $x=1$ ή $x=-1$.

Επειδή το σημείο A βρίσκεται πιο αριστερά από το B, το σημείο A θα έχει μικρότερη τετμημένη, οπότε η τετμημένη του σημείου A είναι -1 και η τετμημένη του σημείου B είναι 1.

Για $x=-1$ είναι $f(-1)=1$ οπότε $\mathrm{A}(-1,1)$.

Για $x=1$ είναι $f(1)=1$ οπότε $\mathrm{B}(1,1)$.

β)

i. Η ανίσωση $f(x)<g(x)$ αληθεύει για τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g. Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g,για τις τιμές του x που είναι μεταξύ των τετμημένων των σημείων A,B δηλαδή για $x\in(-1,1)$.

ii. Έχουμε ισοδύναμα: $f(x)<g(x)\Leftrightarrow |x|<2-x^2 \Leftrightarrow x^2+|x|-2<0 \Leftrightarrow |x|^2+|x|-2<0$.

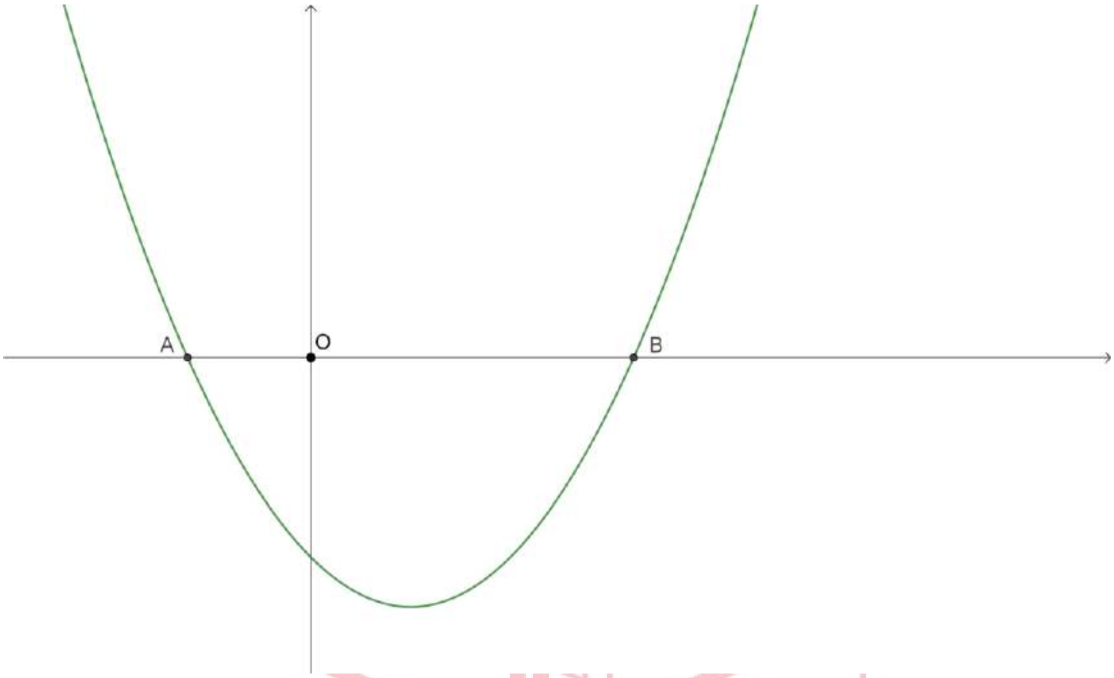
Θέτουμε $|x|=\omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2+\omega-2<0$. Το τριώνυμο $\omega^2+\omega-2$ έχει ρίζες τις $\omega=1$ ή $\omega=-2$ και γίνεται αρνητικό για τις τιμές του ω που είναι μεταξύ των ριζών του, δηλαδή για $-2<\omega<1$, δηλαδή $-2<|x|<1$.

Όμως η ανίσωση $-2<|x|$ ισχύει για κάθε πραγματική τιμή του x, οπότε πρέπει και αρκεί $|x|<1\Leftrightarrow -1<x<1\Leftrightarrow x\in(-1,1)$ που επαληθεύει την απάντηση στο βi) ερώτημα.

14961

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-x-1$.



Αν $A(\omega,0)$, $B(\phi,0)$

α) Να δείξετε ότι :

i. $\omega+\phi=1$.

(Μονάδες 4)

ii. $\omega\cdot\phi=-1$.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι $(OB)>(OA)$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν ένας θετικός αριθμός β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, να δείξετε ότι $\beta>\phi$.

(Μονάδες 6)

δ) Να δείξετε ότι $\phi<\frac{5}{3}$.

(Μονάδες 5)

14961-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-x-1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $\mathrm{A}(\omega,0)$, $\mathrm{B}(\phi,0)$, οπότε ω,ϕ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ με $\omega<0<\phi$ αφού το σημείο Ο(0,0) είναι μεταξύ των A και B στον άξονα $x'x$.

Η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=5$ και ρίζες τους αριθμούς $\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Επειδή $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ έχουμε ότι $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\omega=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

i. Αφού ω,ϕ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ δηλαδή της $x^2-x-1=0$ έχουμε ότι $\omega+\phi=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{-1}{1}=1$.

ii. Αφού ω,ϕ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ δηλαδή της $x^2-x-1=0$ έχουμε ότι $\omega\cdot\phi=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-1}{1}=-1$.

β) Είναι $(\mathrm{OB})=|\phi|=\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $(\mathrm{OA})=|\omega|=\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Επειδή $\frac{\sqrt{5}+1}{2}>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ συμπεραίνουμε ότι $(\mathrm{OB})>(\mathrm{OA})$.

Εναλλακτικά, είναι $(\mathrm{OB})=|\phi|=\phi$ αφού $\phi>0$ και $(\mathrm{OA})=|\omega|=-\omega$ αφού $\omega<0$.

Είναι $(\mathrm{OB})>(\mathrm{OA}) \Leftrightarrow \phi>-\omega \Leftrightarrow \phi+\omega>0 \Leftrightarrow 1>0$ που ισχύει.

γ) Αφού ο β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, έχουμε ότι $\beta-\frac{1}{\beta}>1$ και εφόσον $\beta>0$ έχουμε ισοδύναμα $\beta^2-1>\beta \Leftrightarrow \beta^2-\beta-1>0$. Το τριώνυμο x^2-x-1 έχει ρίζες ω,ϕ και γίνεται θετικό, δηλαδή ομόσημο του $\alpha=1$, για $x<\omega$ ή $x>\phi$. Συνεπώς $\beta<\omega$ ή $\beta>\phi$. Όμως $\beta>0$, οπότε $\beta>\phi$.

Εναλλακτικά, $\beta^2-\beta-1>0 \Leftrightarrow f(\beta)>0$. Από τη γραφική παράσταση της f βλέπουμε ότι τα σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν θετική τεταγμένη, δηλαδή είναι πάνω από τον άξονα xx', είναι αυτά που είναι δεξιά του Β ή αριστερά του Α. Συνεπώς $\beta<\omega$ ή $\beta>\phi$. Όμως $\beta>0$, οπότε $\beta>\phi$.

