12722

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x - 3$

α)Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$ (Μονάδες 12)

β)Να επιλύσετε την ανίσωση $-2 \cdot f(x) < 0$ (Μονάδες 13)

12722-Λύση

Λύση

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 1 + 12 = 13 > 0$

Άρα το $f(x)$ έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

$x_1 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1)-\sqrt{13}}{2\cdot 1} = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $x_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1)+\sqrt{13}}{2\cdot 1} = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

β)$-2 \cdot f(x) < 0 \Leftrightarrow -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot f(x) > 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) > 0$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου, με βάση το α) ερώτημα.

Καθώς είναι $\alpha = 1 > 0$, παρατηρούμε ότι είναι $f(x) > 0$ για

$$x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \infty\right)$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	+	-	+	

12976

ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x(1-2x) \leq -1$.

(Μονάδες 13)

12976-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Επειδή α=2, β=-1 και γ=-1 η διακρίνουσα είναι

Δ= $(-1)^2 - 4 \cdot 2(-1) = 9 > 0$. Το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες:

$x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$ και $x_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\cdot 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.

Επομένως το τριώνυμο γίνεται

$2x^2 - x - 1 = 2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x+1)$

Άρα έχουμε $2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$.

β) Η ανίσωση γίνεται $x(1-2x) \leq -1 \Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 \geq 0$

Έχουμε να λύσουμε ανίσωση δευτέρου βαθμού.

Παρατηρούμε πως το τριώνυμο της ανίσωσης είναι το τριώνυμο του πρώτου ερωτήματος. Άρα μηδενίζεται για $x_1 = 1 \; και \; x_2 = -\frac{1}{2}$ και επειδή το α=2>0 προκύπτει:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 - x - 1$		+	0	-	0	+	

Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων το τριώνυμο θα είναι ομόσημο του α, δηλαδή θετικό για $x \leq -\frac{1}{2}$ ή $x \geq 1$.

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$.

13174

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι παραστάσεις $\mathrm{A}=\dfrac{-x^2+4|x|-3}{|x|-1}$ και $\mathrm{B}=\dfrac{x^2-4|x|+4}{|x|-2}$.

α) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις Α και Β;

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι Α = $3-|x|$ και Β = $|x|-2$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $\mathrm{B}-\mathrm{A}<2d(x,4)-5$.

(Μονάδες 9)

13174-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η παράσταση Α ορίζεται όταν :

$$|x|-1\neq 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$|x|\neq 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$x\neq \pm 1$$

και η παράσταση Β όταν:

$$|x|-2\neq 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$|x|\neq 2 \quad \Leftrightarrow$$
$$x\neq \pm 2$$

β) Έχουμε: $-x^2+4|x|-3=-|x|^2+4|x|-3$. Θέτουμε $\omega=|x|$, οπότε

$$-|x|^2+4|x|-3=-\omega^2+4\omega-3,$$

που είναι τριώνυμο με ρίζες των οποίων το άθροισμα είναι $-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{4}{-1}$= 4 και το γινόμενο

είναι $\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{-3}{-1}=3$, οπότε $\omega_1=3$ και $\omega_2=1$. Άρα

$$-\omega^2+4\omega-3=-(\omega-1)(\omega-3)$$

και

$$-|x|^2+4|x|-3=-(|x|-1)(|x|-3).$$

Συνεπώς: $\mathrm{A}=\dfrac{-x^2+4|x|-3}{|x|-1}=\dfrac{-(|x|-1)(|x|-3)}{(|x|-1)}=3-|x|$.

Για την παράσταση Β έχουμε:

$$\mathrm{B}=\frac{x^2-4|x|+4}{|x|-2}=\frac{|x|^2-4|x|+4}{|x|-2}=\frac{(|x|-2)^2}{(|x|-2)}=|x|-2.$$

γ) Η ανίσωση γίνεται:

$$\mathrm{B}-\mathrm{A}<2d(x,4)-5 \quad \Leftrightarrow$$
$$|x|-2-3+|x|<2|x-4|-5 \quad \Leftrightarrow$$
$$2|x|-5<2|x-4|-5 \quad \Leftrightarrow$$
$$|x|<|x-4| \quad \Leftrightarrow$$
$$|x|^2<|x-4|^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$x^2<(x-4)^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$x^2<x^2-8x+16 \quad \Leftrightarrow$$
$$x<2$$

13174-Λύση

Δεδομένου ότι για να έχει νόημα η ανίσωση πρέπει $x \neq \pm 1$ και $x \neq \pm 2$, τελικά η ανίσωση αληθεύει για

$$x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2).$$

13176

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις $|x-1|<2$ και $x^2-3x+2\geq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1,1]\cup[2,3)$.

(Μονάδες 8)

γ)

i. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2, με $\rho_1<\rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1, \rho_2 \in(-1,1]$, είναι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

(Μονάδες 4)

ii. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2, με $\rho_1<\rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1\in(-1,1]$ και $\rho_2\in[2,3)$, είναι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

(Μονάδες 5)

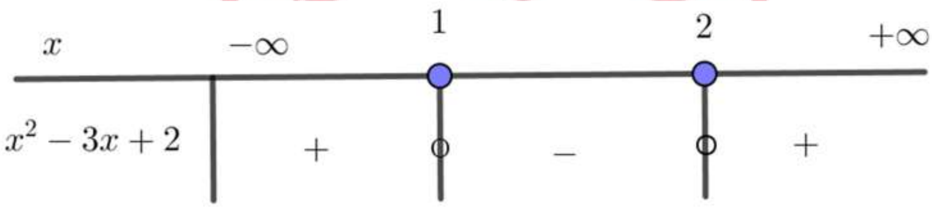
13176-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $|x-1|<2 \Leftrightarrow -2<x-1<2 \Leftrightarrow -1<x<3$.

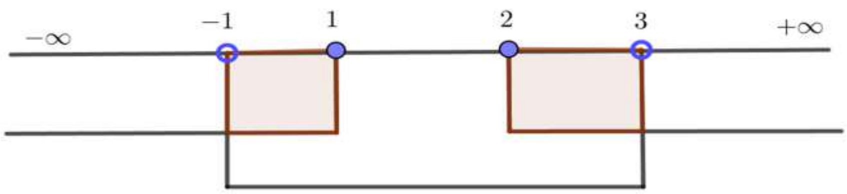
Για να λύσουμε την ανίσωση $x^2-3x+2\geq 0$, θα βρούμε πρώτα τις ρίζες x_1 και x_2 του τριωνύμου. Έχουμε λοιπόν: $x_1+x_2=\dfrac{-\beta}{\alpha}=3$ και $x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=2$, οπότε $x_1=1$ και $x_2=2$.

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου για το τριώνυμο x^2-3x+2, με $\alpha=1>0$:



Οπότε η ανίσωση αληθεύει για $x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών,



βλέπουμε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1,1]\cup[2,3)$.

γ) Εφόσον οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2, με $\rho_1<\rho_2$, ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των ανισώσεων, θα ισχύει: $\rho_1,\rho_2\in(-1,1]\cup[2,3)$.

i. Αν $\rho_1,\rho_2\in(-1,1]$, τότε: $\left\{\begin{matrix}-1<\rho_1\leq 1\\ -3<3\rho_2\leq 3\end{matrix}\right\}$ και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει: $-4<\rho_1+3\rho_2\leq 4$, συνεπώς $-1<\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}\leq 1$ και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ είναι κοινή λύση των ανισώσεων.

ii. Αν $\rho_1\in(-1,1]$ και $\rho_2\in[2,3)$, τότε: $\left\{\begin{matrix}-1<\rho_1\leq 1\\ 6\leq 3\rho_2<9\end{matrix}\right\}$, και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει: $5<\rho_1+3\rho_2<10$, συνεπώς $\dfrac{5}{4}<\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}<\dfrac{5}{2}$ και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ είναι κοινή λύση των ανισώσεων μόνο εάν $2\leq\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}<\dfrac{5}{2}$.

13321

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 16 = 0$. (1)

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x \le 0$. (2)

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2).

(Μονάδες 8)

13321-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&x^4-16=0 \Leftrightarrow\\
&x^4=16 \Leftrightarrow\\
&x=\pm\sqrt[4]{16} \Leftrightarrow\\
&x=\pm 2.
\end{aligned}
$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x=2$, $x=-2$.

β) Για να λύσουμε την ανίσωση, θα βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου x^2+3x και στη συνέχεια θα κάνουμε τον πίνακα προσήμου του x^2+3x. Για να βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου, παραγοντοποιώντας έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&x^2+3x=0 \Leftrightarrow\\
&x(x+3)=0 \Leftrightarrow\\
&x=0 \text{ ή } x=-3
\end{aligned}
$$

Συνεπώς ο πίνακας προσήμου είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
x^2+3x		$+$	0	$-$	0	$+$	

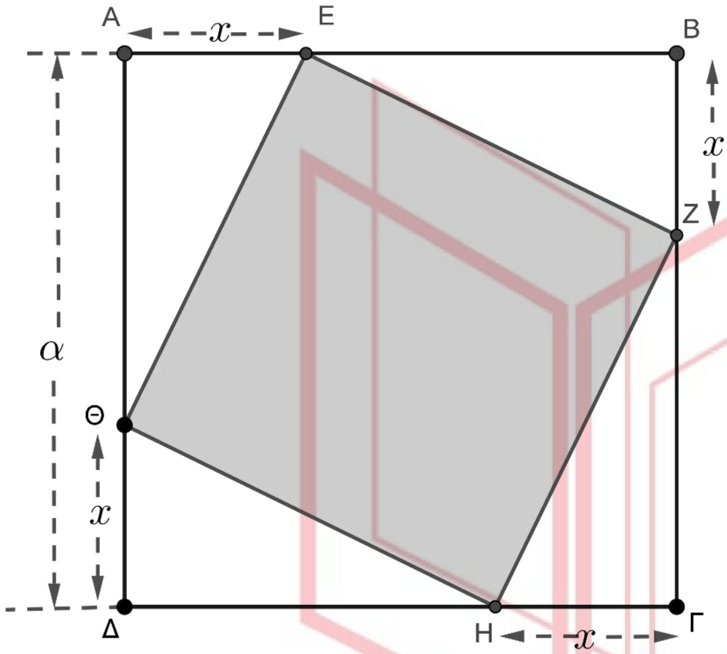
Άρα η ανίσωση (2) αληθεύει για $x\in[-3,0]$.

