15113

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9$ και $Q(x) = \alpha x^2 + 7$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Είναι το πολυώνυμο $P(x)$ $3^{ου}$ βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του α, ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

15113-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 \Leftrightarrow$$
$$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2x^3 - 2 + 9 \Leftrightarrow$$
$$P(x) = 0x^3 + 4x^2 + 7 \Leftrightarrow$$
$$P(x) = 4x^2 + 7.$$

Συνεπώς το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $2^{ου}$ βαθμού.

β) Για να είναι τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ ίσα, πρέπει να είναι ίδιου βαθμού και να έχουν τους αντίστοιχους συντελεστές ίσους. Άρα πρέπει $\alpha = 4$.

20640

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-8x^2+7x-1$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.

(Μονάδες 9)

β) Έστω $Q(x)$ πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

i. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_1(x)=P(x)+Q(x)$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

(Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_2(x)=P(x)\cdot Q(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.

(Μονάδες 8)

20640-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$P(1)=2\cdot 1^3-8\cdot 1^2+7\cdot 1-1=2-8+7-1=9-9=0$$

οπότε το πολυώνυμο έχει ρίζα τον αριθμό 1.

β) Ισχύει: $Q(1)\neq 0$, οπότε:

i. Για το πολυώνυμο $R_1(x)$ έχουμε:

$$R_1(1)=P(1)+Q(1)=0+Q(1)\neq 0$$

Άρα το πολυώνυμο $R_1(x)$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

ii. Για το πολυώνυμο $R_2(x)$ έχουμε:

$$R_2(1)=P(1)\cdot Q(1)=0\cdot Q(1)=0$$

Άρα το πολυώνυμο $R_2(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.

21998

ΘΕΜΑ 2

Δίδεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(\mathrm{x}) = (\mathrm{x} - 2) \cdot (\mathrm{x}^6 + 1)$.

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $\mathrm{P}(\mathrm{x})$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $\mathrm{P}(\mathrm{x})$.

(Μονάδες 13)

21998-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

Εδώ, το πολυώνυμο $x-2$ είναι $1^{ου}$ βαθμού και το πολυώνυμο x^6+1 είναι $6^{ου}$ βαθμού. Επομένως, το γινόμενό τους $P(x)$ είναι πολυώνυμο $7^{ου}$ βαθμού.

β) Οι ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $P(x)=0$. Όμως,

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(x^6+1)=0 \xLeftrightarrow{x^6+1>0} x-2=0 \Leftrightarrow x=2\,.$$

Άρα, το πολυώνυμο $P(x)$ έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 2.