14955

ΘΕΜΑ 4

Η μέση θερμοκρασία Τ (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από x εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι $T(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$.

α) Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι μηδέν ^oC.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$ ώστε να ισχύει

$T(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$

(Μονάδες 10)

γ) Θεωρούμε ότι μια χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία Τ είναι συνεχώς κάτω από μηδέν ^oC. Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη;

(Μονάδες 10)

14955-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Ζητάμε τον αριθμό $T(2) = 2^3 - 10 \cdot 2^2 + 31 \cdot 2 - 30 = 8 - 40 + 62 - 30 = 0$.

β) Από το α) ερώτημα προκύπτει ότι το πολυώνυμο $T(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$, άρα η διαίρεση $T(x) : (x - 2)$ είναι τέλεια. Βρίσκουμε το πηλίκο αυτής της διαίρεσης με τη βοήθεια του σχήματος $Horner$.

1	- 10	31	- 30	2
	2	- 16	30	
1	- 8	15	0	

Ώστε $T(x) = (x - 2)(x^2 - 8x + 15)$.

Το τριώνυμο $x^2 - 8x + 15$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 4$ και ρίζες $x = \frac{8 \pm 2}{2}$, δηλαδή τους αριθμούς 3 και 5. Τελικά $T(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 5)$.

Έτσι $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 5$.

γ) Θέλουμε να βρούμε τα διαστήματα για τις τιμές x των οποίων θα είναι $T(x) < 0$. Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου των τιμών $T(x)$ για θετικές τιμές του x.

x	0 2	3	5	$+\infty$
$x - 2$	$-$	+	+	+
$x^2 - 8x + 15$	+	+	$-$	+
$T(x)$	$-$	+	$-$	+

Διαπιστώνουμε ότι παγετώνες θα υπάρχουν στον πλανήτη τα δύο πρώτα εκατομμύρια χρόνια και την χρονική περίοδο από τρία έως πέντε εκατομμύρια χρόνια.

15005

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

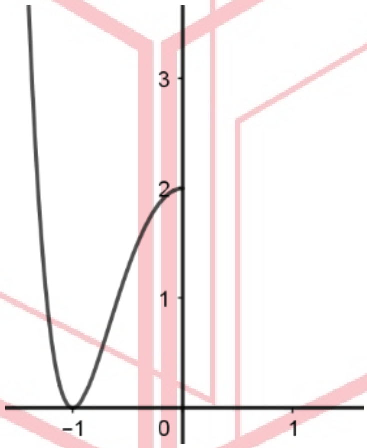
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f για $x \leq 0$. Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.



(Μονάδες 4)

δ) Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 6)

15005-Λύση

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$, οπότε αν $x \in \mathbb{R}$ τότε και $-x \in \mathbb{R}$.

Επίσης είναι: $f(-x) = (-x)^6 - 3(-x)^2 + 2 = x^6 - 3x^2 + 2 = f(x)$.

Άρα, η f είναι άρτια.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^6 - 3x^2 + 2 = 0$.

Θέτουμε $x^2 = y$ και η εξίσωση γίνεται

$$y^3 - 3y + 2 = 0 \quad (1).$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι διαιρέτες του 2, δηλαδή οι $\pm 1, \pm 2$. Για $\rho = 1$, κάνοντας τη διαίρεση με τη βοήθεια του σχήματος Horner, έχουμε:

1	0	-3	2	$\rho = 1$
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

Οπότε, το 1 είναι ρίζα και η εξίσωση (1) γίνεται:

$$(y-1)(y^2 + y - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

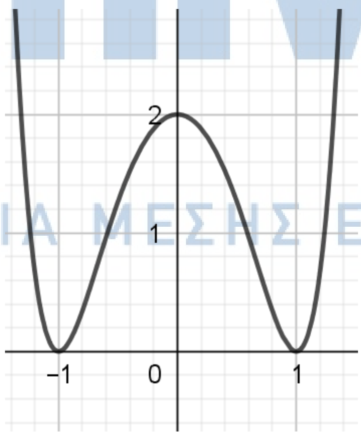
$$y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ή } y^2 + y - 2 = 0.$$

Η εξίσωση $y^2 + y - 2 = 0$ έχει ρίζες τις $y_1 = -2$ και $y_2 = 1$.

Οπότε, $x^2 = -2$, αδύνατη ή $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$.

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ είναι: $A(-1,0)$ και $B(1,0)$.

γ) Επειδή η f είναι άρτια, η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$, οπότε έχει την ακόλουθη μορφή:



δ) Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[0,1]$ και γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0]$ και $[1, +\infty)$.

15040

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$.

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της.

(Μονάδες 5)

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης

$$(x^3 - 7x + 6) : (x - 1)$$

και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$.

(Μονάδες 10)

15040-Λύση

ΛΥΣΗ

α)Με $x=1$ έχουμε:

$$x^3-7x+6=1^3-7\cdot 1+6=7-7=0$$

οπότε ο αριθμός 1 είναι ρίζα της εξίσωσης.

β) Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα Horner το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3-7x+6):(x-1)$ είναι x^2+x-6 και το υπόλοιπο 0, οπότε η ταυτότητα της διαίρεσης είναι η:

1	0	-7	6	1
	1	1	-6	
1	1	-6	0	

$$x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x-6)$$

γ) Από το ερώτημα β) έχουμε:

$$x^3-7x+6=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-6)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-3$$

15047

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα.

(Μονάδες 15)

15047-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $P(1)=1^4-1^3-5\cdot 1^2+7\cdot 1-2=1-1-5+7-2=0$, ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Οι πιθανές ακέραιες λύσεις του πολυωνύμου είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου του δηλαδή οι διαιρέτες του 2 που είναι οι αριθμοί $1, 2, -1, -2$.

Ο αριθμός 1 είδαμε ότι είναι ρίζα του πολυωνύμου. Εξετάζουμε αν κάποιος από τους άλλους αριθμούς είναι ρίζα. Είναι:

- $P(2)=16-8-20+14-2=0$
- $P(-1)=1+1-5-7-2=-12\neq 0$
- $P(-2)=16+8-20-14-2=-12\neq 0$

Επομένως οι ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι οι αριθμοί 1 και 2.

15066

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)=2x^4-5x^3+4x^2-5x+2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

(Μονάδες 5)

15066-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Επειδή $P(0)=2\neq 0$, το πολυώνυμο δεν έχει λύση τον αριθμό 0.

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου, τότε ισχύει $P(\rho)=0$ δηλαδή

$$2\rho^4-5\rho^3+4\rho^2-5\rho+2=0,\ (1).$$

Για να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του, αρκεί να δείξουμε ότι $P\left(\frac{1}{\rho}\right)=0$.

Πραγματικά, είναι:

$$P\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{2}{\rho^4}-\frac{5}{\rho^3}+\frac{4}{\rho^2}-\frac{5}{\rho}+2=\frac{1}{\rho^4}\left(2-5\rho+4\rho^2-5\rho^3+2\rho^4\right)=0$$

λόγω της (1).

β) Επειδή οι μοναδικοί θετικοί ακέραιοι αριθμοί που μπορεί να είναι ρίζες του είναι οι θετικοί διαιρέτες του 2, με $x=2$ έχουμε:

$$P(2)=2\cdot 16-5\cdot 8+4\cdot 4-5\cdot 2+2=50-50=0$$

οπότε ο αριθμός 2 είναι θετική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου.

γ) Η εξίσωση $P(x)=0$ έχει ρίζα τον αριθμό 2 και λόγω του ερωτήματος α) έχει ρίζα και τον αριθμό $\frac{1}{2}$.

Έτσι, με τη βοήθεια του σχήματος Horner έχουμε:

2	-5	4	-5	2	2
	4	-2	4	-2	
2	-1	2	-1	0	

$$P(x)=(x-2)(2x^3-x^2+2x-1)$$

και αν επαναλάβουμε τη διαδικασία για το πολυώνυμο $2x^3-x^2+2x-1$ με το $\frac{1}{2}$

2	-1	2	-1	$\frac{1}{2}$
	1	0	1	
2	0	2	0	

συμπεραίνουμε ότι

$$P(x)=(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2)=(x-2)(2x-1)(x^2+1)$$

οπότε

$$P(x)=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=\frac{1}{2}.$$

δ) Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x^2+1>0$, το πρόσημο του πολυωνύμου είναι ίδιο με το πρόσημο του τριωνύμου $(x-2)(2x-1)$. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων.

15066-Λύση

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$(x-2)(2x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προκύπτει ότι λύση της ανίσωσης $P(x)<0$ είναι κάθε αριθμός του διαστήματος $\left(\frac{1}{2},\,2\right)$.

15094

ΘΕΜΑ 4

Το διάστημα $S(t)$ σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή t σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t$

α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 2$.

(Μονάδες 03)

β) Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση *30* μέτρων.

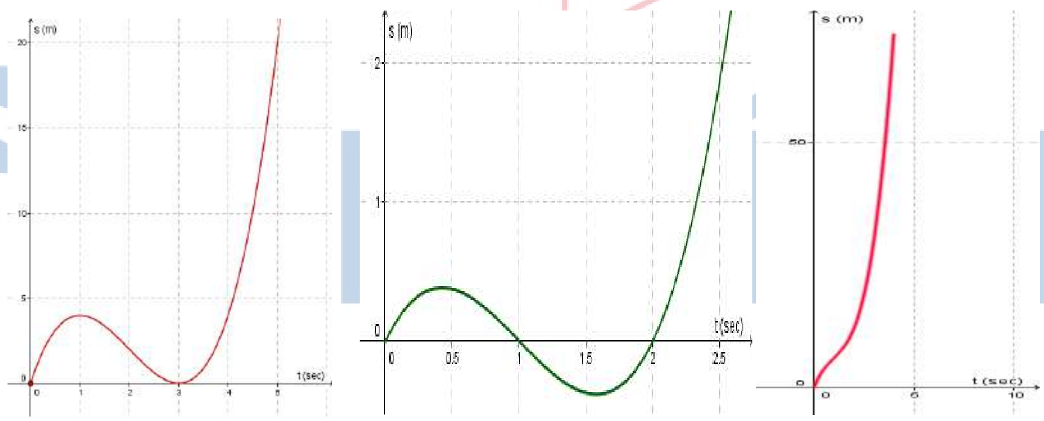
(Μονάδες 10)

γ) Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό.

(Μονάδες 08)

δ) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$ της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 04)



(I) (II) (III)

15094-Λύση

ΛΥΣΗ

α) $S(0) = 0$ (το κινητό βρίσκεται στην αφετηρία) και $S(2) = 2 \cdot 8 - 6 \cdot 4 + 20 = 12$ μέτρα.

β) $S(t) = 30 \Leftrightarrow 2t^3 - 6t^2 + 10t = 30 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 5t - 15 = 0$ (1).