γ) Από τις λύσεις της εξίσωσης (1) μόνο η $x=-2$ είναι και λύση της ανίσωσης (2), διότι ανήκει στο διάστημα $[-3,0]$.

13368

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα οι κορυφές του τετραγώνου $ΕΖΗΘ$ βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$.



α) Αν η πλευρά του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ είναι α και η απόσταση των κορυφών του $ΕΖΗΘ$ από τις αντίστοιχες κορυφές του $ΑΒΓΔ$ είναι x, όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι το εμβαδόν του $ΕΖΗΘ$ δίνεται από τη σχέση:

$$(ΕΖΗΘ) = x^2 + (\alpha - x)^2 \ \text{ με } \ 0 \leq x \leq \alpha.$$

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του $ΕΖΗΘ$ δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το μισό του εμβαδού $ΑΒΓΔ$.

(Μονάδες 11)

γ) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ αν για $x = 1$, το εμβαδόν του $ΕΖΗΘ$ είναι τα δύο τρίτα του εμβαδού του $ΑΒΓΔ$, δηλαδή: $(ΕΖΗΘ) = \frac{2}{3}(ΑΒΓΔ)$.

(Μονάδες 8)

(Δίνεται $\sqrt{3} \approx 1{,}73$)

13368-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του $EZH\Theta$ είναι $(EZH\Theta) = (\Theta E)^2$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AE\Theta$ είναι $(AE) = x$ και $(A\Theta) = \alpha - x$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$(\Theta E)^2 = (AE)^2 + (A\Theta)^2$$

Άρα, $(EZH\Theta) = x^2 + (\alpha - x)^2$.

Επίσης, επειδή το Θ είναι σημείο της πλευράς ΔA και x είναι η απόσταση από την κορυφή Δ, θα είναι:

$$0 \leq (\Delta\Theta) \leq (\Delta A) \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \alpha.$$

β) Το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta$ είναι $(AB\Gamma\Delta) = \alpha^2$. Άρα η ζητούμενη σχέση γράφεται:

$$(EZH\Theta) \geq \frac{(AB\Gamma\Delta)}{2} \Leftrightarrow x^2 + (\alpha - x)^2 \geq \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2(\alpha - x)^2 \geq \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + 2\alpha^2 - 4\alpha x + 2x^2 \geq \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 + \alpha^2 - 4\alpha x \geq 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - 2\alpha 2x + \alpha^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(2x - \alpha)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

γ) Από το ερώτημα α) για $x = 1$ είναι:

$$(EZH\Theta) = 1^2 + (\alpha - 1)^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^2 - 2\alpha + 2.$$

Οπότε η σχέση $(EZH\Theta) = \frac{2}{3}(AB\Gamma\Delta)$ ισοδύναμα γίνεται:

$$\alpha^2 - 2\alpha + 2 = \frac{2}{3}\alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$3\alpha^2 - 6\alpha + 6 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - 6\alpha + 6 = 0.$$

Η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού ως προς α με διακρίνουσα $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 6 = 12 > 0$ και ρίζες:

$$\alpha_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 - \sqrt{3} \approx 3 - 1{,}73 = 1{,}27 \\ \alpha_2 = 3 + \sqrt{3} \approx 4{,}73 \end{cases}$$

Από το ερώτημα α), πρέπει να ισχύει $x \leq \alpha$, η οποία για $x = 1$ γίνεται $1 \leq \alpha$.

Παρατηρούμε ότι και οι δύο τιμές είναι δεκτές.

14123

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - \alpha x - (\alpha + 1)$, $x \in R$, με παράμετρο $\alpha \in R$.

α) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α να βρείτε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου.

(Μονάδες 7)

β) Αν είναι $\alpha > -2$, τότε:

(i) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί -1 και $\alpha + 1$.

(Μονάδες 4)

(ii) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το μήκος του διαστήματος λύσεων της ανίσωσης $x^2 - \alpha x - (\alpha + 1) \leq 0$ είναι ίσο με 2024.

(Μονάδες 7)

(iii) Να βρείτε το πρόσημο του $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

(Μονάδες 7)

14123-Λύση

Λύση

α) Έχουμε $\Delta = (-\alpha)^2 - 4[-(\alpha+1)] = \alpha^2 + 4\alpha + 4 = (\alpha+2)^2$.

● Αν $\alpha = -2$ τότε $\Delta = 0$ άρα το τριώνυμο έχει μοναδική ρίζα.

● Αν $\alpha \neq -2$ τότε $\Delta > 0$ άρα έχει δυο ρίζες άνισες.

β)

(i) Αφού $\alpha > -2$ τότε το f(x) έχει δυο ρίζες άνισες, τις $x = \frac{-(-\alpha)\pm\sqrt{(\alpha+2)^2}}{2}$ άρα $x = \frac{\alpha\pm(\alpha+2)}{2}$, οπότε η μία ρίζα είναι $x = \frac{2\alpha+2}{2} = \frac{2(\alpha+1)}{2} = \alpha + 1$ και η άλλη $x = \frac{\alpha-\alpha-2}{2} = -1$.

(ii) Έχει ρίζες τις -1 , $\alpha+1$ με $\alpha > -2 \Leftrightarrow \alpha + 1 > -1$ και το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1		$\alpha+1$		$+\infty$
$x^2-\alpha x-(\alpha+1)$	+	0	-	0	+	

Άρα $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [-1, \alpha+1]$.

Οπότε πρέπει $(\alpha+1) - (-1) = \alpha + 2 = 2024 \Leftrightarrow \alpha = 2022$.

(iii) Παρατηρούμε ότι $-1 < \frac{\alpha}{2} < \alpha + 1$ διότι:

$-1 < \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha > -2$ ισχύει και $\frac{\alpha}{2} < \alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha < 2\alpha + 2 \Leftrightarrow \alpha > -2$, ισχύει

Τότε σύμφωνα με το ερώτημα (ii) θα είναι $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$.

14189

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $x^2 - 3x - 4 < 0$, να δείξετε ότι $-1 < x < 4$.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η παράσταση $A = |2x + 2| + |x - 5|$ με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος α). Να αποδείξετε ότι: $A = x + 7$.

(Μονάδες 13)

14189-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$

Οι ρίζες του τριωνύμου $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \ \ 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$x^2 - 3x - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in (-1,4)$.

β) Είναι $A = |2x + 2| + |x - 5| = 2|x + 1| + |x - 5|$.

Επειδή $x \in (-1,4)$ τότε $x > -1$ και $x + 1 > 0$. Άρα $|x + 1| = x + 1$.

Επειδή $x \in (-1,4)$ τότε $x < 4 < 5$ και $x - 5 < 0$. Άρα $|x - 5| = 5 - x$.

Επομένως η παράσταση $A = 2(x + 1) + 5 - x = 2x + 2 + 5 - x = x + 7$.

14474

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+3x-5$.

α) Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου.

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

14474-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι: $2\cdot 1^2+3\cdot 1-5=2+3-5=0$, οπότε το $x_1=1$ είναι ρίζα του τριωνύμου.

β) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο, θα βρούμε και την δεύτερη ρίζα του χρησιμοποιώντας το γινόμενο των ριζών $x_1\cdot x_2=\frac{-5}{2}=-\frac{5}{2}$.

Οπότε:

$$x_1\cdot x_2=-\frac{5}{2}\text{, δηλαδή}$$

$$1\cdot x_2=-\frac{5}{2}\text{ και τελικά}$$

$$x_2=-\frac{5}{2}$$

Άρα το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:

$$2x^2+3x-5=2\left(x-1\right)\left(x+\frac{5}{2}\right).$$

14577

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1 .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 8)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\mathrm{A} = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$, $x \neq 0, x \neq -1$.

(Μονάδες 9)

14577-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι $(-1)^2-(-1)-2=1+1-2=0$, οπότε ο αριθμός -1 είναι ρίζα της εξίσωσης (1).

β) Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης ισούται με $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-2}{1}=-2$ και η μια ρίζα της είναι $x_1=-1$. Άρα για την δεύτερη ρίζα της εξίσωσης έχουμε:

$$\begin{aligned} &x_1\cdot x_2=-2 \Leftrightarrow \\ &-1\cdot x_2=-2 \Leftrightarrow \\ &x_2=2. \end{aligned}$$

γ) Από τα προηγούμενα ερωτήματα οι ρίζες του τριωνύμου x^2-x-2 είναι $x_1=-1$ και $x_2=2$. Οπότε παραγοντοποιείται ως εξής:

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1).$$

Η παράσταση γίνεται:

$$\mathrm{A}=\frac{x^2-x-2}{x^2+x}=\frac{(x-2)(x+1)}{x(x+1)}=\frac{x-2}{x}.$$

14601

ΘΕΜΑ 3

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1|<1$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $0<x<1$.

(Μονάδες 12)

β) Να βάλετε σε αύξουσα διάταξη τους αριθμούς $1,\ x,\ x^2$.

