12765

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\mathrm{x} - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης f για όποιους από τους αριθμούς $-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 6$, είναι αυτό δυνατό.

(Μονάδες 12)

12765-Λύση

Λύση

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x, για τους οποίους ισχύει:

$$x - 2 \geq 0.$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A = [2, +\infty)$.

β) Από τους αριθμούς : $-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 6$, ισχύει ότι $6 \in A$, οπότε είναι δυνατό να

υπολογιστεί η τιμή της συνάρτησης

$f(6) = \sqrt{6-2} = \sqrt{4} = 2$.

Όμως, -1 < 2, άρα -1 δεν ανήκει στο A.

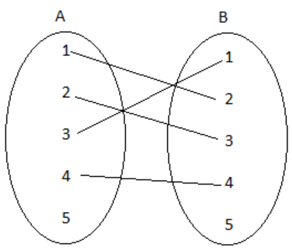
Ακόμα $\frac{\sqrt{2}}{2} < 2$, διότι ισοδύναμα $\sqrt{2} < 4$.

Συνεπώς για τους αριθμούς -1 και $\frac{\sqrt{2}}{2}$ η συνάρτηση f δεν ορίζεται.

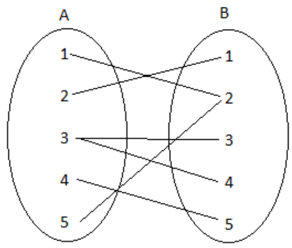
12908

ΘΕΜΑ 2

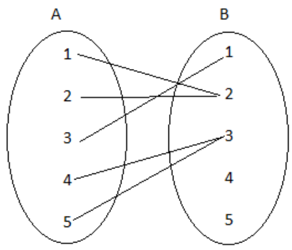
Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το A στο B ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B.

(Μονάδες 9)

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f,

i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 4)

ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών f(A) της συνάρτησης f.

(Μονάδες 4)

iii. Να βρείτε τις τιμές f(1) και f(2).

(Μονάδες 8)

12908-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η αντιστοίχιση του Σχήματος 1 δεν παριστάνει συνάρτηση από το Α στο Β διότι το 5 του συνόλου Α δεν αντιστοιχίζεται σε κάποιο στοιχείο του Β.

Η αντιστοίχιση του Σχήματος 2 δεν παριστάνει συνάρτηση από το Α στο Β διότι το 3 του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του συνόλου Β.

Η αντιστοίχιση του Σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το Α στο Β διότι κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

β)

i. Το πεδίο ορισμού είναι το $\mathrm{A}=\{1,2,3,4,5\}$.

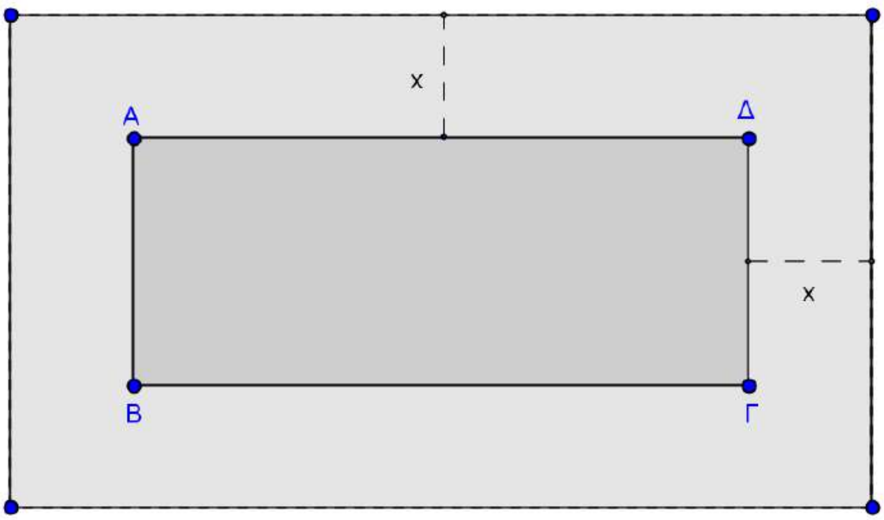
ii. Το σύνολο τιμών είναι το $f(\mathrm{A})=\{1,2,3\}$.

iii. Είναι $f(1)=f(2)=2$.

12911

ΘΕΜΑ 4

Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις *15m* και *25m*. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m *(x > 0),* όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση: $E(x)=4x^2+80x\,, x>0$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E=500\,m^2$.

(Μονάδες 7)

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από $500\,m^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

12911-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι: $E_1 = 15 \cdot 25 = 375\ m^2$. Το εξωτερικό ορθογώνιο έχει διαστάσεις $15+2x$, $25+2x$ και εμβαδόν:

$E_2(x) = (15 + 2x)(25 + 2x) = 375 + 30x + 50x + 4x^2 = 4x^2 + 80x + 375$.

Το εμβαδόν της ζώνης είναι: $E(x) = E_2(x) - E_1 = 4x^2 + 80x + 375 - 375 = 4x^2 + 80x$, $x > 0$

β) Ισχύει ότι:

$E(x) = 500$, δηλαδή $4x^2 + 80x = 500$, οπότε $4x^2 + 80x - 500 = 0$ και διαιρώντας όλους τους όρους με 4 προκύπτει τελικά η εξίσωση $x^2 + 20x - 125 = 0$.

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 20^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-125) = 400 + 500 = 900 > 0$

και ρίζες τις: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-20 \pm \sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{-20 \pm 30}{2} = \begin{cases} \frac{-20+30}{2} = 5 \\ \frac{-20-30}{2} = -25 \end{cases}$

Επειδή $x > 0$ είναι $x = 5m$.

γ) Είναι: $E(x) < 500$, δηλαδή $4x^2 + 80x < 500$, οπότε $4x^2 + 80x - 500 < 0$ και διαιρώντας όλους τους όρους με 4 προκύπτει τελικά η ανίσωση $x^2 + 20x - 125 < 0$ (1).

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 20x - 125$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-25		5		$+\infty$
$x^2+20x-125$		+	0	-	0	+	

Από τον πίνακα προσήμου συμπεραίνουμε ότι η ανίσωση (1) αληθεύει για τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $-25 < x < 5$. Όμως $x > 0$, οπότε τελικά $x \in (0,5)$.