Πιθανές ακέραιες ρίζες της (1) είναι οι ± 1, ± 3, ± 5, ± 15. Επειδή ο χρόνος είναι μη αρνητικό φυσικό μέγεθος, πιθανές ρίζες είναι οι 1, 3, 5, 15.

Η τιμή $t = 3$ επαληθεύει την εξίσωση και με τη βοήθεια του σχήματος Horner, έχουμε:

1	-3	5	-15	3
	3	0	15	
1	0	5	0	

Άρα η (1) $\Leftrightarrow (t-3)(t^2+5) = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Επομένως το κινητό θα χρειαστεί *3* δευτερόλεπτα για να διανύσει απόσταση *30* μέτρων.

γ) Πραγματικά, έχουμε:

$S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t = 2t(t^2 - 3t + 5) \geq 0$,

διότι $t \geq 0$ (εκφράζει το χρόνο)

και $t^2 - 3t + 5 > 0$ (το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = -11 < 0$, επομένως είναι πάντα ομόσημο του συντελεστή του t^2).

δ) Με βάση το φυσικό πλαίσιο του προβλήματος, η συνάρτηση $S(t)$ πρέπει να είναι μη αρνητική και σε κανένα χρονικό διάστημα γνήσια φθίνουσα. Επομένως, είναι:

Η (Ι) είναι μεν μη αρνητική, αλλά δε διατηρεί το ίδιο είδος μονοτονίας.

Η (ΙΙ) παίρνει και αρνητικές τιμές.

Η (ΙΙΙ) είναι μη αρνητική και γνησίως αύξουσα παντού, ως εκ τούτου αποτελεί την ενδεδειγμένη απάντηση.

15174

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^4 + x^3 + \alpha\, x - 4$ και $\delta(x) = x^2 - 3x + 2$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $\upsilon(x) = 24x - 24$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α.

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha = 2$,

i. να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$.

(Μονάδες 2)

ii. να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$.

(Μονάδες 8)

iii. να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

15174-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $\delta(x)$:

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^4+x^3 & & +\alpha\, x-4 & x^2-3x+2 \\ \cline{4-4}
-x^4+3x^3-2x^2 & & & x^2+4x+10 \\ \cline{1-3}
4x^3-2x^2 & & +\alpha\, x-4 & \\
-4x^3+12x^2 & & -8\,x & \\ \cline{1-3}
10x^2 & & +(\alpha-8)\,x-4 & \\
-10x^2 & & +30\,x-20 & \\ \cline{1-3}
 & & (\alpha+22)\,x-24 &
\end{array}
$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$$P(x) = \delta(x)\cdot(x^2+4x+10)+(\alpha+22)\,x-24$$

Επομένως πρέπει να ισχύει $(\alpha+22)\,x-24 = 24x-24$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Είναι:

$(\alpha+22)\,x-24 = 24x-24 \Leftrightarrow \alpha+22 = 24 \Leftrightarrow \alpha = 2.$

β) Για $\alpha = 2$, είναι $P(x) = x^4+x^3+2\,x-4$.

i. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$ είναι το $P(1) = 0$.

ii. Ζητείται η επίλυση της εξίσωσης $P(x) = 0$.

Είναι: $P(1) = 0 \Leftrightarrow 1$ ρίζα του $P(x) \Leftrightarrow x-1$ παράγοντας του $P(x)$.

Εφαρμογή του σχήματος Horner:

1	1	0	2	−4	ρ =1
	1	2	2	4	
1	2	2	4	0	

Επομένως ισχύει: $P(x) = (x-1)\cdot(x^3+2x^2+2x+4)$

Αλλά $x^3+2x^2+2x+4 = x^2(x+2)+2(x+2) = (x+2)(x^2+2)$.

Τελικά ισχύει $P(x) = (x-1)\cdot(x+2)\cdot(x^2+2)$.

Είναι λοιπόν

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x+2)\cdot(x^2+2) = 0 \overset{x^2+2\neq 0}{\Longleftrightarrow} x = 1 \text{ ή } x = -2.$$

15174-Λύση

Επομένως, τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$, είναι τα $A(-2,0)$ και $B(1,0)$.

iii. Ζητείται η επίλυση της ανίσωσης $P(x) < 0$.

Το πρόσημο των τιμών του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+2		$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ως εκ τούτου, $P(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$.

15175

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $P(x) = (x-1) \cdot (x^2+1)$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 10)

15175-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι $P(1) = 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 0$, άρα το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου.

β) Επιπλέον ισχύει ότι

$$1 \text{ ρίζα του } P(x) \Leftrightarrow x - 1 \text{ παράγοντας του } P(x)$$

Εφαρμογή του σχήματος Horner:

1	−1	1	−1	ρ =1
	1	0	1	
1	0	1	0	

Επομένως ισχύει: $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$.

Εναλλακτική απάντηση:

$$P(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x - 1) + (x - 1) = (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$$

γ) Είναι λοιπόν

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x^2 + 1) = 0 \overset{x^2+1 \neq 0}{\Longleftrightarrow} x = 1.$$

15176

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3\,x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι το $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν $P(x) = (x - 1\,) \cdot (x^2 - x + 2)$, να βρείτε για ποιες τιμές του x είναι $P(x) > 0$.

(Μονάδες 13)

15176-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι $P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 0$, άρα το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου. Επιπλέον ισχύει ότι

$$1 \text{ ρίζα του } P(x) \Leftrightarrow x - 1 \text{ παράγοντας του } P(x)$$

β) Είναι: $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - x + 2)$.

Το τριώνυμο $x^2 - x + 2 \neq 0$ διότι έχει διακρίνουσα αρνητική και επιπρόσθετα ισχύει ότι $x^2 - x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Το πρόσημο των τιμών του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$	
$x^2 - x + 2$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	

Ως εκ τούτου, είναι: $P(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

15246

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2-x-1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x)=(x+1)^2(x-1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

(Μονάδες 15)

15246-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Παραγοντοποιούμε το $P(x)$ και έχουμε

$$P(x)=x^3+x^2-x-1=x^2(x+1)-(x+1)=(x+1)(x^2-1)=(x+1)(x+1)(x-1)=(x+1)^2(x-1)$$

β) Το πρόσημο του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$x-1$	-		-	0	+	
$(x+1)^2$	+	0	+		+	
$P(x)$	-	0	-	0	+	

Συνεπώς η ανίσωση $P(x)\geq 0$ αληθεύει για κάθε $x\in[1,+\infty)\cup\{-1\}$.

15247

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-x^2+2x-1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x)=(2x-1)(x^2+1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

(Μονάδες 15)

15247-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Παραγοντοποιούμε το $P(x)$ και έχουμε

$$P(x)=2x^3-x^2+2x-1=x^2(2x-1)+2x-1=(2x-1)(x^2+1)$$

β) Το πρόσημο του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	-	0	+
x^2+1	+		+
$P(x)$	-	0	+

Συνεπώς η ανίσωση $P(x)\geq 0$ αληθεύει για κάθε $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

15248

ΘΕΜΑ 2

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $2x-1$ δίνει πηλίκο x^2-2 και υπόλοιπο 1.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $P(x)=2x^3-x^2-4x+3$

i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

(Μονάδες 7)

ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 6)

15248-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε

$P(x)=(2x-1)(x^2-2)+1=2x^3-4x-x^2+2+1=2x^3-x^2-4x+3$.

β) Με $P(x)=2x^3-x^2-4x+3$

i. Το σχήμα Horner για τη διαίρεση $P(x):(x-1)$ φαίνεται παρακάτω.

2	-1	-4	3	1
	2	1	-3	
2	1	-3	0	

Συνεπώς το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και η ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.είναι

$P(x)=(x-1)(2x^2+x-3)$.

ii. Έχουμε λοιπόν: $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+x-3)=0$ οπότε

$x-1=0$ ή $2x^2+x-3=0$ δηλαδή $x=1$ ή $x=1$ ή $x=-\dfrac{3}{2}$.

Τελικά $x=1$ (διπλή ρίζα) ή $x=-\dfrac{3}{2}$.

15250

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^5-4x^3-x^2+\alpha x+\beta$ το οποίο διαιρούμενο με το x^2-4 δίνει υπόλοιπο $4x+1$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-4)$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές των α και β.

(Μονάδες 7)

γ) Έστω $\alpha=4$ και $\beta=5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x^2-4)$ είναι το $\pi(x)=x^3-1$, τότε:

i. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x^2-4)$.

(Μονάδες 4)

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x)<4x+1$.

(Μονάδες 7)

15250-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η διαίρεση $\mathrm{P}(x):(x^2-4)$ φαίνεται παρακάτω

$$
\begin{array}{r|l}
x^5-4x^3-x^2+\alpha x+\beta & x^2-4 \\ \cline{2-2}
-x^5+4x^3 \qquad\qquad & x^3-1 \\ \cline{1-1}
-x^2+\alpha x+\beta & \\
x^2 \qquad -4 & \\ \cline{1-1}
\alpha x+\beta-4 &
\end{array}
$$

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $\mathrm{P}(x):(x^2-4)$ είναι το πολυώνυμο $\alpha x+\beta-4$. Όμως από την εκφώνηση δίνεται ότι είναι το πολυώνυμο $4x+1$. Συνεπώς τα πολυώνυμα $\alpha x+\beta-4$ και $4x+1$πρέπει να είναι ίσα, δηλαδή $\alpha=4$ και $\beta=5$.

γ) Για $\alpha=4$ και $\beta=5$ έχουμε $\mathrm{P}(x)=x^5-4x^3-x^2+4x+5$.

i. Η ταυτότητα της διαίρεσης $\mathrm{P}(x):(x^2-4)$ είναι $\mathrm{P}(x)=(x^2-4)(x^3-1)+4x+1$.

ii. Αξιοποιώντας την ταυτότητα της διαίρεσης που βρήκαμε παραπάνω έχουμε $\mathrm{P}(x)<4x+1 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^3-1)+4x+1<4x+1 \Leftrightarrow (x^2-4)(x-1)(x^2+x+1)<0$.

Το πρόσημο του πολυωνύμου $\Pi(x)=(x^2-4)(x-1)(x^2+x+1)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
x^2-4		+	0	-		-	0	+	
$x-1$		-		-	0	+		+	
x^2+x+1		+		+		+		+	
$\Pi(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Συνεπώς η ζητούμενη ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\in(-\infty,-2)\cup(1,2)$.