(Μονάδες 13)

14601-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$|2x-1|<1 \text{, οπότε}$$

$$-1<2x-1<1 \text{, προσθέτουμε στα μέλη της ανίσωσης το } 1 \text{ και έχουμε}$$

$$0<2x<2 \text{ , διαιρούμε τα μέλη της ανίσωσης με το 2 και τελικά}$$

$$0<x<1$$

β) Από το α) ερώτημα, έχουμε $0<x<1$, οπότε και $0<x^2<1$. Πρέπει να βρούμε τη σχέση του x με τον x^2. Θα πάρουμε τη διαφορά τους x^2-x και θα βρούμε το πρόσημό της. Το τριώνυμο $x^2-x=x(x-1)$ έχει ρίζες $x_1=0$ και $x_2=1$. Δεδομένου ότι $0<x<1$, μας ενδιαφέρει το πρόσημο του τριωνύμου στο διάστημα εντός των ριζών του. Στο διάστημα αυτό το τριώνυμο είναι αρνητικό. Δηλαδή $x^2-x<0$ για $x\in(0,1)$. Οπότε $x^2<x$.

Τελικά, $x^2<x<1$.

Εναλλακτικά, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της $0<x<1$ με $x>0$, οπότε προκύπτει: $0<x^2<x$ και τελικά $x^2<x<1$.

14615

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda^2-1=0$, με παράμετρο $\lambda \in R$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ, πραγματικές και άνισες ρίζες.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 7)

Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1<\rho_2$.

γ) Να βρείτε για ποιες της παραμέτρου λ, η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8.

(Μονάδες 6)

δ) Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1<k<\rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού $k^2-2\lambda k+\lambda^2-1$

(Μονάδες 6)

14615-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι η εξίσωση είναι στην μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με

$a = 1\,, \beta = -2\lambda\,, \gamma = \lambda^2 - 1$ και

$\Delta = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda^2 - 1) = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4 = 4 > 0$, άρα η διακρίνουσα Δ είναι πάντα θετική, ανεξάρτητα από την οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ.

β) 1ος τρόπος:

$\rho_{1,2} = \frac{-\beta \mp \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2\lambda) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{2\lambda \pm 2}{2} = \frac{2(\lambda \pm 1)}{2} = \lambda \pm 1$. Ώστε $\rho_1 = \lambda - 1\,, \rho_2 = \lambda + 1$

2ος τρόπος:

Η εξίσωση γράφεται $(x - \lambda)^2 - 1^2 = 0$ και ισοδύναμα έχουμε

$(x - \lambda - 1)(x - \lambda + 1) = 0$ άρα

$x - \lambda - 1 = 0$ ή $x - \lambda + 1 = 0$. Ώστε $x = \lambda + 1$ ή $x = \lambda - 1$

Έτσι $\rho_1 = \lambda - 1\,, \rho_2 = \lambda + 1$ αφού $\rho_1 < \rho_2$.

γ) Πρέπει $|\rho_2 - (-\rho_1)| \geq 8 \Leftrightarrow |\rho_1 + \rho_2| \geq 8$. Αν έχουμε βρει τις ρίζες τότε $\rho_1 + \rho_2 = 2\lambda$.

Χωρίς να βρούμε τις ρίζες, από τύπους Vieta, $\rho_1 + \rho_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-(-2\lambda)}{1} = 2\lambda$.

Άρα, πρέπει $|2\lambda| \geq 8 \Leftrightarrow 2|\lambda| \geq 8 \Leftrightarrow |\lambda| \geq 2 \Leftrightarrow \lambda \leq -2$ ή $\lambda \geq 2$.

δ) Έστω το τριώνυμο $f(x) = 1 \cdot x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1$ τις ρίζες του οποίου έχουμε βρει στο β) ερώτημα.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1 = f(k) < 0$, σχέση που προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα προσήμου του $f(x)$

x	$-\infty$ ρ_1	k	ρ_2 $+\infty$
$f(x)$	**+**	**-**	**+**

14652

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

ii. Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \dfrac{\alpha+\alpha^2}{2}$.

(Μονάδες 7)

14652-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$x^2 > x \Leftrightarrow$$
$$x^2 - x > 0 \quad (1)$$

Το τριώνυμο $x^2 - x = x(x-1)$ έχει ρίζες τις: $x = 0, x = 1$.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$x^2 - x$	+	0	−	0	+	

Επομένως η (1) αληθεύει για $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

β) i. Από τα δεδομένα και το α) ερώτημα έχουμε: $0 < 1 < \alpha \overset{\alpha)\,\varepsilon\rho\acute{\omega}\tau.}{<} \alpha^2$ και

$1 < \alpha$, οπότε $\sqrt{1} < \sqrt{\alpha}$, δηλαδή

$$\sqrt{\alpha} > 1.$$

Επίσης: $\alpha < \alpha^2 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < \sqrt{\alpha^2} \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \sqrt{\alpha} < \alpha$.

Οπότε τελικά: $0 < 1 < \sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2$.

ii. Έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha < \alpha^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow$$
$$\alpha < \frac{\alpha^2 + \alpha}{2}$$

Επίσης:

$$\alpha < \alpha^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\alpha^2 + \alpha}{2} < \alpha^2$$

Οπότε τελικά: $\alpha < \dfrac{\alpha^2 + \alpha}{2} < \alpha^2$.

14653

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ανίσωση $|x-1| \leq 3$.   (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε μία ανίσωση 2ου βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την (1).

(Μονάδες 8)

δ) Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιό του, τότε η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3.

(Μονάδες 7)

14653-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|x-1|\le 3 \Leftrightarrow -3\le x-1\le 3 \Leftrightarrow -2\le x\le 4$ δηλαδή $x\in[-2,4]$.

β) Οι ακέραιες λύσεις στο διάστημα $[-2,4]$ είναι οι : -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.

γ) Αναζητούμε ένα τριώνυμο με ρίζες -2 και 4 του οποίου το πρόσημο να είναι ετερόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου.

Το άθροισμα των ριζών είναι $S=-2+4=2$, το γινόμενο των ριζών είναι $P=-2\cdot 4=-8$, οπότε ένα τριώνυμο είναι το $x^2-S\cdot x+P=x^2-2\cdot x-8$ και αφού θέλουμε το πρόσημο του να είναι ετερόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου, δηλαδή αρνητικό, έχουμε τελικά ότι η ζητούμενη ανίσωση είναι η $x^2-2x-8\le 0$.

δ) Έστω λοιπόν ένας αριθμός x του οποίου το τετράγωνο ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιό του, δηλαδή $x^2-8\le 2x \Leftrightarrow x^2-2x-8\le 0$. Τότε όπως δείξαμε στο γ) ερώτημα για αυτόν τον αριθμό x θα ισχύει ισοδύναμα ότι $|x-1|\le 3$, δηλαδή η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3.

14654

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2-3x+2,\ x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α,β με $\alpha<\beta$ για τους οποίους ισχύει

$$\left(\alpha^2-3\alpha+2\right)\left(\beta^2-3\beta+2\right)<0\ .$$

i. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha-1$ και $\beta-2$ είναι ομόσημοι .

(Μονάδες 10)

ii. Να δείξετε ότι $\left|(\alpha-1)(\beta-2)\right|=(\alpha-1)(\beta-2)$.

(Μονάδες 5)

14654-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο x^2-3x+2 έχει $\alpha=1, \beta=-3, \gamma=2$ και διακρίνουσα: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1>0$.

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}\frac{3+1}{2}=2\\ \frac{3-1}{2}=1\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
x^2-3x+2	+	0	−	0	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι το τριώνυμο είναι θετικό για $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ και αρνητικό για $x\in(1, 2)$.

β)

i. Δεδομένου ότι $(\alpha^2-3\alpha+2)(\beta^2-3\beta+2)<0$, διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

1η περίπτωση: $(\alpha^2-3\alpha+2)<0$ και $(\beta^2-3\beta+2)>0$,

Από το α) ερώτημα $\alpha\in(1,2)$ και $\beta\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$, δηλαδή $\alpha>1$ και αφού $\alpha<\beta$ θα είναι $\beta>2$, συνεπώς $\alpha-1$ και $\beta-2$ είναι θετικοί, άρα ομόσημοι.

2η περίπτωση: $(\alpha^2-3\alpha+2)>0$ και $(\beta^2-3\beta+2)<0$,

Από το α) ερώτημα $\alpha\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ και $\beta\in(1,2)$ δηλαδή $\beta<2$ και αφού $\alpha<\beta$ Θα είναι $\alpha<1$, συνεπώς $\alpha-1$ και $\beta-2$ είναι αρνητικοί άρα ομόσημοι.

ii. Αφού $\alpha-1$ και $\beta-2$ είναι ομόσημοι, έχουμε ότι $(\alpha-1)(\beta-2)>0$, οπότε:

$$|(\alpha-1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2).$$

14924

ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi+9}{3}\right) - 12 > 0$, όπου $\pi = 3{,}1415...$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $(|\alpha|+3)^2 - (|\alpha|+3) - 12 < 0$, να δείξετε ότι $\alpha \in (-1,1)$.

(Μονάδες 8)

14924-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - x - 12$ έχει $\Delta = 1 - 4\cdot(-12) = 1 + 48 = 49$ και δύο ρίζες άνισες, τις

$$x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\cdot 1} = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad , \quad x_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\cdot 1} = \frac{1-7}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$x^2 - x - 12$		+	0	-	0	+	

Δηλαδή

$$x^2 - x - 12 < 0 \text{ για κάθε } x \in (-3, 4) \text{ και}$$

$$x^2 - x - 12 > 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, -3) \cup (4, +\infty)\,.$$

β) Είναι $\pi > 3 \Leftrightarrow \pi + 9 > 12 \Leftrightarrow \frac{\pi+9}{3} > 4$, οπότε με βάση το α) έχουμε ότι

$$\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi+9}{3}\right) - 12 > 0$$

γ) Η παράσταση $(|\alpha|+3)^2 - (|\alpha|+3) - 12$ είναι η τιμή του τριωνύμου για $x = |\alpha| + 3$ και για να είναι αρνητική θα πρέπει :

$-3 < |\alpha| + 3 < 4 \Leftrightarrow -6 < |\alpha| < 1 \Leftrightarrow |\alpha| < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha \in (-1, 1)$.

