12909

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x-3|<5$.

α) Να δείξετε ότι $x\in(-2,8)$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3|<5$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με $\mathrm{B}=\{-3,-2,-1,0,3,4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ και $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ με αναγραφή των στοιχείων τους.

(Μονάδες 9)

12909-Λύση

ΛΥΣΗ

α) $|x-3|<5 \Leftrightarrow -5<x-3<5 \Leftrightarrow -2<x<8 \Leftrightarrow x\in(-2,8)$.

β) Οι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3|<5$ είναι οι ακέραιοι αριθμοί που ανήκουν στο διάστημα (-2, 8), δηλαδή οι : -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4, 5, 6, 7.

γ) Είναι $\mathrm{A}=\{-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$ και $\mathrm{B}=\{-3,-2,-1,0,3,4\}$ οπότε:

$\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$ και $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\{-1,0,3,4\}$.

13025

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|-x-1| \leq 23$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 5)

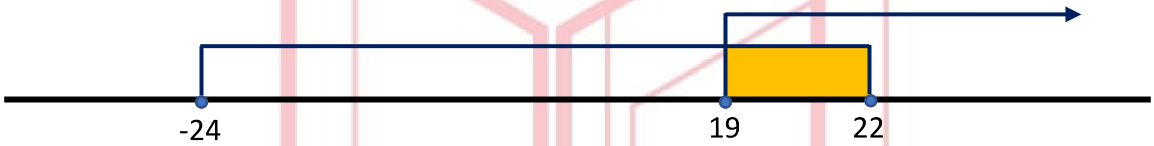
13025-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η δοθείσα ανίσωση γράφεται $\frac{-(3-2x)}{7} \geq 5$ οπότε $\frac{2x-3}{7} \geq 5 \Leftrightarrow 2x-3 \geq 35$, άρα $2x \geq 38 \Leftrightarrow x \geq 19$.

β) Καθώς οι αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές, η δοθείσα ανίσωση γράφεται ισοδύναμα $|x+1| \leq 23 \Leftrightarrow -23 \leq x+1 \leq 23 \Leftrightarrow -23-1 \leq x \leq 23-1 \Leftrightarrow$
$-24 \leq x \leq 22$.

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των δύο παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα, απ΄όπου προκύπτει ότι $19 \leq x \leq 22$.



13114

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x-1|-|3-3x|+|2x-4|}{2}$.

α) Να δείξτε ότι $f(x) = d(x,2) - d(x,1)$.

(Μονάδες 9)

β) Αν τα σημεία A και B παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2, να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $f(x) = 0$ και να προσδιορίσετε τη λύση της.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 8)

13114-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$f(x)=\frac{|x-1|-|3-3x|+|2x-4|}{2}=\frac{|x-1|-3|1-x|+2|x-2|}{2}=$$

$$=\frac{|x-1|-3|x-1|+2|x-2|}{2}=\frac{2|x-2|-2|x-1|}{2}=$$

$$=\frac{2(|x-2|-|x-1|)}{2}=|x-2|-|x-1|=d(x,2)-d(x,1).$$

β) Η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow d(x,2)-d(x,1)=0 \Leftrightarrow d(x,2)=d(x,1)$.

Αν M το σημείο του άξονα που αντιστοιχεί στη λύση x της παραπάνω εξίσωσης, αυτό θα πρέπει να ισαπέχει από τα σημεία A και B και κατά συνέπεια θα είναι το μέσο του τμήματος AB. Άρα $x=\frac{3}{2}$.

γ) Έχουμε $f(x)=0 \Leftrightarrow |x-2|=|x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=x-1 \Leftrightarrow -2=-1 \\ \text{ή} \\ x-2=-x+1 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}. \end{cases}$

Η πρώτη εξίσωση είναι αδύνατη. Άρα $x=\frac{3}{2}$.

13312

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2-6x+\lambda=0$ (1) όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha\cdot\beta=\lambda$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\alpha\cdot\beta\leq 9$.

(Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι $\alpha\cdot\beta=9$ αν και μόνο αν $\alpha=\beta$.

(Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α, β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

(Μονάδες 7)

13312-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 36 - 4\lambda$ και για να έχει πραγματικές ρίζες πρέπει και αρκεί $\Delta \geq 0$ ισοδύναμα $36 - 4\lambda \geq 0$ οπότε $-4\lambda \geq -36$ και τελικά $\lambda \leq 9$.

β)

i. Αφού οι πραγματικοί αριθμοί α, β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο λ θα είναι ρίζες της (1) και αυτό όπως δείξαμε στο α) ερώτημα συμβαίνει αν και μόνο αν $\lambda \leq 9 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \leq 9$.

ii. Αφού οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι ρίζες της (1), θα είναι $\alpha = \beta$ αν και μόνο αν η (1) έχει δύο ρίζες ίσες, δηλαδή ισοδύναμα αν $\Delta = 0$ δηλαδή $36 - 4\lambda = 0$ οπότε $-4\lambda = -36$ και τελικά $\lambda = 9$ πράγμα που σημαίνει ότι $\alpha \cdot \beta = 9$.

γ) Έστω α, β οι διαστάσεις τυχαίου ορθογωνίου παραλληλογράμμου με περίμετρο 12. Τότε $2\alpha + 2\beta = 12$ δηλαδή $\alpha + \beta = 6$. Το εμβαδόν τους είναι ίσο με $\alpha \cdot \beta$.

Δείξαμε στο β) ερώτημα ότι αν για δύο πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι $\alpha + \beta = 6$, τότε $\alpha \cdot \beta \leq 9$ και μάλιστα $\alpha \cdot \beta = 9$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$.

Συνεπώς η μεγαλύτερη τιμή του εμβαδού είναι 9 και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι ίσες, δηλαδή αν και μόνο αν είναι τετράγωνο.

13474

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις

$$|x-1| \le \sqrt{3} \quad (1) \qquad \text{και} \qquad 3-\frac{x+4}{2}<0 \quad (2)$$

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 5)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1).

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α, β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) τότε και ο αριθμός $\frac{3\alpha+4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση τους.

