12731

ΘΕΜΑ 4

Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ ($\kappa \neq 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$). Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}$, κ, $\kappa \cdot \lambda$.

α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός.

(Μονάδες 10)

γ) Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}$, $\kappa \cdot \lambda$,(κ>0, $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$) είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$ να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}$, κ, $\kappa \cdot \lambda$.

(Μονάδες 7)

12731-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για να είναι οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}$, κ, $\kappa\cdot\lambda$ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου θα πρέπει το γινόμενο πρώτου επί τον τρίτο να ισούται με το τετράγωνο του δευτέρου.

Πράγματι $\frac{\kappa}{\lambda}\cdot(\kappa\cdot\lambda)=\frac{\kappa\cdot\kappa\cdot\lambda}{\lambda}=\kappa^2$.

Άρα ισχύει.

β) Οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}$, κ, $\kappa\cdot\lambda$ έχουν άθροισμα:

$$\frac{\kappa}{\lambda}+\kappa+\kappa\cdot\lambda=\frac{\kappa+\kappa\lambda+\kappa\lambda^2}{\lambda}=\frac{\kappa\cdot(1+\lambda+\lambda^2)}{\lambda}=\frac{\kappa}{\lambda}\cdot(1+\lambda+\lambda^2)$$

Προφανώς $\frac{\kappa}{\lambda}\neq 0$.

Οπότε για να έχουν άθροισμα διάφορο του μηδενός αρκεί $\lambda^2+\lambda+1\neq 0$.

Πράγματι το τριώνυμο $\lambda^2+\lambda+1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=1^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3<0.$$

Άρα $\lambda^2+\lambda+1\neq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

γ) Για την εξίσωση δευτέρου βαθμού $x^2+10x+16=0$ το γινόμενο των ριζών ισούται με $P=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{16}{1}=16$.

Όμως από το (α) έχουμε $\frac{\kappa}{\lambda}\cdot(\kappa\cdot\lambda)=\kappa^2$.

Οπότε $\kappa^2=16 \iff |\kappa|=4 \iff \kappa=4$ αφού κ>0.

Για την εξίσωση δευτέρου βαθμού $x^2+10x+16=0$ το άθροισμα των ριζών ισούται με $S=\frac{-\beta}{\alpha}=\frac{-10}{1}=-10$.

Οπότε έχουμε:

$$\frac{4}{\lambda}+4\lambda=-10 \Leftrightarrow 4+4\lambda^2=-10\lambda \Leftrightarrow 4+4\lambda^2+10\lambda=0 \Leftrightarrow 2\lambda^2+5\lambda+2=0.$$

Η διακρίνουσα Δ είναι $\Delta=5^2-4\cdot2\cdot2=25-16=9>0$, οπότε έχουμε δύο ρίζες

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}\Leftrightarrow$$

12731-Λύση

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5\pm 3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \frac{-5-3}{4} \\ \frac{-5+3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \text{δεκτές.}$$

Επομένως για λ=-2 οι αριθμοί είναι $-2, 4, -8$, ενώ για λ=$-\frac{1}{2}$ οι αριθμοί είναι $-8, 4, -2$

12763

Θέμα 2

Δίνεται μία πρόοδος α_ν με πρώτους όρους $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$

α) Να εξετάσετε αν η α_ν είναι αριθμητική πρόοδος.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η α_ν είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το ν-οστό της όρο.

(Μονάδες 13)

12763-Λύση

Λύση

α) Για να αποτελούν οι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου θα έπρεπε να έχουν την ιδιότητα $a_2 = \frac{a_1+a_3}{2}$.

Δηλαδή ισοδύναμα $2\sqrt{2} = \frac{2+4}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{3}{2}$, το οποίο δεν ισχύει, διότι ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός, ενώ ο $\frac{3}{2}$ είναι ρητός.

β) Για την πρόοδο (α_ν) ισχύει ότι $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ και $\frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, οπότε αποτελεί γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\lambda = \sqrt{2}$.

Εφόσον η (α_ν) αποτελεί γεωμετρική πρόοδο, ο ν-οστός της όρος θα έχει τη μορφή $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$, όπου α_1, λ, ο πρώτος όρος και ο λόγος της προόδου αντίστοιχα.

Επειδή $\alpha_1 = 2$, $\lambda = \sqrt{2}$ ο ν-οστός όρος είναι: $\alpha_\nu = 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{\nu-1}$.