14961-Λύση

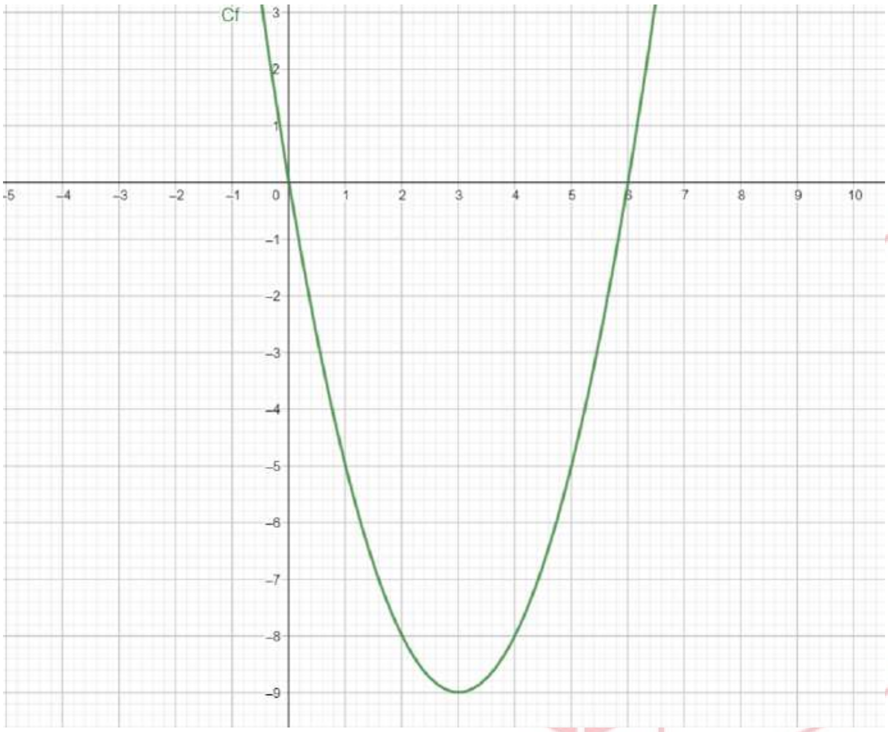
δ) Είναι $f(\frac{5}{3})=\frac{25}{9}-\frac{5}{3}-1=\frac{1}{9}>0$ και επειδή $\frac{5}{3}>0$ έχουμε ότι $\phi<\frac{5}{3}$.

Εναλλακτικά, $\frac{5}{3}-\frac{3}{5}=\frac{16}{15}>1$, οπότε με βάση το γ) έχουμε ότι $\phi<\frac{5}{3}$.

15000

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Με τη βοήθεια του σχήματος:

α) Να βρείτε τις τιμές της f για $x = 0,1,3,5$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\mathrm{f}(\mathrm{x}) < 0$.

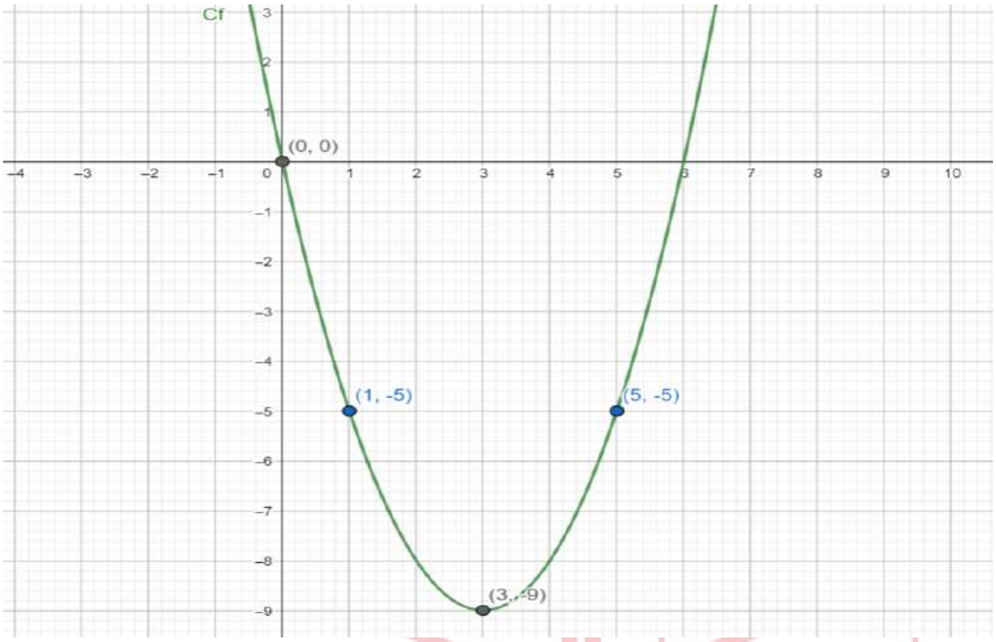
(Μονάδες 11)

15000-Λύση

ΛΥΣΗ

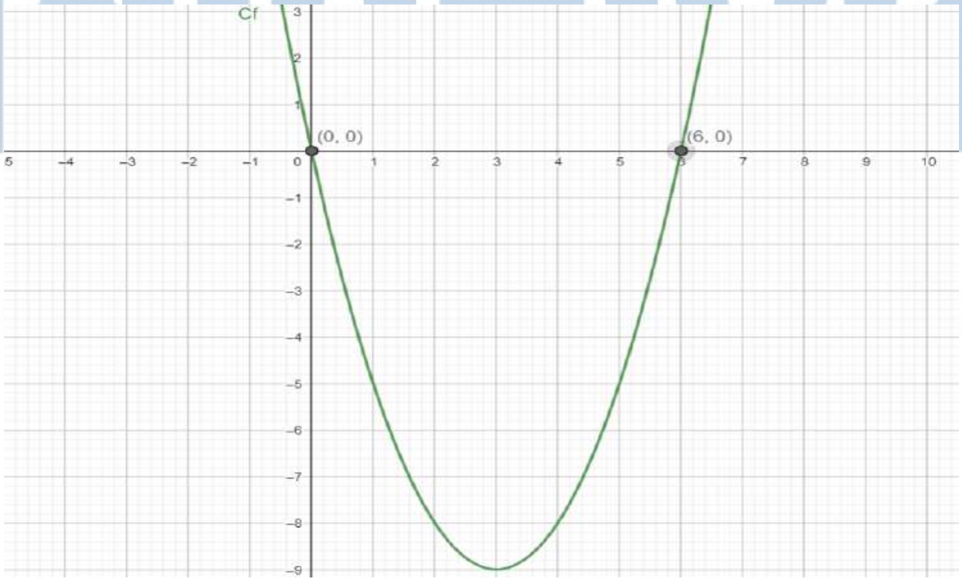
α) Από το σχήμα παρατηρούμε πως οι ζητούμενες τιμές είναι:

$\mathrm{f}(0)=0\,,\mathrm{f}(1)=-5,\mathrm{f}(3)=-9$ και $\mathrm{f}(5)=-5$.



β) Για να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=0$, βλέπουμε από το σχήμα τα σημεία που η γραφική παράσταση $\mathrm{C_f}$ τέμνει τον άξονα x΄x, δηλαδή τα σημεία (0,0) και (6,0).

΄Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $\mathrm{x}_1=0$ και $\mathrm{x}_2=6$.



15000-Λύση

γ) Με τη βοήθεια του σχήματος, οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων που έχουν τεταγμένες y που βρίσκονται κάτω από τον x΄x, δηλαδή $y < 0$ με x ανάμεσα στο 0 και το 6.Προκύπτει $x \epsilon (0,6)$.

16153

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 7)

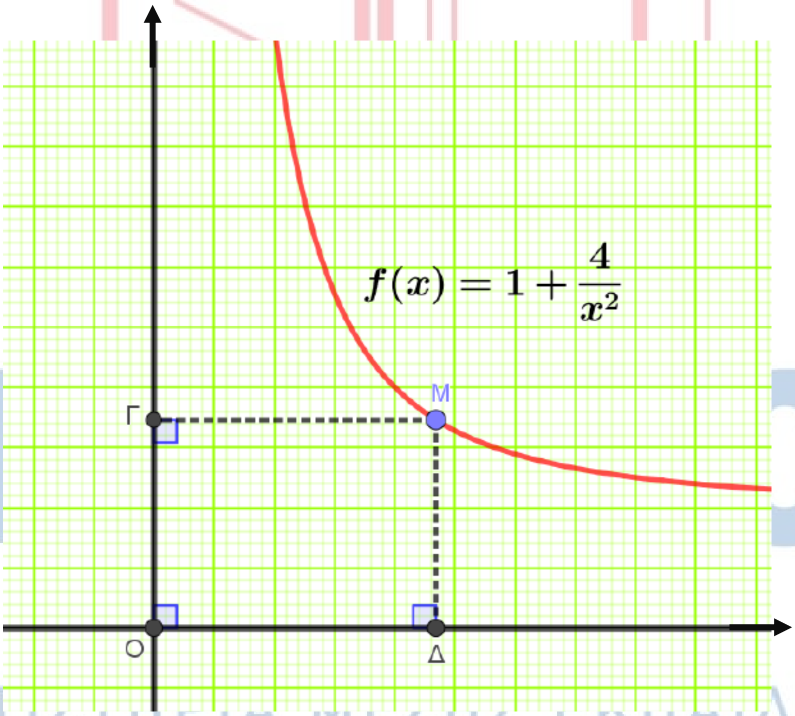
γ) Έστω $\alpha > 0$ η τετμημένη ενός τυχαίου σημείου Μ της γραφικής παράστασης της f. Αν ονομάσουμε E το εμβαδόν του ορθογωνίου $ΟΓΜΔ$ του σχήματος, να αποδείξετε ότι

i. $E = \alpha + \frac{4}{\alpha}$.