14963

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $|x-4|-|x-2|=2$.

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της παραπάνω εξίσωσης.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο $(-\infty,2]$ και μόνο αυτοί.

(Μονάδες 8)

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $|x-4|-|x-2|=2$, τότε να δείξετε ότι $x^2-6x+8\geq 0$.

(Μονάδες 9)

14963-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς x των οποίων η απόσταση από το 4 είναι δύο μονάδες μεγαλύτερη από την απόστασή τους από το 2. Δηλαδή

$d(x,4)-d(x,2)=2$.

β) Έστω ότι τα σημεία Μ, Α, Β αναπαριστούν στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς x, 2 ,4 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

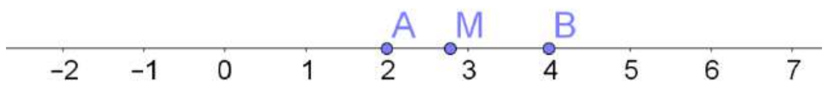
Παρατηρούμε ότι $d(2,4)=(\mathrm{AB})=2$.

Για κάθε αριθμό $x\in(-\infty,2]$ είναι $d(x,4)-d(x,2)=(\mathrm{MB})-(\mathrm{MA})=(\mathrm{AB})=2$.

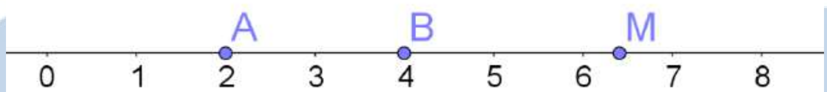
Για κάθε αριθμό $x\in(2,4]$ είναι

$d(x,4)-d(x,2)<d(x,4)+d(x,2)=(\mathrm{MB})+(\mathrm{MA})=(\mathrm{AB})=2$ και άρα

$d(x,4)-d(x,2)\neq 2$.



Για κάθε αριθμό $x\in(4,+\infty)$ είναι $(\mathrm{MB})<(\mathrm{MA})$ οπότε $d(x,4)<d(x,2)$ δηλαδή $d(x,4)-d(x,2)<0$ και άρα $d(x,4)-d(x,2)\neq 2$.



γ) όπως δείξαμε στο β), αν για τον πραγματικό αριθμό ισχύει x ότι $|x-4|-|x-2|=2$, τότε $x\in(-\infty,2]$.

Το τριώνυμο x^2-6x+8 έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 4 και γίνεται μη αρνητικό για $x\in(-\infty,2]\cup[4,+\infty)$.

Συνεπώς αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $|x-4|-|x-2|=2$, τότε $x\in(-\infty,2]$ και $x^2-6x+8\geq 0$.

32682

ΘΕΜΑ 4

α)

i. Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$.

(Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$.

(Μονάδες 7)

β)

i. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του αριθμού x.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18.$$

(Μονάδες 7)

32682-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Το τριώνυμο $x^2+9x+18$ έχει $\alpha=1, \beta=9, \gamma=18$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9^2-4\cdot1\cdot18=81-72=9>0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-9\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}=\begin{cases}\frac{-9+3}{2}=-3\\ \frac{-9-3}{2}=-6\end{cases}.$$

ii. Επειδή $|x+3|\geq0$ και $|x^2+9x+18|\geq0$, ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$|x+3|=0 \text{ και } |x^2+9x+18|=0 \Leftrightarrow$$

$$x+3=0 \text{ και } x^2+9x+18=0 \overset{(\alpha i)}{\Longleftrightarrow}$$

$$x=-3 \text{ και } \{x=-3 \text{ ή } x=-6\}.$$

Άρα, τελικά $x=-3$.

β)

i. Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-6		-3		$+\infty$
$x^2+9x+18$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2+9x+18<0 \Leftrightarrow x\in(-6,-3)$$

και

$$x^2+9x+18>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-6)\cup(-3,+\infty).$$

ii. Η εξίσωση γράφεται:

$$|x^2+9x+18|=-(x^2+9x+18),$$

που ισχύει αν και μόνο αν:

$$x^2+9x-18\leq0.$$

Άρα, από το ερώτημα (βi) συμπεραίνουμε ότι $x\in[-6,-3]$.

33582

ΘΕΜΑ 4

Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi = 40cm$. Αν $x\,cm$ είναι το μήκος του ορθογωνίου, τότε να δείξετε ότι:

α) $0 < x < 20$.

(Μονάδες 4)

β) Το εμβαδόν $\mathrm{E}(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση $\mathrm{E}(x) = 20x - x^2$.

(Μονάδες 8)

γ) Για το εμβαδόν $\mathrm{E}(x)$ του ορθογωνίου ισχύει: $\mathrm{E}(x) \le 100$, για κάθε $x \in (0,20)$.

(Μονάδες 6)

δ) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο $40\,cm$, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς $10\,cm$.

(Μονάδες 7)

33582-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 40cm$, το μήκος του είναι $x\,cm$ και το πλάτος του $y\,cm$, με $x, y > 0$.

Τότε: $\Pi = 40 \Leftrightarrow 2x + 2y = 40 \Leftrightarrow x + y = 20 \Leftrightarrow y = 20 - x$

Όμως $x, y > 0$, οπότε $x > 0$ και $20 - x > 0 \Leftrightarrow x < 20$. Τελικά $0 < x < 20$.

β) Το εμβαδόν $\mathrm{E}(x)$ του ορθογωνίου είναι:

$\mathrm{E} = x \cdot y$, δηλαδή $\mathrm{E}(x) = x \cdot (20 - x) = 20x - x^2$.

γ) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\mathrm{E}(x) \leq 100 \Leftrightarrow$$
$$20x - x^2 \leq 100 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 20x + 100 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$(x - 10)^2 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $x \in (0, 20)$.

δ) Από το γ) ερώτημα, $\mathrm{E}(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$. Άρα η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $100\ cm^2$.

Άρα: $\mathrm{E}(x) = 100 \Leftrightarrow (x - 10)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 10$, οπότε και $y = 20 - x = 20 - 10 = 10$, δηλαδή οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $x = y = 10\ cm$. Τελικά το μεγαλύτερο εμβαδόν το έχει το τετράγωνο πλευράς $10\ cm$.

33587

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2{,}999) \cdot f(-1{,}002).$$

(Μονάδες 7)

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$.

(Μονάδες 9)

33587-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $f(x)=-x^2+2x+3$ έχει διακρίνουσα $\Delta=2^2-4\cdot(-1)\cdot 3=4+12=16>0$. Το άθροισμα των ριζών του είναι $S=x_1+x_2=\dfrac{-2}{-1}=2$ και το γινόμενό τους είναι $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{3}{-1}=-3$. Άρα $x_1=3, x_2=-1$ και το πρόσημο του τριωνύμου είναι

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)=-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Οπότε το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για $x\in(-1,3)$ και αρνητικές τιμές για $x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

β) Εφόσον $2{,}999\in(-1,3)$, από τον παραπάνω πίνακα προσήμου θα είναι $f(2{,}999)>0$ και επειδή $-1{,}002<-1$ θα είναι $f(-1{,}002)<0$. Άρα,

$$f(2{,}999)\cdot f(-1{,}002)<0.$$

γ) Αν $-3<\alpha<3 \Leftrightarrow |\alpha|<3$, δηλαδή $0\le|\alpha|<3$, τότε ο αριθμός $-\alpha^2+2|\alpha|+3=-|\alpha|^2+2|\alpha|+3=f(|\alpha|)$ είναι θετικός, όπως προκύπτει από τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου $f(x)=-x^2+2x+3$ στο α) ερώτημα .

33698

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $3 < \lambda < 12$ τότε:

i. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

(Μονάδες 6)

ii. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

(Μονάδες 7)

33698-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2-6x+\lambda-3$ έχει $\alpha=1, \beta=-6, \gamma=\lambda-3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot1\cdot(\lambda-3)=$$
$$=36-4\lambda+12=48-4\lambda.$$

β) Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta>0 \Leftrightarrow 48-4\lambda>0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4\lambda>-48 \Leftrightarrow \lambda<12$$

γ)

i. Το άθροισμα των ριζών του τριωνύμου είναι:

$$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{-6}{1}=6$$

και το γινόμενο των ριζών του είναι:

$$P=x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\lambda-3}{1}=\lambda-3.$$

Το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες αν και μόνο αν

$$\Delta>0 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} \lambda<12.$$

Επίσης, οι ρίζες είναι ομόσημες και θετικές αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} P>0 \\ \text{και} \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda-3>0 \\ \text{και} \\ 6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda>3.$$

Άρα, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες και θετικές ρίζες αν και μόνο αν

$$\{\lambda<12 \text{ και } \lambda>3) \Leftrightarrow 3<\lambda<12.$$

ii. Επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $1>0$, το τριώνυμο είναι θετικό για τιμές του x εκτός των ριζών x_1, x_2 και αρνητικό εντός των ριζών.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2-6x+\lambda-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επειδή $x_1<\mu<x_2$ είναι $\mu>0$ *αφού* $x_1>0$ και από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι:

$$f(\mu)<0.$$

33698-Λύση

Επίσης, αφού $\kappa < 0$ και $0 < x_1$ είναι $\kappa < x_1$. Άρα, από τον πίνακα προσήμων διαπιστώνουμε ότι

$$f(\kappa) > 0.$$

Τελικά είναι $\kappa < 0, \mu > 0$, $f(\kappa) > 0$ και $f(\mu) < 0$. Οπότε,

$$\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu) > 0.$$

33711

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο:

$$x^2 - 2x - 8.$$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\kappa = -\frac{8889}{4444}$, η τιμή της παράστασης $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ είναι μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, ποιο είναι το πρόσημο της τιμής της παράστασης:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8;$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

