12694

ΘΕΜΑ 4

Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος;

(Μονάδες 3 + 4)

β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι.

(Μονάδες 6)

δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι;

(Μονάδες 6)

12694-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το χρονικό όριο του επιπέδου 1 είναι $\alpha_1 = 300$ δευτερόλεπτα και του επιπέδου 4 είναι $\alpha_4 = 255$ δευτερόλεπτα. Σε μια αριθμητική πρόοδο ο γενικός όρος δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \text{, οπότε}$$

$$\alpha_4 = \alpha_1 + 3\omega \text{, δηλαδή}$$

$$255 = 300 + 3\omega \text{, οπότε}$$

$$\omega = -15.$$

Αυτό σημαίνει ότι όσο αυξάνει το επίπεδο δυσκολίας (από 1 σε 2, από 2 σε 3, από 3 σε 4, κ.ο.κ) το χρονικό όριο που έχει ο παίκτης για να το ολοκληρώσει ελαττώνεται (σταθερά) κατά 15 δευτερόλεπτα κάθε φορά.

β) Αν τα επίπεδα είναι στο σύνολό τους ν, τότε $\alpha_\nu = 45$ (το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων) και ζητάμε την τιμή του ν. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
&\alpha_\nu = 45 \quad \Leftrightarrow \\
&\alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 45 \quad \Leftrightarrow \\
&300 + (\nu - 1)(-15) = 45 \quad \Leftrightarrow \\
&300 - 15\nu + 15 = 45 \quad \Leftrightarrow \\
&15\nu = 270 \quad \Leftrightarrow \\
&\nu = 18
\end{aligned}$$

Άρα το παιχνίδι ολοκληρώνεται σε 18 επίπεδα.

γ) Ο μέγιστος επιτρεπόμενος χρόνος που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι θα προκύψει αν προσθέσουμε το μέγιστο χρονικό όριο και των 18 επιπέδων του παιχνιδιού, δηλαδή

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{18} = S_{18}.$$

Στην αριθμητική πρόοδο ισχύει η σχέση:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \text{, συνεπώς}$$

$$S_{18} = \frac{18}{2}(\alpha_1 + \alpha_{18}) \text{, οπότε τελικά}$$

$$S_{18} = 9(300 + 45) = 9 \cdot 345 = 3105.$$

Ο μέγιστος χρόνος που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι είναι 3105 δευτερόλεπτα (δηλαδή 51 λεπτά και 45 δευτερόλεπτα).

δ) Αν $\beta_1 = 147$ είναι ο χρόνος που χρειάζεται ο παίκτης για να ολοκληρώσει το επίπεδο 1,

12694-Λύση

β_ν είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να ολοκληρώσει το επίπεδο ν και (β_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με $\beta_1 = 147$ και $\omega = 3$. Θέλουμε να ελέγξουμε αν ο χρόνος που χρειάζεται ο παίκτης για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο είναι μικρότερος ή ίσος από τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο κάθε επιπέδου.

Θέλουμε τη μέγιστη τιμή του $\nu \in \mathbb{N}$, ώστε $\beta_\nu \leq \alpha_\nu$. Δηλαδή:

$$
\begin{aligned}
&147 + (\nu - 1)3 \leq 300 + (\nu - 1)(-15) \quad \Leftrightarrow \\
&144 + 3\nu \leq 315 - 15\nu \quad \Leftrightarrow \\
&18\nu \leq 171 \quad \Leftrightarrow \\
&\nu \leq \frac{171}{18} \quad \Leftrightarrow \\
&\nu \leq 9,5
\end{aligned}
$$

Άρα η μέγιστη τιμή του ν είναι 9, που σημαίνει ότι ο παίκτης, με το ρυθμό που παίζει, θα ολοκληρώσει μόνο 9 από τα 18 επίπεδα του παιχνιδιού.

Θέμα 4

12764

Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

α) Αν α_ν το πλήθος των καθισμάτων της ν - οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι α_ν είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα.

(Μονάδες 9)

γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθήμενους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα.

(Μονάδες 7)

12764-Λύση

Λύση

α) Ισχύει ότι $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+2$, άρα είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω=2.

Σε μία αριθμητική πρόοδο ισχύει ότι:

$$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega, \text{ άρα}$$

$$\alpha_{10}=a_1+9\omega, \text{ οπότε}$$

$$a_1=\alpha_{10}-9\omega=50-9\cdot 2=32.$$

Συνεπώς ισχύει ότι $\alpha_1 = 32$ και ω=2.

β) Σε μία αριθμητική πρόοδο το άθροισμα των ν πρώτων όρων της είναι ίσο με:

$$S_\nu=\frac{\nu}{2}(2\alpha_1+(\nu-1)\omega).$$

Επομένως για ν = 40 έχουμε:

$$S_{40}=\frac{40}{2}(2\cdot 32+39\cdot 2)=20(64+78)=20\cdot 142=2.840.$$

Συνεπώς, το σύνολο των καθισμάτων της κερκίδας είναι 2.840.

γ) Η 1η σειρά καθισμάτων έχει 32 καθίσματα, η 2η 34 και η 3η 36. Αν οι θεατές μπορούν να καθίσουν μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων, τότε δημιουργείται μία αριθμητική πρόοδος με $\beta_1=\alpha_1,\ \beta_2=\alpha_3,\ldots$ με πρώτο όρο $\beta_1=32$ και διαφορά δ=4.

Το πλήθος των όρων αυτής της αριθμητικής προόδου που πρέπει να καταμετρηθεί είναι οι 20 πρώτοι όροι, καθώς σε 40 σειρές καθισμάτων οι μισές θα είναι περιττές.

Οπότε το πλήθος των θεατών που μπορούν να καθίσουν στην κερκίδα είναι:

$$S_{20}=\frac{20}{2}(2\cdot 32+19\cdot 4)=10(64+76)=10\cdot 140=1.400.$$

12945

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$ και την αριθμητική πρόοδο (β_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο.

(Μονάδες 8)

γ) Αν το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων της (α_ν) είναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της (β_ν) να βρείτε τον αριθμό ν.

(Μονάδες 10)

12945-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Ισχύουν: $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$, οπότε $\alpha_1 + 2\omega = 8$, (1) και $\alpha_1 + 10\omega = 32$, (2).

Αν από την (2) αφαιρέσουμε την (1) βρίσκουμε

$$8\omega = 24 \Rightarrow \omega = 3$$

Με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε

$$\alpha_1 + 6 = 8 \Rightarrow \alpha_1 = 2$$

β) Η πρόοδος (β_ν) έχει πρώτο όρο $\beta_1 = 57$ και διαφορά $\omega' = 2$ οπότε $\beta_2 = 57 + 2 = 59$ και

$$\alpha_\nu = \beta_2 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 59 \Leftrightarrow 2 + 3(\nu - 1) = 59 \Leftrightarrow 3\nu = 60 \Leftrightarrow \nu = 20$$

Επομένως ο εικοστός όρος της πρώτης προόδου είναι ίσος με τον δεύτερο όρο της δεύτερης.

γ) Το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων της (α_ν) είναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της (β_ν), οπότε έχουμε: $[2\alpha_1 + (2\nu - 1)\cdot 3]\cdot\frac{2\nu}{2} = [2\beta_1 + (\nu - 1)\cdot 2]\cdot\frac{\nu}{2}$, απ' όπου, με αντικατάσταση των πρώτων όρων, παίρνουμε $2\cdot 2 + (2\nu - 1)\cdot 3 = 2(57 + \nu - 1)\cdot\frac{1}{2}$.

Η τελευταία ισότητα γράφεται $4 + 6\nu - 3 = 57 + \nu - 1$, απ' όπου προκύπτει ότι $5\nu = 55$, δηλαδή $\nu = 11$, που είναι η ζητούμενη τιμή του ν.

13089

ΘΕΜΑ 4

Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ!

Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, την 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

α)

i. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο α_ν, αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

(Μονάδες 4)

ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_ν) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο β_ν, αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.