(Μονάδες 7)

ii. $E \geq 4$.

(Μονάδες 6)



16153-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $x \neq 0$, άρα $A_f = R^* = (-\infty, \ 0) \cup (0, +\infty)$.

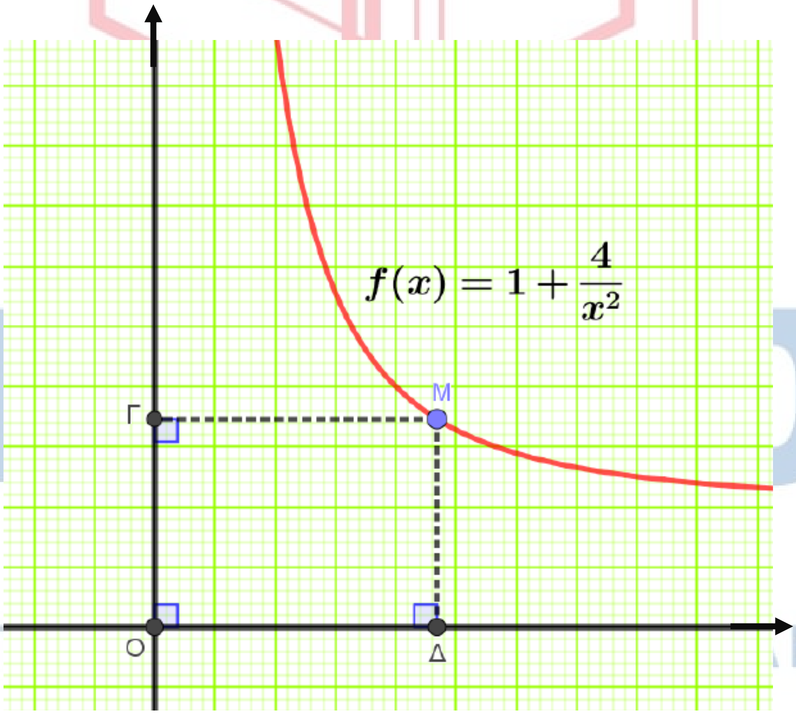
β) Αφού είναι $x \neq 0$, η γραφική παράσταση δεν μπορεί να τέμνει τον άξονα $y'y$ αφού τα σημεία του $y'y$ έχουν τετμημένη μηδέν.

Αν υποθέσουμε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη β , τότε θα έπρεπε $f(\beta) = 0$, δηλαδή $1 + \frac{4}{\beta^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\beta^2} = -1 \Leftrightarrow \beta^2 = -1$, αδύνατο, άρα η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει ούτε τον άξονα $x'x$.

γ)

i. Το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $M(\alpha, f(\alpha))$, οπότε το εμβαδόν του ορθογωνίου θα είναι $E = (O\Delta) \cdot (M\Delta) = \alpha \cdot f(\alpha) = \alpha\left(1 + \frac{4}{\alpha^2}\right) = \alpha \cdot 1 + \alpha \cdot \frac{4}{\alpha^2} = \alpha + \frac{4}{\alpha}$.

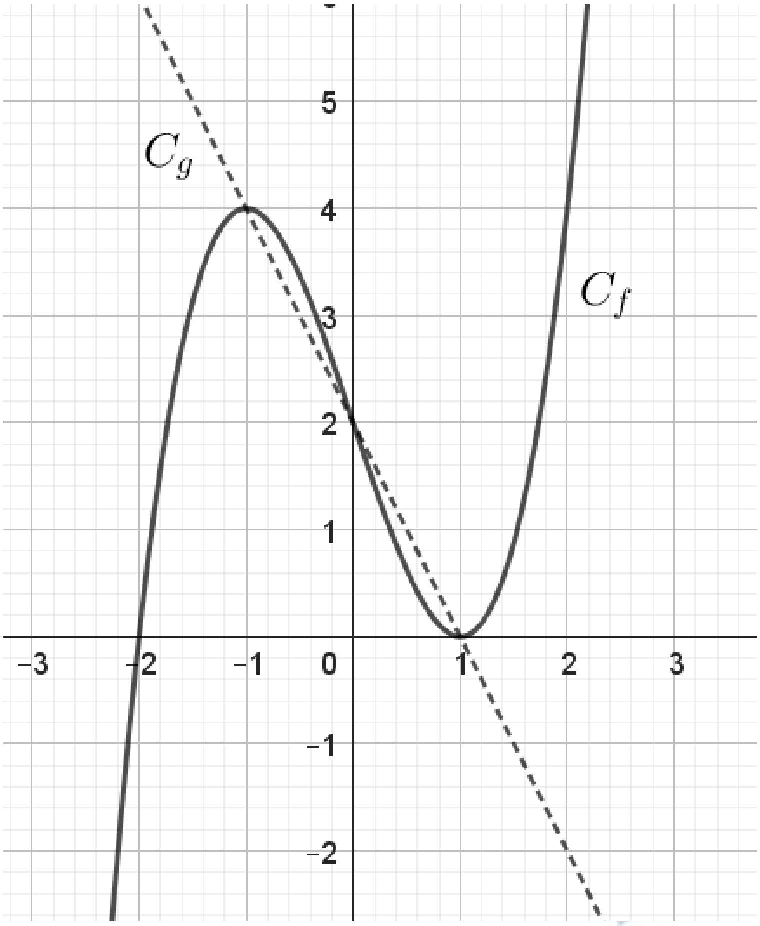
ii. $E \geq 4 \Leftrightarrow \ \alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \Leftrightarrow \alpha^2 + 4 \geq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 4 \ - \ 4\alpha \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha \ - \ 2)^2 \geq 0,$ ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό α, οπότε και για $\alpha \ > \ 0$.



32742

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$.



Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

α) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = -2x + 2$,

(Μονάδες 6)

β) τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$ και $f(1)$,

(Μονάδες 6)

γ) τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g,

(Μονάδες 6)

δ) τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$ ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

(Μονάδες 7)

32742-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

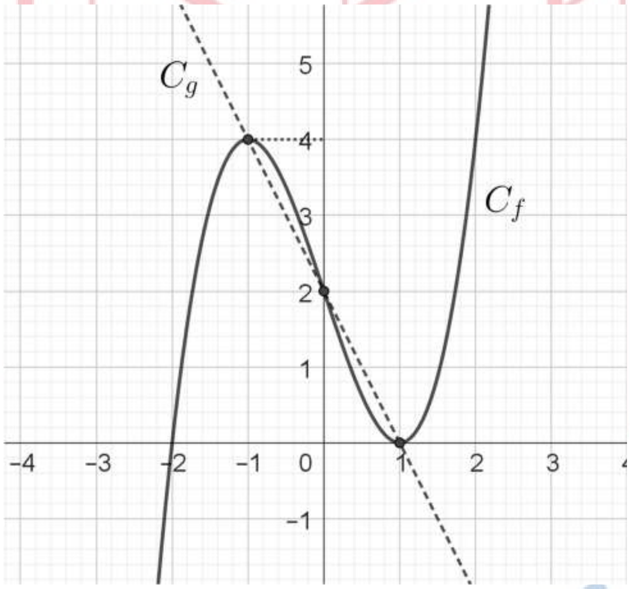
$$f(x) = -2x + 2 \Leftrightarrow f(x) = g(x),$$