(Μονάδες 8)

13474-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|x-1|\le\sqrt{3}\Leftrightarrow-\sqrt{3}\le x-1\le\sqrt{3}\Leftrightarrow 1-\sqrt{3}\le x\le 1+\sqrt{3}$$

β) Η μικρότερη λύση της (1) είναι ο αριθμός $x_1=1-\sqrt{3}$ και η μεγαλύτερη είναι $x_2=1+\sqrt{3}$.

Για το άθροισμα s και το γινόμενο p των αριθμών αυτών ισχύει:

$$s=x_1+x_2=1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}=2 \text{ και } p=x_1x_2=\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)=1-3=-2.$$

Με τη βοήθεια του τύπου $x^2-sx+p=0$ βρίσκουμε ότι η εξίσωση με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1), είναι η $x^2-2x-2=0$.

γ) Για την ανίσωση (2) έχουμε:

$$3-\frac{x+4}{2}<0\Leftrightarrow 6-(x+4)<0\Leftrightarrow 6-x-4<0\Leftrightarrow -x<-2\Leftrightarrow x>2$$

Όπως φαίνονται στο επόμενο σχήμα, οι κοινές λύσεις των δυο ανισώσεων είναι όλοι οι αριθμοί x με: $2<x\le 1+\sqrt{3}$

δ) Οι αριθμοί α, β που είναι κοινές λύσεις των (1) και (2) περιέχονται στο διάστημα $\left(2, 1+\sqrt{3}\right]$.

Έτσι έχουμε: $2<\alpha\le 1+\sqrt{3}$, οπότε $6<3\alpha\le 3\left(1+\sqrt{3}\right)$, (3).

Ανάλογα, $2<\beta\le 1+\sqrt{3}$, οπότε $8<4\beta\le 4\left(1+\sqrt{3}\right)$, (4).

Με πρόσθεση των ανισοτήτων (3), (4) παίρνουμε $14<3\alpha+4\beta\le 7\left(1+\sqrt{3}\right)$ απ' όπου συνεπάγεται ότι:

$$2<\frac{3\alpha+4\beta}{7}\le 1+\sqrt{3}$$

Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha+4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση των (1) και (2), που είναι το ζητούμενο.

14295

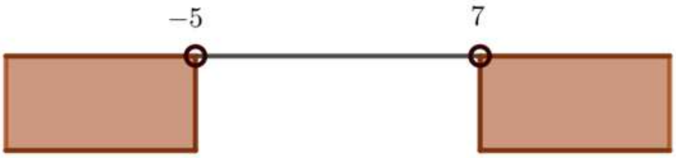
ΘΕΜΑ 2

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-1| \geq 6$ και στη συνέχεια να βρείτε τη θέση του πραγματικού αριθμού x πάνω στον άξονα, επιλέγοντας μια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις:

1.

2.

3.



4.

(Μονάδες 12)

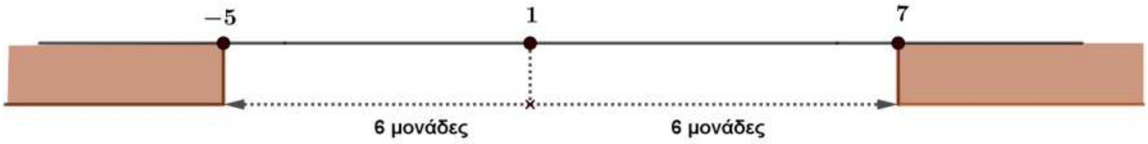
β) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο α) ερώτημα.

(Μονάδες 13)

14295-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-1| \geq 6$ διατυπώνεται γεωμετρικά ως εξής: Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x οι οποίοι απέχουν από το 1 απόσταση μεγαλύτερη ή ίση του 6.
Η σωστή αναπαράσταση είναι η 4η , διότι



β) Θα λύσουμε την ανίσωση αλγεβρικά, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$|x-1| \geq 6 \quad \text{, δηλαδή}$$

$$x-1 \leq -6 \quad \text{ή} \quad x-1 \geq 6 \text{, οπότε}$$

$$x \leq -5 \quad \text{ή} \quad x \geq 7$$

Δηλαδή το σύνολο λύσεων της ανίσωσης είναι το $(-\infty, -5] \cup [7, +\infty)$ που είναι πράγματι η αναπαράσταση 4.

14319

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ανίσωση $|2x-5|<3$

α) Να λύσετε την ανίσωση.

(Μονάδες 12)

β) αν ο αριθμός α είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$A=(\alpha-1)(\alpha-5).$$

(Μονάδες 13)

14319-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|2x-5|<3 \Leftrightarrow -3<2x-5<3 \Leftrightarrow -3+5<2x<3+5 \Leftrightarrow 2<2x<8 \Leftrightarrow 1<x<4.$$

Άρα, λύση της ανίσωσης είναι κάθε αριθμός x, με $x \in (1,\ 4)$.

β) Ο αριθμός α είναι λύση της ανίσωσης, οπότε $\alpha \in (1,\ 4)$. Έτσι έχουμε $\alpha > 1$, οπότε $\alpha - 1 > 0$ και $\alpha < 5$, οπότε $\alpha - 5 < 0$.

Επομένως οι παράγοντες του γινομένου $(\alpha-1)(\alpha-5)$ είναι ετερόσημοι, οπότε

$$A = (\alpha-1)(\alpha-5) < 0.$$

14650

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1|\le 3$ (1).

(Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-1|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-1|\le 3$.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-1|\le 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 8)

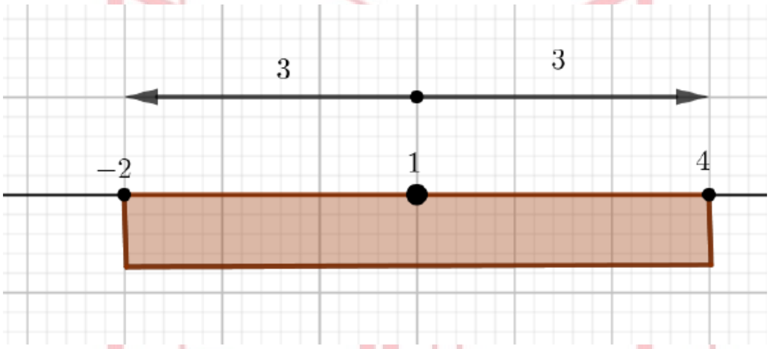
14650-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|x-1|\le 3 \Leftrightarrow$$
$$-3\le x-1\le 3 \Leftrightarrow$$
$$-2\le x\le 4.$$

β) Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης (1) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών απεικονίζεται ως εξής:



Στον άξονα των πραγματικών αριθμών βλέπουμε τους πραγματικούς αριθμούς x, οι οποίοι απέχουν από το 1 απόσταση μικρότερη ή ίση του 3.

