21657

ΘΕΜΑ 4

Έστω υπερβολή C με κέντρο το $(0,0)$, εστίες πάνω στον άξονα xx' της οποίας το ορθογώνιο βάσης είναι τετράγωνο.

α) Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της C.

(Μονάδες 6)

ii. την εκκεντρότητα της C.

(Μονάδες 6)

β) Αν η υπερβολή διέρχεται από το σημείο $(2,0)$ και (ζ) τυχαία ευθεία παράλληλη σε κάποια εκ των ασύμπτωτων της C (που δεν ταυτίζεται με κάποια από αυτές),

i. να δείξετε ότι η (ζ) έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την C.

(Μονάδες 8)

ii. είναι η ευθεία (ζ) εφαπτόμενη της C; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

21657-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η υπερβολή C έχει κέντρο το $(0,0)$ και εστίες στον άξονα xx', οπότε θα έχει ασύμπτωτες της μορφής $y=\frac{\beta}{\alpha}x$, $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$. Αφού το ορθογώνιο βάσης είναι τετράγωνο, συμπεραίνουμε ότι $\alpha=\beta$ δηλαδή είναι ισοσκελής υπερβολή. Συνεπώς

i. οι εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής C είναι $y=x$, $y=-x$.

ii. για την εκκεντρότητα ε της C ισχύει ότι $\varepsilon^2=1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=1+1=2$ και επειδή $\varepsilon>0$ έχουμε τελικά ότι $\varepsilon=\sqrt{2}$.

β) Αφού η (ζ) είναι παράλληλη σε κάποια εκ των ασύμπτωτων της C, θα έχει εξίσωση της μορφής $y=x+\kappa$ ή $y=-x+\kappa$ με $\kappa\neq 0$. Η ισοσκελής υπερβολή C θα έχει εξίσωση της μορφής $x^2-y^2=\alpha^2$. Αφού διέρχεται από το σημείο $(2,0)$ έχουμε ότι $2^2-0^2=\alpha^2 \Leftrightarrow 4=\alpha^2 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha=2$.

Το πλήθος των κοινών σημείων της C και της ευθείας (ζ) είναι ίδιο με το πλήθος των λύσεων καθενός από τα συστήματα $\begin{cases} x^2-y^2=4 \\ y=x+\kappa \end{cases}$ και $\begin{cases} x^2-y^2=4 \\ y=-x+\kappa \end{cases}$.

Λύνουμε το 1ο σύστημα με αντικατάσταση της 2ης εξίσωσης στην 1η και έχουμε :

$$x^2-(x+\kappa)^2=4 \Leftrightarrow x^2-x^2-2x\kappa-\kappa^2=4 \Leftrightarrow -2x\kappa=4+\kappa^2 \overset{\kappa\neq 0}{\Leftrightarrow} x=-\frac{4+\kappa^2}{2\kappa}$$

και από τη 2η εξίσωση έχουμε ότι $y=-\frac{4+\kappa^2}{2\kappa}+\kappa$

Ομοίως λύνουμε το 2ο σύστημα με αντικατάσταση της 2ης εξίσωσης στην 1η και έχουμε :

$$x^2-(-x+\kappa)^2=4 \Leftrightarrow x^2-x^2+2x\kappa-\kappa^2=4 \Leftrightarrow 2x\kappa=4+\kappa^2 \overset{\kappa\neq 0}{\Leftrightarrow} x=\frac{4+\kappa^2}{2\kappa}$$

και από τη 2η εξίσωση έχουμε ότι $y=-\frac{4+\kappa^2}{2\kappa}+\kappa$

i. Σε κάθε περίπτωση το σύστημα έχει μοναδική λύση που σημαίνει ότι η (ζ) έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την C.

ii. Επειδή σε κάθε περίπτωση η μοναδική λύση του συστήματος προέκυψε από εξίσωση 1ου βαθμού και όχι από 2ου με διακρίνουσα 0, η ευθεία (ζ) δεν είναι

21657-Λύση

εφαπτόμενη της C. Απλά την τέμνει σε ένα σημείο χωρίς όμως το σημείο αυτό να είναι σημείο επαφής . Δηλαδή η (ζ) διαπερνά τη C.

Σημείωση : το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει για κάθε υπερβολή και ευθεία παράλληλη σε κάποια από τις ασύμπτωτες και όχι μόνο για τις ισοσκελείς.