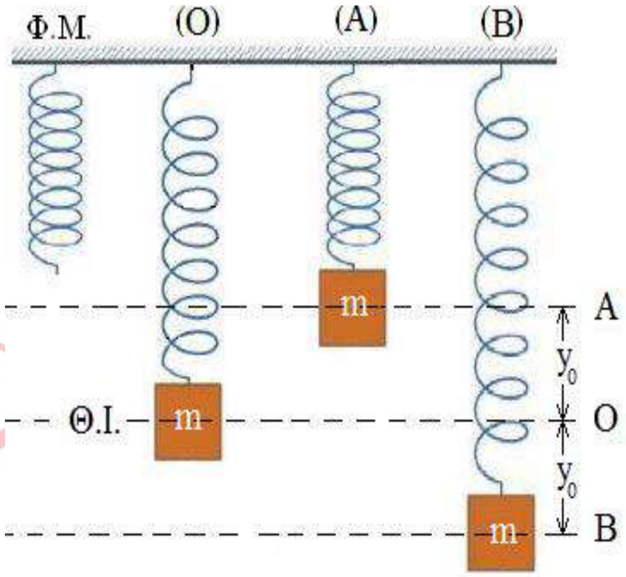
14975

ΘΕΜΑ 4

Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται απο το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας m και ισορροπεί στη θέση O (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.



Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση O, εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με $2y_0$.

Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι:

$$y(t) = 1 + 0{,}2 \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2} t$$

α) Να βρείτε το y_0 και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B της ταλάντωσης.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

(Μονάδες 06)

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $t \in [0, 4]$.

(Μονάδες 06)

δ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με $1,1$ μέτρα, για $t \in [0, 2]$.

(Μονάδες 07)

14975-Λύση

ΛΥΣΗ

Η τριγωνομετρική συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$ έχει μέγιστη τιμή ρ, ελάχιστη τιμή $-\rho$ και περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Ως εκ τούτου,

α) Το $y_0 = (OA) = (OB) = \rho = 0{,}2$ μέτρα.

Η συνάρτηση $y(t)$ έχει μέγιστη τιμή $1 + \rho = 1{,}2$, ελάχιστη τιμή $1 - \rho = 0{,}8$ και η απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων Α και Β της ταλάντωσης είναι:

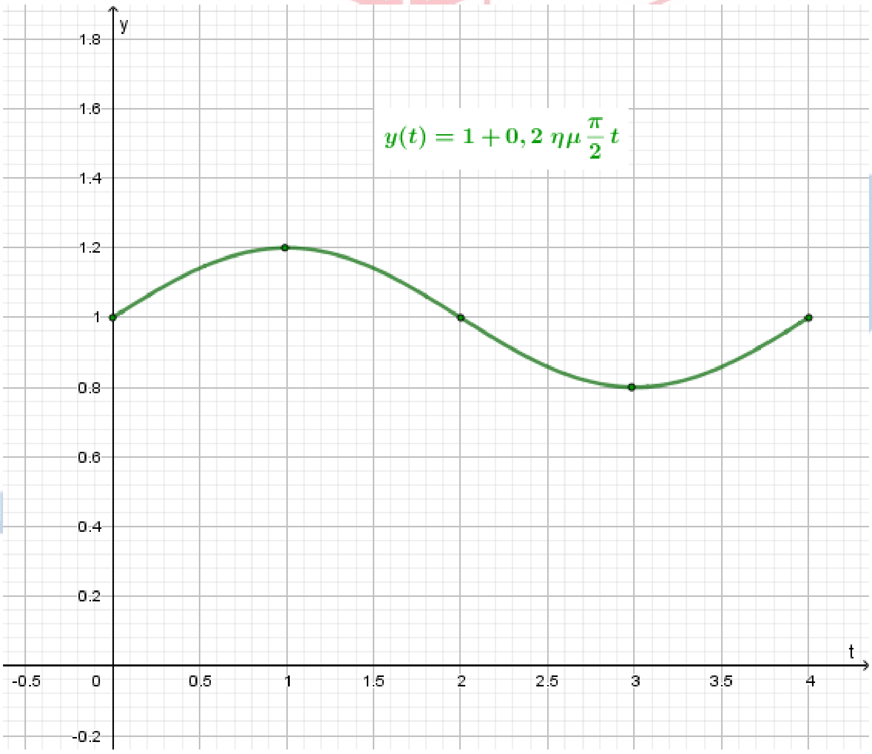
$|1{,}2 - 0{,}8| = 0{,}4$ μέτρα.