γ) Οι ακέραιοι που ικανοποιούν την ανίσωση (1) είναι οι: $-2,-1,0,1,2,3$ και 4

δ) Θέτουμε $|x|=\omega$ και η ανίσωση γίνεται $|\omega-1|\le 3$. Από το γ) ερώτημα γνωρίζουμε ότι την επαληθεύουν οι ακέραιοι $-2,-1,0,1,2,3$ και 4. Δεδομένου ότι $\omega=|x|\ge 0$, δεκτοί είναι οι ακέραιοι: $0,1,2,3$ και 4. Συνεπώς:

$|x|=0 \Leftrightarrow x=0$

$|x|=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$

$|x|=2 \Leftrightarrow x=\pm 2$

$|x|=3 \Leftrightarrow x=\pm 3$ και

$|x|=4 \Leftrightarrow x=\pm 4$.

14753

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $2|x|-2\leq 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι $x\in[-1,1]$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την (1) απέχουν από το -3 απόσταση το πολύ 4.

(Μονάδες 5)

γ) Για τους πραγματικούς αριθμούς x που ικανοποιούν την (1) να γράψετε την παρακάτω παράσταση Α χωρίς τις απόλυτες τιμές.

$\mathrm{A}=|2x-3|-|4-3x|$

(Μονάδες 10)

14753-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από την (1) έχουμε ισοδύναμα :

$2|x|-2 \le 0 \Leftrightarrow 2|x| \le 2 \Leftrightarrow |x| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι : $d(x,-3) \le 4$.

Είναι: $d(x,-3) = |x+3| \le |x| + 3 \le 1+3 = 4$, δηλαδή $d(x,-3) \le 4$.

Εναλλακτικά, αξιοποιώντας το α ερώτημα, έχουμε :

$$-1 \le x \le 1 \Leftrightarrow 2 \le x+3 \le 4, \text{ οπότε}$$

$$|x+3| \le 4 \Leftrightarrow d(x,-3) \le 4 .$$

γ) Είναι:

$$-1 \le x \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2x \le 2 \Leftrightarrow -5 \le 2x-3 \le -1 < 0, \text{ οπότε}$$

$$|2x-3| = -2x+3 .$$

$$-1 \le x \le 1 \Leftrightarrow 3 \ge -3x \ge -3 \Leftrightarrow 7 \ge 4-3x \ge 1 > 0, \text{ οπότε}$$

$$|4-3x| = 4-3x .$$

Τελικά: $\mathrm{A} = |2x-3| - |4-3x| = -2x+3-(4-3x) = -2x+3-4+3x = x-1$.

33586

ΘΕΜΑ 4

Δύο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα.

Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους, κ.α.).

Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηναίο κόστος $\mathrm{K}(\nu)$ της επιχείρησης, εάν γεμίζει ν τόνερ το μήνα.

(Μονάδες 5)

β) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει τα μηναία έσοδα $\mathrm{E}(\nu)$ της επιχείρησης από την πώληση ν τόνερ το μήνα.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση

i. να μην έχει ζημιά.

(Μονάδες 7)

ii. να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

(Μονάδες 8)

33586-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το μηναίο κόστος $\mathrm{K}(\nu)$ της επιχείρησης, εάν γεμίζει ν τόνερ το μήνα, δίνεται από τη σχέση $\mathrm{K}(\nu)=6500+15\nu$ ευρώ, με $\nu\in\mathbb{N}$.

β) Τα μηναία έσοδα $\mathrm{E}(\nu)$ της επιχείρησης από την πώληση ν τόνερ το μήνα, είναι $\mathrm{E}(\nu)=25\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$.

γ)

i. Η επιχείρηση δεν έχει ζημιά αν και μόνο αν $\mathrm{K}(\nu)\le \mathrm{E}(\nu)$, δηλαδή $6500+15\nu\le 25\nu$, οπότε $10\nu\ge 6500$ και τελικά $\nu\ge 650$. Οπότε πρέπει να πωλούνται τουλάχιστον 650 τόνερ κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση να μην έχει ζημιά.

ii. Το μηνιαίο κέρδος δίνεται από τη σχέση:

$\mathrm{E}(\nu)-\mathrm{K}(\nu)=25\nu-\left(6500+15\nu\right)=10\nu-6500$. Η επιχείρηση έχει τουλάχιστον 500 ευρώ μηνιαίο κέρδος αν και μόνο αν, $10\nu-6500\ge 500\Leftrightarrow 10\nu\ge 7000\Leftrightarrow \nu\ge 700$. Επομένως η επιχείρηση πρέπει να πουλήσει τουλάχιστον 700 τόνερ το μήνα.

33893

ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-4|<2$.

(Μονάδες 7)

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x του οποίου η απόσταση από το 4 πάνω στο άξονα των πραγματικών είναι μικρότερη από 2.

i. Να δείξετε ότι $3x-4>0$.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού x από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

(Μονάδες 5)

iii. Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

(Μονάδες 8)

33893-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$|x-4|<2$, δηλαδή

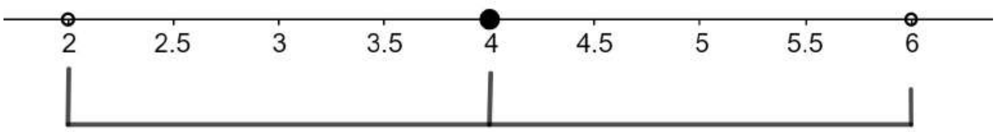
$-2<x-4<2$, οπότε

$4-2<x<2+4$ και τελικά

$2<x<6$.