Εναλλακτικά, για να έχει η ζώνη εμβαδόν μικρότερο από $500m^2$ (δεδομένου ότι δεν αλλάζει το εμβαδόν του κολυμβητηρίου), αρκεί να έχει πλάτος $x < 5$, διότι έτσι το εξωτερικό ορθογώνιο θα έχει μικρότερο μήκος και ίδιο πλάτος, άρα μικρότερο εμβαδόν. Οπότε, για κάθε $0 < x < 5$, ισχύει $E(x) < 500m^2$.

12997

ΘΕΜΑ 2

Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α΄ λυκείου ενός Γενικού Λυκείου.

Σχηματίζουμε τα σύνολα Α, με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της Α΄ τάξης ενός Γενικού Λυκείου και Β με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της Α΄ τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου.

Ορίζουμε την αντιστοίχιση $f: A \to B$ σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την $g: B \to A$ με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.

α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f: A \to B$ ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο Α στο σύνολο Β.

(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση $g: B \to A$ αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο Β στο σύνολο Α και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή.

(Μονάδες 15)

12997-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ δεν αποτελεί πάντα συνάρτηση από το σύνολο Α στο Β, καθώς μπορεί να υπάρχουν μαθητές με το ίδιο όνομα και διαφορετικό επώνυμο. Δηλαδή να αντιστοιχίζεται ένα στοιχείο του συνόλου Α σε περισσότερα από ένα στοιχεία του συνόλου Β.

β) Η αντιστοίχιση από το σύνολο Β στο σύνολο Α θα αποτελεί συνάρτηση, αν κάθε επώνυμο στο σύνολο Β αντιστοιχίζεται σε μοναδικό όνομα στο σύνολο Α, δηλαδή δεν υπάρχουν μαθητές με ίδιο επώνυμο. Σε αυτήν την περίπτωση η ανεξάρτητη μεταβλητή θα είναι το επώνυμο του μαθητή και η εξαρτημένη μεταβλητή θα είναι το όνομά του.

13026

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \alpha\nu \quad x \quad ά\rho\rho\eta\tau o\varsigma \\ 2x, & \alpha\nu \quad x \quad \rho\eta\tau ό\varsigma \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$

(Μονάδες 10)

β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $[f(x)]^2 = 4x - 1$.

(Μονάδες 15)

13026-Λύση

ΛΥΣΗ

α) $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$

β) Αν x ρητός, τότε $f(x) = 2x$, οπότε η δοθείσα εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$(2x)^2 = 4x - 1$, δηλαδή $4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0$. Έτσι, $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

13031

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση G, με $G(x)=\frac{2x+3}{x-4}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης G για $x=2,\quad x=0,\quad x=-\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G, στο 3.

(Μονάδες 9)

13031-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $G(2)=\dfrac{2\cdot 2+3}{2-4}=\dfrac{4+3}{-2}=-\dfrac{7}{2}$,

$$G(0)=\frac{2\cdot 0+3}{0-4}=-\frac{3}{4},$$

$$G(-\frac{1}{2})=\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3}{-\frac{1}{2}-4}=\frac{-1+3}{-\frac{9}{2}}=\frac{2}{-\frac{9}{2}}=-\frac{4}{9}.$$

β) Η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x=4$, διότι η τιμή αυτή του x μηδενίζει τον παρονομαστή του κλάσματος στον τύπο της συνάρτησης.

γ) Αναζητούμε την τιμή του $x\neq 4$ για την οποία:

$$G(x)=3 \Leftrightarrow$$
$$\frac{2x+3}{x-4}=3 \Leftrightarrow$$
$$2x+3=3(x-4) \Leftrightarrow$$
$$2x+3=3x-12 \Leftrightarrow$$
$$x=15.$$

13032

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=1-3x$ και $g(x)=\sqrt{x+5}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $f(-1)=g(11)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε $f(x)=g(4)$.

(Μονάδες 9)

13032-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A_f = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση g ορίζεται όταν $x+5 \geq 0$, δηλαδή όταν $x \geq -5$. Οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $A_g = [-5, +\infty)$.

β) $f(-1) = 1-3\cdot(-1) = 1+3 = 4$ και $g(11) = \sqrt{11+5} = \sqrt{16} = 4$.

Άρα $f(-1) = g(11)$.

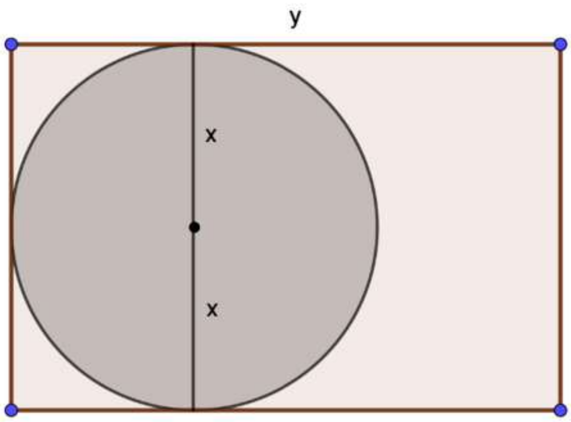
γ) Αναζητούμε την τιμή του x για την οποία:

$$f(x) = g(4) \quad \Leftrightarrow$$
$$1-3x = \sqrt{4+5} \quad \Leftrightarrow$$
$$1-3x = 3 \quad \Leftrightarrow$$
$$x = -\frac{2}{3}$$

14122

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο με μήκος y cm και περίμετρο 10 cm. Μέσα σε αυτό δίνεται κύκλος με ακτίνα x cm, ο οποίος εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ορθογωνίου.



α)

i. Να αποδείξετε ότι η σχέση που εκφράζει το μήκος y (σε cm) του ορθογωνίου ως συνάρτηση της ακτίνας x του κύκλου είναι:

$$y = 5 - 2x\,,\ x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου (σε cm^2) δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{E}_{\text{ορθ}} = 10x - 4x^2\,,\ x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το μέρος του εμβαδού του ορθογωνίου (σε cm^2) που βρίσκεται έξω από τον κύκλο δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{E} = 10x - (\pi + 4)x^2\,,\ x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

(Μονάδες 6)

γ) Αν το εμβαδό E του ορθογωνίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο είναι ίσο με $(6-\pi)$cm^2 και ο x είναι ένας ρητός αριθμός, τότε να βρείτε:

i. την ακτίνα x του κύκλου.

