15037

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+3}$ και

$g(x) = 3x - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g.

(Μονάδες 4)

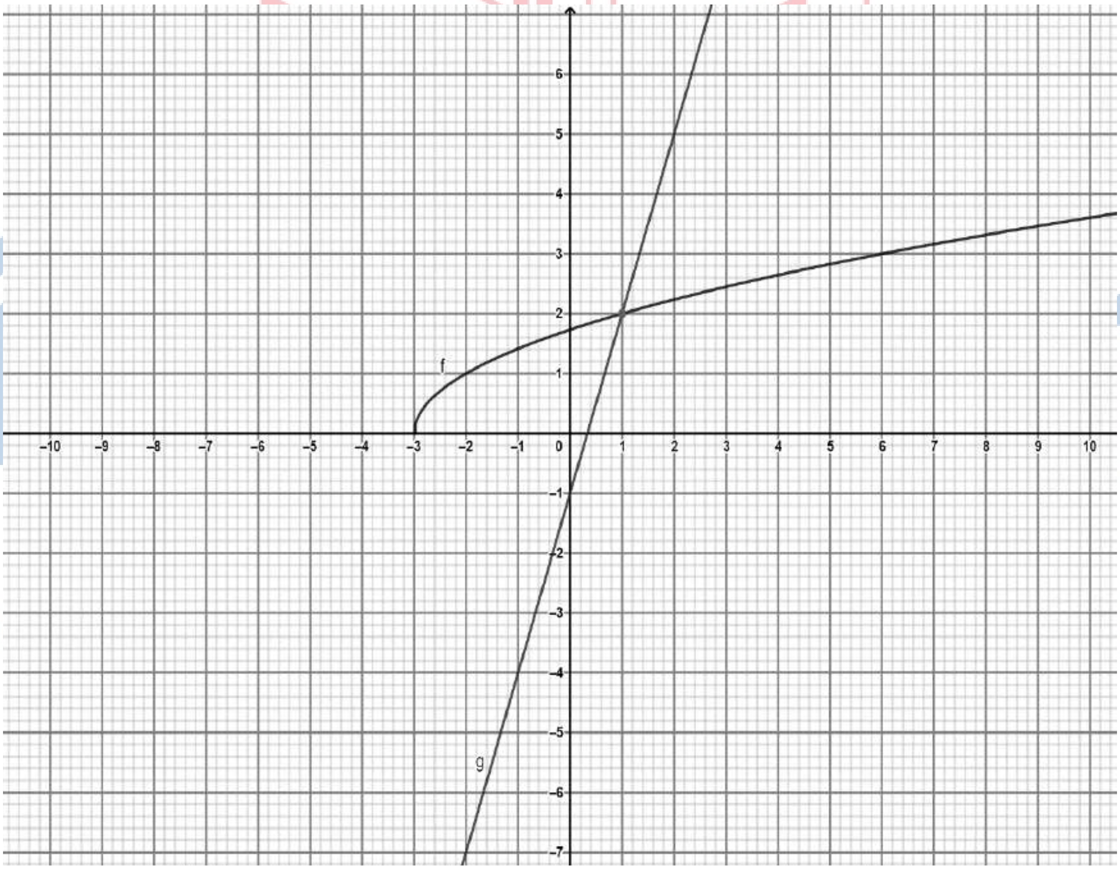
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 6)

γ)

i. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$. (Μονάδες 7)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του i ερωτήματος. (Μονάδες 8)



15037-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται μόνο για $x+3\geq 0$, δηλαδή για $x\geq -3$.

Άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι: $A_f=[-3,+\infty)$.

Σύμφωνα με το σχήμα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-3,+\infty)$.

Η συνάρτηση g παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του x και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εφόσον είναι της μορφής $y=\alpha x+\beta$ με $\alpha>0$.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=g(x)\Leftrightarrow\sqrt{x+3}=3x-1$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g που ανήκουν στο σύνολο Α=$A_f\cap A_g=[-3,+\infty)$.