Άρα $x\in(2,6)$.

β) Πάνω στο άξονα των πραγματικών αριθμών η απόσταση του x από το 4 είναι μικρότερη από 2, δηλαδή



Άρα $2<x<6$.

i. Έχουμε $2<x<6$, οπότε

$2\cdot 3<3x<6\cdot 3$, δηλαδή

$6<3x<18$, οπότε

$6-4<3x-4<18-4$ και τελικά

$2<3x-4<14$

και συνεπώς $3x-4>0$.

ii. Θα δείξουμε ότι $2<d(3x,4)<14$.

Ισχύει ότι $d(3x,4)=|3x-4|\overset{(i)}{=}3x-4$. Από το βi) ερώτημα $2<3x-4<14$, οπότε $2<d(3x,4)<14$.

iii. Η απόσταση του $3x$ από το 19 συμβολίζεται $d(3x,19)=|3x-19|$.

Από το βi) ερώτημα έχουμε $2<3x-4<14$ οπότε αφαιρούμε από τα μέλη της ανίσωσης 15 και έχουμε:

$-13<3x-19<-1$, δηλαδή $3x-19<0$. Οπότε $d(3x,19)=|3x-19|=-3x+19$.

Έχουμε $-13<3x-19<-1$, δηλαδή

$13>-3x+19>1$ οπότε $1<d(3x,19)<13$.

33896

ΘΕΜΑ 4

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $|\alpha - 2| < 1$ και $|\beta - 3| \le 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $1 < \alpha < 3$.

(Μονάδες 4)

β) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκεται ο β.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης $2\alpha - 3\beta$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

(Μονάδες 9)

33896-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$|\alpha-2|<1$, δηλαδή

$-1<\alpha-2<1$, οπότε

$-1+2<\alpha<1+2$ και τελικά

$1<\alpha<3$.

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$|\beta-3|\le 2$, δηλαδή

$-2\le \beta-3\le 2$, οπότε

$3-2\le \beta\le 3+2$ και τελικά

$1\le \beta\le 5$.

γ) Θα βρούμε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha-3\beta=2\alpha+(-3\beta)$.

Από τα ερωτήματα α) και β) έχουμε:

$1<\alpha<3$, οπότε πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της ανίσωσης με 2 έχουμε:

$2<2\alpha<6$ (1)

και $1\le\beta\le 5$, οπότε πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της ανίσωσης με -3 έχουμε:

$-3\cdot 1\ge -3\beta\ge -3\cdot 5$ και ισοδύναμα

$-15\le -3\beta\le -3$ (2).

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη, οπότε:

$-13<2\alpha+(-3\beta)<3$, δηλαδή $-13<2\alpha-3\beta<3$

δ) Θα βρούμε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\dfrac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\dfrac{1}{\beta}$.

Από τα ερωτήματα α) και β) έχουμε:

$1<\alpha<3$ (3)

και $1\le\beta\le 5$, οπότε ισοδύναμα $\dfrac{1}{1}\ge\dfrac{1}{\beta}\ge\dfrac{1}{5}$, δηλαδή

$\dfrac{1}{5}\le\dfrac{1}{\beta}\le 1$ (4).

Πολλαπλασιάζουμε τις (3) και (4) κατά μέλη, οπότε: $1\cdot\dfrac{1}{5}<\alpha\cdot\dfrac{1}{\beta}<3\cdot 1$, δηλαδή $\dfrac{1}{5}<\dfrac{\alpha}{\beta}<3$.

34148

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x-3|\le 5$

(Μονάδες 9)

ii) $|2x-3|\ge 1$

(Μονάδες 9)

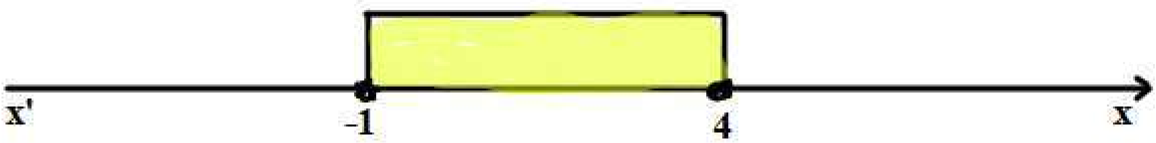
β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

34148-Λύση

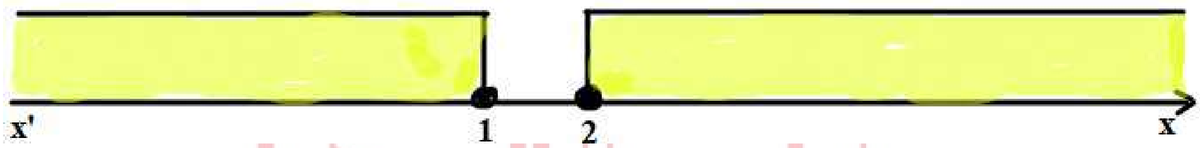
α) i) Είναι:

$$|2x-3| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le 2x-3 \le 5$$
$$\Leftrightarrow -2 \le 2x \le 8$$
$$\Leftrightarrow -1 \le x \le 4$$

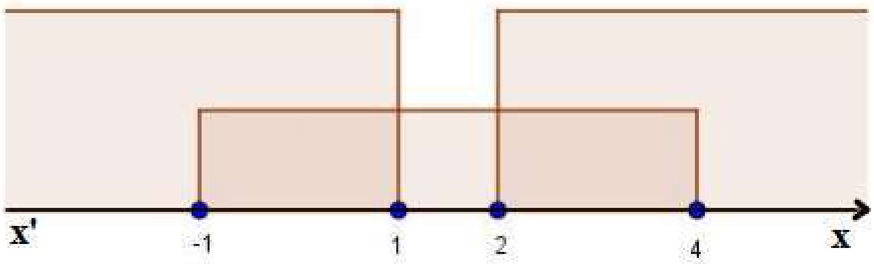


α) ii) Είναι:

$$|2x-3| \ge 1 \Leftrightarrow 2x-3 \le -1 \text{ ή } 2x-3 \ge 1$$
$$\Leftrightarrow x \le 1 \text{ ή } x \ge 2$$



β) Επειδή η πρώτη ανίσωση αληθεύει για $-1 \le x \le 4$ και η δεύτερη για $x \le 1$ ή $x \ge 2$, οι ανισώσεις συναληθεύουν για κάθε πραγματικό αριθμό x με $-1 \le x \le 1$ ή $2 \le x \le 4$, δηλαδή οι ανισώσεις συναληθεύουν όταν $x \in [-1,1] \cup [2,4]$. Οι κοινές λύσεις φαίνονται εποπτικά στο παρακάτω σχήμα.