είναι οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g. Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι οι ζητούμενες τιμές είναι οι:

$$x_1 = -1, x_2 = 0 \text{ και } x_3 = 1.$$

β) Από τη γραφική παράσταση f διαπιστώνουμε ότι:

$$f(-1) = 4, f(0) = 2 \text{ και } f(1) = 0.$$



γ) Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g αν και μόνο αν:

$$x \in (-1,0) \cup (1 + \infty).$$

δ) Η παράσταση A ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς αν και μόνο αν:

$$f(x) + 2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -2x + 2 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x).$$

Από τις γραφικές παραστάσεις διαπιστώνουμε ότι η παραπάνω ανίσωση ισχύει αν και μόνο αν:

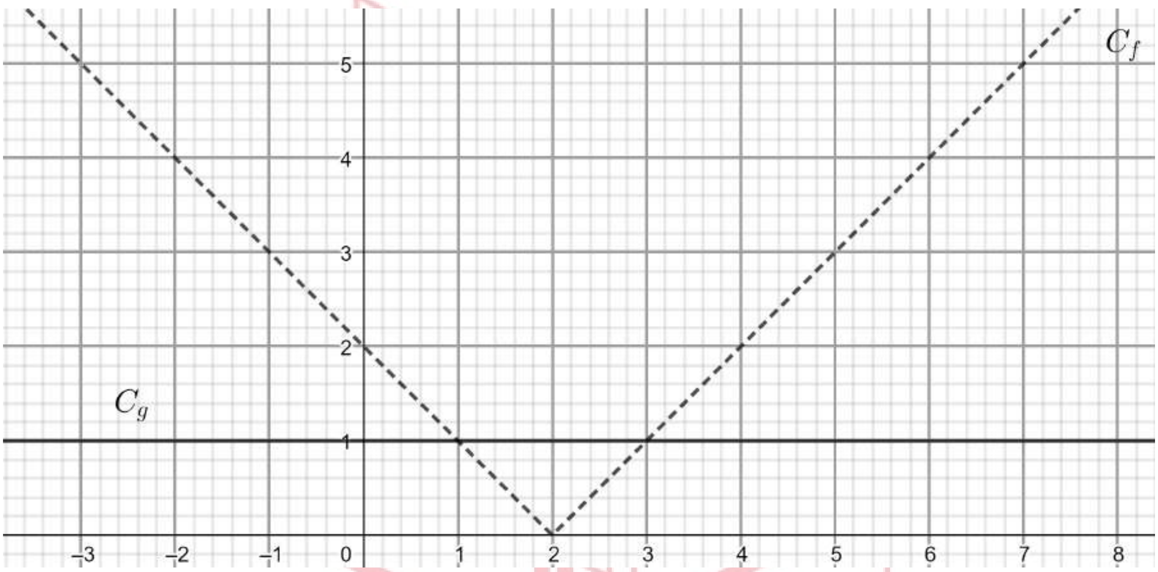
$$x \in [-1,0] \cup [1, +\infty).$$

33597

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με

$$f(x)=|x-2| \quad \text{και} \quad g(x)=1,\ x\in\mathbb{R}.$$



α) Με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος, να βρείτε

i. τα σημεία τομής των C_f και C_g.

(Μονάδες 5)

ii. τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από την C_g.

(Μονάδες 5)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα αi) και αii).

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ η παράσταση $\mathrm{A}=\dfrac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$ ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

(Μονάδες 5)

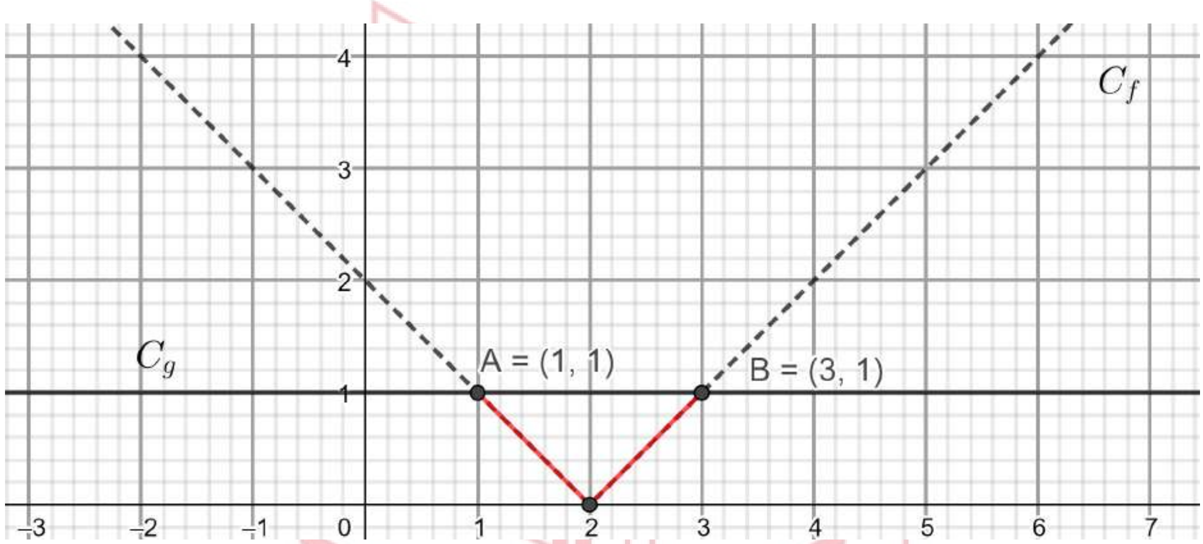
33597-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από το σχήμα βλέπουμε ότι:

i. τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα $\mathrm{A}(1,1)$ και $\mathrm{B}(3,1)$.

ii. η C_f είναι κάτω από την C_g για $x \in (1,3)$.



β)

i. Οι τετμημένες των σημείων τομής των C_f και C_g είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x-2| = 1$.

Έχουμε ισοδύναμα:

$|x-2| = 1$, δηλαδή

$x-2=-1$ ή $x-2=1$ και τελικά

$x=1$ ή $x=3$.

Έχουμε επίσης $f(1)=|1-2|=1=g(1)$ και $f(3)=|3-2|=1=g(3)$, οπότε τα κοινά σημεία των δυο γραφικών παραστάσεων είναι τα $\mathrm{A}(1,1)$ και $\mathrm{B}(3,1)$.

ii. Οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f είναι κάτω από την C_g είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < g(x) \Leftrightarrow |x-2| < 1$.

Έχουμε ισοδύναμα:

$|x-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-2 < 1 \Leftrightarrow 2-1 < x < 2+1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$, δηλαδή η C_f είναι κάτω από την C_g για $x \in (1,3)$.

33597-Λύση

γ) Η παράσταση A ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} 1-f(x)\geq 0 \\ \text{και} \\ f(x)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\leq 1 \\ \text{και} \\ f(x)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2|\leq 1 \\ \text{και} \\ |x-2|\neq 0 \end{cases} \overset{(\beta ii)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1\leq x\leq 3 \\ \text{και} \\ x\neq 2 \end{cases}$$

Τελικά, η παράσταση A ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς για $x\in[1,2)\cup(2,3]$.

33701

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-1)^2 - 4$ και $g(x) = |x-1| + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 12)

33701-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ αν και μόνο αν $f(x) > 0$, οπότε ισοδύναμα έχουμε:

$$(x-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 > 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} > 4 \Leftrightarrow |x-1| > 2.$$

Η τελευταία ανίσωση ισχύει αν και μόνο αν:

$$x - 1 < -2 \text{ ή } x - 1 > 2,$$

από όπου ισοδύναμα βρίσκουμε ότι:

$$x < -1 \text{ ή } x > 3.$$

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ αν και μόνο αν:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow |x-1| + 2 > 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $|x-1| \geq 0$ και $2 > 0$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g, προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2 - 4 = |x-1| + 2$$

η οποία γράφεται

$$|x-1|^2 - 4 = |x-1| + 2 \Leftrightarrow$$
$$|x-1|^2 - |x-1| - 6 = 0.$$

Στην τελευταία σχέση θέτουμε $|x-1| = y$, οπότε η εξίσωση γράφεται:

$$y^2 - y - 6 = 0.$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

και ρίζες τις:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 \\ \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}.$$

Άρα για $y = |x-1|$ έχουμε:

- $|x-1| = 3 \Leftrightarrow (x - 1 = 3 \text{ ή } x - 1 = -3) \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = -2,$
- $|x-1| = -2$ που είναι αδύνατη.