(Μονάδες 5)

δ) Να δείξετε ότι $\alpha_\nu = \beta_{8-\nu}$ για κάθε $\nu = 1, 2, ..., 7$.

(Μονάδες 5)

13089-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος αφού κάθε όρος της, πέραν του 1ου, προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού 2, με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 2$ οπότε ο γενικός της όρος είναι

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\cdot\omega = 1 + (\nu - 1)\cdot 2 = 1 + 2\nu - 2 = 2\nu - 1.$$

ii. Η ακολουθία (β_ν) είναι αριθμητική πρόοδος αφού κάθε όρος της, πέραν του 1ου, προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού -2, με $\beta_1 = 13$ και $\omega = -2$ οπότε ο γενικός της όρος είναι

$$\beta_\nu = \beta_1 + (\nu - 1)\cdot\omega = 13 + (\nu - 1)\cdot(-2) = 13 - 2\nu + 2 = 15 - 2\nu.$$

β) Έστω ότι διάβασε το βιβλίο σε ν μέρες. Τότε $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu$ δηλαδή :

$$\frac{\left(2\cdot 1 + (\nu - 1)\cdot 2\right)\cdot\nu}{2} = \frac{\left(2\cdot 13 + (\nu - 1)\cdot(-2)\right)\cdot\nu}{2}$$

και ισοδύναμα: $\dfrac{\left(2 + 2\nu - 2\right)\cdot\nu}{2} = \dfrac{\left(26 - 2\nu + 2\right)\cdot\nu}{2}$,

δηλαδή $\dfrac{2\nu\cdot\nu}{2} = \dfrac{\left(28 - 2\nu\right)\cdot\nu}{2}$.

Και αφού $\nu \neq 0$, θα είναι $2\nu = 28 - 2\nu$, δηλαδή $4\nu = 28$ και τελικά $\nu = 7$.

γ) Προφανώς ανεξάρτητα από τον τρόπο που διάβασε το βιβλίο, το πλήθος των σελίδων του βιβλίου είναι το $S_7 = \dfrac{\left(2\cdot 1 + (7 - 1)\cdot 2\right)\cdot 7}{2} = 49$.

δ) Για κάθε $\nu = 1, 2, \ldots, 7$,

είναι $\beta_{8-\nu} = \beta_1 + (8 - \nu - 1)\cdot(-2) = 13 - 16 + 2\nu + 2 = 2\nu - 1 = \alpha_\nu$.

13171

ΘΕΜΑ 4

Το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = S_\nu = 2\nu^2 + 3\nu$, $\nu \in N$ με $\nu \geq 1$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $S_{\nu-1} = 2\nu^2 - \nu - 1$, $\nu \geq 2$

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 4\nu + 1$, $\nu \geq 1$

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω.

(Μονάδες 7)

13171-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Προφανώς $\alpha_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 5$.

β) Θέτοντας όπου ν το $\nu - 1$, παίρνουμε: $S_{\nu-1} = 2(\nu-1)^2 + 3(\nu-1) =$

$2(\nu^2 - 2\nu + 1) + 3\nu - 3 = 2\nu^2 - 4\nu + 2 + 3\nu - 3 = 2\nu^2 - \nu - 1$ για κάθε $\nu \geq 2$.

γ) Για κάθε $\nu \geq 2$, έχουμε $a_\nu = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{\nu-1} + a_\nu) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{\nu-1}) =$

S_ν - $S_{\nu-1}$ = $2\nu^2 + 3\nu$ – $(2\nu^2 - \nu - 1)$ = $2\nu^2 + 3\nu - 2\nu^2 + \nu + 1$ = $4\nu + 1$.

Αλλά $\alpha_1 = 5 = 4 \cdot 1 + 1$. Ώστε $a_\nu = 4\nu + 1$, για κάθε $\nu \geq 1$.

δ) Για να είναι η ακολουθία (α_ν) αριθμητική πρόοδος, θα πρέπει η διαφορά

δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων να είναι σταθερή.

Πράγματι: $\alpha_{\nu+1} - a_\nu = [4(\nu+1) + 1] - [4\nu + 1] = 4\nu + 4 + 1 - 4\nu - 1 = 4$

Άρα η διαφορά ω είναι ίση με 4.

13173

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με γενικό τύπο $\alpha_\nu = 10 + 3\nu$.

α)

i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 3)

β) Να βρείτε ποιοι όροι της (α_ν) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί;

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401.

(Μονάδες 8)

13173-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος, διότι η διαφορά δυο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της είναι σταθερή:

$\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\left[10+3(\nu+1)\right]-(10+3\nu)=10+3\nu+3-10-3\nu=3$.

Ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1=10+3\cdot 1=13$ και η διαφορά $\omega=3$.

β) Πρέπει να βρούμε για ποιες τιμές του $\nu\in\mathbb{N}$ ισχύει:

$$\begin{aligned}&14<\alpha_\nu<401 \Leftrightarrow\\&14<10+3\nu<401 \Leftrightarrow\\&4<3\nu<391 \Leftrightarrow\\&\frac{4}{3}<\nu<\frac{391}{3} \Leftrightarrow\\&1,\overline{3}<\nu<130,\overline{3}\end{aligned}$$

Οι όροι της αριθμητικής προόδου που είναι μεταξύ των αριθμών 14 και 401, είναι οι $\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{130}$ που είναι 129 όροι.

γ) Έχουμε:

$\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{130}=S_{130}-\alpha_1=\dfrac{130}{2}(2\alpha_1+129\cdot\omega)-\alpha_1=65(2\cdot 13+129\cdot 3)-13=26832$,

ή εναλλακτικά, αν θεωρήσουμε τον α_2 πρώτο όρο, έχουμε άθροισμα 129 πρώτων όρων και:

$$\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{130}=S_{129}=\frac{129}{2}(2a_2+128\omega)=129(\alpha_2+64\omega)=129(\alpha_1+\omega+64\omega)=$$
$$=129(\alpha_1+65\omega)=129(13+65\cdot 3)=26832.$$

13319

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $1 - x$, $\frac{x}{2}$, $2x - 1, x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με αυτή τη σειρά, είναι πάντοτε διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του x, αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω αυτής της προόδου είναι 5.

(Μονάδες 12)

13319-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί α, β, γ, με αυτή τη σειρά, είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου, αν και μόνον αν ισχύει $\beta - \alpha = \gamma - \beta$. Έτσι, θα πρέπει να ισχύει ότι $\frac{x}{2} - (1 - x) = 2x - 1 - \frac{x}{2}$, δηλαδή $\frac{x}{2} - 1 + x = \frac{3x}{2} - 1$, άρα $\frac{3x}{2} - 1 = \frac{3x}{2} - 1$, που ισχύει.

β) Πρέπει να ισχύει $\frac{3x}{2} - 1 = 5 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 6 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$.

14476

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών: $1,\ 3, 5, 7,...$

α)

i. Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τον τριακοστό της όρο.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2.

(Μονάδες 13)

14476-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 1$ και η διαφορά της $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 3 - 1 = 2$.

ii. Ο τριακοστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_{30} = \alpha_1 + 29\omega = 1 + 29 \cdot 2 = 1 + 58 = 59$.

β) Έχουμε: $S_{30} = \frac{30}{2} \cdot (a_1 + \alpha_{30}) = 15 \cdot (1 + 59) = 15 \cdot 60 = 900 = 30^2$.

14512

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2 = 1$ και $x^2 = 9$.

(Μονάδες 9)

β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και στη συνέχεια

i. να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς αριθμητικής προόδου (α_ν) της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω.

(Μονάδες 9)

ii. να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_ν).

(Μονάδες 7)

14512-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $x^2 = 1$ έχει λύσεις τις $x = 1$ ή $x = -1$ ενώ η εξίσωση $x^2 = 9$ έχει λύσεις τις $x = 3$ ή $x = -3$.