15349

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

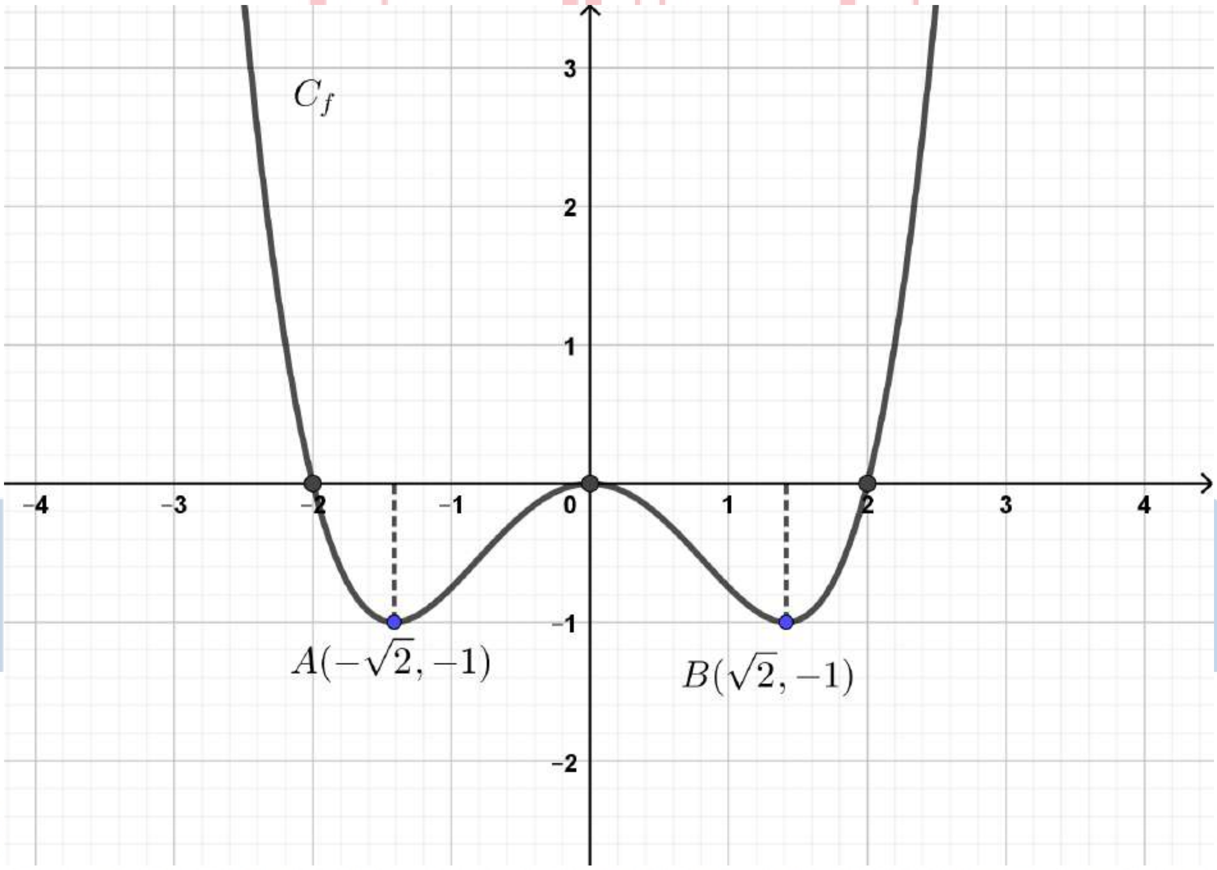
(Μονάδες 7)

β) Αν γνωρίζετε ότι τα σημεία $A(-\sqrt{2},-1)$ και $B(\sqrt{2},-1)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x)=0$.

(Μονάδες 10)



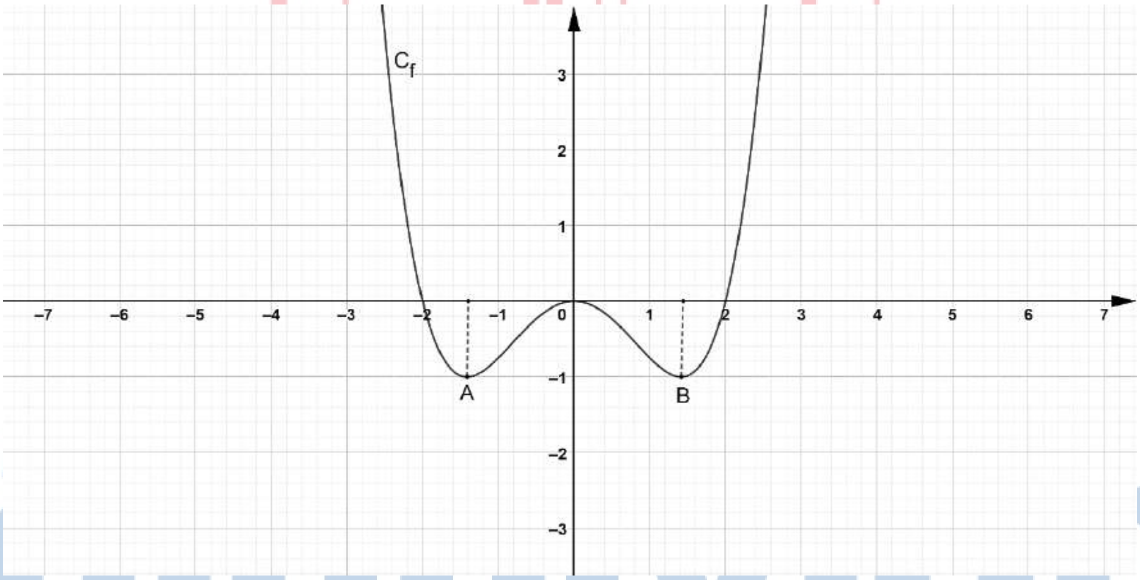
15349-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $-x \in \mathbb{R}$ και από το σχήμα παρατηρούμε πως η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Άρα, η συνάρτηση f είναι άρτια.

β) Από τη γραφική παράσταση C_f, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in (-\infty, -\sqrt{2}]$ και $x \in [0, \sqrt{2}]$ ενώ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα για $x \in [-\sqrt{2}, 0]$ και $x \in [\sqrt{2}, +\infty)$.

γ) Για τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ αρκεί να βρούμε τις τετμημένες των σημείων που η C_f τέμνει τον άξονα x΄x, δηλαδή τα σημεία που έχουν τεταγμένη ίση με μηδέν. Αυτά είναι $\Gamma(-2,0), O(0,0), \ \Delta(2,0)$. Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $-2, 0, 2$.



15431

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 5$, με $x \in \mathbb{R}$.

i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x-2)$ είναι -1, να δείξετε ότι:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \text{και} \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}.$$

(Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι $\alpha = -9$ και $\beta = 12$.

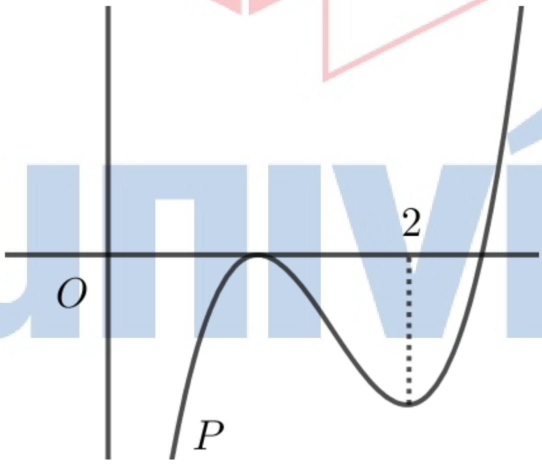
(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι η ακόλουθη, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

(Μονάδες 4)



15431-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-1)$ ισχύει ότι:

$$P(1)=0 \Leftrightarrow$$

$$2\cdot 1^3+\alpha\cdot 1^2+\beta\cdot 1-5=0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha+\beta=3.$$

Επίσης το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-2)$ είναι το $P(2)$. Άρα,

$$P(2)=-1 \Leftrightarrow 2\cdot 2^3+\alpha\cdot 2^2+\beta\cdot 2-5=-1 \Leftrightarrow$$

$$16+4\alpha+2\beta-5=-1 \Leftrightarrow$$

$$4\alpha+2\beta=-12 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=-6.$$

ii. Για να βρούμε τις τιμές των α, β λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=-6 \\ \alpha+\beta=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=-6 \\ \beta=3-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha+(3-\alpha)=-6 \\ \beta=3-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha+3=-6 \\ \beta=3-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-9 \\ \beta=12 \end{cases}.$$

β) Κάνουμε τη διαίρεση $P(x):(x-1)$ με το σχήμα Horner και έχουμε:

2	-9	12	-5	1
	2	-7	5	
2	-7	5	0	

Άρα, $P(x)=(x-1)(2x^2-7x+5)$. Το τριώνυμο $2x^2-7x+5$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-7)^2-4\cdot 2\cdot 5=9$ και ρίζες:

$$x_1=\frac{7+\sqrt{9}}{4}=\frac{5}{2} \text{ και } x_2=\frac{7-\sqrt{9}}{4}=1.$$

Άρα, $P(x)=(x-1)2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)=2(x-1)^2\left(x-\frac{5}{2}\right)$.

Η γραφική παράσταση της $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για τις τιμές του x για τις οποίες

$$P(x)<0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2\left(x-\frac{5}{2}\right)<0.$$

15431-Λύση

Ο πίνακας προσήμων του $P(x)$ είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$(x-\frac{5}{2})$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Άρα, $P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, \frac{5}{2})$.

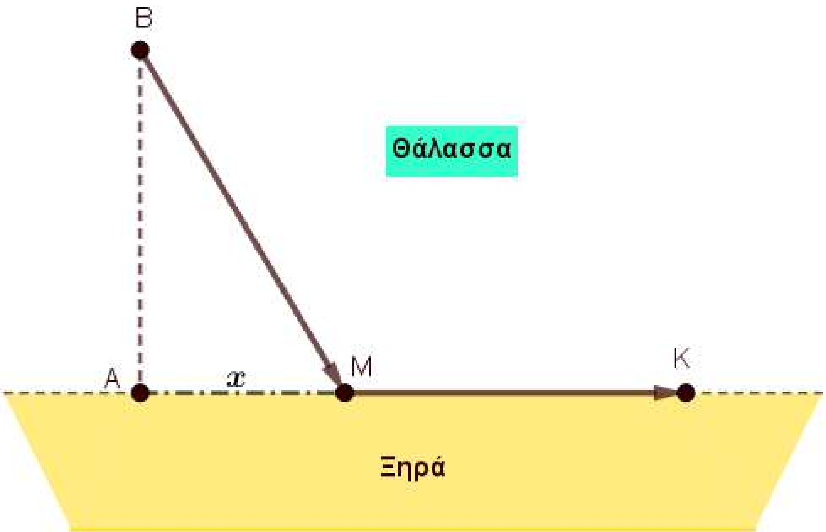
γ) Από το ερώτημα β) προκύπτει ότι η γραφική παράσταση της P τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(1,0)$ και $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση P είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.