34322

ΘΕΜΑ 4

Μια υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που προκύπτει από τη σχέση:

$$\lambda = (2x+5)^2 - 8x \qquad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός x είναι ο -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος αριθμός λ;

(Μονάδες 4)

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός λ είναι ο 20, ποιος είναι ο εισαγόμενος αριθμός x;

(Μονάδες 6)

γ)

i. Να δείξετε ότι η σχέση (1) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στη μορφή:

$$4x^2 + 12x + (25-\lambda) = 0.$$

(Μονάδες 2)

ii. Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5.

(Μονάδες 6)

iii. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές που μπορεί να έχει ο εξαγόμενος αριθμός λ.

(Μονάδες 7)

34322-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αντικαθιστούμε στην δοθείσα ισότητα $x=-5$ και βρίσκουμε:

$$\lambda=(2\cdot(-5)+5)^2-8\cdot(-5)=$$
$$=(-10+5)^2+40=(-5)^2+40=$$
$$=25+40=65.$$

β) Αντικαθιστούμε στην δοθείσα ισότητα $\lambda=20$ και έχουμε:

$$20=(2x+5)^2-8x$$

ή ισοδύναμα

$$20=4x^2+20x+25-8x$$

και τελικά

$$4x^2+12x+5=0.$$

Το τριώνυμο $4x^2+12x+5$ έχει διακρίνουσα:

$$\varDelta=12^2-4\cdot4\cdot5=144-80=64>0$$

και ρίζες:

$$x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{64}}{2\cdot4}=\frac{-12\pm8}{8}=\begin{cases}\dfrac{-12+8}{8}=-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{-12-8}{6}=-\dfrac{5}{2}\end{cases}.$$

γ)

i. Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$\lambda=(2x+5)^2-8x\Leftrightarrow\lambda=4x^2+20x+25-8x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow4x^2+12x+(25-\lambda)=0\qquad(2)$$

ii. Για να μπορεί ο εξαγόμενος αριθμός λ να είναι 5, με βάση τη σχέση (2) θα πρέπει να υπάρχει x τέτοιος ώστε:

$$4x^2+12x+(25-5)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow4x^2+12x+20=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+3x+5=0.$$

Το τριώνυμο x^2+3x+5 έχει διακρίνουσα $\varDelta=3^2-4\cdot1\cdot5=9-20=-11<0$. Άρα, η τελευταία εξίσωση είναι αδύνατη. Οπότε, για καμία τιμή του x δεν μπορεί ο εξαγόμενος αριθμός λ να είναι 5.

iii. Οι δυνατές τιμές που μπορεί να έχει ο αριθμός λ, είναι αυτές για τις οποίες η εξίσωση (2) έχει πραγματικές ρίζες. Αυτό ισχύει αν και μόνο αν $\varDelta\geq0$ όπου $\varDelta$ η διακρίνουσα του τριωνύμου $4x^2+12x+(25-\lambda)$. Οπότε, ισοδύναμα έχουμε ότι:

34322-Λύση

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot (25 - \lambda) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 144 - 400 + 16\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$16\lambda \geq 256 \Leftrightarrow \lambda \geq 16.$$

34325

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0, \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες;

(Μονάδες 6)

γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$.

(Μονάδες 9)

34325-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ έχει $\alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) =$$
$$= 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2 \geq 0 \text{, για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες.

β) Η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}.$$

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(1 - 2\lambda)^2}}{2} = \frac{1 \pm (1 - 2\lambda)}{2} = \begin{cases} \dfrac{1 + 1 - 2\lambda}{2} = 1 - \lambda \\ \dfrac{1 - 1 + 2\lambda}{2} = \lambda \end{cases}$$

Έχουμε ότι:

$$0 < d(x_1, x_2) < 2 \Leftrightarrow$$
$$0 < |x_1 - x_2| < 2 \Leftrightarrow$$
$$0 < |1 - \lambda - \lambda| < 2 \Leftrightarrow$$
$$0 < |1 - 2\lambda| < 2 \Leftrightarrow$$

Δηλαδή,

$$0 < |1 - 2\lambda| \Leftrightarrow$$
$$1 - 2\lambda \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$2\lambda \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\lambda \neq \frac{1}{2}$$

και

$$|1 - 2\lambda| < 2 \Leftrightarrow$$
$$-2 < 1 - 2\lambda < 2 \Leftrightarrow$$
$$-3 < -2\lambda < 1 \Leftrightarrow$$
$$-\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}.$$

Οπότε, τελικά

$$\lambda \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

35043

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2|<3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$

(Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\frac{|x+1|+|x-5|}{3}$

(Μονάδες 13)

35043-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|x-2|<3 \Leftrightarrow -3<x-2<3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3+2<x-2+2<3+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1<x<5$$

β) Ισχύει ότι:

$$-1<x<5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1<x \text{ και } x<5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (0<x+1 \text{ και } x-5<0)$$

Άρα:

$$|x+1|=x+1 \text{ και } |x-5|=-(x-5)=5-x$$

Τότε:

$$K=\frac{|x+1|+|x-5|}{3}=\frac{x+1+5-x}{3}=\frac{6}{3}=2$$

35044

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί y, για τους οποίους ισχύει: $|y-2|<1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1,3)$

(Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\frac{|y-1|+|y-3|}{2}$

(Μονάδες 13)

35044-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|y-2|<1 \Leftrightarrow -1<y-2<1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1+2<y-2+2<1+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1<y<3 \Leftrightarrow y \in (1,3)$$

β) Ισχύει ότι:

$$1<y<3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1<y \text{ και } y<3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (0<y-1 \text{ και } y-3<0)$$

Άρα:

$$|y-1|=y-1 \text{ και } |y-3|=-(y-3)=3-y$$

Τότε:

$$K=\frac{|y-1|+|y-3|}{2}=\frac{y-1+3-y}{2}=\frac{2}{2}=1$$

ΘΕΜΑ 3

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-1| \geq 5$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των α) και β).