33701-Λύση

Θέτοντας $x = 4$ στον τύπο της συνάρτησης g βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} g(4) &= |4-1|+2 \\ &= |3|+2 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Θέτοντας $x = -2$ στον τύπο της συνάρτησης g βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} g(-2) &= |-2-1|+2 \\ &= |-3|+2 \\ &= 3+2 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Άρα, τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι τα

$A(-2,5)$ και $B(4,5)$.

33754

ΘΕΜΑ 4

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μια ημέρα, η εταιρία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 60 + 0{,}20x$$

Όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μια ημέρα, ταξίδεψε $400\ Km$;

(Μονάδες 5)

β) Πόσα χιλιόμετρα ταξίδεψε ένας πελάτης ο οποίος για μια ημέρα πλήρωσε 150 ευρώ;

(Μονάδες 5)

γ) Μια άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 80 + 0{,}10x$$

όπου, όπως και προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

(Μονάδες 10)

δ) Αν

$$f(x) = 60 + 0{,}20x \quad \text{και} \quad g(x) = 0{,}80 + 0{,}10x$$

είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α κα Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή κάθε μιας από τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα το ερωτήματος γ).

(Μονάδες 5)

33754-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αντικαθιστούμε στον τύπο που δίνεται $x = 400$ και βρίσκουμε:

$$y = 60 + 0{,}20 \cdot 400 = 140 \text{ ευρώ}.$$

β) Αντικαθιστούμε στον τύπο που δίνεται $y = 150$ και βρίσκουμε:

$$150 = 60 + 0{,}20x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90 = 0{,}20x \Leftrightarrow x = 450\ km.$$

γ) Η εταιρεία Α χρεώνει λιγότερα από την εταιρεία Β αν και μόνο αν:

$$60 + 0{,}20x < 80 + 0{,}10x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}20x - 0{,}10x < 80 - 60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}10x < 20 \Leftrightarrow x < 200 \text{ km}.$$

Συνεπώς η εταιρεία Α χρεώνει λιγότερα από την εταιρεία Β αν ο πελάτης διανύσει λιγότερα από 200 km. Με τον ίδιο συλλογισμό, συμπεραίνουμε ότι η εταιρεία Β χρεώνει λιγότερα από την εταιρεία Α αν ο πελάτης διανύσει περισσότερα από 200 km.

δ) Επειδή ο αριθμός x εκφράζει απόσταση θε πρέπει $x \geq 0$. Άρα, οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$. Οι τετμημένες των σημείων τομής προκύπτουν από τις λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 60 + 0{,}20x = 80 + 0{,}10x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}20x - 0{,}10x = 80 - 60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}10x = 20 \Leftrightarrow x = 200 > 0 \text{ αποδεκτή}.$$

Για $x = 200$ είναι $f(200) = 60 + 0{,}20 \cdot 200 = 60 + 40 = 100$. Άρα, το σημείο τομής είναι το $A(200{,}100)$.

Η τετμημένη $x = 200$ του σημείου Α εκφράζει τα χιλιόμετρα που θα πρέπει να διανύσει κάποιος με το αυτοκίνητο ώστε να πληρώσει και στις δύο εταιρείες το ίδιο ποσό, που εκφράζει η τεταγμένη $y = 100$, έχοντας διανύσει τα ίδια χιλιόμετρα.

34159

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

34159-Λύση

α) Η συνάρτηση ορίζεται για $x \in R$ με:

$x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = R - \{3\}$.

β) Θα παραγοντοποιήσουμε το $x^2 - 5x + 6$.

Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Τότε:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Για $x \neq 3$ ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = x - 2 \, .$$

γ) Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(2, 0)$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = 0 - 2 = -2$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, -2)$.

34309

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ και } g(x) = x + \alpha \text{ με } x \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Για $\alpha = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία.

(Μονάδες 10)

γ) Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

(Μονάδες 10)

34309-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για $\alpha = 1$ ο τύπος της συνάρτησης g γίνεται: $g(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών τους παραστάσεων είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = 0 \ \text{ ή } \ x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = 0 \text{ ή } x = 1$$

Επίσης, $g(0) = 0 + 1 = 1$ και $g(1) = 1 + 1 = 2$.

Άρα τα σημεία τομής είναι τα $A\big(0, g(0)\big)$ και $B\big(1, g(1)\big)$ δηλαδή τα $A(0,1)$ και $B(1,2)$.

β) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία αν και μόνο αν η εξίσωση

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + \alpha$$

έχει δύο άνισες λύσεις (που θα είναι οι τετμημένες x_1, x_2 των σημείων αυτών).

Δηλαδή αν και μόνο αν η εξίσωση

$$x^2 - x + 1 - \alpha = 0 \quad (1)$$

έχει δύο άνισες ρίζες.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - x + 1 - \alpha$ είναι

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - \alpha) =$$
$$= 1 - 4 + 4\alpha = 4\alpha - 3.$$

Η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες αν και μόνο αν

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\alpha - 3 > 0 \Leftrightarrow$$
$$4\alpha > 3 \Leftrightarrow \alpha > \frac{3}{4}$$

γ) Επειδή $\alpha > 1 > \frac{3}{4}$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες, τις x_1, x_2. Το γινόμενό τους είναι:

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 1 - \alpha.$$

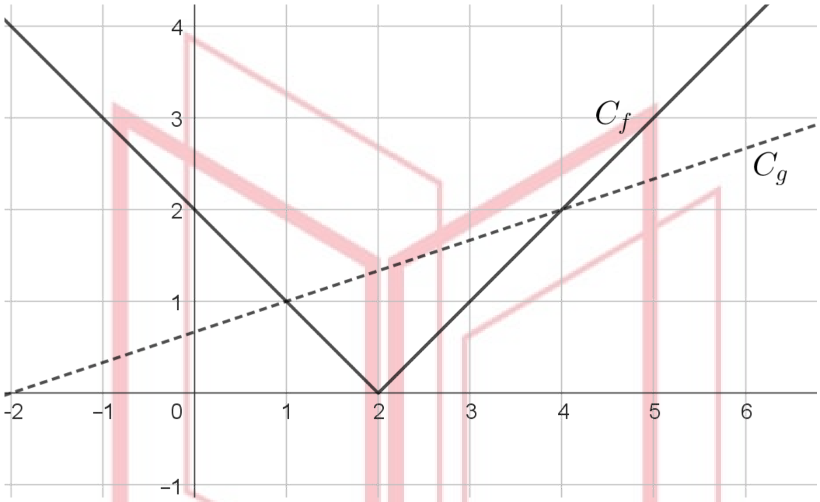
Αλλά, $\alpha > 1 \Rightarrow 1 - \alpha < 0$, δηλαδή $P < 0$. Οπότε οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ετερόσημες.

34312

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με:

$$f(x) = |x-2| \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \qquad \text{με } x \in \mathbb{R}.$$



α) Με βάση το σχήμα, να εκτιμήσετε την τιμή των συντεταγμένων των σημείων τομής γραφικών παραστάσεων C_f και C_g.

(Μονάδες 6)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α).

(Μονάδες 8)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g.

(Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς η παράσταση:

$$K = \sqrt{3|2-x| - (x+2)}.$$

(Μονάδες 5)

34312-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρώντας το σχήμα, διαπιστώνουμε ότι τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι κατ' εκτίμηση τα $A(1,1)$ και $B(4,2)$.

β) Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Οι τετμημένες των σημείων τομής τους προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης:

$$f(x) = g(x)$$

δηλαδή της:

$$|x-2| = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \qquad (1)$$

Για $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ είναι $|x-2| = x-2$ και η (1) γράφεται:

$$x - 2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x - 6 = x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - x = 6 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4 > 2 \ \ \text{δεκτή}.$$

Για $x = 4$ είναι $f(4) = |4-2| = 2$.

Άρα, το σημείο τομής είναι το $B(4,2)$.

Για $x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$ είναι $|x-2| = 2-x$ και η (1) γράφεται:

$$2 - x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 6 - 3x = x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3x - x = 2 - 6 \Leftrightarrow \Leftrightarrow -4x = -4 \Leftrightarrow x = 1 < 2 \ \ \text{δεκτή}.$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = |1-2| = |-1| = 1$.