15436

ΘΕΜΑ 4

Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο B σε απόσταση $2\ km$ από το κοντινότερο σημείο A μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο K της ακτής, το οποίο απέχει $4\ km$ από το A. Η διαδρομή που κάνει είναι η BM κολυμπώντας στη θάλασσα με σταθερή ταχύτητα $3\ km/h$ και η MK τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα $5 km/h$.

Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος s που διανύεται, της ταχύτητας v και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης t, είναι $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$.



Αν το σημείο M απέχει από το A απόσταση $x\ km$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $BM = \sqrt{4 + x^2}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η:

$$t(x) = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{4 - x}{5}, \quad x \in [0, 4].$$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου M της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή να είναι $\frac{4}{3}$ ώρες.

(Μονάδες 10)

15436-Λύση

ΛΥΣΗ

Είναι $BA = 2$, $MA = x$, $MK = 4 - x$.

Η σχέση μεταξύ του διαστήματος s που διανύεται, της ταχύτητας v και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης t, είναι: $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$.

α) Το τρίγωνο BAM είναι ορθογώνιο, οπότε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει ότι $BM = \sqrt{4 + x^2}$.

β) Η κίνηση γίνεται σε δύο μέσα – κολύμβηση στη θάλασσα και τρέξιμο στη ξηρά – με διαφορετικές (αλλά σταθερές) ταχύτητες $v_\kappa = 3\ \frac{km}{h}$ και $v_\tau = 5\ \frac{km}{h}$ αντίστοιχα. Έτσι, ο συνολικός χρόνος κίνησης θα προκύψει ως άθροισμα των δύο επιμέρους χρόνων.

- Ο χρόνος κίνησης από το B στο M: $t_1 = \frac{BM}{v_\kappa} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3}$
- Ο χρόνος κίνησης από το M στο K: $t_2 = \frac{MK}{v_\tau} = \frac{4-x}{5}$
- Ο χρόνος της συνολικής κίνησης: $t_{o\lambda} = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{4-x}{5}$

Επομένως, η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η

$$t(x) = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{4 - x}{5}, \quad x \in [0, 4].$$

γ) Αρκεί να λυθεί η εξίσωση:

$$t(x) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{4 - x}{5} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$5\sqrt{4 + x^2} + 3(4 - x) = 20 \Leftrightarrow 5\sqrt{4 + x^2} = 3x + 8$$

Αφού $x \in [0, 4]$ έπεται ότι $3x + 8 > 0$, επομένως ισοδύναμα είναι:

$$25(4 + x^2) = (3x + 8)^2 \Leftrightarrow 100 + 25x^2 = 9x^2 + 48x + 64 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Η λύση είναι δεκτή, διότι $\frac{3}{2} \in [0, 4]$.

Επομένως ο κολυμβητής θα βγει στην ακτή σε απόσταση $1{,}5\ km$ από το σημείο A.

15618

ΘΕΜΑ 2

α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-x$ ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 15)

15618-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στο πολυώνυμο μπορούμε να εξάγουμε κοινό παράγοντα το x και έχουμε:

$P(x)=2x^3+x^2-x=x(2x^2+x-1)$ που είναι το ζητούμενο.

β) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $P(x)=2x^3+x^2-x=0 \Leftrightarrow x(2x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow$

$x(2x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\frac{1}{2}$ ή $x=-1$.

15653

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2+2x+2$.

α)

i. Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $(x+1)$.

(Μονάδες 8)

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x+1)$.

(Μονάδες 5)

β) Αν $P(x)=(x+1)(x^2+2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

(Μονάδες 12)

15653-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Η διαίρεση του $P(x)=x^3+x^2+2x+2$ με το $(x+1)$ είναι η παρακάτω:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+x^2+2x+2 & x+1 \\ \cline{2-2}
-x^3-x^2 \quad\;\; & x^2+2 \\ \cline{1-1}
2x+2 & \\
-2x-2 & \\ \cline{1-1}
0 \quad &
\end{array}
$$

ii. Η ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης είναι:

$x^3+x^2+2x+2=(x+1)(x^2+2)+0 \Rightarrow$

$x^3+x^2+2x+2=(x+1)(x^2+2)$.

β) Έχουμε ισοδύναμα: $P(x)<0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2)<0 \overset{x^2+2>0}{\Leftrightarrow} x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$.

15654

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-7x+6$.

α) Να δείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 13)

15654-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι $P(2)=2^3-7\cdot 2+6=8-14+6=0$, οπότε το 2 είναι ρίζα του $P(x)$ και το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) Κάνουμε τη διαίρεση $P(x)\div(x-2)$,

$$
\begin{array}{r r|l}
 & x^3+0x^2-7x+6 & x-2 \\
\cline{3-3}
(+) & -x^3+2x^2 & x^2+2x-3 \\
\cline{1-2}
 & 2x^2-7x+6 & \\
(+) & -2x^2+4x & \\
\cline{1-2}
 & -3x+6 & \\
(+) & 3x-6 & \\
\cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Άρα $P(x)=(x-2)(x^2+2x-3)$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$
\begin{aligned}
&P(x)=0 \Leftrightarrow \\
&(x-2)(x^2+2x-3)=0 \Leftrightarrow \\
&\begin{cases} x-2=0 \\ \text{ή} \\ x^2+2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \text{ή} \\ x=1, x=-3 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x=1,\ x=2,\ x=-3$.

15674

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=3x^3-x^2-x+2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $\mathrm{P}(x):(x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\mathrm{P}(x)=(x-1)(3x^2+2x+1)+3$ να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{P}(x)<3$.

(Μονάδες 15)

15674-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η διαίρεση $\mathrm{P}(x):(x-1)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3-x^2-x+2 & x-1 \\ \cline{2-2}
-3x^3+3x^2 \quad & 3x^2+2x+1 \\ \cline{1-1}
2x^2-x+2 & \\
-2x^2+2x \quad & \\ \cline{1-1}
x+2 & \\
-x+1 & \\ \cline{1-1}
3 &
\end{array}
$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι : $\mathrm{P}(x)=(x-1)(3x^2+2x+1)+3$.

β) Με βάση την παραπάνω ταυτότητα διαίρεσης, η ζητούμενη ανίσωση γίνεται

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(x)<3 \Leftrightarrow \\
&(x-1)(3x^2+2x+1)+3<3 \Leftrightarrow \\
&(x-1)(3x^2+2x+1)<0
\end{aligned}
$$

Το τριώνυμο $3x^2+2x+1$ έχει διακρίνουσα αρνητική, οπότε είναι για κάθε τιμή του x ομόσημο του συντελεστή του x^2 που ισούται με 3, δηλαδή θετικό, οπότε η ανίσωση γίνεται ισοδύναμα

$$
\begin{aligned}
&(x-1)(3x^2+2x+1)<0 \Leftrightarrow \\
&x-1<0 \Leftrightarrow \\
&x<1
\end{aligned}
$$

Τελικά η ανίσωση $\mathrm{P}(x)<3$ αληθεύει για κάθε $x\in(-\infty,1)$.

15677

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-2x^3-x^2+\alpha x+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α,β, αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x)=x^2-2x+1$.

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha=4,\beta=-2$

i. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2+5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 8)

ii. Αν $P(x)=\left(x^2+5\right)(x^2-2x-6)+14x+28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x)=14(x+2)$.

(Μονάδες 9)

15677-Λύση

ΛΥΣΗ

Η διαίρεση $P(x):Q(x)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-2x^3-x^2+\alpha x+\beta & x^2-2x+1 \\
\cline{2-2}
-x^4+2x^3-x^2 \qquad\qquad & x^2-2 \\
\cline{1-1}
-2x^2+\alpha x+\beta & \\
2x^2 \quad -4x+2 & \\
\cline{1-1}
(\alpha-4)x+\beta+2 &
\end{array}
$$

Αφού το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x)=x^2-2x+1$, θα πρέπει το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεση να είναι το μηδενικό πολυώνυμο, που συμβαίνει μόνο όταν $\alpha-4=0$ και $\beta+2=0$, δηλαδή $\alpha=4$ και $\beta=-2$.

β) Για $\alpha=4, \beta=-2$ έχουμε $P(x)=x^4-2x^3-x^2+4x-2$.

i. Η διαίρεση $P(x):(x^2+5)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-2x^3-x^2+4x-2 & x^2+5 \\
\cline{2-2}
-x^4-5x^2 \qquad\qquad\quad & x^2-2x-6 \\
\cline{1-1}
-2x^3-6x^2+4x-2 & \\
2x^3+10x \quad & \\
\cline{1-1}
-6x^2+14x-2 & \\
6x^2+30 \quad & \\
\cline{1-1}
14x+28 &
\end{array}
$$

και η ταυτότητα της διαίρεσης είναι η εξής: $P(x)=\left(x^2+5\right)(x^2-2x-6)+14x+28$

ii. Η εξίσωση $P(x)=14(x+2)$ με τη βοήθεια της παραπάνω ταυτότητας γίνεται

$$\left(x^2+5\right)(x^2-2x-6)+14x+28=14(x+2) \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2+5\right)(x^2-2x-6)+14x+28=14x+28 \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2+5\right)(x^2-2x-6)=0$$

και επειδή $x^2+5\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε ότι $x^2-2x-6=0$ δηλαδή $x=\dfrac{2\pm\sqrt{28}}{2}=\dfrac{2\pm 2\sqrt{7}}{2}=1\pm\sqrt{7}$.

15695

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x - 3$, $x \in R$.

α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) + 6 = 0$.

(Μονάδες 12)

15695-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+0x^2+2x-3 & x+1 \\ \cline{2-2}
-x^3-x^2 & x^2-x+3 \\ \cline{1-1}
-x^2+2x-3 & \\
x^2+x & \\ \cline{1-1}
3x-3 & \\
-3x-3 & \\ \cline{1-1}
-6 &
\end{array}
$$

Με βάση την παραπάνω διαίρεση διαπιστώνουμε ότι $P(x)=(x+1)(x^2-x+3)-6$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να απαντήσουμε με χρήση του σχήματος Horner.

β) Η εξίσωση $P(x)+6=0$ γράφεται $(x+1)(x^2-x+3)=0$. Αλλά το τριώνυμο x^2-x+3 έχει διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot3=-11<0$ και επομένως δεν έχει ρίζες. Ώστε $x+1=0$, έτσι μοναδική ρίζα είναι η $x=-1$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $P(x)+6=0$ ανεξάρτητα από το α) ερώτημα ως εξής: $x^3+2x+3=0 \Leftrightarrow x^3+3x-x+3=0 \Leftrightarrow$

$x(x^2-1)+3(x+1)=0$, άρα $(x-1)(x+1)x+3(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$(x+1)[x(x-1)+3]=0$, οπότε $(x+1)(x^2-x+3)=0$.