β) η περίοδος της συνάρτησης $y(t)$ είναι: $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow T = 4$.

γ) Ο πίνακας τιμών για τη συνάρτηση $y(t) = 1 + 0{,}2 \cdot \eta\mu\frac{\pi}{2}t$ για $t \in [0, 4]$, είναι:

t	0	1	2	3	4
$y(t)$	1	1,2	1	0,8	1

Είναι $y_{max} = 1{,}2$ και $y_{min} = 0{,}8$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης:



δ) Ζητάμε ουσιαστικά να βρούμε ποια χρονική στιγμή $t \in [0,2]$, είναι $y(t) = 1{,}1$.

14975-Λύση

Έχουμε: $\begin{cases} y(t) = 1 + 0,2 \cdot ημ\frac{π}{2}t \\ και \\ y(t) = 1,1 \end{cases} \Leftrightarrow 0,2 \cdot ημ\frac{π}{2}t = 0,1 \Leftrightarrow ημ\frac{π}{2}t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$ημ\frac{π}{2}t = ημ\frac{π}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{π}{2}t = 2κπ + \frac{π}{6} \\ ή \\ \frac{π}{2}t = 2κπ + \frac{5π}{6} \end{cases}, \ κ \in Z \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4κ + \frac{1}{3} \\ ή \\ t = 4κ + \frac{5}{3} \end{cases}, \ κ \in Z$$

Επειδή όμως $t \in [0,2]$, έχουμε:

$0 \leq t \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 4κ + \frac{1}{3} \leq 2 \Rightarrow -\frac{1}{12} \leq κ \leq \frac{5}{12}$, $κ \in Z$ (1)

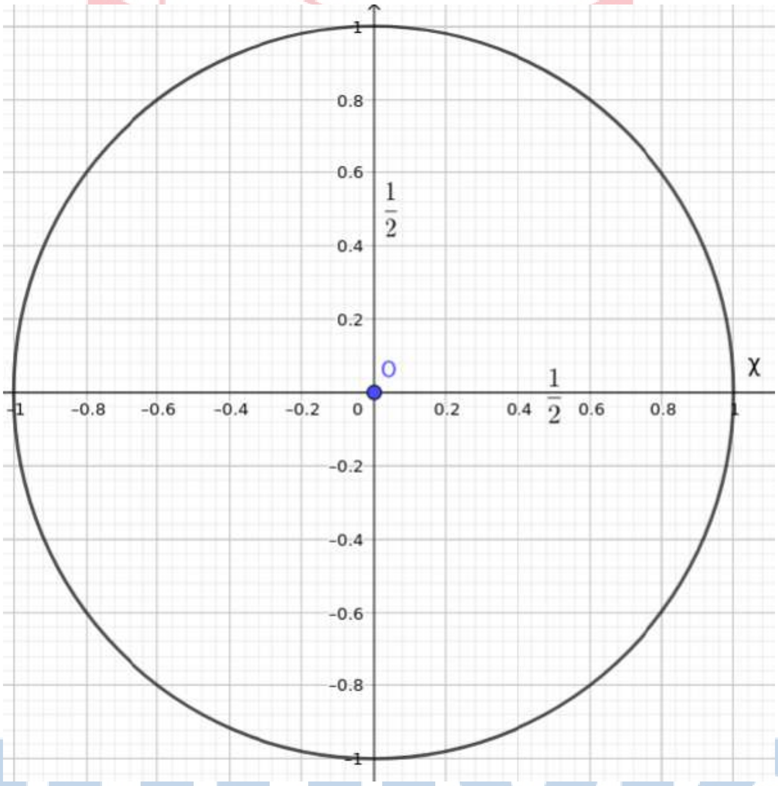
$0 \leq t \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 4κ + \frac{5}{3} \leq 2 \Rightarrow -\frac{5}{12} \leq κ \leq \frac{1}{12}$, $κ \in Z$ (2)

Και από τις δύο σχέσεις προκύπτει ότι $κ = 0$, επομένως: $t = \frac{1}{3}$ ή $t = \frac{5}{3}$.