33711-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο x^2-2x-8 έχει $\alpha=1, \beta=-2, \gamma=-8$ και διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)=4+32=36>0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{36}}{2\cdot 1}=\begin{cases}\dfrac{2+6}{2}=4\\ \dfrac{2-6}{2}=-2\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
x^2-2x-8		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2-2x-8<0 \Leftrightarrow -2<x<4 \Leftrightarrow x\in(-2,4)$$

και

$$x^2-2x-8>0 \Leftrightarrow (x<-2 \text{ ή } x>4) \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(4,+\infty).$$

β) Για να βρούμε το πρόσημο της παράστασης $\kappa^2-2\kappa-8$ πρέπει να γνωρίζουμε σε ποιο από τα διαστήματα του ερωτήματος α) ανήκει ο $\kappa=-\frac{8889}{4444}$. Συγκρίνουμε τον κ με το -2:

$$\kappa-(-2)=-\frac{8889}{4444}+2=-\frac{8889}{4444}+\frac{8888}{4444}=-\frac{1}{4444}<0.$$

Άρα, $\kappa-(-2)<0 \Leftrightarrow \kappa<-2$. Οπότε, από τον πίνακα του ερωτήματος α) συμπεραίνουμε ότι $\kappa^2-2\kappa-8>0$.

γ) Η δοθείσα παράσταση γράφεται:

$$\mu^2-2|\mu|-8=|\mu|^2-2|\mu|-8.$$

Επομένως προκύπτει από το αρχικό τριώνυμο για $x=|\mu|$.

Επίσης έχουμε ότι:

$$-4<\mu<4 \Leftrightarrow |\mu|<4 \Leftrightarrow 0\le|\mu|<4.$$

Από τον πίνακα προσήμων του ερωτήματος α) διαπιστώνουμε ότι για $0\le|\mu|<4$ είναι:

$$|\mu|^2-2|\mu|-8<0.$$

33712

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

(Μονάδες 4)

β)

i. Αν $\beta \neq 0$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

(Μονάδες 7)

ii. Πως αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta = 0$;

(Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της απάντησης στο ερώτημα β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

(Μονάδες 8)

33712-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot 1 \cdot \beta^2 = -3\beta^2$$

β)

i. Για $\beta \neq 0$ ισχύει ότι:

$$\Delta = -3\beta^2 < 0.$$

Επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $1 > 0$, το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Για $\beta = 0$ είναι $\Delta = 0$, οπότε το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, αφού για $x = 0$ μηδενίζεται.

γ) Το τριώνυμο $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ προκύπτει από το αρχικό τριώνυμο για $x = \alpha$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η

Αν $\beta \neq 0$ τότε από το (βi) συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0.$$

Περίπτωση 2η

Αν $\beta = 0$ (οπότε $\alpha \neq 0$), από το (βii) συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0.$$

33855

ΘΕΜΑ 4

α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 6)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x) - 2} \leq 2$.

(Μονάδες 6)

33855-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2+2x+3-\alpha=0 \quad (1)$$

και έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot 1\cdot(3-\alpha)=$$
$$=4-12+4\alpha=4\alpha-8.$$

i. Η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta>0 \Leftrightarrow 4\alpha-8>0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha>8 \Leftrightarrow \alpha>2.$$

ii. Η εξίσωση (1) έχει μια διπλή ρίζα αν και μόνο αν:

$$\Delta=0 \Leftrightarrow 4\alpha-8=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha=8 \Leftrightarrow \alpha=2.$$

Για $\alpha=2$ η διπλή ρίζα είναι η $x=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{-2}{2}=-1$.

β)

i. Είναι

$$f(x)\geq 2 \Leftrightarrow x^2+2x+3\geq 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x+1\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2\geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Από το ερώτημα β)i. έχουμε ότι $f(x)\geq 2 \Leftrightarrow f(x)-2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Οπότε ισοδύναμα έχουμε:

$$\sqrt{f(x)-2}\leq 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x)-2}\right)^2\leq 2^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)-2\leq 4 \Leftrightarrow f(x)\leq 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x+3\leq 6 \Leftrightarrow$$
$$x^2+2x-3\leq 0.$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16>0$$

και ρίζες τις:

33855-Λύση

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\begin{cases}\dfrac{-2+4}{2}=1\\ \dfrac{-2-4}{3}=-3\end{cases}.$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2+2x-3\leq 0\Leftrightarrow -3\leq x\leq 1\Leftrightarrow x\in[-3,1].$$

33890

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+1 \geq \frac{5}{2}x$ (1).

(Μονάδες10)

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$.

i. Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των αριθμών κ, λ.

(Μονάδες 8)

ii. Να δείξετε ότι $|\kappa-\lambda| \geq \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 7)

33890-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $x^2+1\geq\frac{5}{2}x\Leftrightarrow 2x^2-5x+2\geq 0$. Το τριώνυμο $2x^2-5x+2$ έχει διακρίνουσα

$\Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=9>0$ και ρίζες

$$x_1=\frac{-(-5)-\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{5-3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{-(-5)+\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{5+3}{4}=\frac{8}{4}=2.$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2-5x+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα η ανίσωση (1) αληθεύει για $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$.

β) Επειδή $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$, οι αριθμοί $\lambda-1$ και $\kappa-1$ είναι ετερόσημοι.

i. Αν $\begin{cases}\lambda-1>0\\ \text{και}\\ \kappa-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda>1\\ \text{και}\\ \kappa<1\end{cases}$, τότε $\kappa<1<\lambda$.

Αν $\begin{cases}\lambda-1<0\\ \text{και}\\ \kappa-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda<1\\ \text{και}\\ \kappa>1\end{cases}$, τότε $\lambda<1<\kappa$.

Σε κάθε περίπτωση, το 1 είναι μεταξύ των αριθμών κ,λ.

ii. Οι αριθμοί κ,λ είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και το 1 είναι μεταξύ τους.

Άρα $\begin{cases}\kappa\leq\frac{1}{2}\\ \text{και}\\ \lambda\geq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa\leq\frac{1}{2}\\ \text{και}\\ -\lambda\leq -2\end{cases}$, οπότε $\kappa-\lambda\leq\frac{1}{2}-2\Leftrightarrow\kappa-\lambda\leq-\frac{3}{2}$ ή

33890-Λύση

$\begin{cases} \lambda \le \frac{1}{2} \\ \text{και} \\ \kappa \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda \ge -\frac{1}{2} \\ \text{και} \\ \kappa \ge 2 \end{cases}$, οπότε $\kappa - \lambda \ge 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa - \lambda \ge \frac{3}{2}$.

Τελικά $|\kappa - \lambda| \ge \frac{3}{2}$.

33892

ΘΕΜΑ 4

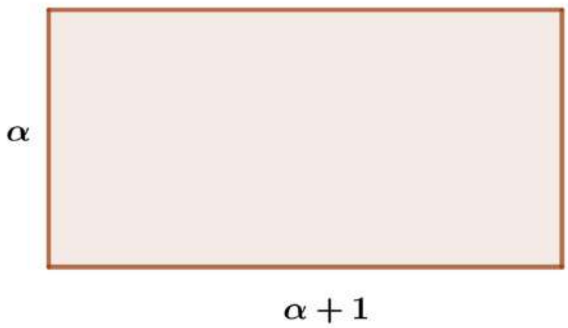
α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + x - 6 < 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x - \frac{1}{2}\right| > 1$.

(Μονάδες 5)

γ) Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο με πλευρές α και $\alpha + 1$.



Ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| > 1$. Αν για τον εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $\mathrm{E} < 6$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

(Μονάδες 5)

33892-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο x^2+x-6 έχει διακρίνουσα $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-6)=25>0$. Το άθροισμα των ριζών του είναι $S=\frac{-1}{1}=-1$ και το γινόμενό τους είναι $P=\frac{-6}{1}=-6$, οπότε οι ρίζες είναι $x_1=-3$ και $x_2=2$. Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
x^2+x-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Οπότε η ανίσωση $x^2+x-6<0$ αληθεύει για $x\in(-3,2)$.

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$\left|x-\frac{1}{2}\right|>1$, δηλαδή

$x-\frac{1}{2}<-1$ ή $x-\frac{1}{2}>1$ και τελικά

$x<-\frac{1}{2}$ ή $x>\frac{3}{2}$.

γ)

i. Ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|>1$, οπότε από το β) ερώτημα $\alpha<-\frac{1}{2}$ (απορρίπτονται οι τιμές αυτές γιατί $\alpha>0$, ως πλευρά) ή $\alpha>\frac{3}{2}$ (1).

Για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $\mathrm{E}<6\Leftrightarrow\alpha\cdot(\alpha+1)<6\Leftrightarrow\alpha^2+\alpha-6<0$. Από το α) ερώτημα και επειδή $\alpha>0$, η ανίσωση αληθεύει για $\alpha\in(0,2)$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

ii. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi=2\alpha+2(\alpha+1)=4\alpha+2$.

Έχουμε $\frac{3}{2}<\alpha<2\overset{(\cdot4)}{\Leftrightarrow}6<4\alpha<8\overset{(+2)}{\Leftrightarrow}8<\Pi<10$. Άρα η περίμετρος του ορθογωνίου κυμαίνεται μεταξύ των αριθμών 8 και 10.

34162

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x-5|\le 3$ και $2x^2-x-1\ge 0$.

(Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος (α).

