13056

ΘΕΜΑ 4

Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10, ... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί.

.	. . .	. . . . . .	. . . .	…
1	3	6	10	…

Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο $T_\nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α) Να βρείτε τον 10^{o} τριγωνικό αριθμό.

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

(Μονάδες 10)

13056-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Ο δέκατος τριγωνικός αριθμός είναι

$$T_{10} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

β) Ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός μόνο όταν η εξίσωση $T_\nu = 120$ έχει λύση θετικό ακέραιο αριθμό. Είναι:

$$T_\nu = 120 \Leftrightarrow \frac{\nu(\nu+1)}{2} = 120 \Leftrightarrow \nu(\nu+1) = 240 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 240 = 0$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = 961$ και οι ρίζες της

$$\nu_{1,2} = \frac{-1 \pm 31}{2} = \begin{cases} \nu_1 = \dfrac{30}{2} = 15 \\ \nu_2 = -\dfrac{32}{2} = -16 \end{cases}$$

Από τις ρίζες της εξίσωσης δεκτή είναι μόνο ο αριθμός 15. Άρα ο αριθμός 120 είναι ο δέκατος πέμπτος τριγωνικός αριθμός $(T_{15} = 120)$.

γ) Έστω T_ν, $T_{\nu+1}$ δυο διαδοχικοί τριγωνικοί αριθμοί με ν θετικό ακέραιο. Τότε έχουμε:

$$T_\nu + T_{\nu+1} = \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2} = \frac{1}{2}(\nu+1)(\nu+\nu+2) = \frac{1}{2}(\nu+1) \cdot 2(\nu+1) = (\nu+1)^2$$

οπότε το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.