12787

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό κ ώστε οι αριθμοί $\kappa - 2, \kappa, 2\kappa + 3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

(Μονάδες 15)

12787-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση έχει συντελεστές $\alpha=1, \beta=-1, \gamma=-6$, και διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4\cdot(-6)=25>0$ οπότε έχει άνισες ρίζες που είναι οι αριθμοί

$$x_{1,2}=\frac{1\pm 5}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{6}{2}=3 \\ x_2=\frac{-4}{2}=-2 \end{cases}$$

β) Οι αριθμοί $\kappa-2, \kappa, 2\kappa+3, \kappa\in\mathbb{Z}$ με $\kappa>0$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, μόνο όταν κανένας από αυτούς δεν είναι 0 και ισχύει:

$$\kappa^2=(2\kappa+3)(\kappa-2)\Leftrightarrow\kappa^2=2\kappa^2-4\kappa-6+3\kappa\Leftrightarrow\kappa^2-\kappa-6=0$$

$$\Leftrightarrow\kappa=3 \text{ ή } \kappa=-2 \text{ (από το ερώτημα (α))}$$

Η τιμή $\kappa=-2$ απορρίπτεται αφού πρέπει $\kappa>0$, ενώ η τιμή $\kappa=3$ είναι δεκτή. Άρα $\kappa=3$.

12998

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (α_ν) : $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 5)

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^7$.

(Μονάδες 5)

β) Αν $\alpha_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο ν-οστός όρος της γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου (α_ν) είναι ίσο με $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$.

(Μονάδες 8)

12998-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Οι αριθμοί αυτοί δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, καθώς θα έπρεπε να ισχύει $2\beta = \alpha + \gamma$, δηλαδή:

$81 = \frac{27\sqrt{3}}{2} + \frac{81\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}$, επομένως $\frac{81}{54} = \sqrt{3}$, το οποίο δεν ισχύει αφού $\sqrt{3}$ άρρητος, ενώ ο $\frac{81}{54}$ είναι ρητός, άρα δεν μπορούν να είναι ίσοι.

ii. Οι δύο αριθμοί είναι θετικοί, για να είναι ίσοι, αρκεί τα τετράγωνά τους να είναι ίσα μεταξύ τους:

$\left(\frac{27\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^7\right)^2 \Leftrightarrow \frac{27^2 \cdot 3}{4} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\right)^{14} \Leftrightarrow \frac{3^6 \cdot 3}{4} = \frac{1}{4} \cdot 3^7$,το οποίο ισχύει.

β) Η γεωμετρική πρόοδος θα έχει σταθερό λόγο: $\lambda = \frac{\frac{81\sqrt{3}}{2}}{\frac{81}{2}} = \sqrt{3}$.

Ο ν-οστός όρος της γεωμετρικής προόδου είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} = \alpha_1\left(\sqrt{3}\right)^{\nu-1}$.

Όμως, εφόσον, ισχύει ότι $\alpha_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^7$ έχουμε ότι $\alpha_1\left(\sqrt{3}\right)^{7-1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^7$,οπότε $\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^{8-7} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

Συνεπώς, ισχύει ότι $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα ο γενικός όρος της γεωμετρικής προόδου είναι

$\alpha_\nu = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{\nu-1} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^\nu}{2}$.

γ) Για το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου ισχύει ότι:

$$S_{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}^{10} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}.$$

14375

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \mu x - 2,\ \mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι αριθμοί $x = -2$ και $x = 3$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ ενώ ο $x = 1$ βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον οι τιμές $f(-2),\ f(1),\ f(3)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε:

i. Να βρείτε τις τιμές του μ.

(Μονάδες 7)

ii. Για $\mu = \frac{13}{7}$ να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 6)

14375-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$\Delta = (-\mu)^2 - 4.1.(-2) = \mu^2 + 8 > 0$ για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

β) Είναι:

$$f(-2) = 4 + 2\mu - 2 = 2\mu + 2,\ \ f(1) = 1 - \mu - 2 = -\mu - 1$$

$$f(3) = 9 - 3\mu - 2 = 7 - 3\mu.$$

Για να βρίσκονται τα $x = -2$ και $x = 3$ εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ ενώ το $x = 1$ εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} f(-2) > 0 \\ f(1) < 0 \\ f(3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu + 2 > 0 \\ -\mu - 1 < 0 \\ 7 - 3\mu > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu > -1 \\ \mu > -1 \\ \mu < \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < \mu < \frac{7}{3}.$$