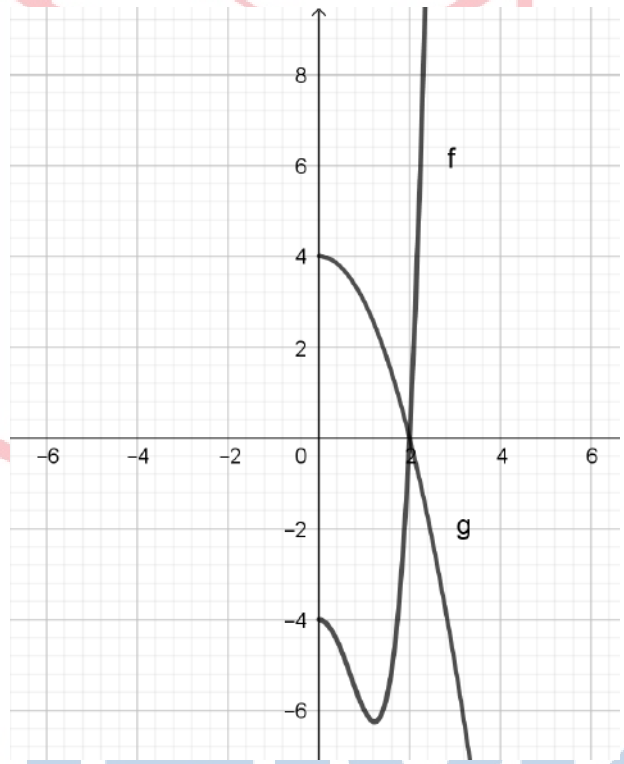
ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^4-3x^2-4$ και $g(x)=-x^2+4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-x)=f(x)$ και $g(-x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.



Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε , αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

(Μονάδες 6)

ii. την ανίσωση $f(x)<g(x)$.

(Μονάδες 6)

15790-Λύση

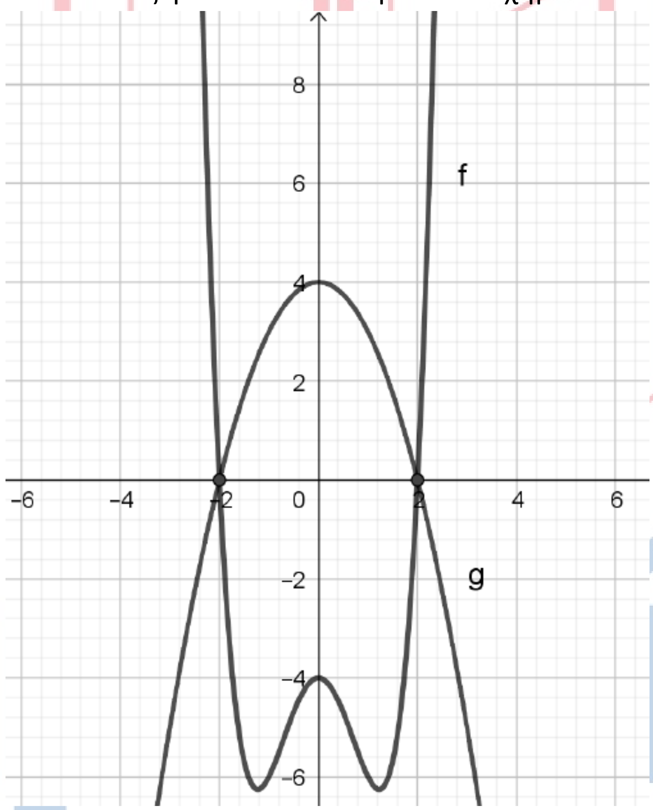
ΛΥΣΗ

α) Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, άρα έχουμε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 - 4 = x^4 - 3x^2 - 4 = f(x)$.

Όμοια $g(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 = g(x)$.

β) Από το α) ερώτημα οι συναρτήσεις f και g είναι άρτιες. Η γραφική παράσταση άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των f και g συμπληρώνονται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



γ)

i. Έχουμε $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = -x^2 + 4 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$. (1)

Θέτουμε $x^2 = y$, οπότε (1): $y^2 - 2y - 8 = 0$ με $\Delta = 36$ και $y_1 = -2, y_2 = 4$, άρα $x^2 = -2$ που είναι αδύνατη ή $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 2$ που είναι οι ζητούμενες λύσεις.

ii. Γραφικά, λύση της ανίσωσης $f(x) < g(x)$ είναι οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της g είναι πάνω από την γραφική παράσταση της f. Οπότε η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-2, 2)$.

15960

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \kappa x - 1$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\kappa = 0$,

i. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$,

(Μονάδες 6)

ii. να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

(Μονάδες 6)

iii. να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

15960-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Για τη συνάρτηση f έχουμε:

$f(-x) = f(x) \Leftrightarrow (-x)^4 + \kappa(-x) - 1 = x^4 + \kappa x - 1 \Leftrightarrow \quad x^4 - \kappa x - 1 = x^4 + \kappa x - 1 \Leftrightarrow$ $2\kappa x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα το $2\kappa x$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε $2\kappa = 0$ και ισοδύναμα $\kappa = 0$.

β) Για $\kappa = 0$, η συνάρτηση f είναι: $f(x) = x^4 - 1$.

i. Με $x_1 < x_2 \leq 0 \Leftrightarrow {x_1}^4 > {x_2}^4 \Leftrightarrow {x_1}^4 - 1 > {x_2}^4 - 1$

Άρα: $f(x_1) > f(x_2)$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in (-\infty, 0]$.

ii. Έχουμε: $f(x) \geq -1 \Leftrightarrow x^4 - 1 \geq -1 \Leftrightarrow x^4 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Για να βρούμε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, λύνουμε την ανίσωση:

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x^4 - 1 < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) < 0 \overset{x^2+1>0}{\Longleftrightarrow} x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow$ $(x - 1) \cdot (x + 1) < 0.$

Άρα $x \in (-1,1)$. Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για $x \in (-1,1)$.

15989

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2-2x+4$.

α) Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει μοναδική ακέραια ρίζα. Να προσδιορίσετε τη μοναδική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του $P(x)$ και να το γράψετε ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

(Μονάδες 13)

15989-Λύση

Λύση

α) Εφόσον το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές, οι πιθανές ακέραιες ρίζες του θα είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου 4, δηλαδή οι αριθμοί $\pm1, \pm2, \pm4$.

Αντικαθιστώντας στο πολυώνυμο $P(x)$ όπου x τον αριθμό 2 παρατηρούμε ότι:

$P(2)=2^3-2\cdot2^2-2\cdot2+4=8-8-4+4=0$, άρα η μοναδική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου είναι το 2.

β) Εφόσον το 2 είναι ρίζα του $P(x)$ ισχύει ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$ οπότε εκτελώντας τη διαίρεση έχουμε:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-2x^2-2x+4 & x-2 \\ \cline{2-2}
-x^3+2x^2 \qquad\qquad & x^2-2 \\
-2x+4 & \\
2x-4 & \\
0 &
\end{array}
$$

Συνεπώς, η εξίσωση γράφεται: $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$.

Οπότε οι ρίζες του πολυωνύμου είναι $x=2$, $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$.

Το πολυώνυμο γράφεται: $P(x)=(x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

17241

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x + 2$.

α)

I. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+1)$.

(Μονάδες 7)

II. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x+1)$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x) = (x+1)(x^2 - x + 2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 8)

17241-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

I. Επειδή $P(-1) = (-1)^3 + (-1) + 2 = -2 + 2 = 0$, το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ είναι 0. Άρα, το$(x+1)$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

II. Κάνουμε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $(x+1)$ με τη βοήθεια του σχήματος Horner:

1	0	1	2	-1
	-1	1	-2	
1	-1	2	0	

Άρα, $P(x) = (x+1)(x^2 - x + 2)$.

β) Το τριώνυμο $x^2 - x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$ οπότε $x^2 - x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα,

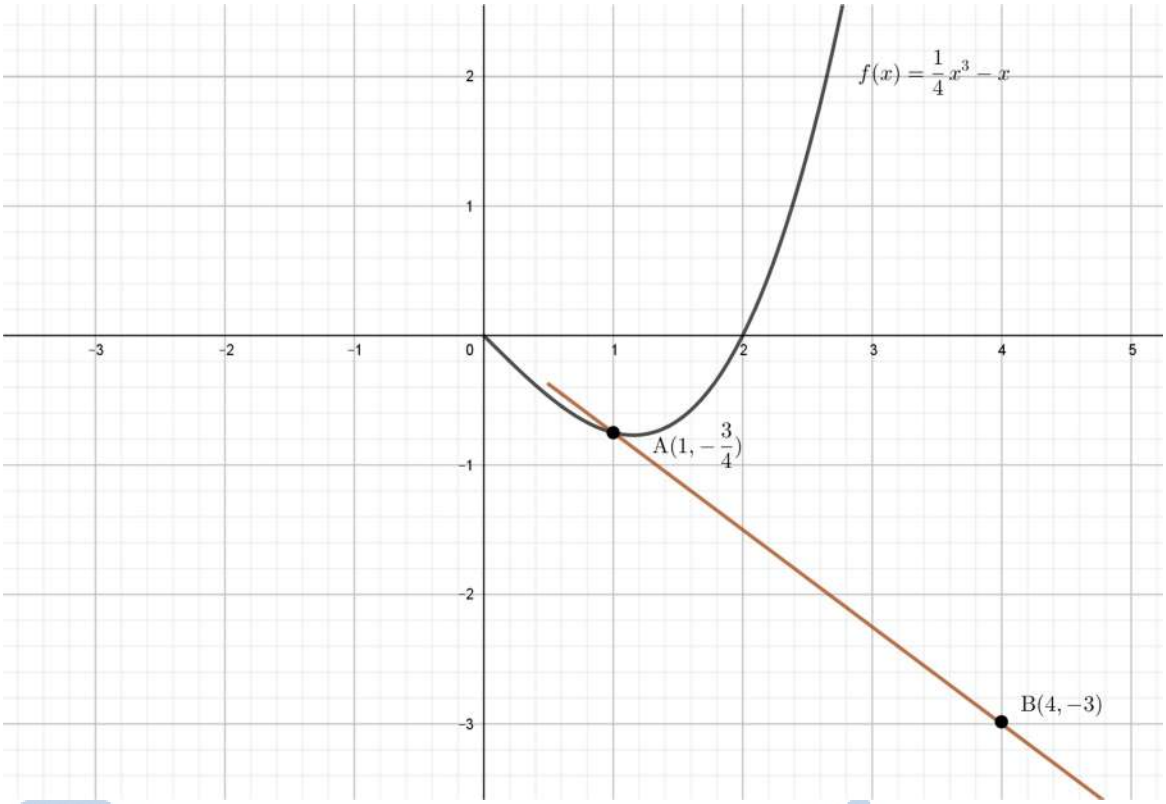
$$P(x) < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1.$$