β) Οι λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά είναι -3, -1, 1, 3.

i. Αφού $3-1=1-(-1)=-1-(-3)=2$ οι αριθμοί -3, -1, 1, 3 αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (α_ν) με διαφορά $\omega = 2$.

ii. Αφού η αριθμητική πρόοδος έχει διαφορά $\omega = 2$ και περιέχει τους περιττούς όρους 1 και 3, όλοι οι όροι της προόδου θα είναι περιττοί και επομένως ο 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_ν).

14573

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$.

(Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 33, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

(Μονάδες 15)

14573-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε

$$\alpha_4 - \alpha_2 = 10, \text{ δηλαδή}$$

$$(\alpha_1 + 3\omega) - (\alpha_1 + \omega) = 10, \text{ οπότε}$$

$$\alpha_1 + 3\omega - \alpha_1 - \omega = 10 \text{ και τελικά}$$

$$\omega = 5.$$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 33, \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha_1 + (\alpha_1 + \omega) + (\alpha_1 + 2\omega) = 33, \text{ οπότε}$$

$$3\alpha_1 + 3\omega = 33, \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha_1 + \omega = 11, \text{ οπότε}$$

$$\alpha_1 + 5 = 11 \text{ και τελικά}$$

$$\alpha_1 = 6.$$

14574

ΘΕΜΑ 2

Ο 1^{ος} όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) ισούται με 2 και ο 3^{ος} όρος ισούται με 8.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 12)

β) Αν είναι $\omega = 3$, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35.

(Μονάδες 13)

14574-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_3 = 8$, δηλαδή

$$\alpha_1 + 2\omega = 8, \text{ οπότε}$$

$$2 + 2\omega = 8 \text{ και τελικά}$$

$$\omega = 3.$$

β) Θα πρέπει να βρούμε τον φυσικό αριθμό ν, ώστε:

$$\alpha_\nu = 35, \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 35, \text{ οπότε}$$

$$2 + (\nu - 1) \cdot 3 = 35, \text{ οπότε}$$

$$3 \cdot (\nu - 1) = 33, \text{ δηλαδή}$$

$$\nu - 1 = 11 \text{ και τελικά}$$

$$\nu = 12.$$

Επομένως ο 12ος όρος της προόδου είναι 35.

14597

ΘΕΜΑ 2

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε επόμενη σειρά έχει τέσσερα καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η έβδομη σειρά έχει 36 καθίσματα.

α) Αποτελούν τα καθίσματα κάθε σειράς του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς.

(Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά.

(Μονάδες 9)

14597-Λύση

Λύση

α) Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς προκύπτει από το πλήθος των καθισμάτων της προηγούμενης σειράς προσθέτοντας πάντα σταθερά τέσσερα καθίσματα.

Έτσι σύμφωνα με τον ορισμό της αριθμητικής προόδου, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = 4$.

β) Έχουμε:

$\alpha_7 = \alpha_1 + (7-1)\cdot\omega \Leftrightarrow 36 = \alpha_1 + 24 \Leftrightarrow \alpha_1 = 36 - 24 \Leftrightarrow \alpha_1 = 12.$

γ) Αφού το γήπεδο έχει δέκα σειρές, τότε το πλήθος των καθισμάτων συνολικά δίνεται από τον τύπο:

$S_{10} = \frac{10}{2}\cdot[2\cdot 12 + (10-1)\cdot 4] = 5\cdot(24+36) = 5\cdot 60 = 300.$

14656

ΘΕΜΑ 2

Σε μία αριθμητική πρόοδο ($α_ν$) δίνονται $α_1 = 41$ και $α_6 = 26$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε $α_ν = ν$.

(Μονάδες 13)

14656-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha_6 = 41 + (6-1)\omega \Leftrightarrow 41 + 5\omega = 26 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega = -3.$$

β) Έχουμε:

$$\alpha_\nu = \nu \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = \nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41 + (\nu - 1)(-3) = \nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41 - 3\nu + 3 = \nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 44 = 4\nu \Leftrightarrow \nu = 11.$$

14758

ΘΕΜΑ 4

Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν 13 νέα οχήματα.

α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου;

(Μονάδες 6)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια;

(Μονάδες 6)

δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το $250^{\text{ο}}$ αυτοκίνητο;

(Μονάδες 7)

14758-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στο τέλος του $1^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα 5 αυτοκίνητα.

Στο τέλος του $2^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα 18 αυτοκίνητα.

Στο τέλος του $3^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα 31 αυτοκίνητα.

Στο τέλος του $4^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα 44 αυτοκίνητα.

Στο τέλος του $5^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα 57 αυτοκίνητα και στο τέλος του $6^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα 70 αυτοκίνητα.

β) Τα αυτοκίνητα που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 5$ και διαφορά $\omega = 13$ (τα αυτοκίνητα που κατασκευάζονται κάθε μήνα αυξάνονται σταθερά κατά 13).

γ) Τα τέσσερα πρώτα χρόνια (στο τέλος του $48^{ου}$ μήνα δηλαδή) θα έχουν κατασκευαστεί:

$$\alpha_{48} = \alpha_1 + 47\omega = 5 + 47 \cdot 13 = 616 \text{ αυτοκίνητα.}$$

δ) Ζητάμε τον φυσικό αριθμό ν για τον οποίο ισχύει:

$$\alpha_\nu \geq 250 \text{,δηλαδή}$$

$$5 + (\nu - 1)13 \geq 250 \text{, οπότε}$$

$$(\nu - 1) \geq \frac{245}{13} \text{, δηλαδή}$$

$$\nu \geq \frac{245}{13} + 1 \text{ και τελικά}$$

$$\nu \geq 19\frac{11}{13}.$$

Οπότε μετά από 20 μήνες θα έχει κατασκευαστεί το $250^{ο}$ αυτοκίνητο.

14809

ΘΕΜΑ 4

Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ». Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων

ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ…

α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1 = 5$ και να βρείτε τη διαφορά της.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για 23^{η} φορά το γράμμα Β.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην 200^{η} θέση στην παραπάνω διαδοχή.

(Μονάδες 9)

14809-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το γράμμα Β υπάρχει ακριβώς μια φορά στη λέξη «ΑΛΓΕΒΡΑ». Την πρώτη φορά που το συναντάμε είναι στην $5^η$ θέση της διαδοχής και επειδή η λέξη έχει 7 γράμματα, η δεύτερη εμφάνιση του γράμματος Β είναι στην $12^η$ θέση και κάθε εμφάνισή του είναι 7 θέσεις μετά την προηγούμενη. Έτσι, η ακολουθία που σχηματίζουν οι θέσεις που συναντάμε το γράμμα Β είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 5$ και $\omega = 7$.

β) Αρκεί να βρούμε τον $23^ο$ όρο της προόδου. Είναι:

$$\alpha_{23} = \alpha_1 + 22\omega = 5 + 22 \cdot 7 = 5 + 154 = 159$$

Επομένως, η $23^η$ φορά που συναντάμε το γράμμα Β είναι στην $159^η$ θέση.

γ) Αν διαιρέσουμε τον αριθμό 200 με το 7, βρίσκουμε πηλίκο 28 και υπόλοιπο 4, οπότε $200 = 7 \cdot 28 + 4$. Έτσι, μέχρι την $196^η$ θέση έχουμε 28 φορές επανάληψη της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ» οπότε το γράμμα που βρίσκεται στην $200^η$ θέση είναι το $4^ο$ γράμμα της λέξης, δηλαδή είναι το γράμμα Ε.

14927

ΘΕΜΑ 4

Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να δείξετε ότι το κόστος για ν καλεσμένους είναι $\alpha_\nu = 107\nu + 1210$. (1)

(Μονάδες 9)

β) Να ερμηνεύσετε τη σημασία

i. του αριθμού 1210 στη σχέση (1).

(Μονάδες 5)

ii. της διαφοράς $\omega = 107$ της προόδου στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους.