γ)

i. Για να είναι τα $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ με τη σειρά που δίνονται διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου θα πρέπει να ισχύει:

$$\big(f(1)\big)^2 = f(-2) \cdot f(3) \Leftrightarrow$$
$$(-\mu - 1)^2 = (2\mu + 2) \cdot (7 - 3\mu) \Leftrightarrow$$
$$(\mu + 1)^2 - 2(\mu + 1) \cdot (7 - 3\mu) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(\mu + 1) \cdot (\mu + 1 - 14 + 6\mu) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(\mu + 1) \cdot (7\mu - 13) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\mu = -1 \text{ ή } 7\mu - 13 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\mu = -1 \text{ ή } \mu = \frac{13}{7}.$$

Άρα $\mu = \frac{13}{7}$ αφού $\mu \in (-1, \frac{7}{3})$.

ii. Για $\mu = \frac{13}{7}$ είναι:

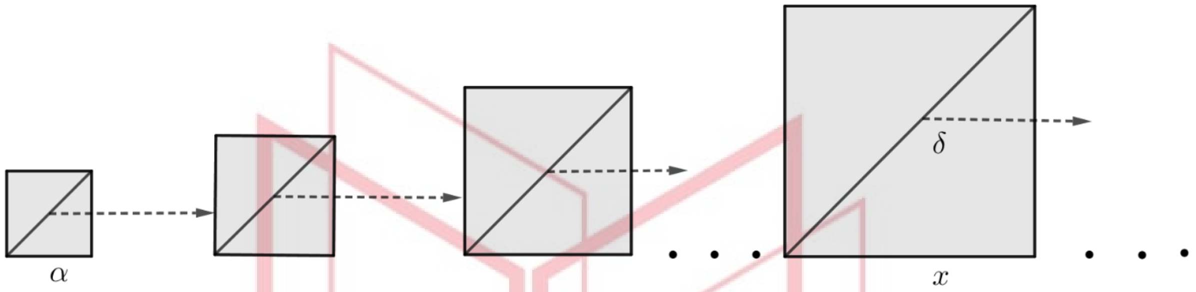
$$f(-2) = \frac{26}{7} + 2 = \frac{40}{7},\ \ f(1) = -\frac{13}{7} - 1 = -\frac{20}{7} \text{ και } \ f(3) = 7 - \frac{39}{7} = \frac{10}{7}.$$

Άρα ο λόγος $\lambda = \frac{-\frac{20}{7}}{\frac{40}{7}} = -\frac{1}{2}$.

14645

ΘΕΜΑ 4

Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α, σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



α)

i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x, να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta = \sqrt{2} \cdot x$.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda = 2$ και γενικό όρο $\alpha_\nu = \alpha^2 2^{\nu-1}$.

(Μονάδες 7)

β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με $8\ \tau.\mu.$, να βρείτε:

i. την πλευρά α του αρχικού τετραγώνου.

(Μονάδες 8)

ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν $255\ \tau.\mu.$

(Μονάδες 6)

14645-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι για τη διαγώνιο δ ενός τετραγώνου πλευράς x ισχύει:

$$\delta^2 = x^2 + x^2, \text{ δηλαδή}$$

$$\delta^2 = 2x^2, \text{ άρα}$$

$$\sqrt{\delta^2} = \sqrt{2x^2} \text{ και επειδή } \delta, x > 0 \text{ προκύπτει ότι:}$$

$$\delta = \sqrt{2}x.$$

ii. Από το ερώτημα α)i) προκύπτει ότι αν ένα από τα τετράγωνα της ακολουθίας έχει πλευρά x το επόμενό του έχει πλευρά $\sqrt{2}x$ και τα αντίστοιχα εμβαδά είναι x^2 και $\left(\sqrt{2}x\right)^2 = 2x^2$. Άρα, ο λόγος λ των εμβαδών δύο διαδοχικών τετραγώνων δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

και είναι σταθερός. Οπότε, τα εμβαδά των τετραγώνων είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = 2$ και πρώτο όρο $\alpha_1 = \alpha^2$.
Ο γενικός όρος της προόδου δίνεται από τη σχέση $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} = \alpha^2 2^{\nu-1}$.

β)

i. Ισχύει ότι

$$\alpha_4 = 8, \text{άρα}$$

$$\alpha^2 2^{4-1} = 8, \text{δηλαδή}$$

$$\alpha^2 \cdot 8 = 8, \text{οπότε}$$

$$\alpha^2 = 1$$

και επειδή $\alpha > 0$ έχουμε ότι $\alpha = 1$.

ii. Το άθροισμα των ν πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου δίνεται από τη σχέση:

$$S_\nu = \alpha_1 \frac{(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1} = 1 \cdot \frac{2^\nu - 1}{2 - 1} = 2^\nu - 1.$$

Για να είναι το συνολικό εμβαδών των αρχικών τετραγώνων ίσο με 255 $\tau.\mu$ πρέπει να ισχύει:

$$S_\nu = 255 \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$2^\nu - 1 = 255, \text{δηλαδή}$$

14645-Λύση

$$2^{\nu} = 256.$$

Αλλά $256 = 2^8$. Άρα, $2^{\nu} = 2^8$, οπότε $\nu = 8$. Άρα το πλήθος των τετραγώνων που έχουν συνολικό εμβαδόν 255τ.μ. είναι 8.