Από το σχήμα παρατηρούμε πως οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στο σημείο (1,2), δηλαδή στο σημείο με τετμημένη x=1 και 1ϵA.

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση x=1.

β) **Εναλλακτική λύση :**

Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ προκύπτουν από τις λύσεις της παρακάτω εξίσωσης

$$\sqrt{x+3}=3x-1.$$

Η εξίσωση ορίζεται για $x\geq -3$ και $3x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{3}$.

$\sqrt{x+3}=3x-1$ υψώνουμε και τα δυο μέλη στο τετράγωνο

$\sqrt{x+3}^2=(3x-1)^2\Leftrightarrow x+3=9x^2-6x+1\Leftrightarrow 9x^2-7x-2=0.$.

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι 1 και $-\frac{2}{9}$. Από τις ρίζες αυτές διαπιστώνουμε με επαλήθευση ότι μόνο η x=1 είναι δεκτή.

Άρα, μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ είναι η x=1.

γ) i. Η ανίσωση $f(x)<g(x)$ λύνεται γραφικά με το να βρούμε τις τετμημένες, δηλαδή τα x, όπου η C_f είναι κάτω από C_g.

Από το σχήμα προκύπτει πως αυτό συμβαίνει για $x\epsilon(1,+\infty)$.

ii. Αλγεβρικά η ανίσωση λύνεται:

15037-Λύση

Για $3x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{3}$ και $x\geq -3$, έχουμε

$$f(x)<g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+3}<3x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}^2<(3x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$x+3<9x^2-6x+1 \Leftrightarrow$$

$$9x^2-7x-2>0 \ \text{ τότε}$$

$$x\epsilon(-\infty,-\frac{2}{9})\cup(1,+\infty).$$

Σύμφωνα με τους περιορισμούς η ανίσωση αληθεύει για $x\epsilon(1,+\infty)$.

Για $3x-1<0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{3}$ και $x\geq -3$, έχουμε $\sqrt{x+3}<3x-1$ αδύνατη.

15187

ΘΕΜΑ 4

Για τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος ισχύει

$$5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0.$$

α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε:

i. την τιμή του $\sigma\upsilon\nu\omega$,

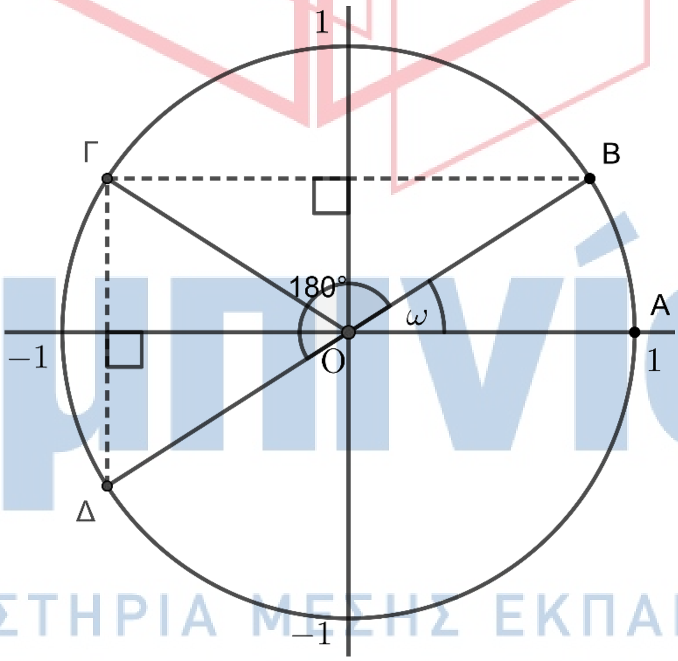
(Μονάδες 6)

ii. τις συντεταγμένες των σημείων B, Γ και Δ,

(Μονάδες 6)

iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$.

(Μονάδες 5)



15187-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $ημω = x$ και η εξίσωση γράφεται:

$$5x^3 - 8x^2 - 7x + 6 = 0.$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του 6, δηλαδή οι $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Με δοκιμή διαπιστώνουμε ότι ο -1 είναι ρίζα. Κάνουμε τη διαίρεση $(5x^3 - 8x^2 - 7x + 6):(x + 1)$.