14977

ΘΕΜΑ 2

α) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα [0,2π), με αρχική πλευρά την ημιευθεία Οχ, οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$.



(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ για $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)

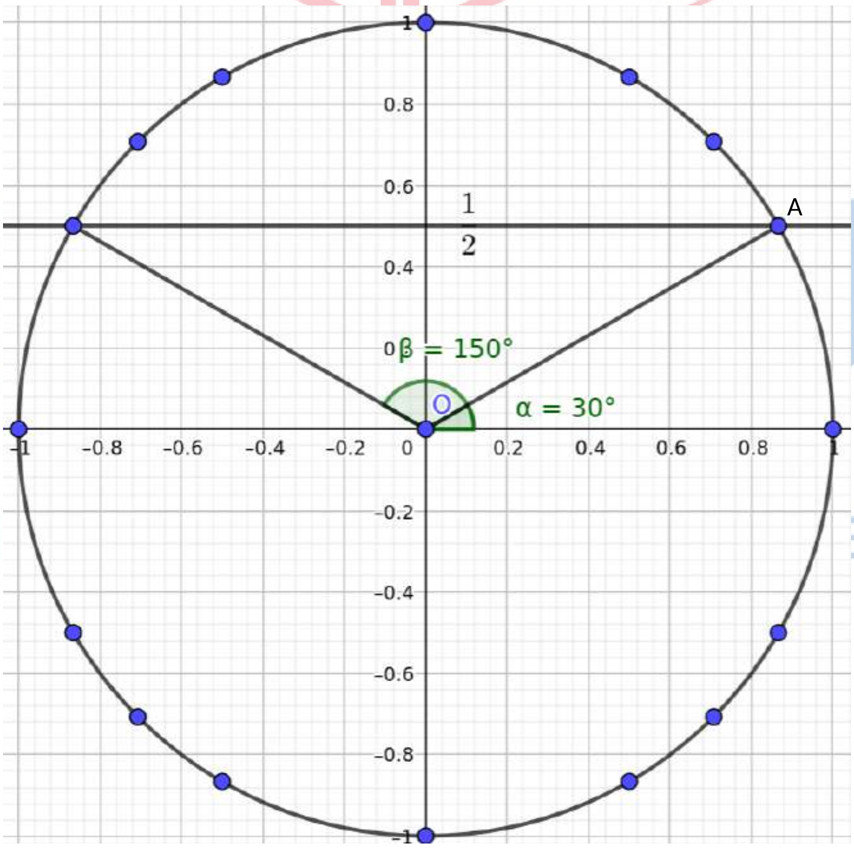
14977-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το ημίτονο μίας γωνίας με μία πλευρά την ημιευθεία Οχ και δεύτερη πλευρά που τέμνει στο σημείο Α του κύκλου, βρίσκεται από την προβολή του σημείου Α στον άξονα y'y.

Άρα, οι γωνίες που έχουν ημίτονο $\frac{1}{2}$ θα έχουν σημεία τομής με τον κύκλο τέτοια, ώστε η προβολή τους να τέμνει τον άξονα y'y στο $\frac{1}{2}$.

Οπότε φέρουμε την ευθεία $y=\frac{1}{2}$ (βλ. σχήμα παρακάτω) και προκύπτουν δύο γωνίες στο διάστημα [0,2π) που έχουν αυτό το ημίτονο. Είναι οι γωνίες $\alpha=30^o=\frac{\pi}{6}rad$ και $\beta=180^o-30^o=150^o=\frac{5\pi}{6}rad$.