17919

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x$, $x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ και $\mathrm{B}(4,-3)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x<0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν η ευθεία AB έχει εξίσωση $y=-\frac{3}{4}x$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με την γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 8)

17919-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία AB έχει εξίσωση της μορφής $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta$. Το σημείο $\mathrm{A}\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ είναι σημείο της (ε), άρα:

$$-\frac{3}{4}=\alpha\cdot 1+\beta \qquad (1).$$

Το σημείο $\mathrm{B}(4,-3)$ είναι σημείο της (ε), άρα:

$$-3=\alpha\cdot 4+\beta \qquad (2).$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\begin{cases}-\frac{3}{4}=\alpha\cdot 1+\beta \\ -3=\alpha\cdot 4+\beta\end{cases} \overset{(-)}{\Leftrightarrow} \begin{cases}3\alpha=-3+\frac{3}{4} \\ 4\alpha+\beta=-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-\frac{3}{4} \\ 4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\beta=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-\frac{3}{4} \\ \beta=0.\end{cases}$$

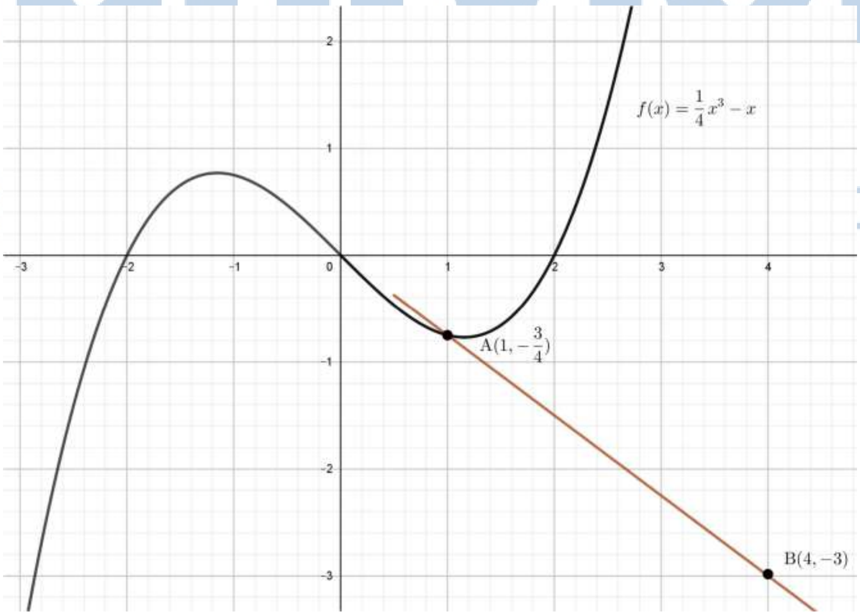
Άρα η ευθεία AB έχει εξίσωση $(\varepsilon): y=-\frac{3}{4}x$.

β)

i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει και $-x\in\mathbb{R}$. Έχουμε:

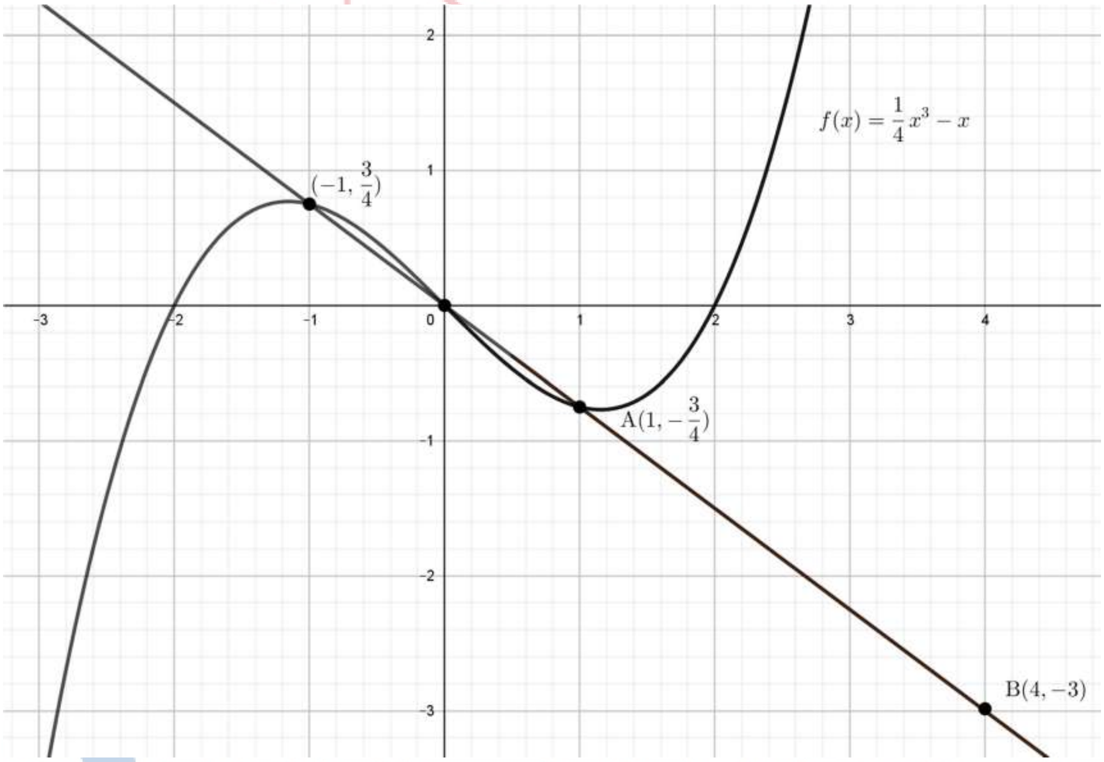
$$f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^3-(-x)=-\frac{1}{4}x^3+x=-\left(\frac{1}{4}x^3-x\right)=-f(x).$$

ii. Στο βi) αποδείξαμε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή ότι η f είναι περιττή. Συνεπώς η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων $(0,0)$:



17919-Λύση

γ) Εξαιτίας της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f ως προς το $(0,0)$, το σημείο $\left(-1,\frac{3}{4}\right)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση η οποία διέρχεται και από το $(0,0)$. Όμως τα σημεία αυτά ανήκουν και στην ευθεία AB. Άρα τα κοινά σημεία της ευθείας και της καμπύλης είναι τα $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$, $(0,0)$ και $\left(-1,\frac{3}{4}\right)$.



Εναλλακτικά, θα λύσουμε την εξίσωση $\frac{1}{4}x^3-x=-\frac{3}{4}x$. Έχουμε ισοδύναμα:

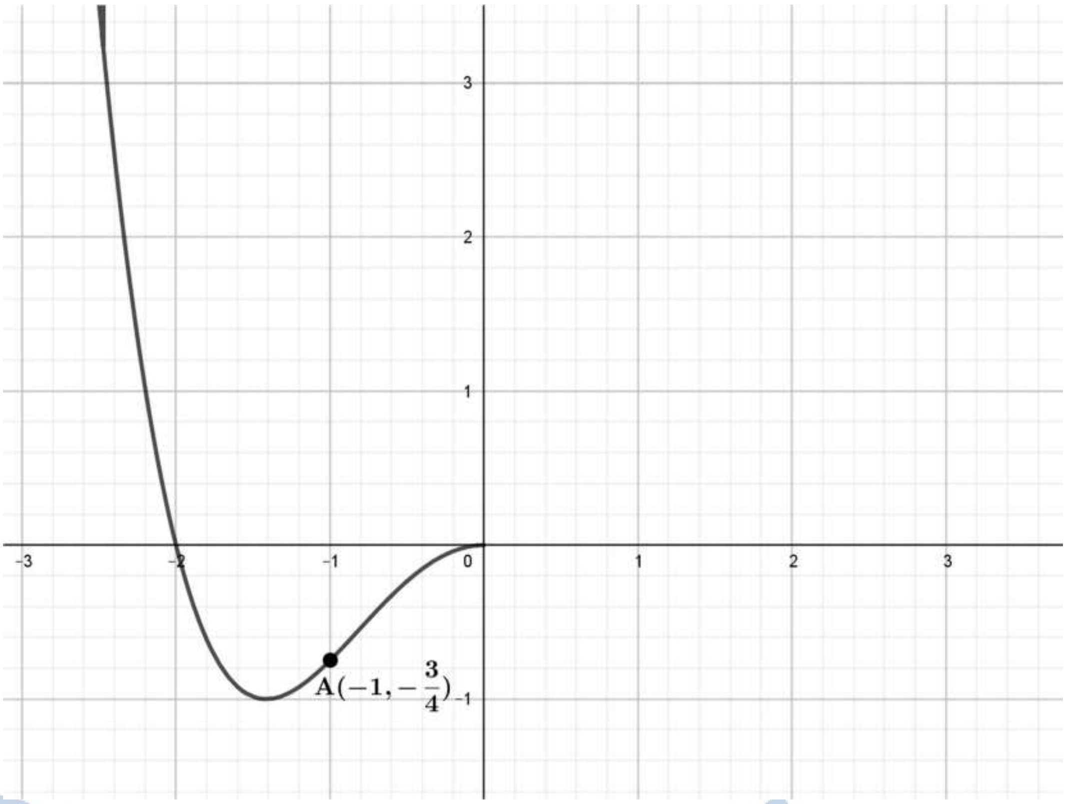
$$\frac{1}{4}x^3-x=-\frac{3}{4}x \Leftrightarrow$$
$$x^3-4x+3x=0 \Leftrightarrow$$
$$x^3-x=0 \Leftrightarrow$$
$$x\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1.$$

Άρα τα κοινά σημεία είναι τα $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$, $(0,0)$ και $\left(-1,\frac{3}{4}\right)$.

17925

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\alpha x^2$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ και το σημείο $\mathrm{A}\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$ αυτής.