Άρα, το σημείο τομής είναι το $A(1,1)$.

γ) Από το διάγραμμα που δίνεται διαπιστώνουμε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g αν και μόνο αν $x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$.

δ) Η παράσταση K ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς αν και μόνο αν:

$$3|2-x| - (x+2) \geq 0 \Leftrightarrow 3|2-x| \geq x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x-2| \geq \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq g(x).$$

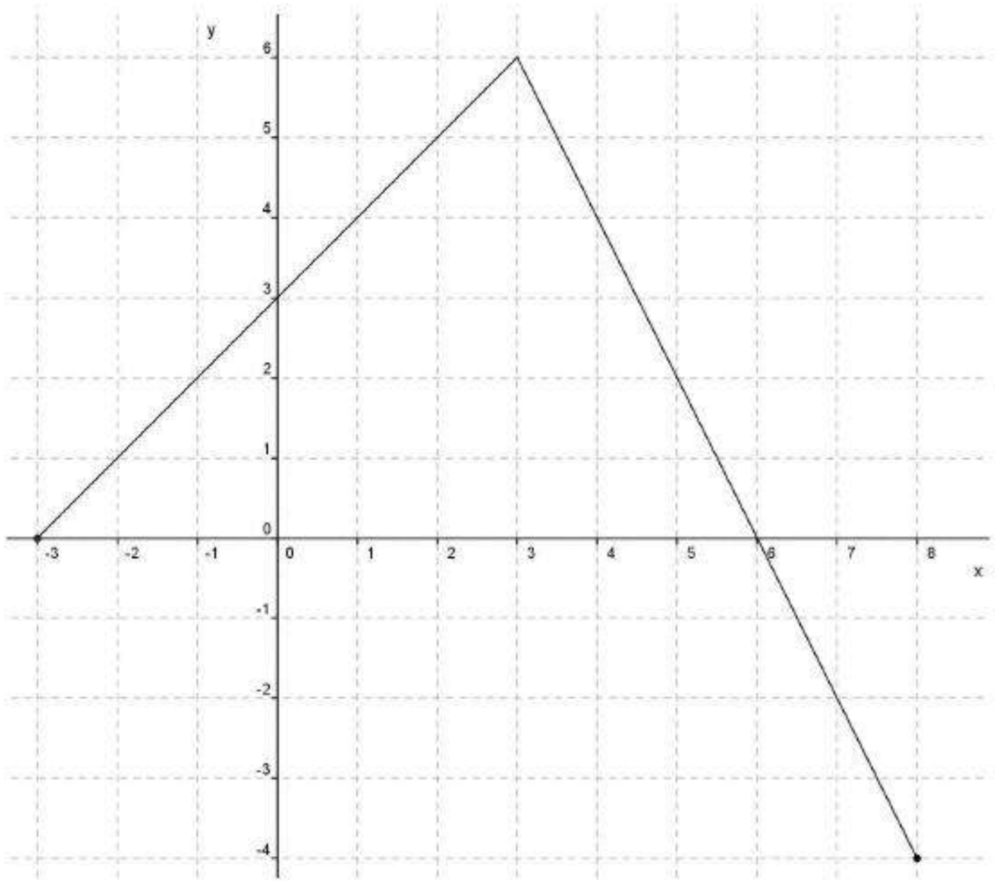
Επομένως αναζητούμε τα διαστήματα στα οποία $f(x) > g(x)$, δηλαδή αυτά στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της g, καθώς και τα σημεία στα οποία $f(x) = g(x)$, δηλαδή τις τετμημένες των σημείων τομής τους. Από τα ερωτήματα β) και γ) βρίσκουμε ότι:

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty).$$

35034

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες συντεταγμένων.

(Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

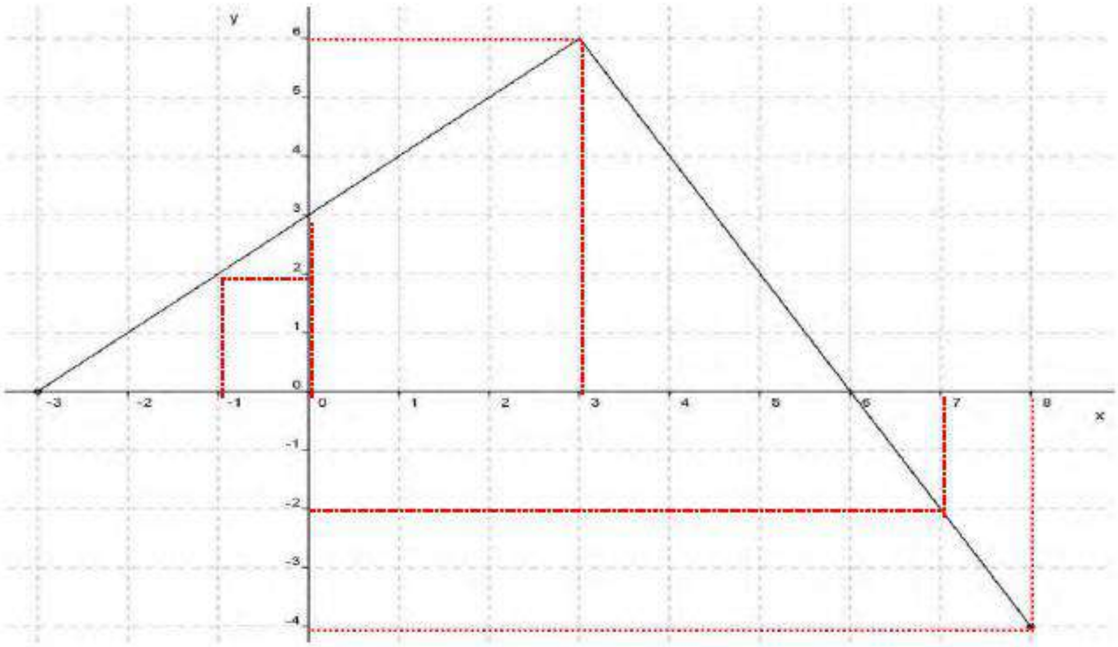
(Μονάδες 7)

35034-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Προβάλλουμε τη γραφική παράσταση της f στον άξονα $x'x$ και βρίσκουμε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το διάστημα $A = [-3,8]$.

β) Από τη γραφική παράσταση της f συμπληρώνουμε τον πίνακα που ακολουθεί:



x	-3	-1	0	3	7	8
y	0	2	3	6	-2	-4

γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία:

$$A(-3,0) \text{ και } B(6,0)$$

και τον άξονα $y'y$ στο σημείο:

$$\Gamma(0,3)$$

δ) Το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές, δηλαδή αυτό για το οποίο βρίσκεται "πάνω" από τον άξονα $x'x$, είναι το $(-3,6)$.

35385

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta$, $g(x) = x + \beta$, όπου $x \in R$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3\beta}{2}, -3 - \frac{\beta}{2}\right)$.

α) Να αποδείξτε ότι $\beta = -1$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\beta = -1$

(i) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

(Μονάδες 5)

(ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$.

(Μονάδες 7)

(iii) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} = 3$.

(Μονάδες 7)

35385-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες του σημείου M θα πρέπει να επαληθεύουν την εξίσωση $y = g(x)$, άρα θα ισχύει $g\left(\frac{3\beta}{2}\right) = -3 - \frac{\beta}{2}$ οπότε $\frac{3\beta}{2} + \beta = -3 - \frac{\beta}{2}$ άρα $\frac{3\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + \beta = -3$.

Ώστε $3\beta = -3$, έτσι $\beta = -1$.