5	-8	-7	6	-1
	-5	13	-6	
5	-13	6	0	

Άρα $5x^3 - 8x^2 - 7x + 6 = (x + 1)(5x^2 - 13x + 6)$.

Το τριώνυμο $5x^2 - 13x + 6$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 6 = 169 - 120 = 49$ και ρίζες:

$$x_1 = \frac{13 + \sqrt{49}}{2 \cdot 5} = \frac{13 + 7}{10} = 2$$

και

$$x_2 = \frac{13 - \sqrt{49}}{2 \cdot 5} = \frac{13 - 7}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Επειδή $0 < ω < \frac{\pi}{2}$, είναι $0 < ημω < 1$, άρα η μόνη αποδεκτή λύση είναι $ημω = \frac{3}{5}$.

β)

i. Ισχύει ότι:

$$ημ^2ω + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow$$
$$συν^2ω = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

Επειδή $0 < ω < \frac{\pi}{2}$, είναι $συνω > 0$. Άρα,

$$συνω = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

ii. Από τον τριγωνομετρικό κύκλο γνωρίζουμε ότι το σημείο B έχει συντεταγμένες $(συνω, ημω)$, άρα $B(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$. Τα σημεία Γ και Δ είναι συμμετρικά του B ως προς τον άξονα $y'y$ και την αρχή O αντίστοιχα. Οπότε είναι:

$$\Gamma\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \Delta\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

15187-Λύση

iii. Το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$ είναι οι τεταγμένες και οι τετμημένες των σημείων B, Γ και Δ αντίστοιχα. Άρα,

$$\eta\mu A\hat{O}B = \frac{3}{5}, \qquad \sigma\upsilon\nu A\hat{O}B = \frac{4}{5},$$

$$\eta\mu A\hat{O}\Gamma = \frac{3}{5}, \qquad \sigma\upsilon\nu A\hat{O}\Gamma = -\frac{4}{5},$$

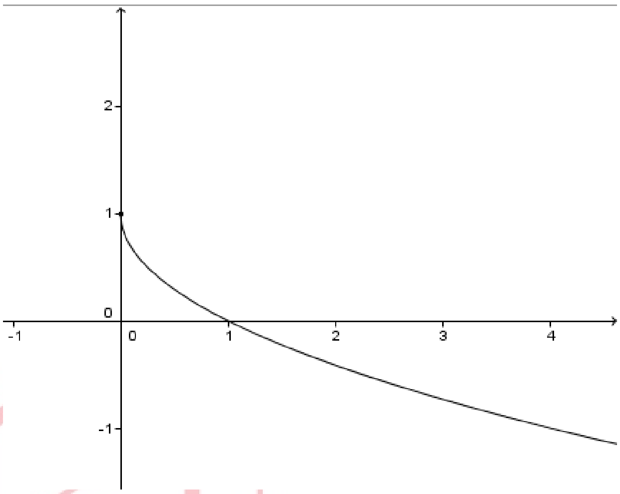
και

$$\eta\mu A\hat{O}\Delta = -\frac{3}{5}, \qquad \sigma\upsilon\nu A\hat{O}\Delta = -\frac{4}{5}.$$

15270

ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$.



α) Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 6)

β) Αν $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$, και $0<\alpha<\frac{1}{4}<\beta$, να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $P=\left(2f(\alpha)-1\right)\left(2f(\beta)-1\right)$

(Μονάδες 10)

γ) Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η $f(x)=1-\sqrt{x}$, $x\geq 0$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y=2x$.

(Μονάδες 9)

15270-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από το σχήμα της εκφώνησης προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. Επίσης, η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 1 και επιτυγχάνεται όταν $x=0$.

β) Από την ανισότητα $\alpha<\frac{1}{4}$ και τη μονοτονία της f συμπεραίνουμε ότι $f(\alpha)>f\left(\frac{1}{4}\right)\Rightarrow f(\alpha)>\frac{1}{2}$, οπότε $2f(\alpha)-1>0$.