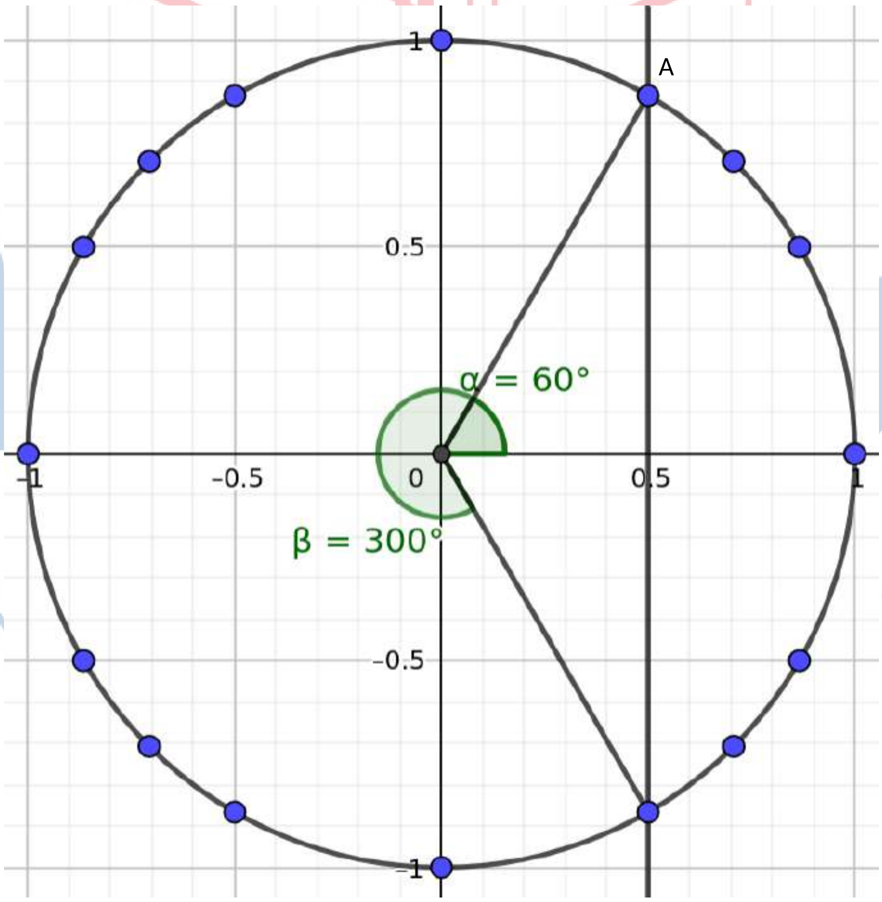


14977-Λύση

Το συνημίτονο μίας γωνίας με μία πλευρά την ημιευθεία Οχ και δεύτερη πλευρά που τέμνει στο σημείο Α του κύκλου, βρίσκεται από την προβολή του σημείου Α στον άξονα x’x.

Άρα οι γωνίες που έχουν συνημίτονο $\frac{1}{2}$ θα έχουν σημεία τομής με τον κύκλο τέτοια, ώστε η προβολή τους να τέμνει τον άξονα χ΄χ στο $\frac{1}{2}$.

Οπότε φέρουμε την ευθεία $x=\frac{1}{2}$ (βλ. σχήμα παρακάτω) και προκύπτουν δύο γωνίες στο διάστημα [0,2π) που έχουν αυτό το συνημίτονο. Είναι οι γωνίες $\alpha=60^o=\frac{\pi}{3}rad$ και $\beta=360-60=300^o=\frac{5\pi}{3}rad$.



14977-Λύση

β) Όλες οι γωνίες που έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ στο διάστημα [0,2π) είναι οι α, β του ερωτήματος (α).

Για $x \in \mathbb{R}$ κάθε άλλη γωνία με ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ θα προκύπτει από αυτές, προσθέτοντας ή αφαιρώντας ακέραιο πλήθος κύκλων $\kappa \cdot 2\pi$, κ ακέραιος.

Άρα όλες οι λύσεις της εξίσωσης θα είναι:

$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2\kappa \cdot \pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa \cdot \pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2\kappa \cdot \pi + \frac{5\pi}{6}$ με $k \in \mathbb{Z}$.