33891

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν:

$\alpha_3 = 4,\ \alpha_5 = 16$ και $\lambda > 0$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τον λόγο λ της προόδου.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $\beta_\nu = \dfrac{1}{\alpha_\nu}$, $\nu = 1,2,3,\ldots$ είναι επίσης γεωμετρική πρόοδος με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν).

(Μονάδες 9)

γ) Αν S_{10} είναι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (α_ν) και S'_{10} το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (β_ν) αντίστοιχα, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}.$$

(Μονάδες 8)

33891-Λύση

ΛΥΣΗ

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν:

$\alpha_3 = 4,\ \alpha_5 = 16$ και $\lambda > 0$.

α) Έχουμε:

$$\begin{cases}\alpha_3 = 4\\ \alpha_5 = 16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1\cdot\lambda^2 = 4\\ \alpha_1\cdot\lambda^4 = 16\end{cases} \overset{(\div)}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\lambda^2 = 4\\ \alpha_1\cdot\lambda^2 = 4\end{cases} \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\lambda = 2\\ \alpha_1\cdot 2^2 = 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = 2\\ \alpha_1 = 1\end{cases}$$

β) Έχουμε

$\dfrac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \dfrac{\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}}{\frac{1}{\alpha_\nu}} = \dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \dfrac{1}{\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}} = \dfrac{1}{\lambda}$, οπότε (β_ν), με $\beta_\nu = \dfrac{1}{\alpha_\nu}$, $\nu = 1,2,3,\ldots$ είναι επίσης γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο $\beta_1 = \dfrac{1}{\alpha_1} = 1$ και λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν), δηλαδή $\lambda' = \dfrac{1}{2}$

γ) Εφόσον S_{10} είναι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (α_ν), έχουμε:

$$S_{10} = \alpha_1\frac{\lambda^{10}-1}{\lambda-1} = 1\cdot\frac{2^{10}-1}{2-1} = 2^{10}-1.$$

Το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (β_ν) είναι:

$$S'_{10} = \beta_1\frac{(\lambda')^{10}-1}{\lambda'-1} = 1\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2^{10}}-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1-2^{10}}{2^{10}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2^{10}-1}{2^{10}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\cdot\left(2^{10}-1\right)}{2^{10}} = \frac{1}{2^9}S_{10}.$$

34156

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι λ = 3.

(Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1.

(Μονάδες 15)

34156-Λύση

α) Είναι:

$$\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1\lambda^{5-1}}{\alpha_1\lambda^{2-1}} = 27$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda^4}{\lambda} = 27$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 = 27$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 = 3^3$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 3$$

β) Ισχύει ότι:

$$S_4 = 200 \Leftrightarrow \alpha_1\frac{\lambda^4-1}{\lambda-1} = 200$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1\frac{3^4-1}{3-1} = 200$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1\frac{81-1}{2} = 200$$

$$\Leftrightarrow 40\alpha_1 = 200$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = 5$$

34180

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι αριθμοί $2, x, 8$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε οι αριθμοί $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τον αριθμό x, ώστε οι $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

(Μονάδες 7)

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος $2, 5, 8, 11, \ldots$ και (β_ν) η γεωμετρική πρόοδος $2, 4, 8, 16, \ldots$, τότε να βρείτε:

i. Το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν).

(Μονάδες 5)

ii. Την τιμή του ν, ώστε για το άθροισμα S_ν του γi) ερωτήματος να ισχύει:

$$2 \cdot (S_\nu + 24) = \beta_7 .$$

(Μονάδες 8)

34180-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $2x = 8 + 2$, δηλαδή $2x = 10$ και τελικά $x = 5$. Η διαφορά ω της προόδου είναι $\omega = 5 - 2 = 3$.

β) Οι αριθμοί $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $x^2 = 2 \cdot 8$, δηλαδή $x^2 = 16$ και τελικά $x = \pm 4$.

Για $x = -4$, ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = \dfrac{-4}{2} = -2$, ενώ για $x = 4$ ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = \dfrac{4}{2} = 2$.