α) Να δείξετε ότι $\alpha=-1$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\alpha=-1$,

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x>0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{3}{4}$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y=-\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 8)

17925-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Όπως φαίνεται στο σχήμα, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ άξονα στο $\left(-2,0\right)$, οπότε έχουμε ισοδύναμα:

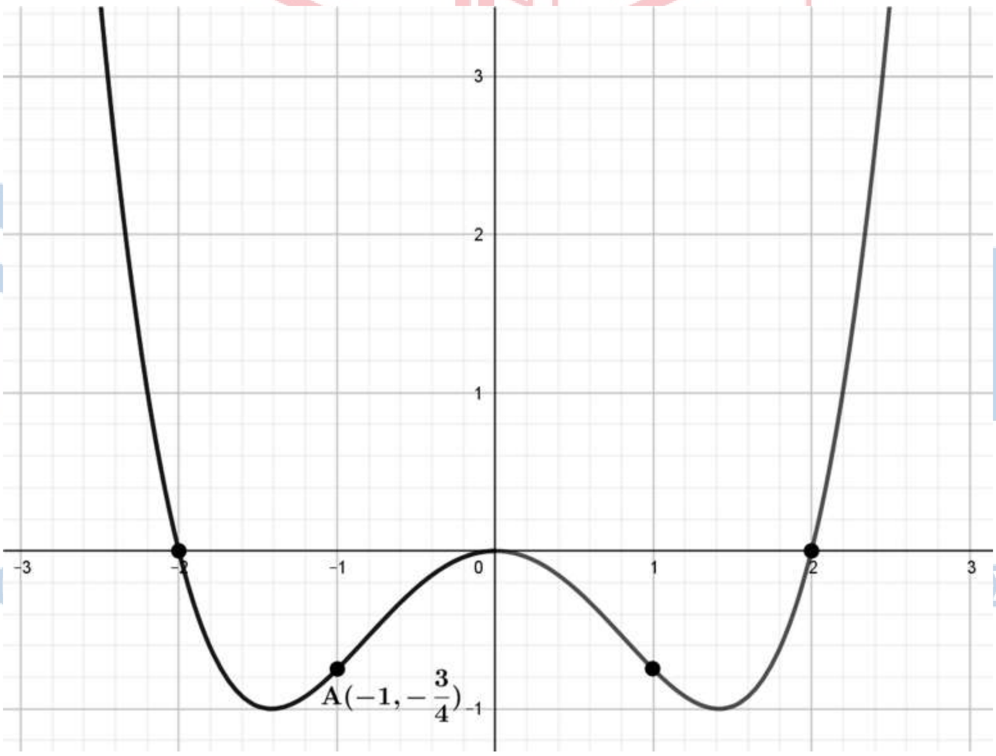
$$\begin{aligned}
&f\left(-2\right)=0 \Leftrightarrow \\
&\frac{1}{4}\left(-2\right)^4+\alpha\cdot\left(-2\right)^2=0 \Leftrightarrow \\
&4+4\alpha=0 \Leftrightarrow \\
&\alpha=-1.
\end{aligned}$$

β)

i. Έχουμε $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει και $-x\in\mathbb{R}$. Οπότε:

$$f(-x)=\frac{1}{4}\left(-x\right)^4-\left(-x\right)^2=\frac{1}{4}x^4-x^2=f\left(x\right).$$

ii. Στο βi) αποδείξαμε ότι $f(-x)=f(x)$, δηλαδή ότι η f είναι άρτια. Συνεπώς η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ άξονα:



γ) Πραγματικά $f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{1}{4}\left(-\sqrt{3}\right)^4-\left(-\sqrt{3}\right)^2=\frac{9}{4}-3=-\frac{3}{4}$, οπότε το σημείο $\left(-\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

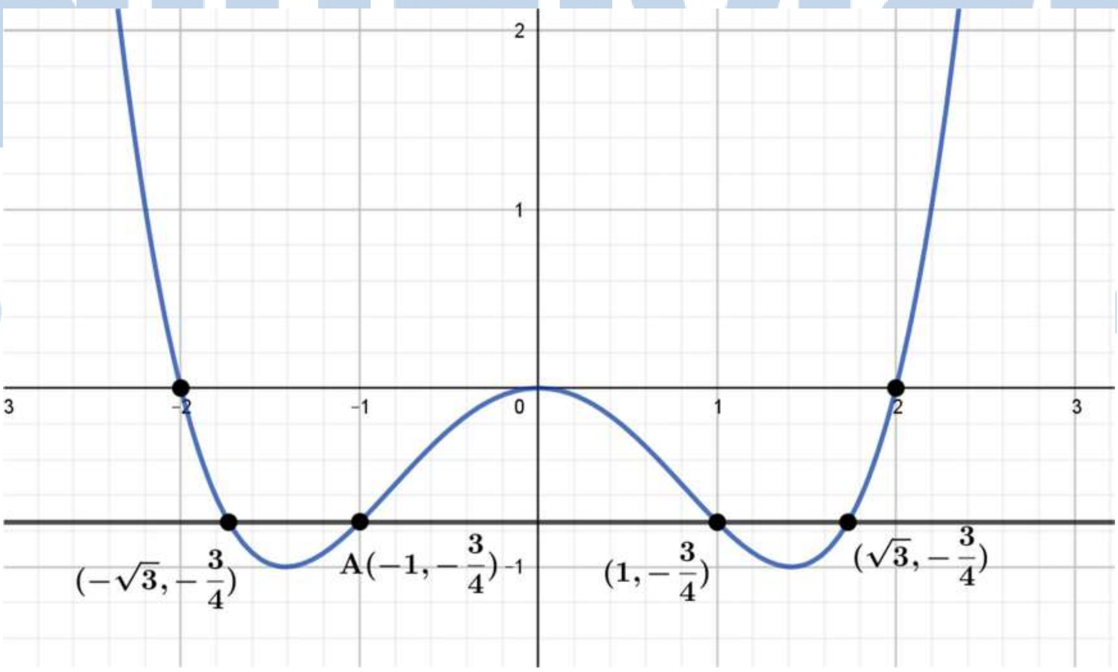
17925-Λύση

Εξαιτίας της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f ως προς τον $y'y$ άξονα, τα σημεία $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ και $\left(\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$ θα ανήκουν επίσης στη γραφική παράσταση και η ευθεία $y=-\frac{3}{4}$ έχει τέσσερα κοινά σημεία με αυτήν, τα $\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$, $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$ και $\left(\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$.

Εναλλακτικά, θα λύσουμε την εξίσωση $f(x)=-\frac{3}{4}$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}
&f(x)=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow\\
&\frac{1}{4}x^4-x^2=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow\\
&x^4-4x^2+3=0\Leftrightarrow\\
&x^2=1 \quad \text{ή} \quad x^2=3
\end{aligned}$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι τέσσερις: $x=-1,\ x=1,\ x=-\sqrt{3},\ x=\sqrt{3}$ και συνεπώς τα κοινά σημεία της ευθείας $y=-\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f είναι τα $\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$, $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$ και $\left(\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$.



17943

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $\mathrm{E}=60cm^2$, του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά $2cm$ μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση:

$$x^3+x^2-3600=0.$$

(Μονάδες 10)

β) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

17943-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το ορθογώνιο τρίγωνο που ικανοποιεί τα δεδομένα έχει κάθετες πλευρές x, y και υποτείνουσα $(x+2)$. Το εμβαδόν του είναι $\mathrm{E}=60cm^2$, οπότε: $\frac{xy}{2}=60 \Leftrightarrow y=\frac{120}{x}$ και από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$
\begin{aligned}
&(x+2)^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow \\
&(x+2)^2=x^2+\left(\frac{120}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \\
&x^2+4x+4=x^2+\frac{14400}{x^2} \Leftrightarrow \\
&x+1=\frac{3600}{x^2} \Leftrightarrow \\
&x^3+x^2-3600=0. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

β) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης $x^3+x^2-3600=0$ που είναι μικρότερες του 16 και είναι θετικοί αριθμοί (το x είναι μήκος πλευράς τριγώνου), είναι οι $1,2,3,4,5,6,8,9,10,12$ και 15. Οι αριθμοί που είναι μικρότεροι του 10 δεν μπορεί να είναι ρίζες, γιατί το άθροισμα (x^3+x^2) πρέπει να ισούται με 3600. Παρατηρούμε ότι $10^3+10^2-3600 \neq 0$, άρα το 10 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης, όπως δεν είναι και το 12. Καταλήγουμε στο 15 και κάνουμε τη διαίρεση $(x^3+x^2-3600)\div(x-15)$:

$$
\begin{array}{rr|l}
 & x^3+x^2+0x-3600 & x-15 \\ \cline{3-3}
(+) & -x^3+15x^2 & x^2+16x+240 \\ \hline
 & 16x^2+0x-3600 & \\
(+) & -16x^2+240x & \\ \hline
 & 240x-3600 & \\
(+) & -240x+3600 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Οπότε η εξίσωση (1) γράφεται: $(x-15)(x^2+16x+240)=0$.

Η μόνη λύση της εξίσωσης είναι $x=15$, γιατί η $x^2+16x+240=0$ είναι αδύνατη ($\Delta=-704<0$).

17943-Λύση

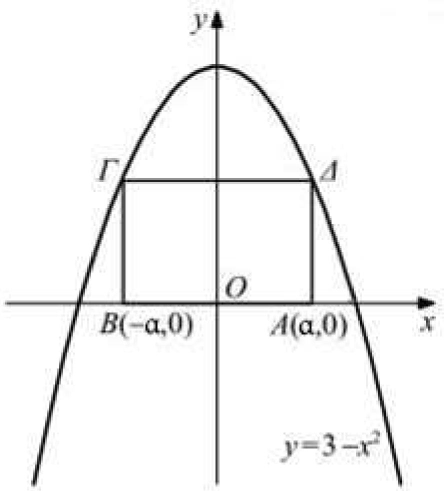
Άρα οι κάθετες πλευρές του τριγώνου είναι $15cm$ και $\frac{120}{15}=8cm$. Η υποτείνουσα είναι $15+2=17cm$.

γ) Ένα είναι το ορθογώνιο τρίγωνο που ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος και αυτό είναι το τρίγωνο που βρήκαμε στο β) ερώτημα, γιατί η εξίσωση $x^3+x^2-3600=0$ δεν έχει άλλη λύση εκτός από την $x=15$.

18221

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η παραβολή $y=3-x^2$ και τα σημεία της Γ,Δ. Δίνεται ακόμα ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $\alpha\in\left(0,\sqrt{3}\right)$.



α) Αν E είναι το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\left(0,\sqrt{3}\right)$ είναι $E=f(\alpha)=-2\alpha^3+6\alpha$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 08)

ii. να βρεθεί το εμβαδό E στη θέση $\alpha=1$.

(Μονάδες 02)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό E δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 12)

γ) Να βρεθεί η θέση του α, ώστε το εμβαδό E να πάρει τη μέγιστη τιμή του.

(Μονάδες 03)

18221-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Είναι $\mathrm{AB} = \alpha - (-\alpha) = 2\alpha$.

Επειδή το Δ ανήκει στην παραβολή $y = 3 - x^2$ ισχύει $y_\Delta = 3 - {x_\Delta}^2 = 3 - \alpha^2$. Οπότε $\mathrm{A\Delta} = y_\Delta - y_\mathrm{A} = 3 - \alpha^2 - 0 = 3 - \alpha^2$.

Είναι $\mathrm{E} = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{A\Delta} = 2\alpha(3 - \alpha^2) = 6\alpha - 2\alpha^3$.