β) Για $\beta = -1$

i) Είναι $f(x) = x^2 - 1$. Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$, έχουν τεταγμένη μηδέν, οπότε οι τετμημένες τους είναι λύσεις της εξίσωσης $y = f(x) = 0$, άρα $x^2 - 1 = 0$ οπότε $x^2 = 1$. Τελικά $x = 1,\ x = -1$.
Άρα τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι τα $A(1\,,0)$ και $B(-1\,,0)$.
Επίσης $f(0) = 0^2 - 1 = -1$, άρα το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα $y'y$ είναι το $\Gamma(0\,,-1)$.

ii) Θέλουμε να ισχύει $f(x) < g(x)$ δηλαδή $x^2 - 1 < x - 1$ άρα $x^2 - x < 0$ ή $x(x-1) < 0$. Είναι φανερό ότι το πολυώνυμο $x^2 - x = x(x-1)$ έχει ως ρίζες τους αριθμούς μηδέν και 1, αφού για αυτές τις τιμές μηδενίζεται. Δημιουργούμε τον πίνακα προσήμου, παρατηρώντας ότι ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha = 1 > 0$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$	$+$	$-$	$+$	

Διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι τιμές του x μεταξύ 0 και 1, δηλαδή $0 < x < 1$.

iii) Η εξίσωση γράφεται $\frac{x^2-1}{x-1} + \frac{x-1}{x^2-1} = 3$. Πρέπει $x - 1 \neq 0$ και $x^2 - 1 \neq 0$.

Έτσι, για $x \neq 1$ και $x \neq -1$, η εξίσωση γράφεται $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} + \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = 3$, άρα

$x + 1 + \frac{1}{x+1} = 3 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 1 = 3(x+1) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 1 = 3x + 3 \Leftrightarrow$

$x^2 - x - 1 = 0$, άρα $x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ώστε $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ή $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $\mathrm{M}\left(\alpha,\frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 12)

35413-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$$x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)\neq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1\neq 0 \ \kappa\alpha\iota\ x+1\neq 0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x\neq 1 \ \kappa\alpha\iota\ x\neq -1)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

β) Το σημείο $\mathrm{M}\left(\alpha,\frac{1}{8}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν:

$$f(\alpha)=\frac{1}{8}\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2-1}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2-1=8\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2-9=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-3)(\alpha+3)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-3=0 \ \acute{\eta}\ \alpha+3=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha=3 \ \acute{\eta}\ \alpha=-3)$$

36657

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2$ και $g(x)=\lambda x+(1-\lambda)$, $x\in\mathbb{R}$ και $\lambda\neq 0$, παράμετρος.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους C_f, C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f, C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

(Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda\neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε να ισχύει $(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2$.

(Μονάδες 9)

36657-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$. Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = \lambda x + 1 - \lambda \Leftrightarrow x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0\,,\ \ (1)$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4\cdot 1\cdot(\lambda - 1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \geq 0$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Επομένως η (1) έχει δυο πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ, οπότε οι C_f, C_g έχουν, για κάθε τιμή του λ, ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Η (1) έχει μια διπλή ρίζα, δηλαδή οι C_f, C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, αν και μόνο αν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Για λ=2, η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

η οποία έχει μοναδική λύση $x = 1$.

Τότε $f(1) = 1$, άρα το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων είναι το (1,1).

γ) Από τους τύπους Vieta έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$$

οπότε με $\lambda \neq 2$ είναι:

$$(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2 \Leftrightarrow \lambda^2 - |\lambda| + 2 = 0 \Leftrightarrow |\lambda|^2 - |\lambda| + 2 = 0$$

Θέτουμε $|\lambda| = \kappa,\ \kappa > 0$ και η εξίσωση γράφεται

$$\kappa^2 - \kappa - 2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 2 \text{ ή } \kappa = -1 \text{ (απορρίπτεται)}$$

Άρα, $|\lambda| = 2 \Leftrightarrow -\lambda = 2$ ή $\lambda = 2$, που απορρίπτεται, οπότε τελικά $\lambda = -2$.

36676

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x-\alpha+2$ και $g(x)=x^2-\alpha+3$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α .

(Μονάδες 7)

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$.

(Μονάδες 4)

ii) Για $\alpha=2$ υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ίδιο με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2-\alpha x+1=0$ και στη συνέχεια ότι για $\alpha=3$, $\alpha=-2$, $\alpha=1$ έχουν αντίστοιχα δύο, ένα, κανένα σημεία τομής.

(Μονάδες 10)

36676-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(1, 2) αν και μόνο αν $f(1)=2$.

Είναι $f(1)=\alpha\cdot 1-\alpha+2=2$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, οπότε πράγματι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α.

β) Αφού οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, ισχύει ότι: $f(1)=g(1)$.

i) Είναι

$$\begin{aligned}&f(1)=g(1)\Leftrightarrow\\&\alpha-\alpha+2=1^2-\alpha+3\Leftrightarrow\\&\alpha=2\end{aligned}$$

ii) Για $\alpha=2$ έχουμε $f(x)=2x-2+2=2x$ και $g(x)=x^2-2+3=x^2+1$

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=\mathbb{R}$ και η g το $\mathrm{B}=\mathbb{R}$. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.Είναι:

$$\begin{aligned}&f(x)=g(x)\Leftrightarrow\\&2x=x^2+1\Leftrightarrow\\&x^2-2x+1=0\Leftrightarrow\\&(x-1)^2=0\Leftrightarrow\\&x=1\end{aligned}$$

Επομένως δεν υπάρχει άλλο κοινό σημείο εκτός από αυτό με τετμημένη 1.

γ) Το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ίδιο με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$\begin{aligned}&f(x)=g(x)\Leftrightarrow\\&\alpha x-\alpha+2=x^2-\alpha+3\Leftrightarrow\\&x^2-\alpha x+1=0\end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι 2ου βαθμού και το πλήθος των ριζών της εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσάς της: $\Delta=(-\alpha)^2-4\cdot 1\cdot 1=\alpha^2-4$.

Για $\alpha=3$ είναι $\Delta=3^2-4=9-4=5>0$ οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες και επομένως οι γραφικές παραστάσεις έχουν δύο κοινά σημεία.

Για $\alpha=-2$ είναι $\Delta=(-2)^2-4=4-4=0$ οπότε η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα και επομένως οι γραφικές παραστάσεις έχουν ένα κοινό σημείο.

Για $\alpha=1$ είναι $\Delta=1^2-4=1-4=-3<0$ οπότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες και επομένως οι γραφικές παραστάσεις δεν έχουν κοινά σημεία.

36681

ΘΕΜΑ 4

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f, με

$$f(x) = (\lambda+1)x^2 - (\lambda+1)x + 2\,,\ x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(0,2)$.

(Μονάδες 3)

β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 4)

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\mathrm{B}(2,0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.

(Μονάδες 8)

δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

36681-Λύση

ΛΥΣΗ

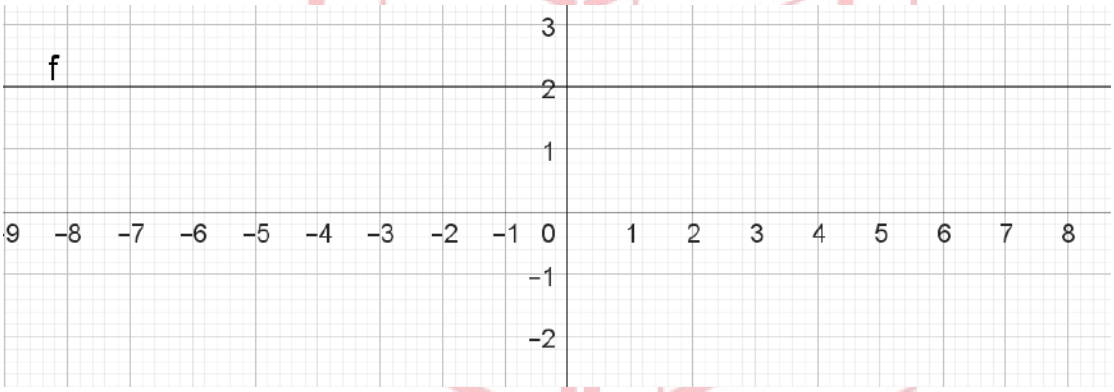
α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(0,2)$ για οποιαδήποτε τιμή του λ, αν και μόνο αν ισχύει ότι $f(0)=2$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Πράγματι είναι $f(0)=(\lambda+1)\cdot 0^2-(\lambda+1)\cdot 0+2=2$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Για $\lambda=-1$ ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x)=(-1+1)x^2-(-1+1)x+2=2$$