Επίσης, $\beta>\frac{1}{4}$, οπότε $f(\beta)<f\left(\frac{1}{4}\right)\Rightarrow f(\beta)<\frac{1}{2}$, απ' όπου προκύπτει ότι $2f(\beta)-1<0$.

Άρα, $P=\left(2f(\alpha)-1\right)\left(2f(\beta)-1\right)<0$.

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία, δίνονται από τη λύση της εξίσωσης $f(x)=2x$. Με $x\geq 0$ έχουμε:

$$f(x)=2x\Leftrightarrow 1-\sqrt{x}=2x\Leftrightarrow 2x+\sqrt{x}-1=0$$

Αν θέσουμε $\sqrt{x}=u$, τότε η εξίσωση γράφεται $2u^2+u-1=0$ και έχει λύσεις τους αριθμούς -1 και $\frac{1}{2}$. Έτσι έχουμε:

- $u=-1$: $\sqrt{x}=-1$ που είναι αδύνατη.
- $u=\frac{1}{2}$: $\sqrt{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$

Άρα το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την ευθεία είναι το $A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

Εναλλακτική λύση του ερωτήματος γ)

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\frac{1}{4}$ είναι λύση της εξίσωσης $f(x)=2x$. Επιπλέον:

- Αν $x>\frac{1}{4}$, τότε $2x>\frac{1}{2}$ και $f(x)<\frac{1}{2}$, οπότε $f(x)\neq 2x$.
- Αν $0\leq x<\frac{1}{4}$, τότε $2x<\frac{1}{2}$ και $f(x)>\frac{1}{2}$, οπότε $f(x)\neq 2x$.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μοναδική λύση την $x=\frac{1}{4}$ και το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την ευθεία είναι το $A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

15377

ΘΕΜΑ 4

Μία κυβική δεξαμενή Α έχει ακμή με μήκος x μέτρα.

Αν αυξηθεί η μία μόνο ακμή της κατά μία μονάδα θα μετατραπεί στη δεξαμενή Β σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τετράγωνη βάση.

α) Να βρείτε τη διαφορά $\Delta(x)$ των όγκων των δύο δεξαμενών ως συνάρτηση του x.

(Μονάδες 4)

β) Αν ο όγκος της δεξαμενής Β είναι 36 κυβικά μέτρα να βρείτε:

i. Τις διαστάσεις των δεξαμενών Α και Β.

(Μονάδες 9)

ii. Τη διαφορά των όγκων $\Delta(x)$.

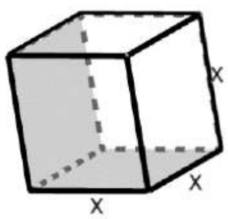
(Μονάδες 4)

γ) Αν επιπλέον αυξηθεί η μία ακμή της βάσης της δεξαμενής Β κατά 2 μονάδες, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του x ώστε ο όγκος της νέας δεξαμενής Γ να είναι τουλάχιστον 60 κυβικά μέτρα.

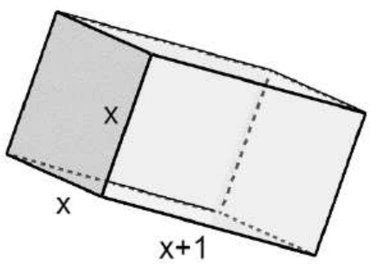
(Μονάδες 8)

Βοηθητικά δίνονται τα σχήματα των δεξαμενών Α, Β και Γ

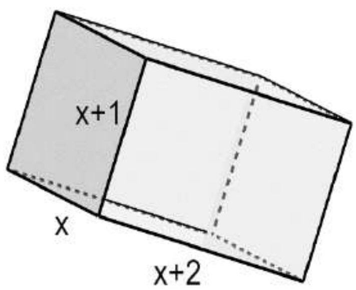
Δεξαμενή Α



Δεξαμενή Β



Δεξαμενή Γ



15377-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Ο όγκος της κυβικής δεξαμενής Α υπολογίζεται από τον τύπο του όγκου κύβου, δηλαδή $V_A(x) = x^3$ και ο όγκος της δεξαμενής Β, από τον τύπο του όγκου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, $V_B(x) = (x+1)\cdot x^2$.