(Μονάδες 6)

ii. τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

(Μονάδες 3)

14122-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Αφού η περίμετρος του ορθογωνίου είναι ίση με 10cm, θα ισχύει:

$$2y+2\cdot(2x)=10 \Leftrightarrow 2y+4x=10 \Leftrightarrow y+2x=5 \Leftrightarrow$$

$$y=5-2x.$$

Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι θετικοί αριθμοί, οπότε:

$$\begin{cases} 2x>0 \\ \text{και} \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \text{και} \\ 5-2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \text{και} \\ x<\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Τελικά: $x\in\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$.

ii. Το εμβαδόν (σε cm^2) του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{E}_{\text{ορθ}}=y\cdot 2x=(5-2x)\cdot 2x=10x-4x^2,\ x\in\left(0,\frac{5}{2}\right).$$

β) Το μέρος του εμβαδού (σε cm^2) του ορθογωνίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο είναι:

$$\mathrm{E}=\mathrm{E}_{\text{ορθ}}-\mathrm{E}_{\text{κύκλου}}\overset{\alpha ii)}{=}\left(10x-4x^2\right)-\pi\cdot x^2=10x-(4+\pi)x^2,\ x\in\left(0,\frac{5}{2}\right).$$

γ)

i. Το εμβαδό E του ορθογωνίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο πρέπει να είναι ίσο με $(6-\pi)$cm^2, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}=6-\pi \Leftrightarrow \\ &10x-(4+\pi)x^2=6-\pi \Leftrightarrow \\ &(4+\pi)x^2-10x+(6-\pi)=0 \qquad (1). \end{aligned}$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$\Delta=100-4\cdot(4+\pi)\cdot(6-\pi)=4-8\pi+4\pi^2=4\left(1-2\pi+\pi^2\right)=4(1-\pi)^2>0$, οπότε η εξίσωση (1) έχει δυο λύσεις άνισες τις:

$x=\dfrac{10+2(1-\pi)}{2\cdot(4+\pi)}=\dfrac{12-2\pi}{2\cdot(4+\pi)}=\dfrac{2\cdot(6-\pi)}{2\cdot(4+\pi)}=\dfrac{6-\pi}{4+\pi}$, που απορρίπτεται γιατί ο x είναι ρητός.

14122-Λύση

και $x=\dfrac{10-2\left(1-\pi\right)}{2\cdot\left(4+\pi\right)}=\dfrac{8+2\pi}{8+2\pi}=1$

Τελικά η ακτίνα του κύκλου είναι $x=1\text{cm}$.

ii. Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $2x=2\text{cm}$ και $y=5-2\cdot 1=3\text{cm}$.

14562

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}$.

α)

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

ii. Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία $y=1$ έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$.

(Μονάδες 10)

14562-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Η συνάρτηση ορίζεται για τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ (1).

Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει $\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = 2$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$

Οι ρίζες του είναι $x_1 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = 1$ και $x_2 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = 2$.

Άρα η (1) ισχύει για $x \neq 1$ και $x \neq 2$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι: $\mathrm{A} = \mathbb{R} - \{1, 2\}$.

ii. Είναι $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{x}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$.

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων, αν αυτά υπάρχουν, θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$|f(x)| = 1$, δηλαδή

$\left|\dfrac{x}{x-2}\right| = 1$, οπότε

$\dfrac{x}{x-2} = 1$ ή $\dfrac{x}{x-2} = -1$, δηλαδή

$x = x - 2$ ή $x = -(x-2)$ και τελικά

$0x = -2$, που είναι αδύνατη ή $x = 1$ που δεν είναι δεκτή λύση.

Συνεπώς η ευθεία $y = 1$ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$.

14629

ΘΕΜΑ 4

Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων Σ-Λ (Σωστό - Λάθος) σε κάποιο Πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται με $-\frac{1}{3}$ της μονάδας (για κάθε τριάδα λανθασμένων απαντήσεων αφαιρείται μια μονάδα).

α) Να αποδείξετε ότι αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, τότε η βαθμολογία του $E(x)$ δίνεται από τον τύπο $E(x)=\frac{4}{3}(x-25)$.

(Μονάδες 7)

β) Ένας φοιτητής βαθμολογήθηκε με 88. Πόσες ήταν οι σωστές και πόσες οι λανθασμένες απαντήσεις που έδωσε;

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50. Πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής για να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση που είναι 50;

(Μονάδες 8)

δ) Το άθροισμα των επιδόσεων δυο φοιτητών ήταν 140. Πόσες ήταν οι λανθασμένες απαντήσεις και των δυο μαζί;

(Μονάδες 6)

14629-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αν το πλήθος των σωστών απαντήσεων είναι x, τότε το πλήθος των λανθασμένων απαντήσεων είναι $100-x$. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, ο φοιτητής θα πάρει x βαθμούς για τις σωστές απαντήσεις και θα του αφαιρεθούν (αρνητική βαθμολογία) $\frac{1}{3}(100-x)$ βαθμοί για τις λανθασμένες απαντήσεις. Έτσι, η τελική βαθμολογία του θα είναι

$$E(x)=x-\frac{1}{3}(100-x)=\frac{3x-(100-x)}{3}=\frac{4x-100}{3}=\frac{4}{3}(x-25)$$

όπου x είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων.

β) Είναι:

$$E(x)=88\Leftrightarrow\frac{4}{3}(x-25)=88\Leftrightarrow\frac{x-25}{3}=22\Leftrightarrow x-25=66\Leftrightarrow x=91$$

Άρα ο φοιτητής που βαθμολογήθηκε με 88, απάντησε σωστά σε 91 ερωτήσεις και λανθασμένα σε 9 ερωτήσεις.