(Μονάδες 8)

35296-Λύση

ΛΥΣΗ

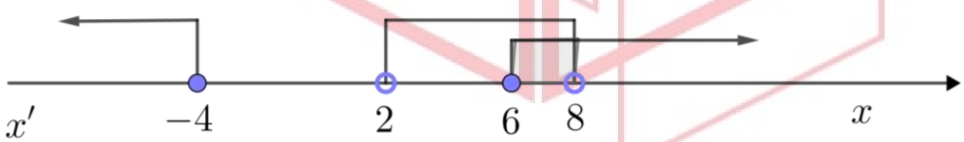
α) Είναι:

$$
\begin{aligned}
&|x-1| \geq 5 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x-1 \leq -5 \ ή \ x-1 \geq 5) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \leq -4 \ ή \ x \geq 6) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4] \cup [6, +\infty)
\end{aligned}
$$

β) Ισχύει ότι:

$$
\begin{aligned}
&d(x,5) < 3 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow |x-5| < 3 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -3 < x-5 < 3 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -3+5 < x-5+5 < 3+5 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2 < x < 8 \Leftrightarrow x \in (2,8)
\end{aligned}
$$

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών:



Όπως φαίνεται από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$6 \leq x \leq 8 \Leftrightarrow x \in [6,8)$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3|<1$.

(Μονάδες 15)

β) Αν για τους x, y ισχύουν $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να αποδείξετε ότι $3<x+y<7$.

(Μονάδες 10)

35404-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|y-3|<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow -1+3<y<1+3 \Leftrightarrow 2<y<4$$

β) Έχουμε τις σχέσεις

$$1<x<3$$
$$2<y<4$$

τις οποίες προσθέτουμε κατά μέλη και βρίσκουμε:

$$1+2<x+y<3+4 \Leftrightarrow 3<x+y<7$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{A}=|x-1|-|x-2|$.

α) Για $1<x<2$, να δείξετε ότι: $\mathrm{A}=2x-3$

(Μονάδες 13)

β) Για $x<1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

35415-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι:

$$1 < x < 2 \Leftrightarrow (1 < x \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x < 2) \Leftrightarrow (0 < x-1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x-2 < 0)$$

Τότε:

$$|x-1| = x-1 \text{ και } |x-2| = -(x-2) = 2-x$$

Άρα:

$$\mathrm{A} = |x-1| - |x-2| = x-1-(2-x) = x-1-2+x = 2x-3\,.$$

β) Για $x<1$ είναι:

$$|x-1| = -(x-1) = 1-x \text{ και } |x-2| = -(x-2) = 2-x$$

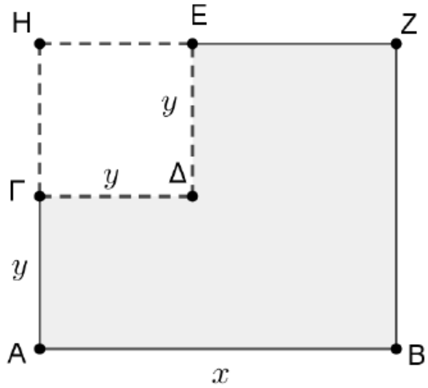
Επομένως:

$$\mathrm{A} = |x-1| - |x-2| = 1-x-(2-x) = 1-x-2+x = -1, \text{ σταθερή.}$$

ΘΕΜΑ 2

Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$.



(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

(Μονάδες 15)

35549-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η περίμετρος του ΕΖΒΑΓΔ είναι:

$$\Pi = \mathrm{AB} + \mathrm{BZ} + \mathrm{ZE} + \mathrm{E\Delta} + \Delta\Gamma + \Gamma\mathrm{A} =$$
$$x + 2y + x - y + y + y + y = 2x + 4y$$

β) Είναι:

$$5 < x < 8 \Leftrightarrow 2 \cdot 5 < 2x < 2 \cdot 8 \Leftrightarrow 10 < 2x < 16 \ (1)$$
$$1 < y < 2 \Leftrightarrow 4 \cdot 1 < 4y < 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 4 < 4y < 8 \ (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$10 + 4 < 2x + 4y < 16 + 8 \Leftrightarrow 14 < \Pi < 24$$

36671

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,5) \leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

(Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x.

(Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

(Μονάδες 10)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x+4|+|x-14|=18$$

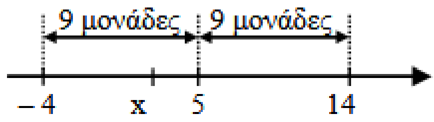
(Μονάδες 5)

36671-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η απόσταση των σημείων Μ(x) του άξονα των πραγματικών αριθμών από το σημείο Α(5) είναι μικρότερη ή ίση του 9.

β) Από το παρακάτω σχήμα βρίσκουμε ότι: $x \in [-4,14]$



γ) Είναι:

$$d(x,5) \le 9 \Leftrightarrow |x-5| \le 9 \Leftrightarrow -9 \le x-5 \le 9 \Leftrightarrow -9+5 \le x-5+5 \le 9+5 \Leftrightarrow -4 \le x \le 14$$

δ) Αφού $x \in [-4,14]$ έχουμε ότι:

$$x \ge -4 \Leftrightarrow x+4 \ge 0 \Leftrightarrow |x+4| = x+4 \text{ και}$$

$$x \le 14 \Leftrightarrow x-14 \le 0 \Leftrightarrow |x-14| = -x+14$$

οπότε $|x+4|+|x-14| = x+4+(-x+14) = 18$.

36777

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν:

$|x-3| \leq 2$ και $|y-6| \leq 4$.