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος $2, 5, 8, 11, \ldots$ και (β_ν) η γεωμετρική πρόοδος $2, 4, 8, 16, \ldots$, τότε:

i. Το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) με $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$, είναι

$$S_\nu = \frac{\nu}{2} \cdot \left(2 \cdot 2 + (\nu - 1) \cdot 3\right) = \frac{\nu}{2} \cdot (1 + 3\nu) = \frac{\nu + 3\nu^2}{2}.$$

ii. Ο 7ος όρος της γεωμετρικής προόδου (β_ν) με 1ο όρο $\beta_1 = 2$ και λόγο $\lambda = 2$ είναι $\beta_7 = 2 \cdot 2^{7-1} = 2 \cdot 2^6 = 2^7 = 128$. Έχουμε ισοδύναμα:

$2 \cdot (S_\nu + 24) = \beta_7$, δηλαδή

$2 \cdot \left(\dfrac{\nu + 3\nu^2}{2} + 24 \right) = 128$, οπότε

$3\nu^2 + \nu - 80 = 0$.

Το τριώνυμο $3\nu^2 + \nu - 80$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-80) = 961 > 0$, οπότε η εξίσωση έχει δυο ρίζες διαφορετικές, τις:

$\nu_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{961}}{2 \cdot 3} = \dfrac{-1 - 31}{6} = -\dfrac{16}{3}$, που απορρίπτεται γιατί $\nu \in \mathbb{N}$.

$\nu_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{961}}{2 \cdot 3} = \dfrac{-1 + 31}{6} = 5$.

Τελικά $\nu = 5$.

34181

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο μήκους α, πλάτους β και εμβαδού E. Οι αριθμοί $\alpha, \mathrm{E}, \beta$, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του εμβαδού E.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\mathrm{E}=1$ και $\alpha+\beta=10$,

i. να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες α και β.

(Μονάδες 5)

ii. να βρείτε τις διαστάσεις α και β του ορθογωνίου.

(Μονάδες 10)

34181-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του ορθογωνίου με διαστάσεις α και β είναι $\mathrm{E}=\alpha\cdot\beta$ (1).

Οι αριθμοί $\alpha, \mathrm{E}, \beta$, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $\mathrm{E}^2=\alpha\cdot\beta$, οπότε λόγω (1),

$\mathrm{E}^2=\mathrm{E}$, δηλαδή

$\mathrm{E}^2-\mathrm{E}=0$, οπότε

$\mathrm{E}(\mathrm{E}-1)=0$ και επειδή $\mathrm{E}\neq 0$,

$\mathrm{E}=1$.

β)

i. Το άθροισμα των ριζών της ζητούμενης εξίσωσης είναι $S=\alpha+\beta=10$ και το γινόμενο των ριζών είναι $P=\alpha\beta=\mathrm{E}=1$. Άρα μια εξίσωση 2^ου^ βαθμού με ρίζες α και β είναι η $x^2-Sx+P=0 \Leftrightarrow x^2-10x+1=0$.

ii. Το τριώνυμο $x^2-10x+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-10)^2-4\cdot1\cdot1=96>0$, οπότε η εξίσωση $x^2-10x+1=0$ έχει δύο ρίζες διαφορετικές, τις:

$$x_1=\frac{-(-10)-\sqrt{96}}{2}=\frac{10-\sqrt{16\cdot 6}}{2}=\frac{10-4\sqrt{6}}{2}=5-2\sqrt{6}>0.$$

$$x_2=\frac{-(-10)+\sqrt{96}}{2}=\frac{10+\sqrt{16\cdot 6}}{2}=\frac{10+4\sqrt{6}}{2}=5+2\sqrt{6}>0.$$

Άρα οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $\alpha=5-2\sqrt{6}$ και $\beta=5+2\sqrt{6}$.

34447

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2-5\beta x+2\beta^2=0 \quad (1)$, με παράμετρο $\beta>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1=2\beta$ και $x_2=\frac{\beta}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

34447-Λύση

Λύση

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:
$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5\beta)^2-4\cdot 2\cdot 2\beta^2=25\beta^2-16\beta^2=9\beta^2>0$ αφού $\beta>0$.

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5\beta)\pm\sqrt{9\beta^2}}{2\cdot 2}=\frac{5\beta\pm 3\beta}{4},$$

οπότε:

$$x_1=\frac{5\beta+3\beta}{4}=2\beta \quad \text{και} \quad x_2=\frac{5\beta-3\beta}{4}=\frac{\beta}{2}.$$

Σημείωση: Μία εναλλακτική λύση είναι η εξής:
Η $x_1=2\beta$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$2(2\beta)^2-5\beta(2\beta)+2\beta^2=8\beta^2-10\beta^2+2\beta^2=0$$

Ομοίως, η $x_2=\frac{\beta}{2}$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$2\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-5\beta\left(\frac{\beta}{2}\right)+2\beta^2=2\frac{\beta^2}{4}-5\frac{\beta^2}{2}+2\beta^2=\frac{\beta^2}{2}-5\frac{b^2}{2}+2\beta^2=\frac{-4\beta^2}{2}+2\beta^2=0.$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις x_1, x_2 με $x_1\neq x_2$.