γ) Έστω ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή που απάντησε σωστά σε x ερωτήσεις είναι ίση με 50. Τότε έχουμε:

$$E(x)=50\Leftrightarrow\frac{4}{3}(x-25)=50\Leftrightarrow 4x-100=150\Leftrightarrow 4x=250\Leftrightarrow x=\frac{125}{2}$$

που είναι άτοπο, αφού ο αριθμός x που παριστάνει το πλήθος των σωστών απαντήσεων, είναι ακέραιος. Επομένως η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50.

Ένας φοιτητής θα πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση, μόνο όταν $E(x)>50$. Είναι:

$$E(x)>50\Leftrightarrow\frac{4}{3}(x-25)>50\Leftrightarrow 4x-100>150\Leftrightarrow 4x>250\Leftrightarrow x>\frac{125}{2}=62,5$$

Επομένως η βαθμολογία ενός φοιτητή είναι μεγαλύτερη του 50 μόνο όταν απαντήσει σωστά σε 63 τουλάχιστον ερωτήσεις.

δ) Έστω ότι το πλήθος των σωστών απαντήσεων των φοιτητών είναι x_1, x_2 αντίστοιχα. Τότε έχουμε:

$$E(x_1)+E(x_2)=140\Leftrightarrow\frac{4}{3}(x_1-25)+\frac{4}{3}(x_1-25)=140\Leftrightarrow 4x_1-100+4x_2-100=420$$

$$\Leftrightarrow 4(x_1+x_2)=620\Leftrightarrow x_1+x_2=155$$

Επομένως οι δυο φοιτητές απάντησαν σωστά σε 155 από τις 200 ερωτήσεις τους και λανθασμένα στις υπόλοιπες $200-155=45$ ερωτήσεις.

14655

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90°$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x και y τέτοια, ώστε x+y=10.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E}(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}(10\mathrm{x} - \mathrm{x}^2)$ με $\mathrm{x} \in (0,10)$.

(Μονάδες 8)

β) i. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{E}(\mathrm{x}) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $\mathrm{x} \in (0,10)$.

(Μονάδες 7)

ii. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$;

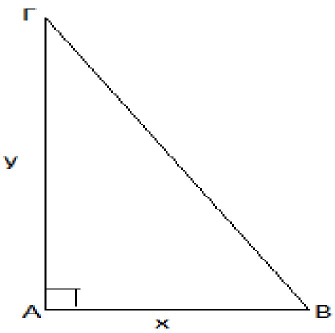
(Μονάδες 6)

γ) Αν x=5, ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το είδος του τρίγωνου ως προς τις πλευρές του;

(Μονάδες 4)

14655-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Επειδή x και y είναι μήκη πλευρών έχουμε $x > 0$ και $y > 0$ με x+y=10$\Leftrightarrow y = 10 - x$.

Από τον τύπο του εμβαδού τριγώνου έχουμε:

$$E(x) = \frac{1}{2}x \cdot y = \frac{1}{2}x \cdot (10 - x) = \frac{1}{2}(10x - x^2) \quad \text{με} \quad x \in (0,10)\ .$$

β) i. Αρκεί να αποδείξουμε την σχέση $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0,10)$, αρκεί:

$\frac{1}{2}(10x - x^2) \leq \frac{25}{2}$, αρκεί $10x - x^2 \leq 25$ ή $x^2 - 10x + 25 \geq 0$ ή $(x-5)^2 \geq 0$ ισχύει για $x \in (0,10)$.

ii. Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$ για x=5 γιατί

$$E(x) = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(10x - x^2) = \frac{25}{2} \Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

γ) Όταν x=5 τότε y=5, άρα το τρίγωνο ορθογώνιο ισοσκελές.

14681

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ 2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(3)$ και $f(-3)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) = 8$.

(Μονάδες 13)

14681-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $3 > 0$, είναι: $f(3) = 2 \cdot 3 + 2 = 8$.

Αφού $-3 < 0$, είναι $f(-3) = (-3)^2 - 1 = 8$.

β) Για $x < 0$ είναι $f(x) = x^2 - 1$.

Άρα $f(x) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$. Δεκτή τιμή $x = -3 < 0$.

Για $x > 0$ είναι $f(x) = 2x + 2$.

Άρα $f(x) = 8 \Leftrightarrow 2x + 2 = 8 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$. Δεκτή τιμή αφού $x = 3 > 0$.

Επομένως η $f(x) = 8$ ισχύει για $x = -3$ και $x = 3$.

14702

ΘΕΜΑ 4

Για τις ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογώνιου ΑΒΓΔ, με διαστάσεις x και $2\mathrm{x}-1$, όπου $x > \frac{1}{2}$.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν Ε της μακέτας σε συνάρτηση του x.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περίφραξη του πάρκου στη μακέτα, να μη ξεπερνά τα 8 μέτρα.

(Μονάδες 7)

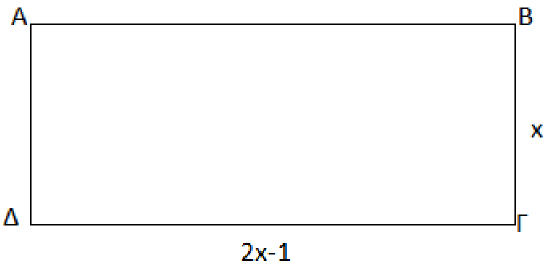
γ) Να βρείτε τις τιμές του x, ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο.

(Μονάδες 10)

14702-Λύση

ΛΥΣΗ

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η μακέτα του πάρκου



α) Για τη περίμετρο της μακέτας έχουμε:

$$\Pi(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x} + 2(2\mathrm{x}-1) = 6\mathrm{x}-2 \quad , \text{ με } x > \frac{1}{2}$$

Και για το εμβαδόν της:

$$\mathrm{E}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}(2\mathrm{x}-1) = 2\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} \text{ με } x > \frac{1}{2}.$$

β) Στη περίφραξη του πάρκου εμπλέκεται η περίμετρος που δίνεται από τον τύπο

$\Pi(\mathrm{x}) = 6\mathrm{x} - 2$. Αρκεί $\Pi(\mathrm{x}) \leq 8$ ή $6\mathrm{x} - 2 \leq 8 \Leftrightarrow 6x \leq 10 \Leftrightarrow \mathrm{x} \leq \frac{5}{3}$.