15003

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση:

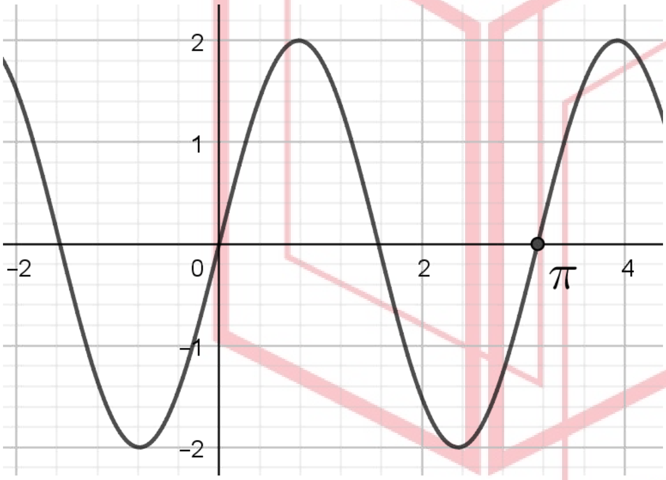
$f(x) = \eta\mu\alpha x \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha x\right) + 2\right] - \sigma\upsilon\nu\alpha x \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - \alpha x) - 1$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να δείξετε ότι $f(x) = 2 \cdot \eta\mu\alpha x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να δείξετε ότι $\alpha = 2$.



(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $\varepsilon: y = 1$ για $x \in [0, \pi]$.

(Μονάδες 9)

15003-Λύση

Λύση

α)

i. Ισχύει ότι $συν\left(\frac{π}{2}-αx\right)=ημαx$ και $συν(π-αx)=-συναx$. Άρα, ο τύπος της συνάρτησης γίνεται:

$$f(x)=ημαx(ημαx+2)-συναx(-συναx)-1=$$
$$ημ^2αx+2ημαx+συν^2αx-1=$$
$$1+2ημαx-1=2ημαx.$$

ii. Η $ημαx$ έχει περίοδο $T=\frac{2π}{α}$. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση f έχει περίοδο $T=π$. Άρα,

$$\frac{2π}{α}=π\Leftrightarrow α=2.$$

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=1$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$2ημ2x=1\Leftrightarrow ημ2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$
$$ημ2x=ημ\frac{π}{6}.$$

Οπότε,

$$\begin{cases}2x=\frac{π}{6}+2κπ\\ \text{ή}\\ 2x=π-\frac{π}{6}+2κπ\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{π}{12}+κπ\\ \text{ή}\\ x=\frac{5π}{12}+κπ\end{cases},\quad κ\in\mathbb{Z}.$$

Επειδή $x\in[0,π]$ έχουμε ότι:

$$0\le x\le π\Leftrightarrow 0\le\frac{π}{12}+κπ\le π\Leftrightarrow$$
$$-\frac{1}{12}\le κ\le 1-\frac{1}{12}\Leftrightarrow -\frac{1}{12}\le κ\le\frac{11}{12}\overset{κ\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow}k=0$$

και

$$0\le x\le π\Leftrightarrow 0\le\frac{5π}{12}+κπ\le π\Leftrightarrow$$
$$-\frac{5}{12}\le κ\le 1-\frac{5}{12}\Leftrightarrow -\frac{5}{12}\le κ\le\frac{7}{12}\overset{κ\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow}k=0.$$

Άρα, $x=\frac{π}{12}$ και ή $x=\frac{5π}{12}$

15014

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot \eta\mu\beta x$, με α, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

α) Να βρείτε την τιμή του α, αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2.

(Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha=2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία είναι $f\left(\frac{\pi}{16}\right)=2$ είναι $\beta=8$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $\alpha=2$ και $\beta=8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$ στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 9)

15014-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για την συνάρτηση $f(x)=\alpha \cdot \eta\mu\beta x$ με α θετικό ακέραιο μέγιστη τιμή είναι το α, άρα $\alpha=2$.

Εναλλακτικά έχουμε ότι η μέγιστη τιμή του $\eta\mu\beta x$ είναι 1, άρα αν $\alpha \cdot \eta\mu\beta x=2$, πρέπει $\alpha=2$

β) Η συνάρτηση από το α) ερώτημα είναι $f(x)=2\cdot \eta\mu\beta x$, άρα

$$f\left(\frac{\pi}{16}\right)=2 \Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=2 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=1.$$

Λύνουμε την εξίσωση

$\eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=1 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\beta\pi}{16}=\eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\beta\pi}{16}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, με $\kappa\in\mathbb{Z}$ (η λύση $\frac{\beta\pi}{16}=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{2}$ ταυτίζεται με την προηγούμενη).