(Μονάδες 6)

14927-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, δηλαδή:

$$\alpha_{50} = 6560.$$

Το κόστος για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ, δηλαδή:

$$\alpha_{100} = 11910.$$

Οπότε:

$$\alpha_1 + 49\omega = 6560 \text{ και}$$

$$\alpha_1 + 99\omega = 11910.$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$50\omega = 5350 \text{ και τελικά}$$

$$\omega = 107.$$

Άρα

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + 49\omega = 6560 \Leftrightarrow \\ &\alpha_1 + 49 \cdot 107 = 6560 \Leftrightarrow \\ &\alpha_1 + 5243 = 6560 \Leftrightarrow \\ &\alpha_1 = 1317. \end{aligned}$$

Συνεπώς το κόστος για ν καλεσμένους είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1) \cdot \omega = 1317 + (\nu - 1) \cdot 107 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_\nu = 107\nu + 1210.$$

β)

i. Όπως δείξαμε στο α) ερώτημα, $\alpha_\nu = 107\nu + 1210$ είναι το κόστος για ν καλεσμένους. Ακόμα και αν δεν εμφανιστεί καλεσμένος στο γάμο, ο χώρος δεξίωσης θα κοστίσει στους ενδιαφερόμενους 1210 ευρώ.

ii. Έχουμε:

$$\alpha_1 = 107 \cdot 1 + 1210.$$

$$\alpha_2 = 107 \cdot 2 + 1210 = \alpha_1 + 107.$$

$$\alpha_3 = 107 \cdot 3 + 1210 = 107 \cdot (2 + 1) + 1210 = 107 \cdot 2 + 1210 + 107 = \alpha_2 + 107, \text{ κοκ.}$$

14927-Λύση

Οπότε κάθε φορά που το πλήθος των καλεσμένων αυξάνει κατά ένα άτομο το κόστος της δεξίωσης του γάμου θα αυξάνει κατά 107 ευρώ.

γ) Το κόστος για 80 καλεσμένους θα είναι $\alpha_{80} = 107 \cdot 80 + 1210 = 9770$ ευρώ.

14935

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

ii. Αν $\rho>0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $|x|<\rho \Leftrightarrow -\rho<x<\rho$.

iii. Η εξίσωση $x^{\nu}=\alpha$, με ν περιττό φυσικό και $\alpha<0$, έχει λύση την $x=\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.

iv. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(3,\,5)$ ισχύει $f(5)=3$.

v. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2=\alpha\gamma$.

(Μονάδες 10 (5×2))

β) Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι:

$$\alpha_{\nu}=\alpha_1+(\nu-1)\omega$$

(Μονάδες 15)

14935-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Λ

ii. Σ

iii. Λ

iv. Λ

v. Σ

β) Θεωρία § 5.2

14962

ΘΕΜΑ 4

Έστω μία αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά $\omega = 3$. Αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $\Delta = [2,8]$ υπάρχουν ακριβώς 3 διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου (α_ν),

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός μηδέν είναι όρος της (α_ν).

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τους 3 διαδοχικούς όρους της (α_ν) που υπάρχουν στο $\Delta = [2,8]$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha_6 = 14$,

i. να βρείτε τον α_1.

(Μονάδες 6)

ii. να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της (α_ν) που πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο του 186.

(Δίνεται $\sqrt{4489} = 67$)

(Μονάδες 6)

14962-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αν ο μηδέν ήταν όρος της (α_ν), τότε δεδομένου ότι $\omega=3$, οι επόμενοι όροι της (α_ν) θα ήταν οι αριθμοί $3,6,9$, πράγμα άτοπο διότι τότε δεν θα υπήρχαν στο διάστημα $\Delta=[2,8]$ ακριβώς 3 όροι της (α_ν). Συνεπώς ο αριθμός μηδέν δεν μπορεί να είναι όρος της (α_ν).

β) Αφού $\omega=3$, οι 3 ζητούμενοι όροι της (α_ν) θα είναι της μορφής $x, x+3, x+6$ και για να ανήκουν στο διάστημα Δ πρέπει και αρκεί $2\le x$ και $x+6\le 8 \Leftrightarrow x\le 2$. Συνεπώς $2\le x\le 2$ δηλαδή $x=2$ και οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι $2,5,8$.

γ)

i. Είναι $\alpha_6=\alpha_1+(6-1)\cdot\omega \Leftrightarrow 14=\alpha_1+15 \Leftrightarrow \alpha_1=-1$

ii. Αναζητούμε τη μικρότερη τιμή του φυσικού αριθμού ν ώστε $S_\nu>186$ δηλαδή ισοδύναμα

$$\frac{\left(2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega\right)\nu}{2}>186 \Leftrightarrow$$
$$\frac{\left(-2+(\nu-1)\cdot 3\right)\nu}{2}>186 \Leftrightarrow$$
$$3\nu^2-5\nu>372 \Leftrightarrow$$
$$3\nu^2-5\nu-372>0.$$

Το τριώνυμο $3\nu^2-5\nu-372$ έχει ρίζες τους αριθμούς 12 και $-\dfrac{31}{3}$ και για να είναι θετικό θα πρέπει $\nu>12$ ή $\nu<-\dfrac{31}{3}$.

Συνεπώς η μικρότερη τιμή του φυσικού αριθμού ν ώστε $S_\nu>186$ είναι 13.

32741

ΘΕΜΑ 4

Στην Α' τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας, η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται τον Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x-1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η Α' τάξη έχει 90 μαθητές.

(Μονάδες 6)

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες θα δημιουργηθούν.

(Μονάδες 13)

32741-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στην πρώτη περίπτωση το πλήθος των μαθητών είναι $x(x-1)$ ενώ στη δεύτερη $(x+3)(x-3)-1$. Άρα πρέπει:

$$x(x-1)=(x+3)(x-3)-1$$

ή ισοδύναμα

$$x^2-x=x^2-3^2-1$$

οπότε

$$-x=-9-1 \Leftrightarrow -x=-10 \Leftrightarrow x=10.$$

β) Θέτουμε στον τύπο $x(x-1)$ που δίνει το πλήθος των μαθητών όπου $x=10$ και βρίσκουμε:

$$10(10-1)=10\cdot 9=90.$$

Άρα, οι μαθητές της Α τάξης είναι 90.

γ) Το πλήθος των μαθητών στις ν ομάδες εργασίας είναι όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1=2$, διαφορά $\omega=2$ και άθροισμα $S_\nu=90$. Οπότε, από τον τύπο

$$S_\nu=\frac{\nu}{2}[2\alpha_1+(\nu-1)\omega]$$

έχουμε ότι:

$$90=\frac{\nu}{2}[2\cdot 2+(\nu-1)2] \Leftrightarrow$$

$$90=\frac{\nu}{2}(4+2\nu-2) \Leftrightarrow$$

$$90=2\nu+\nu^2-\nu \Leftrightarrow$$

$$\nu^2+\nu-90=0.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού ως προς ν με $\alpha=1$, $\beta=1$, και $\gamma=-90$. Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot 1\cdot(-90)=1+360=361>0$$

και έχει ρίζες τις:

$$\nu_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{361}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 19}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1+19}{2}=9\\ \dfrac{-1-19}{2}=-10\end{cases}.$$

Η τιμή $\nu=-10$ απορρίπτεται διότι $\nu\in\mathbb{N}$. Άρα θα δημιουργηθούν $\nu=9$ ομάδες εργασίας.

33579

ΘΕΜΑ 4

Οι αριθμοί : $x^2+5, \quad x^2+x, \quad 2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x.

(Μονάδες 6)

β) Αν $x=3$ και ο αριθμός x^2+5 είναι ο $4^{ος}$ όρος της προόδου, να βρείτε:

i. Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 5)

ii. Τον πρώτο όρο της προόδου.

(Μονάδες 6)

iii. Το άθροισμα $S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+...+\alpha_{24}$.

(Μονάδες 8)

33579-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί: $x^2+5,\quad x^2+x,\quad 2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, οπότε ισχύει η σχέση: $2\left(x^2+x\right)=\left(2x+4\right)+\left(x^2+5\right)$.