και για το 2x-1 προκύπτει $2 \cdot \mathrm{x} \leq 2 \cdot \frac{5}{3} \Leftrightarrow -1 < 2\mathrm{x} - 1 \leq \frac{10}{3} - 1 \Leftrightarrow 2\mathrm{x} - 1 \leq \frac{7}{3}$.

Επειδή οι διαστάσεις παίρνουν μόνο θετικές τιμές με $x > \frac{1}{2}$, οι τιμές τους κυμαίνονται :

$$\frac{1}{2} < \mathrm{x} \leq \frac{5}{3} \quad \text{και} \quad 0 < 2\mathrm{x} - 1 \leq \frac{7}{3}.$$

γ) Το εμβαδόν της μακέτας δίνεται από το τύπο $\mathrm{E}(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}$.

Αρκεί $\mathrm{E}(\mathrm{x}) \leq 1$ ή $2\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} \leq 1$ τότε $2\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} - 1 \leq 0$ (1).

Παρατηρούμε πως το τριώνυμο της ανίσωσης (1) μηδενίζεται για $\mathrm{x}_1 = 1$ και $\mathrm{x}_2 = -\frac{1}{2}$ και επειδή το α=2 >0 προκύπτει:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 - x - 1$		+	0	-	0	+	

Σύμφωνα με τον πίνακα πρόσημών το τριώνυμο θα είναι ετερόσημο του α, δηλαδή αρνητικό για $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{x} \leq 1$.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης (1) είναι $\mathrm{x} \in [-\frac{1}{2}, 1]$.

Επειδή $x > \frac{1}{2}$ τότε $\mathrm{x} \epsilon (\frac{1}{2}, 1]$.

14728

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$.

(Μονάδες 12)

β) Για $x \geq 0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 2$.

(Μονάδες 13)

14728-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $-1<0$, άρα: $f(-1)=2\cdot(-1)-1=-2-1=-3$.

Είναι: $1>0$, άρα: $f(1)=1^2+1=2$.

β) Αφού $x\geq 0$ τότε: $f(x)\geq 2 \Leftrightarrow x^2+1\geq 2 \Leftrightarrow x^2\geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}\geq 1 \Leftrightarrow |x|\geq 1$.

Επομένως: $x\leq -1$ ή $x\geq 1$ και $x\geq 0$.

Άρα $x\geq 1$.

14781

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \to y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$ και 3.

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \to y$ είναι συνάρτηση.

ii. Είναι η αντιστοίχιση $y \to x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x \to y$.

(Μονάδες 12)

14781-Λύση

ΛΥΣΗ

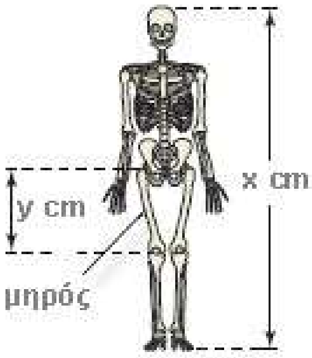
α) Η αντιστοίχιση $x \to y$ είναι συνάρτηση γιατί κάθε τιμή του x αντιστοιχεί σε μια μόνο τιμή του y. Η αντιστοίχιση $y \to x$ δεν είναι συνάρτηση, γιατί $0 \to -2$ και $0 \to 3$, δηλαδή μια τιμή του y αντιστοιχεί σε δυο τιμές του x.

β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathrm{A} = \left\{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 3\right\}$ και το σύνολο τιμών το $\mathrm{B} = \left\{-6, -4, 0, -\frac{25}{4}\right\}$.

32753

ΘΕΜΑ 4

Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :



Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$

Άνδρας: $y = 0,45x - 31$

α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $38,5$ cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.

(Μονάδες 8)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $42,8$ cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

(Μονάδες 9)

32753-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) μιας γυναίκας είναι: $y = 0,43x - 26$. Άρα για $y = 38,5$ έχουμε ισοδύναμα:

$38,5 = 0,43x - 26$, δηλαδή

$64,5 = 0,43x$, οπότε

$x = 150$.

Επομένως το ύψος της γυναίκας είναι 150 cm.

β) Για να προέρχονται από τον ίδιο άνδρα το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού, πρέπει το μηριαίο οστό μήκους $y = 42,8$ cm να ανήκει στον άνδρα ύψους περίπου $x = 164$ cm, που ισχύει αφού: $0,45 \cdot 164 - 31 = 73,8 - 31 = 42,8$.

γ) Θα εξετάσουμε αν υπάρχει τιμή της μεταβλητής x, ώστε: $0,43x - 26 = 0,45x - 31$. Έχουμε ισοδύναμα:

$0,43x - 26 = 0,45x - 31$, οπότε

$5 = 0,02x$, δηλαδή

$x = 250$

Πρέπει δηλαδή ο άνδρας και η γυναίκα να έχουν ύψος $250cm$, που είναι φυσικώς αδύνατο. Συνεπώς δεν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

34184

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{Α} = 90°$) με κάθετες πλευρές $ΑΒ = x$ και $ΑΓ = y$, έτσι ώστε $x + y = 10$.

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν $Ε$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Ε(x)$.

(Μονάδες 9)

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι $Ε(x) = \frac{1}{2}\left(-x^2 + 10x\right)$, να δείξετε ότι $Ε\left(x\right) \le \frac{25}{2}$, για κάθε $x \in \left(0,10\right)$.

(Μονάδες9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $x \in \left(0,10\right)$ ώστε το εμβαδόν $Ε(x)$ να γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$. Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $ΑΒΓ$;

(Μονάδες 7)

34184-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι $x+y=10 \Leftrightarrow y=10-x$. Εφόσον x και y είναι πλευρές τριγώνου, πρέπει:

$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 10-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<10 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<10$, δηλαδή $x \in (0,10)$.

Οπότε το εμβαδόν του $\mathrm{AB\Gamma}$ τριγώνου είναι:

$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{A\Gamma}$, δηλαδή

$\mathrm{E}(x)=\frac{1}{2}x(10-x)=\frac{1}{2}(-x^2+10x)$, με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,10)$.

β) Έχουμε:

$\mathrm{E}(x)\le \frac{25}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}(-x^2+10x)\le \frac{25}{2} \Leftrightarrow$,

$-x^2+10x-25\le 0 \Leftrightarrow$

$x^2-10x+25\ge 0 \Leftrightarrow$

$(x-5)^2\ge 0$, που ισχύει για κάθε $x \in (0,10)$.