β) Οι αριθμοί $2\beta, \beta, \frac{\beta}{2}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, διότι:

$$\frac{\beta}{2\beta}=\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \frac{\frac{\beta}{2}}{\beta}=\frac{\beta}{2\beta}=\frac{1}{2},$$ δηλαδή ο λόγος των όρων με τη σειρά που δίνονται είναι σταθερός ίσος με $\lambda=\frac{1}{2}$.

34874

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (1).

(Μονάδες 13)

β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 12)

34874-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $2x^2-5x+2$ έχει διακρίνουσα $\Delta=\left(-5\right)^2-4\cdot2\cdot2=25-16=9>0$. Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι:

$$x_1=\frac{-\left(-5\right)-\sqrt{9}}{2\cdot2}=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2},$$

$$x_2=\frac{-(-5)+\sqrt{9}}{2\cdot2}=\frac{5+3}{4}=2.$$

β) Δεδομένου ότι $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), οι αριθμοί $x_1,1,x_2$, δηλαδή οι αριθμοί $\frac{1}{2},1,2$, με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $1^2=\frac{1}{2}\cdot2$, που ισχύει.

35037

ΘΕΜΑ 2

Οι αριθμοί $\kappa - 2,\ 2\kappa$ και $7\kappa + 4,\ \kappa \in \boldsymbol{N}$ είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν).

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

(Μονάδες 12)

β)

i. Να εκφράσετε τον $2^{\text{ο}}$ όρο, τον $5^{\text{ο}}$ και τον $4^{\text{ο}}$ όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$.

(Μονάδες 7)

35037-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $\kappa - 2$, 2κ και $7\kappa + 4$ είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$(2\kappa)^2 = (\kappa - 2)\cdot(7\kappa + 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\kappa^2 = 7\kappa^2 + 4\kappa - 14\kappa - 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\kappa^2 - 10\kappa - 8 = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = \\ &= (-10)^2 - 4\cdot 3\cdot(-8) = \\ &= 100 + 96 = 196 > 0 \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$\kappa_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{196}}{2\cdot 3} = \frac{10 \pm 14}{6} = \begin{cases} \dfrac{10+14}{6} = 4 \\ \dfrac{10-14}{6} = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Η τιμή $\kappa = -\frac{2}{3} < 0$ απορρίπτεται. Άρα $\kappa = 4$.

Για $\kappa = 4$ οι αριθμοί γράφονται $2, 8, 32$ οπότε ο λόγος είναι $\lambda = \frac{8}{2} = 4$.

β)

i. Είναι:

$$\alpha_2 = \alpha_1\lambda^{2-1} = 4\alpha_1,\ \ \alpha_4 = \alpha_1\lambda^{4-1} = \alpha_1 4^3 = 64\alpha_1,\ \ \alpha_5 = \alpha_1\lambda^{5-1} = \alpha_1 4^4 = 256\alpha_1$$

ii. Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} &\alpha_2 + \alpha_5 = \\ &= 4\alpha_1 + 256\alpha_1 = \\ &= 4(\alpha_1 + 64\alpha_1) = \\ &= 4(\alpha_1 + \alpha_4) \end{aligned}$$

35042

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί $x+4,\ 2-x,\ 6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε:

i. το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 6)

ii. τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

(Μονάδες 6)

35042-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $x+4,\ 2-x,\ 6-x$, είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$(2-x)^2=(6-x)\cdot(x+4)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4-4x+x^2=6x+24-x^2-4x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-6x-20=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x-10=0\quad(1)$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-10)=9+40=49>0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{49}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 7}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+7}{2}=5\\[2mm]\dfrac{3-7}{2}=-2\end{cases}$$

β) Για $x=5$:

$$\alpha_4=6-x=1,\ \ \alpha_3=2-x=-3\ \text{ και }\ \alpha_2=x+4=9$$

i. Ο λόγος είναι $\lambda=\frac{\alpha_4}{\alpha_3}=-\frac{1}{3}$

ii. Είναι:

$$\alpha_2=\alpha_1\lambda^{2-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9=\alpha_1\left(-\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1=-27$$