Έχουμε ισοδύναμα:

$2x^2+2x=x^2+2x+9$, δηλαδή

$x^2=9$ και τελικά

$x=3$ ή $x=-3$

β)

i. Αν ο αριθμός x^2+5 είναι ο 4^{ος} όρος της προόδου, τότε ο x^2+x θα είναι ο 5^{ος} όρος της. Άρα για $x=3$, $\alpha_4=3^2+5=14$ και $\alpha_5=3^2+3=12$.Οπότε $\omega=\alpha_5-\alpha_4=12-14=-2$

ii. Ισχύει $\alpha_4=\alpha_1+3\omega$, δηλαδή $14=\alpha_1+3\cdot(-2)$, οπότε $\alpha_1=20$.

iii. Το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+\ldots+\alpha_{24}=\left(\alpha_1+\alpha_2+\ldots.+\alpha_{24}\right)-\left(\alpha_1+\alpha_2+\ldots.+\alpha_{14}\right)=$$

$$=S_{24}-S_{14}=\frac{24}{2}\cdot\left[2\cdot 20+23\cdot(-2)\right]-\frac{14}{2}\cdot\left[2\cdot 20+13\cdot(-2)\right]=$$

$$12\cdot(40-46)-7\cdot(40-26)=-170.$$

33581

ΘΕΜΑ 4

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο 3^{ος} όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο 8^{ος} όρος είναι $\alpha_8 = 23$.

α) Να βρείτε τον 1^{ο} όρο α_1 και τη διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 9)

Αν $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$,

β) Να υπολογίσετε τον 31^{ο} όρο της προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \ldots + (\alpha_{31} + 31)$

(Μονάδες 10)

33581-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\begin{cases}\alpha_3=8\\ \alpha_8=23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+2\omega=8\\ \alpha_1+7\omega=23\end{cases}\overset{(-)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}5\omega=15\\ \alpha_1+2\omega=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\omega=3\\ \alpha_1+2\cdot3=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\omega=3\\ \alpha_1=2\end{cases}.$$

β) Είναι: $\alpha_{31}=\alpha_1+30\omega=2+30\cdot3=92$.

γ) Έχουμε:

$$S=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+3)+\ldots+(\alpha_{31}+31)$$

$$=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{31})+(1+2+3+\ldots+31)=$$

$$=\frac{31}{2}\cdot(2\cdot2+30\cdot3)+\frac{31}{2}\cdot(2\cdot1+30\cdot1)=\frac{31}{2}\cdot(94+32)=$$

$$=\frac{31}{2}\cdot126=1953.$$

33583

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$.

α) Να αποδείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 4$ και η διαφορά είναι $\omega = 3$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

(Μονάδες 9)

33583-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_3=10\\ \alpha_{20}=61\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha_1+2\omega=10\\ \alpha_1+19\omega=61\end{array}\right\}\overset{(-)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}17\omega=51\\ \alpha_1+2\omega=10\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\omega=3\\ \alpha_1=4\end{array}\right\}.$$

β) Έχουμε:

$$\alpha_\nu=333\Leftrightarrow\alpha_1+(\nu-1)\omega=333\Leftrightarrow 4+(\nu-1)\cdot 3=333\Leftrightarrow(\nu-1)=\frac{329}{3}\Leftrightarrow\nu=\frac{332}{3}\notin\mathbb{N}.$$

Συνεπώς ο 333 δεν είναι όρος της προόδου.

γ) Εάν οι x και y είναι διαδοχικοί όροι της παραπάνω προόδου (α_ν) και εφόσον $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}\Leftrightarrow 3x=2y<3y\Leftrightarrow x<y$, θα ισχύει $y=x+3$. Οπότε:

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\frac{x+3}{3}\Leftrightarrow 3x=2x+6\Leftrightarrow x=6.$$

Όμως ο $x=6$ δεν μπορεί να είναι όρος της παραπάνω προόδου, αφού

$$\alpha_\nu=6\Leftrightarrow\alpha_1+(\nu-1)\omega=6\Leftrightarrow 4+(\nu-1)\cdot 3=6\Leftrightarrow(\nu-1)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\nu=\frac{5}{3}\notin\mathbb{N}.$$

Άρα δεν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου ώστε να ισχύει $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$.

33858

ΘΕΜΑ 4

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa+1)^2$, όπου κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι περιττός αριθμός.

(Μονάδες 8)

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$, τότε:

i. Να βρείτε την τιμή του κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$.

(Μονάδες 8)

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 72 είναι όρος της προόδου.

(Μονάδες 9)

33858-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για τη διαφορά ω της προόδου ισχύει ότι:

$$\omega = \alpha_3 - \alpha_2 = (\kappa+1)^2 - \kappa^2 =$$
$$= \kappa^2 + 2\kappa + 1 - \kappa^2 = 2\kappa + 1. \quad (1)$$

Άρα, η διαφορά ω είναι περιττός αριθμός.

β)

i. Έχουμε ότι:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \kappa^2 = 2 + 2\kappa + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \kappa^2 - 2\kappa - 3 = 0.$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 > 0$$

και ρίζες τις:

$$\kappa_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} \dfrac{2+4}{2} = 3 \\ \dfrac{2-4}{2} = -1 \end{cases}.$$

Η τιμή $\kappa = -1$ απορρίπτεται γιατί $\kappa > 1$. Άρα, $\kappa = 3$. Οπότε, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\omega = 2 \cdot 3 + 1 = 7.$$

ii. Για να είναι ο 72 όρος της προόδου, πρέπει να υπάρχει φυσικός αριθμός ν τέτοιος ώστε:

$$\alpha_\nu = 72 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 72 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 + (\nu - 1)7 = 72 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 + 7\nu - 7 = 72 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7\nu = 77 \Leftrightarrow \nu = 11.$$

Άρα, ο αριθμός 72 είναι ο 11$^{\text{ος}}$ όρος της προόδου.

34145

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να δείξετε ότι: $\dfrac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=2$.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha_{15}-\alpha_9=18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 12)

34145-Λύση

α) Είναι:

$$\frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=\frac{\alpha_1+(15-1)\omega-[\alpha_1+(9-1)\omega]}{\alpha_1+(10-1)\omega-[\alpha_1+(7-1)\omega]}=\frac{\alpha_1+14\omega-\alpha_1-8\omega}{\alpha_1+9\omega-\alpha_1-6\omega}=\frac{6\omega}{3\omega}=2$$

β) Έχουμε:

$$\frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=2\Leftrightarrow\frac{18}{\alpha_1+9\omega-\alpha_1-6\omega}=2\Leftrightarrow\frac{18}{3\omega}=2\Leftrightarrow 18=6\omega\Leftrightarrow\omega=3$$

34147

ΘΕΜΑ 2

Σε αριθμητική πρόοδο (αν) με διαφορά ω = 4, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

(Μονάδες 12)

β**)** Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

34147-Λύση

α) Είναι:

$$\alpha_6 + \alpha_{11} = 40 \Leftrightarrow \alpha_1 + (6-1)\omega + \alpha_1 + (11-1)\omega = 40$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha_1 + 5\omega + 10\omega = 40$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha_1 + 15\omega = 40$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha_1 + 15 \cdot 4 = 40$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha_1 + 60 = 40$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha_1 = -20$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = -10$$

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} S_v = 0 &\Leftrightarrow \frac{v}{2}[2\alpha_1 + (v-1)\omega] = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{v}{2}[2(-10) + (v-1)4] = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{v}{2}(-20 + 4v - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow -24 + 4v = 0 \\ &\Leftrightarrow 4v = 24 \Leftrightarrow v = 6 \end{aligned}$$

Άρα πρέπει να προσθέσουμε τους πρώτους έξι όρους ώστε το άθροισμα να είναι ίσο με μηδέν.

34153

ΘΕΜΑ 2

Οι αριθμοί x+6, 5x+2, 11x-6 είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι ω=4.

(Μονάδες 12)

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.