Επομένως η γραφική παράσταση της f είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(0,2)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\mathrm{B}(2,0)$ και επομένως ισχύει ότι $f(2)=0$. Είναι

$$\begin{aligned}
&f(2)=0\Leftrightarrow\\
&(\lambda+1)\cdot 2^2-(\lambda+1)\cdot 2+2=0\Leftrightarrow\\
&4\lambda+4-2\lambda-2+2=0\Leftrightarrow\\
&2\lambda=-4\Leftrightarrow\\
&\lambda=-2
\end{aligned}$$

Για $\lambda=-2$ έχουμε:

$$f(x)=(-2+1)x^2-(-2+1)x+2=-x^2+x+2$$

Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x)=0\Leftrightarrow -x^2+x+2=0$$

Το τριώνυμο $-x^2+x+2$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=1^2-4\cdot(-1)\cdot 2=1+8=9>0$$

και ρίζες τις:

36681-Λύση

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot(-1)}=\frac{-1\pm 3}{-2}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\dfrac{-1+3}{-2}=\dfrac{2}{-2}=-1 \\ x_2=\dfrac{-1-3}{-2}=\dfrac{-4}{-2}=2 \end{cases}$$

Επομένως η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ εκτός από το $\mathrm{B}(2,0)$ και στο σημείο $(-1,0)$.

δ) Για $\lambda=1$ ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x)=(1+1)x^2-(1+1)x+2=2x^2-2x+2=2(x^2-x+1)$$

Το τριώνυμο x^2-x+1 έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3<0$$

οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι ομόσημο του συντελεστή του x^2, δηλαδή του $\alpha=1>0$.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$x^2-x+1>0\Leftrightarrow 2(x^2-x+1)>0\Leftrightarrow f(x)>0$$

που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

36684

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=x^2-2x$ και $g(x)=3x-4$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 10)

36684-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=\mathbb{R}$ και η g το $\mathrm{B}=\mathbb{R}$.

Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g, είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$. Είναι

$$\begin{aligned}&f(x)=g(x)\Leftrightarrow\\&x^2-2x=3x-4\Leftrightarrow\\&x^2-5x+4=0\end{aligned}$$

Το τριώνυμο x^2-5x+4 έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot4=25-16=9>0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}=\frac{5\pm3}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{5+3}{2}=\dfrac{8}{2}=4\\ x_2=\dfrac{5-3}{2}=\dfrac{2}{2}=1\end{cases}$$

Για $x=4$ έχουμε: $g(4)=3\cdot4-4=12-4=8$.

Για $x=1$ έχουμε: $g(1)=3\cdot1-4=3-4=-1$.

Συνεπώς τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g, είναι τα $\mathrm{A}(4,8)$ και $\mathrm{B}(1,-1)$.

β) Τα διαστήματα για τα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g είναι εκείνα για τα οποία ισχύει: $f(x)<g(x)$. Είναι

$$\begin{aligned}&f(x)<g(x)\Leftrightarrow\\&x^2-2x<3x-4\Leftrightarrow\\&x^2-5x+4<0\end{aligned}$$

Το τριώνυμο x^2-5x+4 έχει και ρίζες τις $x_1=4$, $x_2=1$ και το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	1		4		$+\infty$
x^2-5x+4	+	0	-	0	+	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι $x^2-5x+4<0\Leftrightarrow x\in(1,4)$.

γ) Κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f, αν και μόνο αν ισχύει: $f(x)>\alpha$, για κάθε $\alpha<-1$. Είναι

36684-Λύση

$$f(x) > \alpha \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2x > \alpha \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2x - \alpha > 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - 2x - \alpha$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\alpha) = 4 + 4\alpha < 0 \text{, για κάθε } \alpha < -1$$

οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι ομόσημο του συντελεστή του x^2, δηλαδή του $\alpha = 1 > 0$.

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$x^2 - 2x - \alpha > 0 \Leftrightarrow f(x) > \alpha$$

που σημαίνει ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha$, $\alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.

36885

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 5)

β)

i. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=0$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

36885-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A=\mathbb{R}-\{2\}$.

β)

i. Έχουμε ισοδύναμα:

$f(x)=0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{x^2-1}{x-2}=0 \Leftrightarrow$

$x^2-1=0 \Leftrightarrow$

$x^2=1 \Leftrightarrow$

$x=-1$ ή $x=1$, οι οποίες είναι δεκτές.

Άρα για $x=-1$ και $x=1$, $f(x)=0$.

ii. Έχουμε:

$f(0)=\dfrac{0^2-1}{0-2}=\dfrac{1}{2}$ και

$f(3)=\dfrac{3^2-1}{3-2}=8$.

γ) Από το βi ερώτημα έχουμε $f(-1)=0$ και $f(1)=0$. Από το βii ερώτημα έχουμε $f(0)=\dfrac{1}{2}$.

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ άξονα στα σημεία $(-1,0)$ και $(1,0)$ και τον $y'y$ άξονα στο σημείο $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

36889

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-15$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-5)+f(0)+f(3)$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 15)

36889-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$f(-5)=(-5)^2+2\cdot(-5)-15=25-10-15=0$,

$f(0)=0^2+2\cdot 0-15=-15$,

$f(3)=3^2+2\cdot 3-15=9+6-15=0$.

Άρα $f(-5)+f(0)+f(3)=0-15+0=-15$.

β) Για $x=0$, έχουμε από το α) ερώτημα $f(0)=-15$. Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $y'y$ άξονα στο σημείο $(0,-15)$.

Από το α) ερώτημα παρατηρούμε ότι $f(-5)=0$ και $f(3)=0$. Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ άξονα στα σημεία $(-5,0)$ και $(3,0)$.

37190

ΘΕΜΑ 3

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A = x^3 - x^2 + 3x - 3$.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{3}{x}$ και $g(x) = x^2 - x + 3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1,3)$.

(Μονάδες 12)

37190-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$A = x^3 - x^2 + 3x - 3 =$$
$$x^2(x-1) + 3(x-1) =$$
$$(x-1)(x^2+3).$$

β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ και η συνάρτηση g το σύνολο $B = \mathbb{R}$.

Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}.$$

Έχουμε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{3}{x} = x^2 - x + 3 \Leftrightarrow$$
$$3 = x(x^2 - x + 3) \Leftrightarrow$$
$$3 = x^3 - x^2 + 3x \Leftrightarrow$$
$$x^3 - x^2 + 3x - 3 = 0 \overset{(a)}{\Leftrightarrow}$$
$$(x-1)(x^2+3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x - 1 = 0 \text{ ή } x^2 + 3 = 0 \text{ αδύνατη} \Leftrightarrow$$
$$x = 1.$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 3$.

Άρα το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g είναι το $A(1,3)$.

37206

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+3x+2$ και $g(x)=x+1$, $x\in R$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x+a$. Να δείξετε ότι:

i. Αν $a>1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii. Αν $a<1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 15)

37206-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των σημείων τομής των $C_f\,,C_g$ αποτελούν λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$. Τότε:

$$\begin{aligned}&f(x)=g(x)\Leftrightarrow\\&x^2+3x+2=x+1\Leftrightarrow\\&x^2+2x+1=0\Leftrightarrow\\&(x+1)^2=0\Leftrightarrow\\&x+1=0\Leftrightarrow\\&x=-1\end{aligned}$$

Άρα οι $C_f\,,C_g$ έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, το $A(-1,g(-1))$ δηλαδή το $A(-1,0)$. (η ευθεία εφάπτεται της παραβολής).

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των $C_f\,,C_h$ είναι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=h(x)$. Δηλαδή:

$$\begin{aligned}&f(x)=h(x)\Leftrightarrow\\&x^2+3x+2=x+a\\&x^2+2x+(2-a)=0\,,\ a\in R\ (1)\end{aligned}$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(2-\alpha)=4-8+4\alpha=4\alpha-4=4(\alpha-1)$$

i. Αν $a>1$ τότε $\Delta>0$ και η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες το οποίο σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των $f\,,h$ έχουν δύο κοινά σημεία.

ii. Αν $a<1$ τότε $\Delta<0$ και η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες το οποίο σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των $f\,,h$ δεν έχουν κοινά σημεία.