γ) Το εμβαδόν $\mathrm{E}(x)$ γίνεται μέγιστο αν και μόνο αν:

$\mathrm{E}(x)=\frac{25}{2} \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow}$

$(x-5)^2=0 \Leftrightarrow$

$x=5.$

Για $x=5$, είναι και $y=10-x=10-5=5$, οπότε $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}=5$ και το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

34317

ΘΕΜΑ 4

Το ποσό που θα πληρώσει (σε ευρώ) ένας κάτοικος μιας πόλης A ο οποίος καταναλώνει x κυβικά μέτρα νερού σε ένα χρόνο, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}0,5x+12, & \text{αν } 0\le x\le 30\\ 0,7x+6, & \text{αν } x>30\end{cases}.$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει κάποιος αν:

i. έλλειπε από το σπίτι του και δεν έχει καταναλώσει καθόλου νερό,

(Μονάδες 2)

ii. έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού,

(Μονάδες 3)

iii. έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 5)

β) Σε μια άλλη πόλη B, το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:

$$g(x)=12+0{,}6x, \text{ για } x\ge 0.$$

Ένας κάτοικος της πόλης A και ένας κάτοικος της πόλης B κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά μέτρα νερού. Αν ο κάτοικος της πόλης A πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης B, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 15)

34317-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Αν κάποιος λείπει από το σπίτι του έχει καταναλώσει $x = 0$ κυβικά μέτρα νερού. Επειδή $0 \in [0{,}30]$ θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $f(x) = 12 + 0{,}5x$, οπότε το ποσό που θα πληρώσει είναι

$$f(0) = 12 + 0{,}5 \cdot 0 = 12 \text{ ευρώ.}$$

ii. Επειδή $10 \in [0{,}30]$ θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $f(x) = 12 + 0{,}5x$, οπότε το ποσό που θα πληρώσει είναι

$$f(10) = 12 + 0{,}5 \cdot 10 = 12 + 5 = 17 \text{ ευρώ.}$$

iii. Επειδή $50 \in (30, +\infty)$ θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $f(x) = 0{,}7x + 6$, οπότε το ποσό που θα πληρώσει είναι

$$f(50) = 0{,}7 \cdot 50 + 6 = 35 + 6 = 41 \text{ ευρώ.}$$

β) Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Ο κάτοικος της πόλης A κατανάλωσε x κυβικά μέτρα νερού με $x \in [0{,}30]$. Επειδή ο κάτοικος της πόλης A πλήρωσε μεγαλύτερο λογαριασμό, θα ισχύει:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow 12 + 0{,}5x > 12 + 0{,}6x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12 - 12 > 0{,}6x - 0{,}5x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 > 0{,}1x \Leftrightarrow x < 0,$$

  Άτοπο διότι $x \in [0{,}30]$.

  Επομένως ο κάτοικος της πόλης A δεν μπορεί να κατανάλωσε από 0 έως 30 κυβικά μέτρα νερού.

- Ο κάτοικος της πόλης A κατανάλωσε x κυβικά μέτρα νερού, με $x \in (30, +\infty)$, Επειδή ο κάτοικος της πόλης A πλήρωσε μεγαλύτερο λογαριασμό, θα ισχύει:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow 0{,}7x + 6 > 12 + 0{,}6x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}7x - 0{,}6x > 12 - 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}1x > 60 \Leftrightarrow x > 60.$$

  Επομένως, τόσο ο κάτοικος της πόλης A όσο και αυτός της πόλης B κατανάλωσαν περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

34446

ΘΕΜΑ 2

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μία πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση:

$$y = 35 + 0,8x$$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

(Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

(Μονάδες 13)

34446-Λύση

ΘΕΜΑ 2

α) Για να βρούμε την απόσταση του αυτοκινήτου μετά από 25 λεπτά θέτουμε στη δοθείσα σχέση $x=25$ και βρίσκουμε:

$$y=35+0{,}8\cdot 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=35+20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=55 \quad \text{χιλιόμετρα}$$

β) Για να βρούμε τα λεπτά που θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α θέτουμε στη δοθείσα σχέση $y=75$ και βρίσκουμε:

$$75=35+0{,}8x \Leftrightarrow 40=0{,}8x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=50 \quad \text{λεπτά}$$

35298

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} 2x+4, x<0 \\ x-1, x\geq 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι $f(-1)=f(3)$.

(Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε: $f(x)=0$

(Μονάδες 12)

35298-Λύση

Λύση

α) Είναι:

$$f(-1)=2\cdot(-1)+4=-2+4=2 \text{ και}$$

$$f(3)=3-1=2$$

Άρα $f(-1)=f(3)$.

β) Για $x<0$ είναι:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 2x+4=0 \Leftrightarrow 2x=-4 \Leftrightarrow x=-2$$

Για $x\geq 0$ είναι:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f\left(x\right)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι: $f\left(2\right)+f\left(4\right)=0$.

(Μονάδες 10)

35405-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο x^2-x-6 έχει $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=-6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-1\right)^2-4\cdot1\cdot\left(-6\right)=1+24=25>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-\left(-1\right)\pm\sqrt{25}}{2\cdot1}=\frac{1\pm5}{2}=\begin{cases}\dfrac{1+5}{2}=3\\ \dfrac{1-5}{2}=-2\end{cases}$$

Πρέπει:

$$x^2-x-6\neq0\Leftrightarrow\left(x\neq-2\ \kappa\alpha\iota\ x\neq3\right)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathrm{A}=\mathbb{R}-\left\{-2,3\right\}$.

β) Είναι:

$$f\left(2\right)=\frac{2+2}{2^2-2-6}=\frac{4}{4-2-6}=\frac{4}{-4}=-1 \text{ και}$$

$$f\left(4\right)=\frac{4+2}{4^2-4-6}=\frac{6}{16-4-6}=\frac{6}{6}=1$$

Άρα:

$$f\left(2\right)+f\left(4\right)=-1+1=0$$

36654

ΘΕΜΑ 4

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν πάνω σε μπλουζάκια και ίδρυσαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Σε διάστημα ενός μηνός τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x)=12,5x+120$ και τα έσοδα από την πώληση τους (σε ευρώ), από τη συνάρτηση $E(x)=15,5x$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

β) Τι εκφράζει ο αριθμός $12,5$ και τι ο αριθμός $15,5$ στο πλαίσιο του προβλήματος;

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση).