(Μονάδες 13)

34153-Λύση

α) Οι αριθμοί x + 6, 5x + 2, 11x – 6 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$5x+2=\frac{x+6+11x-6}{2} \Leftrightarrow 5x+2=\frac{12x}{2} \Leftrightarrow 5x+2=6x \Leftrightarrow x=2 \ .$$

Είναι:

$$\omega = 5x+2-(x+6)==5x+2-x-6==4x-4=4\cdot 2-4=4 \ .$$

β) Ισχύει ότι:

$$\alpha_8=\alpha_1+(8-1)\omega=0+7\cdot 4=28 \ .$$

Τότε είναι:

$$S_8=\frac{8}{2}\left(\alpha_1+\alpha_8\right)=4(0+28)=4\cdot 28=112 \ .$$

34158

ΘΕΜΑ 2

Σε αριθμητική πρόοδο (αν) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με 3.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου (αν) πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77.

(Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$).

(Μονάδες 13)

34158-Λύση

α) Είναι:

$$\alpha_5 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + (5-1)\omega = 14$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 4\omega = 14$$
$$\Leftrightarrow 4\omega = 12$$
$$\Leftrightarrow \omega = 3$$

β) Έχουμε:

$$S_\nu = 77 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right] = 77$$
$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left[2\cdot 2 + (\nu-1)3\right] = 77$$
$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(4 + 3\nu - 3) = 77$$
$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(3\nu + 1) = 77$$
$$\Leftrightarrow \frac{3\nu^2 + \nu}{2} = 77$$
$$\Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu = 154$$
$$\Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu - 154 = 0 \qquad (1)$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot 3\cdot(-154) = 1 + 1848 = 1849 > 0.$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$\nu_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{1849}}{2\cdot 3} = \frac{-1 \pm 43}{6} = \begin{cases} \frac{-1+43}{6} = 7 \\ \frac{-1-43}{6} = -\frac{44}{6} \end{cases}$$

Η τιμή $\nu = -\frac{44}{6}$ απορρίπτεται, καθώς $\nu \in N$. Άρα πρέπει να προσθέσουμε τους 7 πρώτους όρους της προόδου ώστε το άθροισμα να είναι ίσο με 77.

34746

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\beta x+(\beta^2-4)$, (1) με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1=\beta-2$ και $x_2=\beta+2$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

34746-Λύση

Λύση

α) Το τριώνυμο $x^2-2\beta x+\beta^2-4$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2\beta)^2-4\cdot1\cdot(\beta^2-4)=4\beta^2-4\beta^2+16=16>0.$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2\beta\pm4}{2}$, οπότε έχουμε:

$x_1=\beta+2, x_2=\beta-2.$

Σημείωση: Μία εναλλακτική λύση είναι η εξής:

Η $x_1=\beta+2$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$(\beta+2)^2-2\beta(\beta+2)+\beta^2-4=\beta^2+4\beta+4-2\beta^2-4\beta+\beta^2-4=0.$$

Ομοίως η $x_2=\beta-2$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$(\beta-2)^2-2\beta(\beta-2)+\beta^2-4=\beta^2-4\beta+4-2\beta^2+4\beta+\beta^2-4=0.$$

Συνεπώς, η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις x_1, x_2, με $x_1\neq x_2$.

β) Οι αριθμοί β-2 , β, β+2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, διότι ισχύουν:

β-(β-2) = 2 και (β+2) – β = 2 , δηλαδή διαφέρον κατά σταθερό αριθμό ω = 2 .

34871

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε οι αριθμοί $x+2,\ x+1,\ 3x+2$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Για $x=-1$, να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 12)

34871-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $x+2,\ x+1,\ 3x+2$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $2(x+1)=(3x+2)+(x+2)$, οπότε ισοδύναμα έχουμε:

$2x+2=4x+4$, δηλαδή

$-2x=2$ και τελικά

$x=-1$.

β) Για $x=-1$, οι διαδοχικοί όροι της προόδου είναι $-1+2,\ -1+1,\ 3\cdot(-1)+2$, δηλαδή $1,0,-1$. Η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι: $\omega=0-1=-1$.

34877

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$ (1).

(Μονάδες 13)

β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 12)

34877-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο x^2-2x-3 έχει διακρίνουσα $\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=4+12=16>0$. Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι:

$$x_1=\frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{2-4}{2}=-1,$$

$$x_2=\frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{2+4}{2}=3.$$

β) Δεδομένου ότι $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$, δηλαδή οι αριθμοί $-1, 1, 3$, με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $2\cdot1=-1+3$, που ισχύει.

35046

ΘΕΜΑ 2

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

(Μονάδες 13)

35046-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + (25-1)\omega = \alpha_1 + (12-1)\omega + 39 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24\omega = 11\omega + 39 \Leftrightarrow$$

$$13\omega = 39 \Leftrightarrow \omega = 3$$

β) Ισχύει ότι:

$$\alpha_\nu = 152 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 152 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + (\nu-1)\cdot 3 = 152 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + 3\nu - 3 = 152 \Leftrightarrow$$

$$3\nu = 153 \Leftrightarrow \nu = 51$$

Άρα ο $51^{ος}$ όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστος όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

(Μονάδες 15)

35143-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_2 = 0 &\Leftrightarrow \alpha_1 + (2-1)\omega = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 + \omega = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 = -\omega \ \ (1) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \alpha_4 = 4 &\Leftrightarrow \alpha_4 + (4-1)\omega = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega = 4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow -\omega + 3\omega = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\omega = 4 \Leftrightarrow \omega = 2 \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε στην σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\alpha_1 = -2 .$$

β) Ο ν-οστός όρος της αριθμητικής προόδου είναι:

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_\nu &= -2 + (\nu - 1)\cdot 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_\nu &= 2\nu - 4 \end{aligned}$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$\begin{aligned} \alpha_\nu = 98 &\Leftrightarrow 2\nu - 4 = 98 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\nu = 102 \Leftrightarrow \nu = 51 \end{aligned}$$

Άρα ο 51^{ος} όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

35299

ΘΕΜΑ 2

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς.

(Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

(Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

(Μονάδες 8)

35299-Λύση

Λύση

α) Από τα δεδομένα της άσκησης είναι $\alpha_1 = 120$ και $\omega = 20$. Τότε:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 120 + (\nu - 1)20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 100 + 20\nu$$

β) Η τελευταία σειρά έχει:

$$\alpha_{10} = 100 + 20 \cdot 10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_{10} = 100 + 200 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_{10} = 300 \;\; \kappa\alpha\theta\acute{\iota}\sigma\mu\alpha\tau\alpha$$

γ) Το γυμναστήριο έχει συνολικά:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(\alpha_1 + \alpha_{10}) = 5(120 + 300) = 5 \cdot 420 = 2100 \;\; \kappa\alpha\theta\acute{\iota}\sigma\mu\alpha\tau\alpha$$

35375

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον α_{20}.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 8)

35375-Λύση

Λύση

α) Είναι:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{10}-\alpha_6=24\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \alpha_1+(10-1)\omega-\left[\alpha_1+(6-1)\omega\right]=24\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \alpha_1+9\omega-\alpha_1-5\omega=24\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow 4\omega=24\Leftrightarrow \omega=6
\end{aligned}$$

β) Έχουμε:

$$\alpha_{20}=\alpha_1+(20-1)\omega=19+19\cdot 6=19+114=133$$

γ) Ισχύει ότι:

$$S_{20}=\frac{20}{2}(\alpha_1+\alpha_{20})=10(19+133)=10\cdot 152=1520$$

ΘΕΜΑ 2

Οι αριθμοί $\mathrm{A}=1$, $\mathrm{B}=x+4$, $\Gamma=x+8$, είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να βρείτε την τιμή του x.

(Μονάδες 10)

β) Αν $x=1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν).

i. να υπολογίσετε τη διαφορά ω.

(Μονάδες 7)

ii. να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 8)

35408-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$\mathrm{B} = \frac{\mathrm{A}+\Gamma}{2} \Leftrightarrow x+4 = \frac{1+x+8}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(x+4) = 9+x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x+8 = x+9 \Leftrightarrow x=1$$

β)

i. Για $x=1$ είναι $\mathrm{A}=1$, $\mathrm{B}=5$ και $\Gamma=9$. Τότε:

$$\omega = \mathrm{B}-\mathrm{A} = 5-1 = 4$$

ii. Είναι:

$$\alpha_{20} = \alpha_1 + (20-1)\omega \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_{20} = 1+19\cdot 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_{20} = 1+76 \Leftrightarrow \alpha_{20} = 77$$

36650

ΘΕΜΑ 4

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21€ ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις.