(Μονάδες 09)

34162-Λύση

α) Είναι:

$$
\begin{aligned}
|2x-5|\le 3 &\Leftrightarrow -3\le 2x-5\le 3\\
&\Leftrightarrow -3+5\le 2x-5+5\le 3+5\\
&\Leftrightarrow 2\le 2x\le 8\\
&\Leftrightarrow \frac{2}{2}\le\frac{2x}{2}\le\frac{8}{2}\\
&\Leftrightarrow 1\le x\le 4 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Το τριώνυμο $2x^2-x-1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)=1+8=9>0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm 3}{4}=\begin{cases}\dfrac{4}{4}=1\\[2mm] \dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

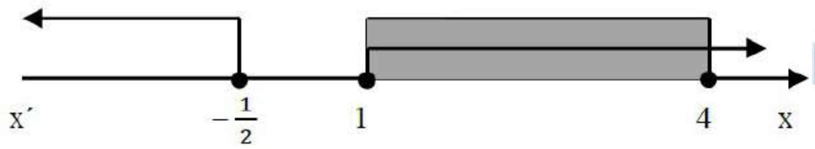
Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως ισχύει:

$$2x^2-x-1\ge 0\Leftrightarrow x\le -\frac{1}{2} \text{ ή } x\ge 1 \qquad (2)$$

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών:



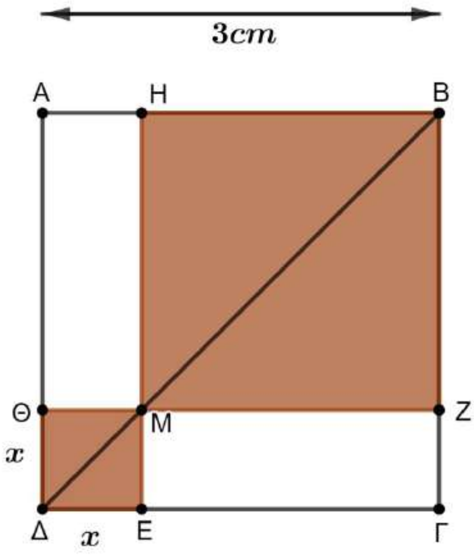
Όπως φαίνεται από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$1\le x\le 4\Leftrightarrow x\in[1,\ 4].$$

34182

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ πλευράς $ΑΒ = 3cm$ και τυχαίο σημείο $Μ$ που κινείται στη διαγώνιο $ΒΔ$ εσωτερικά (δηλαδή το Μ δεν θα ταυτιστεί με τα άκρα της διαγωνίου).



α) Να εκφράσετε το συνολικό εμβαδόν $Ε$ των σκιασμένων τετραγώνων $ΗΒΖΜ$ και $ΘΜΕΔ$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Ε(x)$.

(Μονάδες 9)

β) Αν το εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων είναι $Ε(x) = 2x^2 - 6x + 9$, να αποδείξετε ότι $Ε(x) \geq \frac{9}{2}$, για κάθε $x \in (0,3)$.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια θέση του $Μ$ πάνω στη $ΒΔ$ το εμβαδόν $Ε(x)$ γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

34182-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τετράγωνο $\Theta ME\Delta$ έχει πλευρά $x>0$ (1) .

Το εμβαδόν του $E_1 = x^2$.

Το τετράγωνο $HBZM$ έχει πλευρά $(3-x)>0 \Leftrightarrow x<3$ (2).

Το εμβαδόν του είναι $E_2 = (3-x)^2$.

Άρα το συνολικό εμβαδόν E ως συνάρτηση του x είναι:

$E(x) = E_1 + E_2 = x^2 + (3-x)^2 = 2x^2 - 6x + 9$.

Από (1) και (2), το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$ είναι $A = (0,3)$.

β) Έχουμε:

$$E(x) \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow$$
$$2x^2 - 6x + 9 \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow$$
$$4x^2 - 12x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$(2x-3)^2 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $x \in (0,3)$.

γ) Έχουμε:

$$E(x) = \frac{9}{2} \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow}$$
$$(2x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$2x-3=0 \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{3}{2}$$

Το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο αν και μόνο αν $x = \frac{3}{2}$, δηλαδή αν και μόνο αν το σημείο E είναι μέσο της $\Delta\Gamma$. Στο $\Delta B\Gamma$ τρίγωνο έχουμε:

E μέσο της $\Delta\Gamma$ και $ME // B\Gamma$, οπότε και M θα είναι μέσο της $B\Delta$.

34185

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-5x-6<0$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K=\left(-\frac{46}{47}\right)^2+5\cdot\frac{46}{47}-6$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha\in(-6,6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda=\alpha^2-5|\alpha|-6$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

34185-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο x^2-5x-6 έχει διακρίνουσα $\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot(-6)=49>0$. Το άθροισμα των ριζών του είναι $S=x_1+x_2=-\frac{-5}{1}=5$ και το γινόμενό τους είναι $P=x_1x_2=\frac{-6}{1}=-6$, οπότε οι ρίζες είναι $x_1=-1$ και $x_2=6$. Ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου είναι:

x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
x^2-5x-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα η ανίσωση $x^2-5x-6<0$ αληθεύει για $x\in(-1,6)$.

β) Έχουμε $-1<-\frac{46}{47}<6$.

Ο αριθμός K γράφεται:

$\mathrm{K}=\left(-\frac{46}{47}\right)^2+5\cdot\frac{46}{47}-6=\left(-\frac{46}{47}\right)^2-5\cdot\left(-\frac{46}{47}\right)-6$, οπότε είναι η τιμή του τριωνύμου x^2-5x-6 για $x=-\frac{46}{47}$.

Συνεπώς από τον πίνακα του ερωτήματος α) προκύπτει ότι ο αριθμός K είναι αρνητικός.

γ) Αν $\alpha\in(-6,6)$, έχουμε $-6<\alpha<6\Leftrightarrow|\alpha|<6\Leftrightarrow 0\le|\alpha|<6$.

Η παράσταση $\Lambda=\alpha^2-5|\alpha|-6$ γράφεται $\Lambda=|\alpha|^2-5|\alpha|-6$, που είναι η τιμή του τριωνύμου x^2-5x-6 για $x=|\alpha|$.

Συνεπώς από τον πίνακα του ερωτήματος α) προκύπτει ότι $\Lambda<0$.

34186

ΘΕΜΑ 4

Οι πλευρές x_1 και x_2 ενός ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-2x+\lambda(2-\lambda)=0$, με $\lambda\in(0,2)$.

α) Να βρείτε

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

(Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι $\mathrm{E}\leq 1$, για κάθε $\lambda\in(0,2)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in(0,2)$ για την οποία το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1. Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)

34186-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $x^2-2x+\lambda(2-\lambda)=0$ έχει ρίζες x_1 και x_2 με άθροισμα $S=x_1+x_2=-\dfrac{-2}{1}=2$

και γινόμενο $P=x_1x_2=\dfrac{\lambda(2-\lambda)}{1}=\lambda(2-\lambda)$.

i. Η περίμετρος Π του ορθογωνίου είναι: $\Pi=2x_1+2x_2=2(x_1+x_2)=2\cdot 2=4$.

ii. Το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ είναι:

$\mathrm{E}=x_1x_2=\lambda(2-\lambda),\ \lambda\in(0,2)$.

β) Έχουμε

$$\mathrm{E}\le 1\Leftrightarrow$$
$$\lambda(2-\lambda)\le 1\Leftrightarrow$$
$$\lambda^2-2\lambda+1\ge 0\Leftrightarrow$$

$(\lambda-1)^2\ge 0$, που ισχύει για κάθε $\lambda\in(0,2)$.

γ) Το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1, αν και μόνο αν

$$\mathrm{E}=1\overset{(\beta)}{\Leftrightarrow}$$
$$(\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow$$
$$\lambda=1.$$

Για $\lambda=1$, η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 4 και το εμβαδόν του 1, οπότε το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο πλευράς $x_1=x_2=1$.

34319

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4$, με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\alpha < x_1 < x_2 < \beta,$$

να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

34319-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4$ έχει διακρίνουσα:

$\Delta = \kappa^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = \kappa^2 + 48 > 0$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$

Άρα το τριώνυμο έχει για οποιαδήποτε τιμή του κ δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Για το γινόμενο των ριζών έχουμε:

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-4}{3} < 0.$$

Άρα, οι ρίζες είναι ετερόσημες.

γ) Επειδή $x_1 < x_2$ και οι ρίζες είναι ετερόσημες, ισχύει ότι:

$$x_1 < 0 < x_2.$$

Επίσης είναι $\alpha < x_1$ και $x_2 < \beta$. Άρα:

$$\alpha < 0 \text{ και } 0 < \beta. \quad (1)$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$3x^2 + \kappa x - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμου συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha < x_1 \Rightarrow f(\alpha) > 0 \text{ και } x_2 < \beta \Rightarrow f(\beta) > 0 \quad (2)$$

Από τις ανισώσεις (1) και (2) βρίσκουμε ότι:

$$\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta) < 0.$$

34323

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ίσες ρίζες;

(Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < x_2$,

(Μονάδες 4)

ii. να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$f(x_2), f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right), f(x_2+1).$$

(Μονάδες 5)

34323-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ έχει $\alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) =$$
$$= 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2 \geq 0.$$

Επειδή $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β) Το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες ίσες αν και μόνο αν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

γ)

i. Η σχέση $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$ ισοδύναμα γράφεται

$$\left(x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} \ \text{ και } \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2\right) \Leftrightarrow$$
$$(2x_1 < x_1 + x_2 \ \text{ και } \ x_1 + x_2 < 2x_2) \Leftrightarrow$$
$$x_1 < x_2,$$

που ισχύει από υπόθεση.

ii. Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		x_1		$\frac{x_1+x_2}{2}$		x_2		x_2+1		$+\infty$
$x^2 - x + \lambda - \lambda^2$		$+$	0		$-$		0		$+$		

Είναι:

$$f(x_2) = 0, f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0 \ \text{ και } \ f(x_2 + 1) > 0.$$

Άρα:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < f(x_2) < f(x_2 + 1)\ .$$

34910

ΘΕΜΑ 3

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 4x + 3 < 0$ (1).