(Μονάδες 6)

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

36654-Λύση

ΘΕΜΑ 4

α) Αν η εταιρεία δεν κατασκευάσει μπλουζάκια (κατασκευάσει 0 μπλουζάκια), τότε έχουμε $K(0)=120€$. Επομένως η εταιρεία, χωρίς να κατασκευάζει μπλουζάκια, έχει (πάγια) έξοδα $120€$.

β) Η μοναδιαία μεταβολή του x, δηλαδή αν τα μπλουζάκια που κατασκευάζονται αυξηθούν κατά $1€$ (από x γίνουν $x+1$), θα προκαλέσει σταθερή μεταβολή $12,5€$ στο κόστος κατασκευής και σταθερή μεταβολή στα έσοδα $15,5€$. Δηλαδή,

$$K(x+1)-K(x)=12,5 \quad \text{και} \quad E(x+1)-E(x)=15,5$$

γ) Τα μπλουζάκια που πρέπει να πωληθούν ώστε τα έσοδα να είναι ίσα με τα έξοδα είναι η λύση της εξίσωσης $E(x)=K(x)$. Είναι:

$$E(x)=K(x) \Leftrightarrow 15,5x=12,5x+120 \Leftrightarrow 3x=120 \Leftrightarrow x=40$$

Επομένως, για να μην μπαίνει μέσα η επιχείρηση, πρέπει να πουλήσει 40 μπλουζάκια.

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια τα έσοδα θα είναι

$$E(60)=15,5\cdot 60=930€$$

και τα έξοδα $K(60)=12,5\cdot 60+120=870€$.

Επομένως το κέρδος τους θα είναι $930-870=60€$.

36668

ΘΕΜΑ 4

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^oC) σε βαθμούς Φαρενάιτ (^oF), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^oC) σε βαθμούς Κέλβιν (^oK), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου (^oC) το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν (^oK) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ (^oF) είναι η

$$K = \frac{F-32}{1,8} + 273$$

(Μονάδες 7)

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278 ^oK μέχρι 283 ^oK. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ^oF.

(Μονάδες 10)

36668-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η πρόταση Π1 εκφράζεται συμβολικά με τη σχέση:

$$F = 1{,}8 \cdot C + 32 \quad (1)$$

Η πρόταση Π2 εκφράζεται συμβολικά με τη σχέση:

$$K = C + 273 \quad (2)$$

β) Η ισότητα (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$F = 1{,}8 \cdot C + 32 \Leftrightarrow F - 32 = 1{,}8 \cdot C \Leftrightarrow C = \frac{F-32}{1{,}8} \quad (3)$$

Τότε η ισότητα (2) ισοδύναμα γράφεται:

$$K = \frac{F-32}{1{,}8} + 273 \quad (4)$$

γ) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$278 \le K \le 283 \overset{(4)}{\Leftrightarrow}$$
$$278 \le \frac{F-32}{1{,}8} + 273 \le 283 \Leftrightarrow$$
$$278 - 273 \le \frac{F-32}{1{,}8} + 273 - 273 \le 283 - 273 \Leftrightarrow$$
$$5 \le \frac{F-32}{1{,}8} \le 10 \Leftrightarrow$$
$$5 \cdot 1{,}8 \le 1{,}8 \cdot \frac{F-32}{1{,}8} \le 10 \cdot 1{,}8 \Leftrightarrow$$
$$9 \le F - 32 \le 18 \Leftrightarrow$$
$$9 + 32 \le F - 32 + 32 \le 18 + 32 \Leftrightarrow$$
$$41 \le F \le 50$$

36679

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in \mathrm{A}$ ισχύει $f(x)=|x|-2$.

(Μονάδες 9)

γ) Για $x\in \mathrm{A}$, να λύσετε την εξίσωση $(f(x)+2)^2-4f(x)-5=0$.

(Μονάδες 10)

36679-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$$|x|-3\neq 0 \Leftrightarrow$$
$$|x|\neq 3 \Leftrightarrow$$
$$x\neq 3 \text{ και } x\neq -3$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbb{R}-\{3,-3\}$.

β) Θα παραγοντοποιήσουμε την παράσταση:

$$x^2-5|x|+6=|x|^2-5|x|+6$$

Θέτουμε $|x|=y$, (1) και η παράσταση $|x|^2-5|x|+6$ γίνεται : y^2-5y+6

Το τριώνυμο y^2-5y+6 έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1>0$$

και ρίζες τις:

$$y_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 1}{2}\Rightarrow\begin{cases} y_1=\dfrac{5+1}{2}=\dfrac{6}{2}=3 \\ y_2=\dfrac{5-1}{2}=\dfrac{4}{2}=2 \end{cases}$$

Έτσι το τριώνυμο y^2-5y+6 γίνεται:

$$y^2-5y+6=(y-2)(y-3)$$

και επομένως

$$|x|^2-5|x|+6=(|x|-2)(|x|-3).$$

Τελικά ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x)=\frac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}=\frac{(|x|-2)(|x|-3)}{|x|-3}=|x|-2$$

για κάθε $x\in A=\mathbb{R}-\{3,-3\}$.

γ) Η εξίσωση $(f(x)+2)^2-4f(x)-5=0$ με $f(x)=|x|-2$ γράφεται:

$$(|x|-2+2)^2-4(|x|-2)-5=0 \Leftrightarrow$$
$$|x|^2-4|x|+8-5=0 \Leftrightarrow$$
$$|x|^2-4|x|+3=0$$

Θέτουμε $|x|=z$, (2) και βρίσκουμε:

36679-Λύση

$$z^2-4z+3=0$$

Το τριώνυμο z^2-4z+3 έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4>0$$

και ρίζες τις:

$$z_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{4\pm2}{2}\Rightarrow\begin{cases}z_1=\dfrac{4+2}{2}=\dfrac{6}{2}=3\\ z_2=\dfrac{4-2}{2}=\dfrac{2}{2}=1\end{cases}$$

Τότε από την ισότητα (2) βρίσκουμε:

$z=3\Leftrightarrow|x|=3\Leftrightarrow x=3$ ή $x=-3$ οι οποίες όμως απορρίπτονται αφού δεν ανήκουν στο $\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{3,-3\}$.