Απλοποιώντας το π έχουμε $\frac{\beta}{16}=2\kappa+\frac{1}{2}$, η μικρότερη θετική τιμή του β που ζητάμε θα είναι όταν ο κ, ως ακέραιος, γίνει ίσος με 0 (για αρνητικές τιμές του κ το β γίνεται αρνητικό). Οπότε $\frac{\beta}{16}=2\kappa+\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\beta}{16}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta=8$.

γ) Η εξίσωση $f(x)=1$ από τα προηγούμενα ερωτήματα είναι:

$$2\cdot\eta\mu 8x=1 \Leftrightarrow \eta\mu 8x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 8x=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \\ 8x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{\pi}{48} \\ x=\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{5\pi}{48} \end{cases}, \text{ με } \kappa\in\mathbb{Z}$$

Αφού πρέπει $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ λύνουμε τις παρακάτω δύο ανισώσεις:

i) $0\le\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{\pi}{48}\le\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0\le\left(\frac{\kappa}{4}+\frac{1}{48}\right)\pi\le\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0\le\frac{\kappa}{4}+\frac{1}{48}\le\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{48}\le\frac{\kappa}{4}\le\frac{1}{2}-\frac{1}{48} \Leftrightarrow$
$-\frac{1}{48}\le\frac{\kappa}{4}\le\frac{23}{48} \Leftrightarrow -\frac{4}{48}\le\kappa\le\frac{4\cdot 23}{48} \Leftrightarrow -\frac{1}{12}\le\kappa\le\frac{23}{12}$.

Αφού $\kappa\in\mathbb{Z}$, είναι $\kappa=0$ ή $\kappa=1$ δηλαδή δεκτές είναι οι γωνίες $x=\frac{\pi}{48}rad$ ή $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{48}=\frac{13\pi}{48}rad$.