(Μονάδες 13)

β) Αν η (1) έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $1 < x < 3$ και οι αριθμοί α, β είναι λύσεις της ανίσωσης (1), να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\alpha+\beta}{2}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης (1).

(Μονάδες 12)

34910-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

και ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του x φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3.$$

β) Για να είναι ο $\frac{\alpha+\beta}{2}$ λύση της ανίσωσης (1) αρκεί να δείξουμε $1 < \frac{\alpha+\beta}{2} < 3$. Έχουμε ότι:

$$\left.\begin{matrix} 1 < \alpha < 3 \\ 1 < \beta < 3 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow} 2 < \alpha + \beta < 6 \overset{(:2)}{\Longrightarrow} 1 < \frac{\alpha+\beta}{2} < 3.$$

34919

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 10x + 21 < 0$ (1).

(Μονάδες 13)

β) Αν η ανίσωση (1) έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $3 < x < 7$ και ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω ανίσωσης, να δείξετε ότι η παράσταση $A = |x-3| + |x-7|$ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 12)

34919-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2-10x+21$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=(-10)^2-4\cdot1\cdot21=100-84=16$$

και ρίζες:

$$x_{1,2}=\frac{-(-10)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{10\pm4}{2}=\begin{cases}\dfrac{10+4}{2}=7\\ \dfrac{10-4}{2}=3\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του x φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$x^2-10x+21$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2-10x+21<0 \Leftrightarrow 3<x<7.$$

β) Αφού ο x είναι λύση της ανίσωσης (1) ισχύει:

$3<x \Leftrightarrow 0<x-3$ άρα $|x-3|=x-3$

και

$x<7 \Leftrightarrow x-7<0$, άρα $|x-7|=7-x$.

Οπότε,

$$A=|x-3|+|x-7|=x-3+7-x=4.$$

Δηλαδή, η παράσταση A είναι σταθερή, ανεξάρτητη του x.

35030

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$$

(Μονάδες 15)

35030-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 + 4x + 5$ έχει $\alpha = 1,\ \beta = 4,\ \gamma = 5$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0.$$

Επειδή $\alpha = 1 > 0$, ισχύει ότι: $x^2 + 4x + 5 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

β) Είναι $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0$. Τότε

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4| \overset{\alpha)}{\Leftrightarrow} B = x^2 + 4x + 5 - (x^2 + 4x + 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B = x^2 + 4x + 5 - x^2 - 4x - 4 \Leftrightarrow B = 1.$$

35035

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + 9x - 12,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 13)

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του α) ερωτήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

35035-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$ έχει $\alpha = 3, \beta = 9, \gamma = -12$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12) = 81 + 144 = 225 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι:

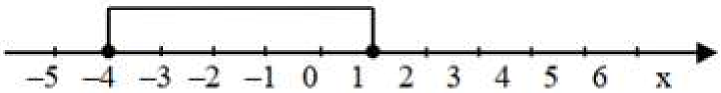
$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-9 \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 3} = \frac{-9 \pm 15}{6} = \begin{cases} \dfrac{-9+15}{6} = 1 \\ \dfrac{-9-15}{6} = -4 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$3x^2 + 9x - 12$		+	0	−	0	+	

Επομένως ισχύει:

$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 9x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-4,1]$



β) Ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης αν και μόνο αν:

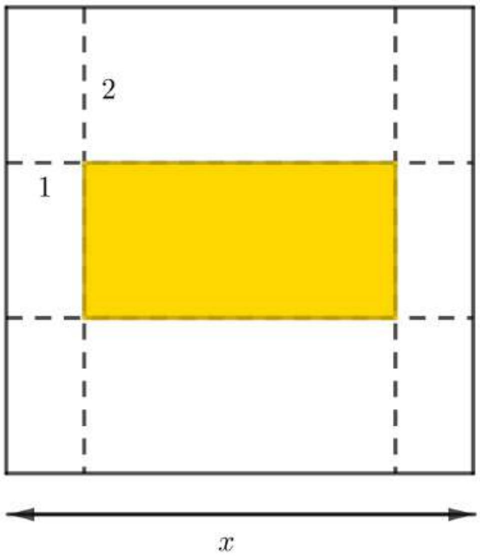
$-4 \leq \sqrt[3]{2} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2} \leq 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 \leq 1^3 \Leftrightarrow 2 \leq 1$, το οποίο δεν ισχύει.

Άρα ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ δεν είναι λύση της ανίσωσης.

35724

ΘΕΜΑ 4

Για μια επαγγελματική κάρτα επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς $x\ cm$ $(5 \leq x \leq 10)$ στο οποίο η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων (με κίτρινο χρώμα στο παρακάτω σχήμα) περιβάλλεται από περιθώρια $2\ cm$ στο πάνω και στο κάτω μέρος της και $1\ cm$ δεξιά και αριστερά.



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$\mathrm{E}(x)=(x-2)(x-4),\ 5 \leq x \leq 10\ .$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $35\ cm^2$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον $24\ cm^2$.

(Μονάδες 10)

35724-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι ορθογώνιο με διαστάσεις:

$x-(1+1)=x-2$ και

$x-(2+2)=x-4$.

Επομένως το εμβαδόν της E εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$\mathrm{E}(x)=(x-2)(x-4)$, $5\le x\le 10$.

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$\mathrm{E}(x)=35$, δηλαδή

$(x-2)(x-4)=35$, οπότε

$x^2-6x+8=35$ και τελικά

$x^2-6x-27=0$ (1).

Το τριώνυμο $x^2-6x-27$ έχει διακρίνουσα:

$\Delta=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-27)=144>0$ και συνεπώς η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_1=\frac{-(-6)-12}{2}=\frac{-6}{2}=-3 \text{ και}$$

$$x_2=\frac{-(-6)+12}{2}=\frac{18}{2}=9.$$

Επειδή $5\le x\le 10$, δεκτή είναι η λύση $x=9$.

Άρα σε ένα τετράγωνο χαρτόνι πλευράς $9\,cm$, η περιοχή εκτύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν $35\,cm^2$.

γ) Η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον $24\,cm^2$, δηλαδή $\mathrm{E}(x)\ge 24$. Έχουμε ισοδύναμα:

$(x-2)(x-4)\ge 24$, οπότε

$x^2-6x-16\ge 0$ (2).

Το τριώνυμο $x^2-6x-16$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-16)=100>0$ και ρίζες

$$x_1=\frac{-(-6)-10}{2}=\frac{-4}{2}=-2 \text{ και}$$

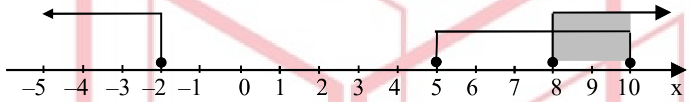
$$x_2=\frac{-(-6)+10}{2}=\frac{16}{2}=8.$$

35724-Λύση

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-2		8		$+\infty$
$x^2-6x-16$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα η (2) αληθεύει για $x \le -2$ ή $x \ge 8$. Επίσης $5 \le x \le 10$, οπότε με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών



παρατηρούμε ότι οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι: $8 \le x \le 10$.

Άρα για $x \in [8,10]$, η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον $24\, cm^2$.

36658

ΘΕΜΑ 4

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε cm) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y = 60t - 5t^2$.

α) Μετά πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

(Μονάδες 8)

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος $y = 175m$;

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100m.

(Μονάδες 9)

36658-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Όταν η σφαίρα επανέλθει στο έδαφος θα ισχύει $y=0$. Είναι:

$$y=0 \Leftrightarrow 60t-5t^2=0 \Leftrightarrow 5t(12-t)=0 \Leftrightarrow t=0 \text{ ή } t=12$$

Για $t=0\text{ sec}$ η σφαίρα βρίσκεται στην αρχή της κίνησης οπότε η τιμή $t=0$ απορρίπτεται.

Άρα η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος μετά από $t=12\text{ sec}$.

β) Ισχύει:

$$y=175 \Leftrightarrow 60t-5t^2=175 \Leftrightarrow 5t^2-60t+175=0$$

$$\Leftrightarrow t^2-12t+35=0 \Leftrightarrow t=5 \text{ ή } t=7$$

Άρα η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος 175m τις χρονικές στιγμές 5sec και 7sec.

γ) Η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100m όταν $y>100$. Είναι:

$$y>100 \Leftrightarrow 60t-5t^2>100 \Leftrightarrow 5t^2-60t+100<0$$

$$\Leftrightarrow t^2-12t+20<0 \Leftrightarrow 2<t<10$$

Άρα η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100m μεταξύ των χρονικών στιγμών 2sec και 10sec.

36669

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \leq |x| \leq 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2,3]$.

(Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

(Μονάδες 10)

36669-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$2 \le |x| \le 3 \Leftrightarrow (\, 2 \le |x| \text{ (1) και } |x| \le 3 \text{ (2)}$$

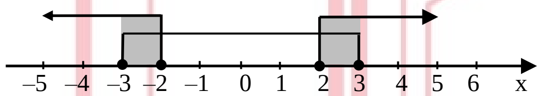
Από την ανίσωση (1) βρίσκουμε:

$$2 \le |x| \Leftrightarrow x \ge 2 \text{ ή } x \le -2 \text{ (3)}$$

Από την ανίσωση (2) βρίσκουμε:

$$|x| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3 \text{ (4)}$$

Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (3) και (4) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



Οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι: $x \in [-3,-2] \cup [2,3]$ (5)

Το τριώνυμο $x^2 - 4x$ έχει ρίζες τις 0 και 4 αφού :

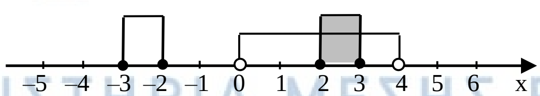
$$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) - 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 4$$

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 4x$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	-∞		0		4		+∞
$x^2 - 4x$		+	0	-	0	+	

Επομένως ισχύει: $x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow x \in (0,4)$ (6).