α) Να αποδείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y.

(Μονάδες 13)

36777-Λύση

Λύση

α) Ισχύει ότι:

$|x-3|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x-3\le 2 \Leftrightarrow -2+3\le x\le 2+3 \Leftrightarrow 1\le x\le 5.$

$|y-6|\le 4 \Leftrightarrow -4\le y-6\le 4 \Leftrightarrow -4+6\le y\le 4+6 \Leftrightarrow 2\le y\le 10.$

β) Η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 2x και y είναι $\Pi=4x+2y$.

Από το α) ερώτημα έχουμε:

$1\le x\le 5 \Leftrightarrow 1\cdot 4\le 4x\le 5\cdot 4 \Leftrightarrow 4\le 4x\le 20 \qquad (1)$

$2\le y\le 10 \Leftrightarrow 2\cdot 2\le 2y\le 10\cdot 2 \Leftrightarrow 4\le 2y\le 20 \qquad (2)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) έχουμε:

$4+4\le 4x+2y\le 20+20 \Leftrightarrow 8\le \Pi\le 40.$

Συνεπώς, η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος είναι 8, όταν $x=1,\ y=2$ και η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος είναι 40, όταν $x=5,\ y=10$.

36886

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<2$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x|>5$.

(Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

(Μονάδες 9)

36886-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$|x-5|<2$, οπότε

$-2<x-5<2$ και τελικά

$3<x<7$.

β) Έχουμε ισοδύναμα:

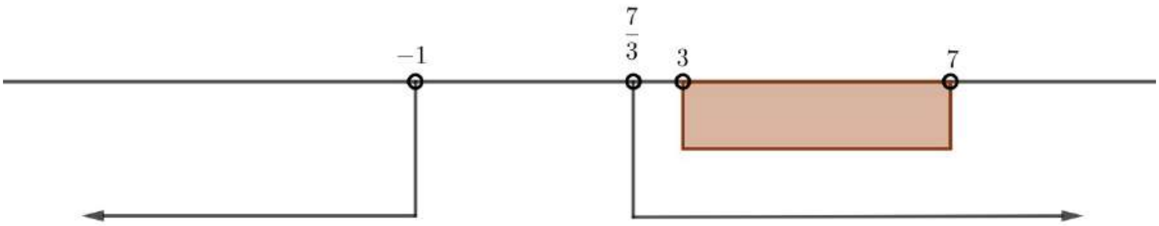
$|2-3x|>5$, οπότε

$2-3x<-5$ ή $2-3x>5$, δηλαδή

$3x>7$ ή $3x<-3$ και τελικά

$x>\frac{7}{3}$ ή $x<-1$.

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των παραπάνω δυο ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι οι πραγματικοί αριθμοί $x\in(3,7)$.

36888

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $3x-1<x+9$.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 8)

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 10)

36888-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$3x-1<x+9$, οπότε

$3x-x<1+9$, δηλαδή

$2x<10$ και τελικά

$x<5$.

β) Έχουμε ισοδύναμα:

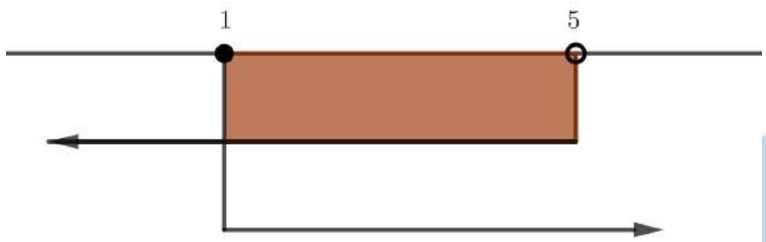
$2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2}\overset{(\cdot 2)}{\Leftrightarrow}$

$4-x\le 2x+1$, δηλαδή

$3x\ge 3$ και τελικά

$x\ge 1$.

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, βλέπουμε ότι οι κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) είναι οι πραγματικοί αριθμοί x για του οποίους ισχύει $x\in[1,5)$.



36893

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|2x-1|\leq 7$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1|>2$.

(Μονάδες 9)

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 7)

36893-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$|2x-1| \le 7 \Leftrightarrow$

$-7 \le 2x-1 \le 7$, οπότε

$-6 \le 2x \le 8$ και τελικά

$-3 \le x \le 4$.

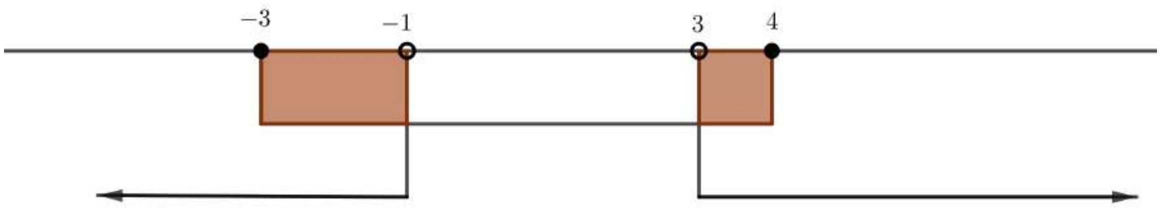
β) Έχουμε ισοδύναμα:

$|x-1| > 2$, οπότε

$x-1 < -2$ ή $x-1 > 2$ και τελικά

$x < -1$ ή $x > 3$

γ) Στον άξονα των πραγματικών αριθμών βρίσκουμε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Άρα οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει: $x \in [-3,-1) \cup (3,4]$.

36895

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x+4|=10$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-5|>1$.

(Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

36895-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$|2x+4|=10$, οπότε

$2x+4=10$ ή $2x+4=-10$, δηλαδή

$2x=6$ ή $2x=-14$ και τελικά

$x=3$ ή $x=-7$.

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$|x-5|>1$, οπότε

$x-5<-1$ ή $x-5>1$ και τελικά

$x<4$ ή $x>6$

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος, διότι και οι δυο είναι αριθμοί μικρότεροι του 4.

37170

ΘΕΜΑ 2

Η θερμοκρασία Τ σε βαθμούς Κελσίου (^oC), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T = 15 + 25 \cdot x,\ \text{όταν}\ \ 0 \leq x \leq 200$$

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου, το οποίο βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290^oC.