Θέλοντας να αυξήσει την πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης να πληρώνει 0,5€ περισσότερα από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε πόσο θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.

(Μονάδες 4)

β) Αν, για κάθε $\nu \leq 51$ ο αριθμός α_ν εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51^{ος} επιβάτης.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21€ ανά εισιτήριο.

(Δίνεται: $\sqrt{10201} = 101$) (Μονάδες 8)

36650-Λύση

ΛΥΣΗ

Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Ο δεύτερος επιβάτης θα πληρώσει $3+0,5=3,5$€, ο τρίτος θα πληρώσει $3,5+0,5=4$€ και ο τέταρτος θα πληρώσει $4+0,5=4,5$€.

β) Δεδομένου ότι ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο, οι αριθμοί α_1, α_2, ..., α_{51} είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1=3$ και $\omega=0,5$.

γ) Ο 51[ος] επιβάτης θα πληρώσει $\alpha_{51}=3+(51-1)\cdot 0,5=28$€.

δ) Ζητάμε την μικρότερη τιμή του φυσικού αριθμού ν ώστε $S_\nu>30\cdot 21$. Είναι:

$$S_\nu>30\cdot 21 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2\cdot 3+(\nu-1)\cdot 0,5]>630$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left(6+\frac{\nu-1}{2}\right)>630 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left(\frac{12+\nu-1}{2}\right)>630$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu(\nu+11)}{4}>630 \Leftrightarrow \nu^2+11\nu-2520>0,\ (1)$$

Το τριώνυμο $\nu^2+11\nu-2520>0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=11^2-4(-2520)=10201$$

και ρίζες τους αριθμούς $\nu=45$, $\nu=-56$ που απορρίπτεται. Επομένως η ανίσωση (1) έχει λύση κάθε θετικό ακέραιο ν με $\nu>45$, οπότε για να συμφέρει η προσφορά πρέπει να πουληθούν τουλάχιστον 46 εισιτήρια.

36653

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ της οποίας οι τρεις πρώτοι όροι είναι:

$$\alpha_1 = x,\ \alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4,\ \alpha_3 = x^2 - 2\text{, με x ακέραιο.}$$

α) Να αποδείξετε ότι $x = 3$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον ν-οστό όρο της προόδου και να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να είναι ίσος με 2014.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{15}$.

(Μονάδες 7)

36653-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 4 - x = x^2 - 2 - (2x^2 - 3x - 4)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -\frac{2}{3}$$

Η τιμή $x = -\frac{2}{3}$ απορρίπτεται διότι δεν είναι ακέραιος.

β) Η αριθμητική πρόοδος έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 3$ και διαφορά $\omega = 2$. Άρα ο ν-οστός όρος της είναι: $\alpha_\nu = 3 + (\nu - 1) \cdot 2 = 2\nu + 1$.

Έστω ότι κάποιος όρος της ακολουθίας είναι ίσος με 2014. Τότε η εξίσωση $\alpha_\nu = 2014$ έχει λύση θετικό ακέραιο αριθμό. Είναι:

$$\alpha_\nu = 2014 \Leftrightarrow 2\nu + 1 = 2014 \Leftrightarrow \nu = \frac{2013}{2}$$

που δεν είναι θετικός ακέραιος.

Επομένως δεν υπάρχει όρος της προόδου που είναι ίσος με 2014.

γ) Είναι:

$$S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{15} = 3 + 7 + 11 + \ldots + 31$$

οπότε οι όροι του αθροίσματος σχηματίζουν μια αριθμητική πρόοδο (β_ν) με πρώτο όρο $\beta_1 = 3$ και διαφορά $\omega' = 4$. Αν ν είναι το πλήθος των όρων του αθροίσματος, τότε έχουμε:

$$\beta_\nu = 31 \Leftrightarrow 3 + (\nu - 1) \cdot 4 = 31 \Leftrightarrow 4\nu = 32 \Leftrightarrow \nu = 8$$

Επομένως το πλήθος των όρων του αθροίσματος είναι $\nu = 8$ και το ζητούμενο άθροισμα είναι

$$S = S_8 = \frac{8}{2}[2 \cdot 3 + (8 - 1) \cdot 4] = 136$$

36660

ΘΕΜΑ 4

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;

(Μονάδες 6)

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η $20^{η}$ κυψέλη;

(Μονάδες 6)

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη συλλέγει το μέλι, από μια κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει στην αποθήκη Α.

i. Ποια είναι η απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την $3^{η}$ κυψέλη;

(Μονάδες 6)

ii. Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

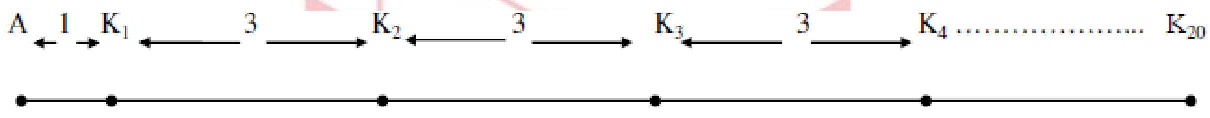
(Μονάδες 7)

36660-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι αποστάσεις (α_i), $i=1,2,3,\ldots,20$ των κυψελών $K_1, K_2, K_3, K_4, \ldots, K_{20}$ από την αποθήκη Α διαφέρουν πάντα κατά τον σταθερό αριθμό 3. Αποτελούν επομένως διαδοχικούς όρους α-ριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ (η απόσταση της κυψέλης K_1 από την αποθήκη Α) και διαφορά $\omega = 3$ (η απόσταση δύο διπλανών κυψελών). Ο ν-οστός όρος της προόδου είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 1 + (\nu-1)3 = 3\nu - 2$$



$AK_1 = \alpha_1$ $AK_2 = \alpha_2$ $AK_3 = \alpha_3$ $AK_4 = \alpha_4$ .... $AK_{20} = \alpha_{20}$

β) Αναζητούμε τον όρο α_{20}. Είναι:

$$\alpha_{20} = 3\cdot 20 - 2 = 58\,\text{m}$$

γ) i. Η διαδρομές που θα κάνει ο μελισσοκόμος είναι:

$$A \to K_1 \to A,\ A \to K_2 \to A,\ A \to K_3 \to A$$

Άρα θα διανύσει απόσταση

$$(1+1)+(4+4)+(7+7) = 24 \text{ μέτρα}$$

ii. Εφόσον πρέπει να πάει και να γυρίσει σε κάθε κυψέλη, η συνολική απόσταση για να συλλέξει το μέλι από όλες τις κυψέλες είναι

$$(1+1)+(4+4)+(7+7)+\ldots+(58+58) =$$

$$(1+4+7+\ldots+58)+(1+4+7+\ldots+58) = 2S_{20}$$

Τελικά η ζητούμενη συνολική απόσταση είναι:

$$2S_{20} = 2\cdot\frac{20}{2}(\alpha_1+\alpha_{20}) = 20(1+58) = 20\cdot 59 = 1.180 \text{ μέτρα.}$$

36662

ΘΕΜΑ 4

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του σταδίου.

(Μονάδες 5)

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την $7^η$ μέχρι και την $14^η$ σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

(Μονάδες 10)

36662-Λύση

ΛΥΣΗ

Επειδή κάθε σειρά καθισμάτων έχει 2 καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη, ο αριθμός των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = 12$ και $\omega = 2$.