$z=1\Leftrightarrow|x|=1\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$ οι οποίες είναι δεκτές αφού ανήκουν στο $\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{3,-3\}$.

36680

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=x^2-4x+\alpha \text{ και } g(x)=\alpha x-5, \text{ με } \alpha\in\mathbb{R}.$$

α) Αν ισχύει $f(2)=g(2)$, να βρείτε την τιμή του α.

(Μονάδες 7)

β) Για $\alpha=1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=g(x)$.

(Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$.

(Μονάδες 5 + 5 = 10)

36680-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αφού $f(2)=g(2)$ έχουμε ισοδύναμα

$$\begin{aligned}&f(2)=g(2)\Leftrightarrow\\&2^2-4\cdot 2+\alpha=\alpha\cdot 2-5\Leftrightarrow\\&4-8+\alpha=2\alpha-5\Leftrightarrow\\&\alpha-2\alpha=-4+8-5\Leftrightarrow\\&-\alpha=-1\Leftrightarrow\\&\alpha=1\end{aligned}$$

β) Για $\alpha=1$ έχουμε $f(x)=x^2-4x+1$ και $g(x)=x-5$.

i) Η εξίσωση: $f(x)=g(x)$ γίνεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned}&x^2-4x+1=x-5\Leftrightarrow\\&x^2-4x+1-x+5=0\Leftrightarrow\\&x^2-5x+6=0\end{aligned}$$

Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1>0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{5+1}{2}=\dfrac{6}{2}=3\\[2mm] x_2=\dfrac{5-1}{2}=\dfrac{4}{2}=2\end{cases}$$

ii) Η ανίσωση: $f(x)\geq g(x)$ γίνεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned}&x^2-4x+1\geq x-5\Leftrightarrow\\&x^2-4x+1-x+5\geq 0\Leftrightarrow\\&x^2-5x+6\geq 0\end{aligned}$$

Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει ρίζες τις $x_1=3$ και $x_2=2$ και το πρόσημο του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
x^2-5x+6	+	0	-	0	+

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2-5x+6\geq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$$

Από τη ιδιότητα $|\alpha|=\alpha\Leftrightarrow\alpha\geq 0$ έχουμε ότι:

36680-Λύση

$$|f(x)-g(x)| = f(x)-g(x) \Leftrightarrow$$
$$f(x)-g(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

37175

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases} 8-x, & \text{αν } x<0 \\ 2x+5, & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-5)=f(4)$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$,ώστε $f(x)=9$.

(Μονάδες 12)

37175-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$f(-5) = 8 - (-5) = 8 + 5 = 13 \text{ και}$$
$$f(4) = 2 \cdot 4 + 5 = 8 + 5 = 13.$$

Άρα $f(-5) = f(4)$.

β) Για $x < 0$ είναι:

$$f(x) = 9 \Leftrightarrow 8 - x = 9 \Leftrightarrow$$
$$-x = 1 \Leftrightarrow x = -1.$$

Για $x \geq 0$ είναι:

$$f(x) = 9 \Leftrightarrow 2x + 5 = 9 \Leftrightarrow$$
$$2x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

37185

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3-16x}{x-4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει ότι $f(x)=x^2+4x$.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=32$.

(Μονάδες 10)

37185-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει: $x-4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 4$.

Ο τύπος της συνάρτησης f μετά τις σχετικές παραγοντοποιήσεις και απλοποιήσεις γίνεται:

$$f(x)=\frac{x^3-16x}{x-4}=\frac{x(x^2-16)}{x-4}=\frac{x(x-4)(x+4)}{x-4}=x(x+4)=x^2+4x.$$

β) Είναι:

$$f(x)=32 \Leftrightarrow x^2+4x=32 \Leftrightarrow x^2+4x-32=0$$

Το τριώνυμο $x^2+4x-32$ έχει $\alpha=1$, $\beta=\ 4$, $\gamma=-32$ και διακρίνουσα:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4^2-4\cdot 1\cdot(-32)=16+128=144>0$.

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-4\pm\sqrt{144}}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm 12}{2}=\begin{cases}\dfrac{-4+12}{2} & =4\\[2mm] \dfrac{-4-12}{2} & =-8\end{cases}$$

Επειδή η f ορίζεται στο $A=\mathbb{R}-\{4\}$, δεκτή είναι μόνο η τιμή $x=-8$.

37189

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\frac{1}{x}, x\neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{5}{2}$.

(Μονάδες 15)

37189-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Ισχύουν:

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}.$

$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2.$

$f(2) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$

Οπότε:

$A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2) = \frac{5}{2} + 2 - \frac{3}{2} = \frac{2}{2} + 2 = 1 + 2 = 3$

β) Ισχύει ότι:

$$f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2+1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2(x^2+1) = 5x \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + 2 = 5x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

Το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 2$ έχει $\alpha = 2, \beta = -5, \gamma = 2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{5+3}{4} = 2 \\ \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

37202

ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2-5x+6

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$

i. Να βρείτε τι πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης

(Μονάδες 05)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$

)Μονάδες 08)

37202-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει $\alpha=1, \beta=-5, \gamma=6$ και διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases}\dfrac{5+1}{2}=\dfrac{6}{2}=3\\ \dfrac{5-1}{2}=\dfrac{4}{2}=2\end{cases}$$

Τότε:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

β)

i. Πρέπει:

$$x^2-5x+6\neq0\Leftrightarrow(x-2)(x-3)\neq0\Leftrightarrow$$
$$x-2\neq0\ \kappa\alpha\iota\ x-3\neq0\Leftrightarrow x\neq2\ \kappa\alpha\iota\ x\neq3$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=R-\{2,3\}$.

ii. Ο τύπος της συνάρτησης f γράφεται

$$f(x=\frac{x-2}{x^2-5x+6}=\frac{x-2}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-3}$$