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (5) και (6) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι: $x \in [2,3]$

γ) Επειδή $\rho_1, \rho_2 \in [2,3]$ ισχύει ότι:

$$2 \le \rho_1 \le 3 \text{ (7) και } 2 \le \rho_2 \le 3 \text{ (8)}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (7) και (8) και βρίσκουμε:

36669-Λύση

$$2+2 \le \rho_1+\rho_2 \le 3+3 \Leftrightarrow$$
$$4 \le \rho_1+\rho_2 \le 6 \Leftrightarrow$$
$$\frac{4}{2} \le \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \le \frac{6}{2} \Leftrightarrow$$
$$2 \le \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \le 3$$

Άρα $\frac{\rho_1+\rho_2}{2} \in [2,3]$, οπότε και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

Σημείωση:

Ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ εκφράζει το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία που αντιστοιχούν στους αριθμούς ρ_1, ρ_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

36670

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$.

(Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$.

(Μονάδες 10)

36670-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|x+1|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x+1\le 2 \Leftrightarrow -2-1\le x+1-1\le 2-1 \Leftrightarrow -3\le x\le 1,\ (1)$$

Το τριώνυμο x^2-x-2 έχει $\alpha=1, \beta=-1, \gamma=-2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

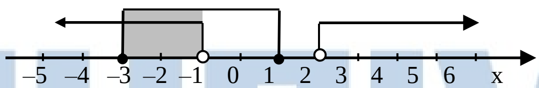
$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 3}{2}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\dfrac{1+3}{2}=\dfrac{4}{2}=2 \\ x_2=\dfrac{1-3}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	-	0	+	

Επομένως ισχύει: $x^2-x-2>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ (2)

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι: $x\in[-3,-1)$

γ) Επειδή $\rho_1,\rho_2\in[-3,-1]$ ισχύει ότι:

$$-3\le\rho_1\le -1,\ (7)$$

και

$$-3\le\rho_2\le -1 \Leftrightarrow 3\ge -\rho_2\ge 1 \Leftrightarrow 1\le -\rho_2\le 3,\ (8)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (7) και (8) και βρίσκουμε:

$$-3+1\le\rho_1-\rho_2\le 1+1 \Leftrightarrow$$
$$-2\le\rho_1-\rho_2\le 2$$

Άρα $\rho_1-\rho_2\in(-2,2)$.

36678

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0<\alpha<1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους αριθμούς:

$$0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}.$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

(Μονάδες 10)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\sqrt{1+\alpha} < 1+\sqrt{\alpha}$.

(Μονάδες 7)

36678-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι $x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0$.

Το πολυώνυμο $x^2 - x$ έχει ρίζες τις 0 και 1 αφού:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow$$
$$x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = 0 \text{ ή } x = 1.$$

Το πρόσημο του $x^2 - x$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
$x^2 - x$	+ 0 - 0 +

Επομένως ισχύει: $x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$.

β)

i) Αφού $0 < \alpha < 1$ με βάση το α) έχουμε ότι $\alpha^2 < \alpha$.

Επίσης $\alpha \neq 0$ οπότε $\alpha^2 > 0$.

Τέλος αφού $0 < \alpha < 1$ είναι και $0 < \sqrt{\alpha} < 1$ οπότε με βάση το α) έχουμε ότι $\sqrt{\alpha}^2 < \sqrt{\alpha} \Rightarrow \alpha < \sqrt{\alpha}$.

Συνεπώς $0 < \alpha^2 < \alpha < \sqrt{\alpha} < 1$.

ii) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{1+\alpha}^2 < (1+\sqrt{\alpha})^2 \Leftrightarrow$$
$$1 + \alpha < 1 + 2\sqrt{\alpha} + \alpha \Leftrightarrow$$
$$0 < 2\sqrt{\alpha}$$

που ισχύει για κάθε $\alpha > 0$.

36887

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{3}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος β).

(Μονάδες 9)

36887-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $2x^2-3x+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 1=1>0$ και ρίζες τις

$x_1=\dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-3)-1}{2\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$ και

$x_2=\dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-3)+1}{2\cdot 2}=1$.

β) Από τον παρακάτω πίνακα προσήμου του τριωνύμου $2x^2-3x+1$, παρατηρούμε ότι οι τιμές του x για τις οποίες $2x^2-3x+1<0$, είναι $x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

γ) Ο αριθμός $\dfrac{3}{2}$ δεν είναι λύση της ανίσωσης $2x^2-3x+1<0$, διότι $\dfrac{3}{2}\notin\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ αφού $\dfrac{3}{2}>1$.

Για τον αριθμό $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ έχουμε:

$\dfrac{1}{2}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1\Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{4}<\dfrac{3}{4}<1$, που ισχύει.

Άρα ο αριθμός $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ είναι λύση της ανίσωσης $2x^2-3x+1<0$.

36892

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x|}{3}-\frac{|x|+4}{5}=\frac{2}{3}$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2+2x+3\leq 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

36892-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{|x|}{3}-\frac{|x|+4}{5}=\frac{2}{3}\overset{(\cdot 15)}{\Leftrightarrow}$$

$5|x|-3(|x|+4)=10$, οπότε

$5|x|-3|x|-12=10$, δηλαδή

$2|x|=22$, οπότε

$|x|=11$ και τελικά

$x=-11$ ή $x=11$

β) Το τριώνυμο $-x^2+2x+3$ έχει διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot(-1)\cdot 3=16>0$ και ρίζες τις:

$$x_1=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2-4}{2\cdot(-1)}=3 \text{ και}$$

$$x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2+4}{2\cdot(-1)}=-1.$$

Από τον παρακάτω πίνακα προσήμου, βλέπουμε ότι η ανίσωση $-x^2+2x+3\le 0$ αληθεύει για $x\le -1$ ή $x\ge 3$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος, διότι $-11\in(-\infty,-1]$ και $11\in[3,+\infty)$.

37168

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ανισώσεις : $-x^2+5x-6<0$ (1), $x^2-16\leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των (1), (2).

(Μονάδες 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

(Μονάδες 13)

37168-Λύση

Λύση

α) Το τριώνυμο $-x^2+5x-6$ έχει $\alpha=-1, \beta=5, \gamma=-6$ και διακρίνουσα:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=5^2-4\cdot(-1)\cdot(-6)=25-24=1>0.$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5\pm\sqrt{1}}{2\cdot(-1)}=2 \text{ και } 3.$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$-x^2+5x-6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

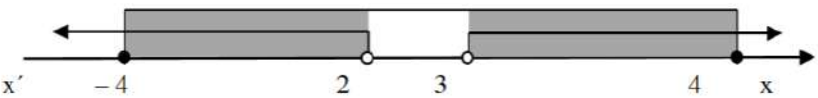
Επομένως ισχύει:

$-x^2+5x-6<0 \Leftrightarrow (x<2 \text{ ή } x>3) \Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty).$

Την ανίσωση $x^2-16\leq 0$ θα την λύσουμε με συντομότερο τρόπο. Ισχύει ότι:

$x^2-16\leq 0 \Leftrightarrow x^2\leq 16 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}\leq\sqrt{16} \Leftrightarrow |x|\leq 4 \Leftrightarrow -4\leq x\leq 4 \Leftrightarrow x\in[-4,4].$

β) Αναπαριστούμε τις λύσεις των παραπάνω εξισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-4\leq x<2 \text{ ή } 3<x\leq 4 \Leftrightarrow x\in[-4,2)\cup(3,4]$$

37169

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι :

$$\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2.$$

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το αρχικό τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

37169-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $-x^2+(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}$ έχει συντελεστές $\alpha=-1, \beta=\sqrt{3}-1, \gamma=\sqrt{3}$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(\sqrt{3}-1\right)^2-4\cdot(-1)\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}^2-2\sqrt{3}+1^2+4\sqrt{3}=\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}+1^2$$

$$=\left(\sqrt{3}+1\right)^2>0.$$

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-\left(\sqrt{3}-1\right)\pm\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{2\cdot(-1)}=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}+1}{-2} & =-1\\ \dfrac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}+1}{-2} & =\sqrt{3}\end{cases}$$

Επομένως η παραγοντοποίηση γίνεται:

$$-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}=-\left(x-(-1)\right)\left(x-\sqrt{3}\right)=-(x+1)\left(x-\sqrt{3}\right).$$

37182

ΘΕΜΑ 2

α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2-x-2=0$.

(Μονάδες 8)

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2-x-2>0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 12)

γ) Να τοποθετήσετε τον αριθμό $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι ο αριθμός $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β);

(Μονάδες 5)

37182-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο: $x^2 - x - 2$ έχει α=1 , β = -1, γ= -2 και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} & = 2 \\ \dfrac{1-3}{2} & = -1 \end{cases}$$

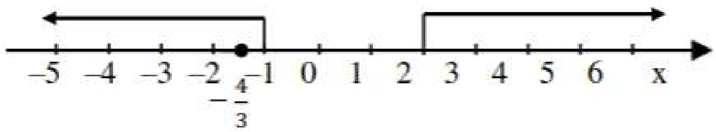
β) Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		+	0	−	0	+	

Επομένως ισχύει ότι:

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x < -1 \text{ ή } x > 2) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty).$$

γ)



Το $-\frac{4}{3}$ ανήκει στο διάστημα $(-\infty, -1)$, οπότε είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β).