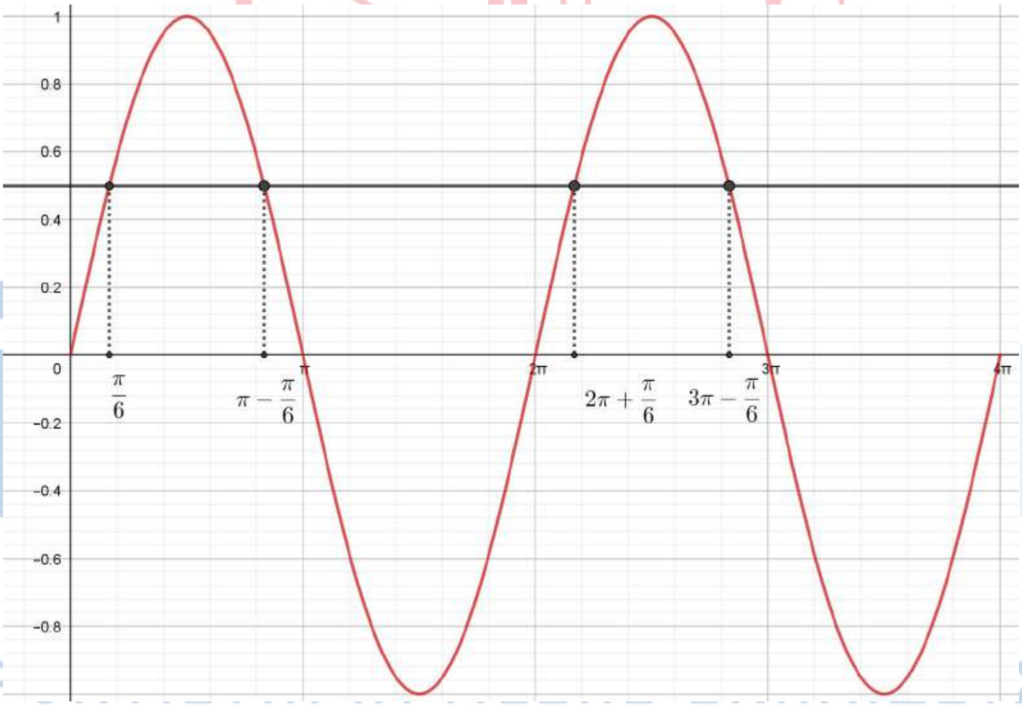
15014-Λύση

ii) $0 \le \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \left(\frac{\kappa}{4} + \frac{5}{48}\right)\pi \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \frac{\kappa}{4} + \frac{5}{48} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{48} \le \frac{\kappa}{4} \le \frac{1}{2} - \frac{5}{48} \Leftrightarrow$

$-\frac{5}{48} \le \frac{\kappa}{4} \le \frac{19}{48} \Leftrightarrow -\frac{4\cdot 5}{48} \le \kappa \le \frac{4\cdot 19}{48} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \le \kappa \le \frac{19}{12}$.

Αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$, είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$ δηλαδή δεκτές είναι οι γωνίες $x = \frac{5\pi}{48} rad$ ή $x = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} = \frac{17\pi}{48} rad$.

Εναλλακτικά, όπως στην προηγούμενη λύση, έχουμε $\eta\mu 8x = \frac{1}{2}$. Επειδή $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, θα είναι $0 \le 8x \le 4\pi$. Οι αριθμοί των οποίων το ημίτονο είναι ίσο με $\frac{1}{2}$ στο διάστημα αυτό είναι οι: $\frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}$, όπως προκύπτει από την παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης $\eta\mu\omega$.



Άρα:

15014-Λύση

$$8x=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{48}$$

$$8x=\pi-\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{48}$$

$$8x=2\pi+\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{13\pi}{48}$$

$$8x=3\pi-\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{17\pi}{48}.$$

15026

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx'.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

15026-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η περίοδος της συνάρτησης f είναι $\mathrm{T}=\dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{2}}=4$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$-1\le \eta\mu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\le 1$ οπότε $-2\le 2\eta\mu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\le 2$ οπότε $-2+1\le 1+2\eta\mu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\le 2+1$ και τελικά $-1\le f(x)\le 3$.

Επίσης $f(1)=1+2\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3$ και $f(3)=1+2\eta\mu\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-1$.

Συνεπώς η μέγιστη τιμή της f είναι το 3 και η ελάχιστη το -1.

γ) Οι τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$. Είναι

$$f(x)=0\Leftrightarrow 1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\\ \eta'\\ \dfrac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\pi-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\pi x}{2}=2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{6}\\ \eta'\\ \dfrac{\pi x}{2}=2\kappa\pi+\dfrac{7\pi}{6}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\dfrac{x}{2}=2\kappa-\dfrac{1}{6}\\ \eta'\\ \dfrac{x}{2}=2\kappa+\dfrac{7}{6}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x=4\kappa-\dfrac{1}{3}\\ \eta'\\ x=4\kappa+\dfrac{7}{3}\end{array}\right\},\quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

οπότε οι ζητούμενες τετμημένες είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί της μορφής $x=4\kappa-\dfrac{1}{3}$ ή $x=4\kappa+\dfrac{7}{3}$, όπου $\kappa\in\mathbb{Z}$.

δ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$f(1-x)=1+2\eta\mu\left(\dfrac{\pi(1-x)}{2}\right)=1+2\eta\mu\left(\dfrac{\pi-\pi x}{2}\right)=1+2\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi x}{2}\right)=1+2\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$, οπότε

$$\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=\left(1+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1\right)^2+\left(1+2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-1\right)^2=$$

$$4\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)=4(\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right))=4\cdot 1=4$$

δηλαδή $\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

15036

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3συν2x,\ x \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -3$ στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

15036-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = ρσυνωx, ρ > 0$ με ρ=3 και $ω = 2$, οπότε η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 3 και η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με -3.

ii. Η περίοδος της f είναι $T = \frac{2π}{ω} = π$.