35205

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: x, $2x+1$, $5x+4$, με την σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i. $x=1$

ii. $x=-1$

(Μονάδες 12)

35205-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί x, $2x+1$, $5x+4$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}&(2x+1)^2 = x\cdot(5x+4) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow 4x^2+4x+1 = 5x^2+4x \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow (x=-1 \text{ ή } x=1)\end{aligned}$$

β)

i. Για $x=1$ οι δοσμένοι αριθμοί γράφονται:

$$1,3,9$$

Ο λόγος λ είναι $\lambda=\frac{3}{1}=3$.

ii. Για $x=-1$ οι δοσμένοι αριθμοί γράφονται:

$$-1,-1,-1$$

Ο λόγος λ είναι $\lambda=\frac{-1}{-1}=1$.

ΘΕΜΑ 2

α) Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

(Μονάδες 9)

β) Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x, x, 2$ να είναι διαδοχικοί αριθμοί αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 7)

35411-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί αριθμοί αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x=\frac{4-x+2}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x=6-x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x=6\Leftrightarrow x=2$$

β) Οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί αριθμοί γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x^2=(4-x)\cdot 2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2=8-2x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x-8=0\ (1)$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot 1\cdot(-8)=4+32=36>0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm 6}{2}=\begin{cases}\dfrac{-2+6}{2}=2\\ \dfrac{-2-6}{2}=-4\end{cases}$$

γ) Από τα ερωτήματα α) και β) βρίσκουμε $x=2$.

36649

ΘΕΜΑ 4

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες υπάρχουν 51200 βακτήρια , και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

(Μονάδες 6)

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με $β_ν$ το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($ν \leq 5$).

i. Να δείξετε ότι η ακολουθία $(β_ν)$ είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

(Μονάδες 6)

ii. Να εκφράσετε το πλήθος $β_ν$ των βακτηρίων συναρτήσει του ν.

(Μονάδες 6)

iii. Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

(Μονάδες 7)

36649-Λύση

ΛΥΣΗ

Το πλήθος των βακτηρίων, στο τέλος κάθε ώρας, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου (α_ν) με πρώτο όρο $\alpha_1 = 102400$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$.

α) ο ν-στός όρος της προόδου δίνεται από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1}$ και είναι:

$$\alpha_\nu = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$$

Μετά από 6 ώρες ο αριθμός των βακτηρίων θα είναι:

$$\alpha_6 = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 102400 \cdot \frac{1}{32} = 3200$$

β) i. Μετά την ξαφνική επιδείνωση του οργανισμού ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Άρα η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda = 3$ και πρώτο όρο $\beta_1 = 3200 \cdot 3 = 9600$.

ii. Είναι:

$$\beta_\nu = \beta_1 \lambda^{\nu-1} = 9600 \cdot 3^{\nu-1},\ \nu \le 5$$

iii. Ο αριθμός των βακτηρίων που θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης θα είναι:

$$\beta_3 = 9600 \cdot 3^{3-1} = 9600 \cdot 3^2 = 86.400\,.$$

36677

ΘΕΜΑ 4

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, το 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ, το 2ο μήνα 110 ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) Να βρείτε

i) το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό τον ν^o (νιοστό) μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

(Μονάδες 4)

ii) το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό τον ν^o μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

(Μονάδες 4)

iii) το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

(Μονάδες 5)

iv) το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

(Μονάδες 5)

β)

i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;

(Μονάδες 3)

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

(Μονάδες 4)

36677-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα προκύπτει ότι:

i) το πρόγραμμα Α περιγράφεται από μια γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 4$ και $\lambda = 2$. Ισχύει επομένως ότι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = 1 \cdot 2^{\nu-1} = 2^{\nu-1}$$

ii) το πρόγραμμα Β περιγράφεται από μια αριθμητική πρόοδο με $\beta_1 = 100$, $\beta_2 = 110$, $\beta_3 = 120$ και $\omega = 10$. Ισχύει επομένως ότι:

$$\beta_\nu = \beta_1 + (\nu - 1) \cdot \omega = 100 + (\nu - 1) \cdot 10 = 100 + 10\nu - 10 = 10\nu + 90$$

iii) Το ποσό που θα υπάρχει μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α θα είναι:

$$\mathrm{A}_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} = 1 \cdot \frac{2^\nu - 1}{2 - 1} = 2^\nu - 1$$

iv) Το ποσό που θα υπάρχει μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β θα είναι:

$$\mathrm{B}_\nu = \frac{(\beta_1 + \beta_\nu) \cdot \nu}{2} = \frac{(100 + 10\nu + 90) \cdot \nu}{2} = \frac{(10\nu + 190) \cdot \nu}{2} = \frac{10\nu^2 + 190\nu}{2} = 5\nu^2 + 95\nu$$