Επομένως, $\Delta(x) = V_B(x) - V_A(x) = (x+1)\cdot x^2 - x^3 = x^3 + x^2 - x^3 = x^2$.

β) i. Επειδή $V_B(x) = 36 \Leftrightarrow (x+1)\cdot x^2 = 36 \Leftrightarrow x^3 + x^2 = 36$.

$$x^3 + x^2 = 36 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+4x+12) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 3 = 0 \text{ ή } x^2 + 4x + 12 = 0.$$

Άρα, έχει τη μοναδική λύση το x=3, το τριώνυμο $x^2 + 4x - 12 = 0$ έχει διακρίνουσα

Δ=-32<0. Η διάσταση της δεξαμενής Α είναι $x = 3$ μέτρα. Οι διαστάσεις της δεξαμενής Β είναι 3 μέτρα, 3 μέτρα και 4 μέτρα.

ii. Η διαφορά των όγκων $\Delta(x) = x^2$ για $x = 3$ προκύπτει ότι είναι ίση με 9 κυβικά μέτρα.

γ) Η νέα δεξαμενή Γ θα έχει όγκο $V_\Gamma(x) = (x+1)(x+2)x$.

Από τα δεδομένα έχουμε $V_\Gamma(x) \geq 60$.

Λύνουμε τη πολυωνυμική ανίσωση

$$x^3 + 3x^2 + 2x - 60 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+6x+20) \geq 0 \ (1).$$

Επειδή, το τριώνυμο $x^2 + 6x + 20$ διατηρεί θετικό πρόσημο για κάθε τιμή του x, το πρόσημο της ανίσωσης (1) καθορίζεται από το x-3.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης (1) είναι $x \geq 3$.

Επομένως, η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το x είναι το 3, που είναι και η ζητούμενη ακμή.

17941

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}=a, a \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση (1) .

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1) για $a=0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}$ είναι άρτια.

(Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι:

i) Για $a=2\sqrt{2}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα.

ii) Για $a\neq 2\sqrt{2}$ αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό $\rho \in [-2,2]$, τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό $-\rho$.

(Μονάδες 10)

17941-Λύση

Λύση

α) Για να έχει νόημα η εξίσωση (1) πρέπει οι παραστάσεις στις ρίζες να είναι μη αρνητικές.

Οπότε πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα: $2-x\geq 0 \in x\leq 2$ και $x+2\geq 0 \in x\geq -2$.

Συνεπώς $x\in[-2,2]$.

β) Για α=0 η εξίσωση γίνεται: $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}=0$. Το άθροισμα δύο μη αρνητικών ποσοτήτων είναι ίσο με μηδέν αν και μόνο αν και οι δύο είναι ταυτόχρονα 0. Δηλαδή, πρέπει να ισχύει:

$\begin{cases}\sqrt{2-x}=0\\ \sqrt{x+2}=0\end{cases} \in \begin{cases}x=2\\ x=-2\end{cases}$, τα οποία είναι αδύνατο να συμβαίνουν ταυτόχρονα.

Συνεπώς, η εξίσωση είναι αδύνατη.

γ) Ισχύει ότι αν $x\in[-2,2]\Rightarrow -x\in[-2,2]$, οπότε για τη συνάρτηση g έχουμε:

$g(-x)=\sqrt{2-(-x)}+\sqrt{-x+2}=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}=g(x)$, για κάθε $x\in[-2,2]$, που είναι το πεδίο ορισμού της g, οπότε η συνάρτηση είναι άρτια.

δ) i)

Η εξίσωση γίνεται:

$\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}=2\sqrt{2} \in 2-x+x+2+2\sqrt{2-x}\sqrt{x+2}=4\cdot 2 \in$

$\in 4+2\sqrt{2^2-x^2}=8 \in \sqrt{4-x^2}=2 \in 4-x^2=4 \in x=0$.