α) Η μεσαία σειρά έχει:

$$\alpha_{13} = \alpha_1 + 12\omega = 12 + 12 \cdot 2 = 36 \text{ καθίσματα}$$

και η τελευταία σειρά έχει:

$$\alpha_{25} = \alpha_1 + 24\omega = 12 + 24 \cdot 2 = 60 \text{ καθίσματα.}$$

β) Η χωρητικότητα του σταδίου είναι:

$$S_{25} = \frac{25}{2}(\alpha_1 + \alpha_{25}) = \frac{25}{2}(12 + 60) = \frac{25}{2} \cdot 72 = \frac{1800}{2} = 900 \text{ καθίσματα.}$$

γ) Το πλήθος των μαθητών του Λυκείου είναι:

$$S = S_{14} - S_6 = \frac{14}{2}(2\alpha_1 + 13\omega) - \frac{6}{2}(2\alpha_1 + 5\omega)$$

$$= 7(2 \cdot 12 + 13 \cdot 2) - 3(2 \cdot 12 + 5 \cdot 2) = 7 \cdot 50 - 3 \cdot 34 = 350 - 102 = 248$$

36674

ΘΕΜΑ 4

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.

(Μονάδες 7)

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

(Μονάδες 7)

36674-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Επειδή κάθε όρος που προστίθεται προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού, που είναι το 4, οι αριθμοί που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $α_1 = 3$ και $ω = 4$.

β) Είναι: $S_{40} = \frac{[2\cdot 3+(40-1)\cdot 4]\cdot 40}{2} = (6+39\cdot 4)\cdot 20 = 3240$.

γ) Για να είναι ο αριθμός 120 ένας από τους 40 αυτούς αριθμούς, πρέπει και αρκεί να υπάρχει φυσικός αριθμός ν, ώστε:

$$\begin{aligned}&\alpha_\nu = 120 \Leftrightarrow\\ &3+(\nu-1)\cdot 4 = 120 \Leftrightarrow\\ &3+4\nu-4 = 120 \Leftrightarrow\\ &4\nu = 121 \Leftrightarrow\\ &\nu = \frac{121}{4}\end{aligned}$$

Ο αριθμός $\frac{121}{4}$ δεν είναι φυσικός και επομένως δεν μπορεί ο αριθμός 120 να είναι όρος της αριθμητικής προόδου.

δ) Θα βρούμε ποιος όρος της προόδου είναι ο αριθμός 235. Είναι:

$$\begin{aligned}&\alpha_\nu = 235 \Leftrightarrow\\ &3+(\nu-1)\cdot 4 = 235 \Leftrightarrow\\ &3+4\nu-4 = 235 \Leftrightarrow\\ &4\nu = 236 \Leftrightarrow\\ &\nu = 59\end{aligned}$$

Είναι: $S_{59} = \frac{(\alpha_1+\alpha_{59})\cdot 59}{2} = \frac{(3+235)\cdot 59}{2} = 7021$.

Το ζητούμενο άθροισμα είναι: $S = S_{59} - S_{40} = 7021 - 3240 = 3781$.

36897

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1,2,3,...,\nu$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσοι από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους έχουν άθροισμα 45

(Μονάδες 13)

36897-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η ακολουθία των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1,2,3,...,\nu$ είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$, $\omega = 1$ και $\alpha_\nu = \nu$. Άρα το άθροισμα των ν πρώτων όρων αυτής, είναι:

$S_\nu = \frac{\nu}{2}\cdot(\alpha_1 + \alpha_\nu)$, δηλαδή $S_\nu = \frac{\nu}{2}\cdot(1+\nu)$.

β) Ψάχνουμε το πλήθος ν των όρων που έχουν άθροισμα 45, δηλαδή το ν ώστε $S_\nu = 45$, δηλαδή $\frac{\nu}{2}\cdot(1+\nu) = 45$, οπότε $\nu\cdot(\nu+1) = 90$. Οι δυο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί που έχουν γινόμενο ίσο με 90 είναι οι αριθμοί 9 και 10 (δηλαδή $\nu = 9$ και $\nu+1 = 10$). Άρα το άθροισμα των 9 πρώτων φυσικών αριθμών είναι ίσο με 45.

37204

ΘΕΜΑ 4

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η $1^η$ σειρά έχει 16 καθίσματα και η $7^η$ σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.

(Μονάδες 05)

β) Να βρείτε τον γενικό όρο της προόδου.

(Μονάδες 04)

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

(Μονάδες 05)

δ) Αν στην $1^η$ σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη $2^η$ υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην $3^η$ υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη $2^η$ και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i. Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

(Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

(Μονάδες 06)

37204-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Επειδή το πλήθος των καθισμάτων της κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων ω, οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) με $\alpha_1 = 16$ και διαφορά ω.

Είναι:

$$\alpha_7 = 28 \Leftrightarrow \alpha_1 + (7-1)\omega = 28 \Leftrightarrow$$
$$16 + 6\omega = 28 \Leftrightarrow 6\omega = 12 \Leftrightarrow \omega = 2$$

Άρα $\alpha_1 = 16$ και $\omega = 2$.

β) Έχουμε:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu = 16 + (\nu-1)\cdot 2 \Leftrightarrow$$
$$\alpha_\nu = 16 + 2\nu - 2 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2\nu + 14 \quad \mu\varepsilon\ 1 \le \nu \le 20$$

γ) Το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου είναι:

$$S_{20} = \frac{20}{2}\left[2\alpha_1 + (20-1)\omega\right] \Leftrightarrow$$
$$S_{20} = 10(2\cdot 16 + 19\cdot 2) \Leftrightarrow$$
$$S_{20} = 10(32+38) \Leftrightarrow$$
$$S_{20} = 10\cdot 70 \Leftrightarrow$$
$$S_{20} = 700$$

δ) Ο αριθμός των κενών καθισμάτων σε κάθε σειρά είναι αριθμητική πρόοδος (β_ν) με $\beta_1 = 6$ και $\omega = 3$. Ο ν-οστός όρος που εκφράζει το πλήθος των κενών καθισμάτων είναι:

$$\beta_\nu = \beta_1 + (\nu-1)\omega \Leftrightarrow$$
$$\beta_\nu = 6 + (\nu-1)\cdot 3 \Leftrightarrow$$
$$\beta_\nu = 6 + 3\nu - 3 \Leftrightarrow$$
$$\beta_\nu = 3\nu + 3$$

Άρα $\beta_\nu = 3\nu + 3$ με $1 \le \nu \le 11$ (διότι τα κενά καθίσματα δε μπορεί να είναι περισσότερα από τα καθίσματα της κάθε σειράς, δηλαδή πρέπει $\beta_\nu \le \alpha_\nu \Leftrightarrow \nu \le 11$)

i. Όλα τα καθίσματα θα είναι κενά της ν-οστής σειράς, όταν:

$$\beta_\nu = \alpha_\nu \Leftrightarrow$$
$$3\nu + 3 = 2\nu + 14 \Leftrightarrow$$
$$\nu = 11$$

Άρα από την 11η σειρά μέχρι την 20η, όλα τα καθίσματα είναι κενά.

ii. Το πλήθος των κενών καθισμάτων στις 10 πρώτες σειρές είναι:

37204-Λύση

$$S'_{10} = \frac{10}{2}\left[2\beta_1 + (10-1)\omega\right] \Leftrightarrow$$
$$S'_{10} = 5(2\cdot 6 + 9\cdot 3) \Leftrightarrow$$
$$S'_{10} = 5\cdot 39 \Leftrightarrow$$
$$S'_{10} = 195$$

Το πλήθος των καθισμάτων στις πρώτες 10 σειρές είναι:

$$S_{10} = \frac{10}{2}\left[2\alpha_1 + (10-1)\omega\right] \Leftrightarrow$$
$$S_{10} = 5(2\cdot 16 + 9\cdot 2) \Leftrightarrow$$
$$S_{10} = 5\cdot 50 \Leftrightarrow$$
$$S_{10} = 250$$

Ο αριθμός των θεατών που κάθονται στις πρώτες 10 θέσεις είναι:

$$S_{10} - S'_{10} = 250 - 195 = 55$$

Αυτός είναι και ο συνολικός αριθμός θεατών, αφού από την 11^{η} σειρά και μετά όλα τα καθίσματα είναι κενά.