Επομένως για κάθε $\alpha \in (0, \sqrt{3})$ είναι $\mathrm{E} = f(\alpha) = -2\alpha^3 + 6\alpha$.

ii. Το ζητούμενο εμβαδό ισούται με $f(1) = -2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1 = 4$ τετ. μονάδες.

β) Για να αποδείξουμε ότι το εμβαδό E δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετραγωνικές μονάδες αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathrm{E} \le 4$.

Έχουμε

$$\mathrm{E} \le 4 \Leftrightarrow -2\alpha^3 + 6\alpha \le 4$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^3 - 6\alpha + 4 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 - 3\alpha + 2 \ge 0$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} (\alpha + 2)(\alpha - 1)^2 \ge 0$$

που ισχύει για κάθε $\alpha \in (0, \sqrt{3})$

1	0	-3	2	ρ = - 2
	-2	4	-2	
1	-2	1	0	

Οπότε,

$$\alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha + 2)(\alpha^2 - 2\alpha + 1)$$
$$= (\alpha + 2)(\alpha - 1)^2 \qquad :(1)$$

γ) Για κάθε $\alpha \in (0, \sqrt{3})$ είναι $\mathrm{E} \le 4 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} f(\alpha) \le f(1)$ άρα το εμβαδό έχει μέγιστη τιμή 4 τετραγωνικές μονάδες στη θέση $\alpha = 1$.

18230

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-8x-4$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει παράγοντα το $(x-2)$.

(Μονάδες 9)

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 7)

18230-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-2)$, μόνο όταν $P(2)=0$.

Πραγματικά,

$$P(2)=2\cdot 8+4-8\cdot 2-4=16+4-16-4=0$$

οπότε το $(x-2)$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

β) Είναι:

$$P(x)=2x^3+x^2-8x-4=2x^3-8x+x^2-4=2x(x^2-4)+(x^2-4)$$
$$=(x^2-4)(2x+1)=(x-2)(x+2)(2x+1)$$

γ) Ισχύει:

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (2x+1)(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-2$$

Επομένως η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς $-\frac{1}{2}$, 2 και -2.

20856

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε οτι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

(Μονάδες 12)

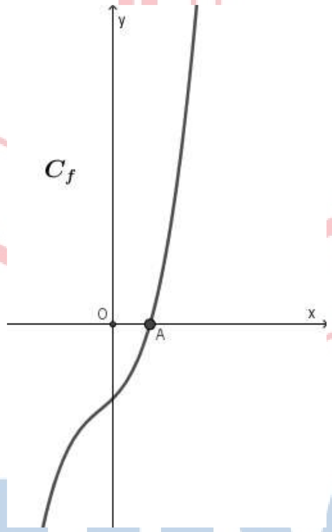
β) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

i. Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα.

(Μονάδες 04)

ii. Να αποδείξετε ότι η ρίζα αυτή βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$.

(Μονάδες 09)



20856-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης βρίσκονται στους διαιρέτες του -1 και είναι οι αριθμοί ± 1.

Αλλά $f(1) = 3 \neq 0$ και $f(-1) = -3 \neq 0$.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

β)

i. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα, διότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A.

ii. Είναι $f(1) = 3 > 0$ και $f(0) = -1 < 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα που προσδιορίζει τη ρίζα μιας πολυωνυμικής συνάρτησης με προσέγγιση, υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ μεταξύ των αριθμών 0 και 1.

21155

ΘΕΜΑ 4

Στον πίνακα μιας σχολικής τάξης είναι γραμμένο το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, όπου οι συντελεστές a, b, c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι αριθμοί. Δύο μαθητές, ο Α και ο Β, παίζουν ένα παιχνίδι, επιλέγοντας τιμές για τους συντελεστές ως εξής: πρώτα ο Α επιλέγει τιμή για κάποιον συντελεστή, μετά ο B επιλέγει τιμή για έναν από τους δύο εναπομείναντες συντελεστές και τέλος ο A επιλέγει τιμή για τον συντελεστή που έμεινε. Προσπαθούν να επιλέξουν τους a, b, c ώστε το $P(x)$ να ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένη συνθήκη.

α) Έστω ότι ο μαθητής Α επιλέγει $a = 2$, μετά ο Β επιλέγει $b = 1$ και τέλος ο Α επιλέγει πάλι $c = 2$. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ θα έχει τότε ως μοναδική ρίζα τον αριθμό -2.

(Μονάδες 5)

β) Ο μαθητής Α επιλέγει $a = -1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x - 1$.

(Μονάδες 8)

γ) Ο μαθητής Α επιλέγει $c = 1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει σίγουρα ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

(Μονάδες 7)

δ) Ο μαθητής Α επιλέγει $c = 2022$. Να αποδείξετε ότι όπως και να επιλεγούν μετά οι συντελεστές a και b είναι αδύνατον το $P(x)$ να έχει ως ρίζα τον αριθμό 13.

(Μονάδες 5)

21155-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2 = x^2(x+2) + (x+2) = (x+2)(x^2+1)$.

Αλλά $x^2 + 1 > 0$ για κάθε τιμή του x. Έτσι η εξίσωση $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2+1) = 0$, δίνει $x + 2 = 0$, άρα $x = -2$.

β) Θέλουμε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + bx + c$ να έχει ως ρίζα τον αριθμό 1.

Άρα πρέπει $P(1) = 0$, δηλαδή $1^3 - 1^2 + b + c = 0$, άρα $b + c = 0$.

Παρατηρούμε λοιπόν πως όποιον αριθμό και να επιλέξει ο μαθητής Β για τον συντελεστή b ή c, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει τον αντίθετό του.

γ) Για να έχει το πολυώνυμο $P(x)$ ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ αρκεί να ισχύει

$P(0) \cdot P(1) < 0$, σύμφωνα με το Θεώρημα σελ. 145 του σχολικού βιβλίου.

Αλλά $P(0) = 1$ και $P(1) = (-1)^3 + a(-1)^2 - b + 1 = a - b$.

Αν λοιπόν ο μαθητής Β επιλέξει έναν αριθμό στη θέση του α, τότε αρκεί ο μαθητής Α να επιλέξει έναν μεγαλύτερο αυτού στη θέση του b.

Αν ο μαθητής Β επιλέξει έναν αριθμό στη θέση του b, τότε αρκεί ο μαθητής Α να επιλέξει έναν μικρότερο αυτού στη θέση του α.

δ) Αν ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές έχει ακέραια ρίζα, τότε αυτή θα είναι διαιρέτης του σταθερού όρου. Αλλά στο $P(x)$ ο σταθερός όρος είναι το 2022 το οποίο όμως δεν είναι πολλαπλάσιο του 13, αφού $\frac{2022}{13} = 155 + \frac{7}{13}$. Έτσι, αποκλείεται το 13 να είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

21240

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3+4x^2-5x-2$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $3\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^3+4\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^2-5\left(\frac{5}{x^2+1}\right)-2>0$.

(Μονάδες 11)

21240-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από το θεώρημα ακέραιων ριζών πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι αριθμοί $\pm1,\pm2$. Με δοκιμή βρίσκουμε $P(1)=0$, άρα το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου. Με το σχήμα Horner θα παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο ώστε να βρούμε τις υπόλοιπες ρίζες.

3	4	−5	−2	1
	3	7	2	
3	7	2	0	

Οπότε:

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(3x^2+7x+2\right)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \ \acute{\eta}\ 3x^2+7x+2=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=-2,\ x=-\frac{1}{3}.$$

β) Συμπληρώνουμε το σχετικό πίνακα προσήμου.

x	$-\infty$	-2		$-\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$3x^2+7x+2$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Επομένως $P(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-2,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$.

γ) Η δοθείσα ανίσωση είναι ισοδύναμη με $P\left(\frac{5}{x^2+1}\right)>0, x\in\mathbb{R}$. Επομένως από το β) ερώτημα πρέπει $-2<\frac{5}{x^2+1}<-\frac{1}{3}$ (1)

ή $1<\frac{5}{x^2+1}$. (2)

Επιλύουμε τις δύο ανισώσεις:

Η (1) είναι αδύνατη, αφού $\frac{5}{x^2+1}>0$.

Η (2) γίνεται: $1<\frac{5}{x^2+1} \Leftrightarrow x^2+1<5 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$.

22013

ΘΕΜΑ 4

Δίδεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε δύο αριθμούς α, β τέτοιους ώστε:

$$x^4 + 1 = (x^2 + \alpha x + 1) \cdot (x^2 + \beta x + 1)$$

(Μονάδες 10)

γ) Θεωρούμε την ακόλουθη πρόταση: «*Κάθε πολυώνυμο που μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων μικρότερου μη μηδενικού βαθμού, έχει πραγματικές ρίζες*». Είναι η πρόταση αυτή Σωστή ή Λάθος; Αν η πρόταση είναι σωστή, να δώσετε απόδειξη. Αν η πρόταση είναι λάθος, να δώσετε αντιπαράδειγμα.

(Μονάδες 10)

22013-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η ποσότητα x^4+1 είναι αυστηρά θετική, μάλιστα $x^4+1 \geq 0+1=1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε, το x^4+1 δεν μηδενίζεται για καμιά τιμή του x και συνεπώς, το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Εναλλακτικά: Αν υπήρχε πραγματικός αριθμός ρ τέτοιος ώστε $\rho^4+1=0$, τότε θα έπρεπε $\rho^4=-1$, πράγμα άτοπο.

β) Θα εκτελέσουμε τις πράξεις στο δεύτερο μέλος και στη συνέχεια θα εξισώσουμε τους συντελεστές των δυνάμεων του x.

$x^4+1=(x^2+\alpha x+1)\cdot(x^2+\beta x+1) \Leftrightarrow$

$x^4+1=x^4+(\alpha+\beta)x^3+(\alpha\beta+2)x^2+(\alpha+\beta)x+1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha\cdot\beta=-2\\ \alpha+\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-\beta\\ \alpha\cdot\beta=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-\beta\\ \alpha^2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-\beta\\ \alpha=\pm\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}\alpha=\sqrt{2} \text{ και } \beta=-\sqrt{2}\\ \alpha=-\sqrt{2} \text{ ή } \beta=\sqrt{2}\end{matrix}$$

Άρα: $\alpha=\sqrt{2}$ και $\beta=-\sqrt{2}$ ή $\alpha=-\sqrt{2}$ και $\beta=\sqrt{2}$

Συνεπώς, $x^4+1=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\cdot\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$.

γ) Η πρόταση είναι λάθος, σύμφωνα με το α) και β) ερώτημα. Το αντιπαράδειγμα είναι το πολυώνυμο $P(x)=x^4+1$ το οποίο αναλύεται σε γινόμενο δύο πολυωνύμων 2ου βαθμού:

$$x^4+1=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\cdot\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right).$$

αλλά δεν έχει πραγματικές ρίζες.