β)

i) Το ποσό που θα υπάρχει, σύμφωνα με το πρόγραμμα Α, μετά από 6 μήνες, είναι:

$$\mathrm{A}_6 = 2^6 - 1 = 63 \text{ ευρώ}$$

Το ποσό που θα υπάρχει, σύμφωνα με το πρόγραμμα Β, μετά από 6 μήνες, είναι:

$$\mathrm{B}_6 = 5 \cdot 6^2 + 95 \cdot 6 = 180 + 570 = 750 \text{ ευρώ}$$

ii) Το ποσό που θα υπάρχει, σύμφωνα με το πρόγραμμα Α, μετά από 12 μήνες, είναι:

$$\mathrm{A}_{12} = 2^{12} - 1 = 4095 \text{ ευρώ}$$

Το ποσό που θα υπάρχει, σύμφωνα με το πρόγραμμα Β, μετά από 12 μήνες:

$$\mathrm{B}_{12} = 5 \cdot 12^2 + 95 \cdot 12 = 720 + 1140 = 1860 \text{ ευρώ}$$

Επομένως, ακολουθώντας το πρόγραμμα Α, θα έχει συγκεντρώσει μεγαλύτερο ποσό.

36891

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με θετικό λόγο λ, για την οποία ισχύει: $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$.

α) Να βρείτε τον λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι ο $\nu -$οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_\nu = 2^{\nu-3}$.

(Μονάδες 12)

36891-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\begin{cases}\alpha_3 = 1\\ \alpha_5 = 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 \cdot \lambda^2 = 1\\ \alpha_1 \cdot \lambda^4 = 4\end{cases} \overset{(:)}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\lambda^2 = 4\\ \alpha_1 \cdot \lambda^2 = 1\end{cases} \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\lambda = 2\\ \alpha_1 = \dfrac{1}{4}\end{cases}.$$

β) Ο $\nu-$οστός όρος μιας γεωμετρικής προόδου είναι: $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$, οπότε

$$\alpha_\nu = \frac{1}{4}\cdot 2^{\nu-1} = \frac{1}{2^2}\cdot 2^{\nu-1} = \frac{2^{\nu-1}}{2^2} = 2^{\nu-3}.$$

37205

ΘΕΜΑ 4

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στη θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ.), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά από το ατύχημα.

(Μονάδες 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.;

(Μονάδες 9)

γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

(Μονάδες 9)

37205-Λύση

ΛΥΣΗ

Η επιφάνεια σε τετραγωνικά μίλια που καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος κάθε ημέρας, είναι όροι γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = 3$ και $\lambda = 2$. Στο τέλος της ν-οστής ημέρας θα έχει καλυφθεί επιφάνεια $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$ τετραγωνικά μίλια (τ.μ.).

α) Στο τέλος της 6ης ημέρας θα έχει καλυφθεί επιφάνεια $\alpha_5 = 3 \cdot 2^{5-1} = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$ τ.μ.

β) Δεδομένο είναι το $\alpha_\nu = 768$ και ζητούμενο είναι το ν. Έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}
&\alpha_\nu = 768\\
&3 \cdot 2^{\nu-1} = 768\\
&2^{\nu-1} = 256\\
&2^{\nu-1} = 2^8\\
&\nu - 1 = 8\\
&\nu = 9
\end{aligned}$$

Οπότε στο τέλος της 9ης ημέρας θα έχει καλυφθεί από πετρέλαιο θαλάσσια επιφάνεια 768 τ.μ.

γ) Στο τέλος της 10ης ημέρας η επιφάνεια της θάλασσας που έχει καλυφθεί από πετρέλαιο είναι 768-6=762 τ.μ. και κάθε επόμενη ημέρα θα μειώνεται κατά 6 τ.μ. Άρα η επιφάνεια σε τετραγωνικά μίλια που θα καλύπτει εφεξής το πετρέλαιο στο τέλος κάθε ημέρας, είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_ν) με $\beta_1 = 762$ και $\omega = -6$.

Δεδομένο είναι ότι $\beta_\nu = 12$ και ζητούμενο είναι το ν. Έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}
&\beta_\nu = 762\\
&762 + (\nu - 1) \cdot (-6) = 12\\
&6\nu = 756\\
&\nu = 126
\end{aligned}$$

Συνεπώς στο τέλος της 126ης ημέρας μετά από την κρατική παρέμβαση και συνολικά στο τέλος της 9+126=135ης ημέρας μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.