14981

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x + 6$.

α) Να υπολογίσετε το $P(-2)$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το $x+2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(Μονάδες 5)

γ) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

(Μονάδες 15)

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14981-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι $P(-2) = (-2)^3 - (-2) + 6 = -8 + 2 + 6 = 0$.

β) Αφού ο αριθμός -2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, άρα το $x - (-2) = x + 2$ θα είναι παράγοντας του $P(x)$.

γ) Με βάση το β) ερώτημα, η διαίρεση $P(x) : (x + 2)$ θα είναι τέλεια, αφού το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης είναι το $P(-2) = 0$. Εκτελούμε το σχήμα Horner για να βρούμε το πηλίκο της παραπάνω διαίρεσης.

1	0	-1	6	-2
	-2	4	-6	
1	-2	3	0	

Άρα $P(x) = (x + 2)(1x^2 - 2x + 3)$. Παρατηρούμε τώρα, ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2x + 3$ είναι $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$, άρα δεν αναλύεται σε γινόμενο.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ 2

Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-3$ έχει πηλίκο x^2+2 και υπόλοιπο 4.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $P(x)=x^3-3x^2+2x-2$.

(Μονάδες 8)

γ) Είναι το $x=3$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

15012-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με την ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$P(x)=(x-3)(x^2+2)+4$

β) Έχουμε $P(x)=(x-3)(x^2+2)+4 \Leftrightarrow P(x)=x^3+2x-3x^2-6+4$.

Τελικά $P(x)=x^3-3x^2+2x-2$.

γ) Ο αριθμός $x=3$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, αν η διαίρεσή του με το $x-3$ έχει υπόλοιπο 0, που δεν συμβαίνει εδώ, αφού $P(3)=4$, άρα το $x=3$ δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

αλυμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

15096

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \ 2\,x^3 + x^2 - 3x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 και το -1 δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x):(x^2 + x - 1\ )$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 15)

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

15096-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$P(-1) = 2\,(-1)^3 + (-1)^2 - 3(-1) + 1 = 3 \neq 0$ και

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 \neq 0.$

Άρα το 1 και το -1 δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.

β) Είναι:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 \;+ x^2 - \;3\,x + 1 & x^2 + x - 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 - 2x^2 + 2x \quad & 2x - 1 \\ \hline -x^2 \;\; -x \;\;\; + 1 & \\ x^2 \;\; + x \;\;\; - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης των δύο πολυωνύμων είναι το $\pi(x) = 2x - 1$ και το υπόλοιπο είναι 0.

Επομένως ισχύει: $P(x) = (x^2 + x - 1) \cdot (2x - 1)$.

αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2(x-1)^{20}-3(x-1)^{10}+5x^2-3x-2$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$.

(Μονάδες 10)

β)

i. Να υπολογίσετε την τιμή $P(0)$.

(Μονάδες 5)

ii. Είναι το x παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΛΥΣΗ

α) Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν $P(\rho)=0$. Έχουμε $P(1)=2(1-1)^{20}-3(1-1)^{10}+5\cdot 1^2-3\cdot 1-2=0$, άρα το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β)

i. Είναι $P(0)=2(0-1)^{20}-3(0-1)^{10}+5\cdot 0^2-3\cdot 0-2=2-3-2=-3$.

ii. Αφού $P(0)=-3\neq 0$, το x δεν είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

20941

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P(x)} = \mathrm{x}^3 + 2\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 3$.

α) Να δείξετε ότι το -2 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $\mathrm{P(x)}: (\mathrm{x} + 2)$

(Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x): (x + 2)$.

(Μονάδες 07)

αλμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

20941-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$P(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 + (-2) + 3 = 1.$$

Επομένως το -2 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Το σχήμα Horner με διαιρετέο $P(x)$ και διαιρέτη $x + 2$ δίνει

1	2	1	3	ρ=−2
	−2	0	−2	
1	0	1	1	

Επομένως το πηλίκο της διαίρεσης είναι το πολυώνυμο

$$\pi(x) = x^2 + 1.$$

γ) Η ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x+2)$ γράφεται

$$P(x) = (x^2 + 1)(x + 2) + 1 .$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21997

ΘΕΜΑ 2

Δίδεται το πολυώνυμο $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Ποιο είναι το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ που προκύπτει από την διαίρεση $P(x):(x-2)$;

(Μονάδες 13)

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

21997-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός του γινομένου (μη-μηδενικών) πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών. Επομένως, ο βαθμός του πολυωνύμου $\mathrm{P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)}$ είναι ίσος με 3, καθώς το $\mathrm{P(x)}$ είναι γινόμενο τριών πολυωνύμων βαθμού 1.

β) $\mathrm{P(x):(x-2) = \frac{P(x)}{x-2} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x-2} = (x-1)(x-3)}$. Η διαίρεση, επομένως, είναι τέλεια, άρα το υπόλοιπο είναι ίσο με μηδέν.

Συνεπώς, $\mathrm{P(x) = (x-2)\cdot \underbrace{(x-1)(x-3)}_{\pi(x)} + \underbrace{0}_{\upsilon(x)}}$.

Άρα, $\mathrm{\pi(x) = (x-1)(x-3)}$ και $\mathrm{\upsilon(x) = 0}$.

Σχόλιο:

Το θεώρημα «Ταυτότητα της Διαίρεσης» λέει ότι: *για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ τέτοια ώστε $\Delta(x) = \delta(x)\cdot\pi(x) + \upsilon(x)$, όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.*

Από την μοναδικότητα που εγγυάται το θεώρημα για τα πολυώνυμα $\mathrm{\pi(x)}$ και $\mathrm{\upsilon(x)}$, προκύπτει ότι και μόνο η παρατήρηση ότι

$$\mathrm{P(x) = (x-2)\cdot(x-1)(x-3) + 0}$$

αρκεί για να βγει αμέσως το συμπέρασμα ότι $\mathrm{\pi(x) = (x-1)(x-3)}$ και $\mathrm{\upsilon(x) = 0}$.

αλιμπινίσης
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