(Μονάδες 10)

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440^oC;

(Μονάδες 8)

37170-Λύση

α) Για να βρούμε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης θέτουμε στη δοθείσα σχέση x=30 και βρίσκουμε:

$$T = 15 + 25 \cdot 30$$
$$T = 15 + 750$$
$$T = 765^{o}C.$$

β) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι ίση με $290^{o}C$ θέτουμε στη δοθείσα σχέση T = 290 και βρίσκουμε ισοδύναμα:

$$290 = 15 + 25 \cdot x$$
$$275 = 25x$$
$$x = 11 \text{ χιλιόμετρα.}$$

γ) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από $440^{o}C$ λύνουμε την ανίσωση:

$$T > 440 \Leftrightarrow$$
$$15 + 25 \cdot x > 440 \Leftrightarrow$$
$$25 \cdot x > 425 \Leftrightarrow x > 17 \text{ χιλιόμετρα.}$$

Επομένως η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη των $440^{o}C$ σε βάθος άνω των 17 χιλιομέτρων.

37191

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i. $|1-2x|<5$ (Μονάδες 9)

ii. $|1-2x|\geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

37191-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Είναι:

$$|1-2x|<5 \Leftrightarrow -5<1-2x<5 \Leftrightarrow -5-1<1-2x-1<5-1 \Leftrightarrow$$

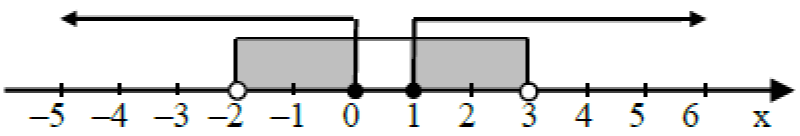
$$-6<-2x<4 \Leftrightarrow \frac{-6}{-2}>\frac{-2x}{-2}>\frac{4}{-2} \Leftrightarrow 3>x>-2 \Leftrightarrow -2<x<3$$

ii. Ισχύει ότι:

$$|1-2x|\geq 1 \Leftrightarrow 1-2x\leq -1 \text{ ή } 1-2x\geq 1 \Leftrightarrow -2x\leq -2 \text{ ή } -2x\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-2x}{-2}\geq\frac{-2}{-2} \text{ ή } \frac{-2x}{-2}\leq\frac{0}{-2} \Leftrightarrow x\geq 1 \text{ ή } x\leq 0$$

Οι λύσεις των παραπάνω ανισώσεων παριστάνονται στον πίνακα των πραγματικών αριθμών με το παρακάτω σχήμα:



β) Από τις λύσεις των δύο ανισώσεων και από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι οι κοινές τους λύσεις είναι:

$$-2<x\leq 0 \text{ ή } 1\leq x<3 \Leftrightarrow x\in(-2\,,\,0]\cup[1\,,\,3)$$

Επομένως οι ακέραιες αντίστοιχα κοινές λύσεις είναι:

$x=-1\,,\ x=0\,,\ x=1\,,\ x=2$

37193

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A=(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1})\cdot(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1})$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

37193-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύει

$x-4 \geq \kappa\alpha\iota\ x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4\ \kappa\alpha\iota\ x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq 4 \Leftrightarrow x \in [4\,,+\infty)$

β) Είναι

$A=(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1})\cdot(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1})=(\sqrt{x-4})^2-(\sqrt{x+1})^2=x-4-(x+1)=$
$x-4-x-1=-5$

Επομένως πράγματι η παράσταση Α είναι σταθερή, ανεξάρτητη του x.

37195

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$

(Μονάδες 12)

37195-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$x-4\geq 0\ \kappa\alpha\iota\ 6-x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4\ \kappa\alpha\iota\ -x\geq -6 \Leftrightarrow x\geq 4\ \kappa\alpha\iota\ x\leq 6 \Leftrightarrow 4\leq x\leq 6 \Leftrightarrow$
$x\in[4\,,\,6]$

β) Για $x=5$ είναι:

$A=\sqrt{5-4}+\sqrt{6-5}=\sqrt{1}+\sqrt{1}=1+1=2$, επομένως

$A^2+A-6=2^2+2-6=4+2-6=0$

37196

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 12)

β) Αν $x=4$, να αποδείξετε ότι $A^2-A=2\cdot(10-\sqrt{5})$.

(Μονάδες 13)

37196-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$x^2+4\geq 0 \;\kappa\alpha\iota\; x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\in R \;\kappa\alpha\iota\; x\geq 4 \Leftrightarrow x\geq 4 \Leftrightarrow x\in [4\,,+\infty)$

β) Για $x=4$ είναι:

$A=\sqrt{4^2+4}-\sqrt{4-4}=\sqrt{16+4}-\sqrt{0}=\sqrt{20}.$

Τότε:

$A^2-A=(\sqrt{20})^2-\sqrt{20}=20-\sqrt{20}=20-\sqrt{4\cdot 5}=$
$20-\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=20-2\cdot\sqrt{5}=2\cdot(10-\sqrt{5}).$

37200

ΘΕΜΑ 2

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1|<2$,

α)Να δείξετε ότι $x \in (-3\,,1)$

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $K=\dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}$, είναι αριθμός ανεξάρτητος του x.

(Μονάδες 13)

37200-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|x+1|<2 \Leftrightarrow -2<x+1<2 \Leftrightarrow$$
$$-2-1<x+1-1<2-1 \Leftrightarrow -3<x<1 \Leftrightarrow x\in(-3,1)$$

β) Από το ερώτημα α) ισχύει ότι:

$$-3<x<1 \Leftrightarrow -3<x \;\kappa\alpha\iota\; x<1 \Leftrightarrow$$
$$x+3>0 \;\kappa\alpha\iota\; x-1<0$$

Άρα:

$$|x+3|=x+3 \;\kappa\alpha\iota\; |x-1|=-(x-1)=1-x$$

Τότε:

$$K=\frac{|x+3|+|x-1|}{4}=\frac{x+3+1-x}{4}=\frac{4}{4}=1$$