Άρα έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

ii) Για $a\neq 2\sqrt{2}$ η εξίσωση (1) έχει ρίζα την $x=\rho$, άρα θα ισχύει ότι $g(\rho)=a$. Όμως η

συνάρτηση g είναι άρτια, οπότε θα ισχύει ότι $g(-\rho)=g(\rho)=a$, οπότε και η $x=-\rho$ θα είναι ρίζα της εξίσωσης (1).

20647

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-\beta x+3,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος.

(Μονάδες 7)

Αν επιπλέον $P(1)=0$, τότε:

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-3$ και $\beta=\dfrac{21}{2}$.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\le 0$.

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $P(\sigma\upsilon\nu x)=0$.

(Μονάδες 6)

20647-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αν υποθέσουμε ότι το πολυώνυμο έχει ακέραιους συντελεστές, τότε κάθε ακέραια ρίζα του θα είναι διαιρέτης του σταθερού όρου του. Ο σταθερός όρος του όμως είναι ίσος με 3 και ο αριθμός 2 που είναι ρίζα του πολυωνύμου δεν είναι διαιρέτης του 3. Άρα το πολυώνυμο δεν έχει όλους τους συντελεστές του ακέραιους, οπότε υπάρχει ένας τουλάχιστον συντελεστής του που δεν είναι ακέραιος.

β) Με την επιπλέον πληροφορία ότι $P(1)=0$ έχουμε:

$$\begin{cases} P(2)=0 \\ P(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\alpha+4\beta-2\beta+3=0 \\ \alpha+\beta-\beta+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-3 \\ 2\beta=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-3 \\ \beta=\dfrac{21}{2} \end{cases}$$

γ) Με $\alpha=-3$ και $\beta=\dfrac{21}{2}$ έχουμε $P(x)=-3x^3+\dfrac{21}{2}x^2-\dfrac{21}{2}x+3$.

Αρχικά θα βρούμε τις ρίζες του πολυωνύμου.

Είναι: $P(x)=0 \Leftrightarrow -3x^3+\dfrac{21}{2}x^2-\dfrac{21}{2}x+3=0 \Leftrightarrow -6x^3+21x^2-21x+6=0$

Είναι όμως γνωστό ότι $P(1)=0$, οπότε με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος Horner έχουμε:

-6	21	-21	6	1
	-6	15	-6	
-6	15	-6	0	

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(-6x^2+15x-6)=0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } -6x^2+15x-6=0$$

Η εξίσωση $-6x^2+15x-6=0$ που είναι ισοδύναμη με την $2x^2-5x+2=0$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και $\dfrac{1}{2}$. Επομένως το πολυώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς $\dfrac{1}{2}$, 1 και 2.

Έχουμε λοιπόν:

$$P(x)\le 0 \Leftrightarrow -6(x-1)(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\le 0$$

και όταν $x>2$ όλοι οι παράγοντες του πολυωνύμου είναι θετικοί, οπότε αυτό είναι ομόσημο του -6, δηλαδή αρνητικό. Σε καθένα από τα προηγούμενα διαστήματα αλλάζει πρόσημο ακριβώς ένας όρος του γινομένου, οπότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας προσήμων του πολυωνύμου.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
P(x)		+	0	−	0	+	0	−	

20647-Λύση

Από τον πίνακα προκύπτει ότι λύση της ανίσωσης είναι κάθε αριθμός x με

$$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup [2, +\infty)$$

δ) Από το ερώτημα γ) έχουμε:

$$P(\text{συν}x) = 0 \Leftrightarrow \text{συν}x = \frac{1}{2} \text{ ή } \text{συν}x = 1 \text{ ή } \text{συν}x = 2$$

Η τελευταία είναι αδύνατη, αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \leq \text{συν}x \leq 1$. Έτσι, έχουμε:

- $\text{συν}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{συν}x = \text{συν}\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$

- $\text{συν}x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$