β) $f(x) = -3$ αν και μόνο αν 3συν2x=-3⇔ $συν2x = -1$ τότε $2x = 2κπ \pm π \Leftrightarrow x = κπ \pm \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$.

15049

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\eta\mu(\pi+x),\ x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $-2\le f(x)\le 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 3)

ii. Δυο σημεία τομής της C_f με τον $x'x$.

(Μονάδες 6)

15049-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $ημ\left(\frac{π}{2}-x\right)=συνx$ και $ημ(π+x)=-ημx$, έχουμε: $f(x)=συνx-ημx,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$-1\le συνx\le 1,\ (1)\ \text{ και }\ -1\le ημx\le 1\Leftrightarrow -1\le -ημx\le 1,\ (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει ότι: $-2\le συνx-ημx\le 2$, δηλαδή $-2\le f(x)\le 2$, που είναι το ζητούμενο.

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της f, τότε για κάποιο $x_o\in\mathbb{R}$ ισχύει $συνx_o=1$ και $ημx_o=-1$, οπότε $ημ^2x_o+συν^2x_o=1+1=2$, που είναι άτοπο. Άρα ο αριθμός 2 δεν είναι η μέγιστη τιμή της f.

γ) i. Με $x=0$ έχουμε: $f(0)=συν0-ημ0=1-0=1$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,1)$.

ii. Με $y=0$ δηλαδή $f(x)=0$ έχουμε: $συνx-ημx=0\Leftrightarrow συνx=ημx$. Μια προφανής λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός $\frac{π}{4}$ και επειδή $συν\left(π+\frac{π}{4}\right)=-συν\frac{π}{4}=-ημ\frac{π}{4}=ημ\left(π+\frac{π}{4}\right)$, μια άλλη λύση της είναι ο αριθμός $π+\frac{π}{4}=\frac{5π}{4}$.

Άρα δυο κοινά σημεία της C_f με τον $x'x$ είναι τα $\left(\frac{π}{4},0\right)$ και $\left(\frac{5π}{4},0\right)$.

15050

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2συνx$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 1$.

(Μονάδες 5)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{π}{3}\right)$ και $f\left(\frac{2π}{5}\right)$.

(Μονάδες 6)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα $[0, 2π]$.

(Μονάδες 6)

15050-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)=\rho συνx,\ \rho>0$ με $\rho=2$, οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -2 και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 2.

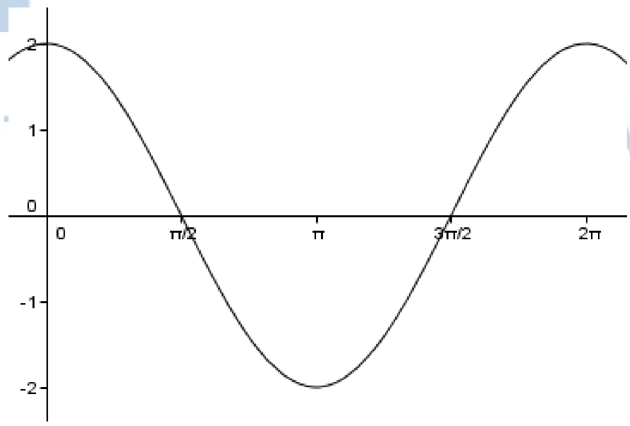
β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $y=1$ προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $f(x)=1$ που είναι ισοδύναμη με την $συνx=\frac{1}{2}$. Μια προφανής λύση της είναι η $x=\frac{\pi}{3}$ και επειδή οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδιο συνημίτονο, μια άλλη λύση είναι η $x=-\frac{\pi}{3}$.

Άρα, δυο κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y=1$ είναι τα $\left(-\frac{\pi}{3},1\right),\left(\frac{\pi}{3},1\right)$.

γ) Οι αριθμοί $\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{5}$ περιέχονται στο πρώτο τεταρτημόριο όπου η συνάρτηση συνημίτονο, είναι γνησίως φθίνουσα. Επιπλέον $\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{15}>0$, οπότε $\frac{2\pi}{5}>\frac{\pi}{3}$ και λόγω της μονοτονίας του συνημιτόνου παίρνουμε $συν\left(\frac{\pi}{3}\right)>συν\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, οπότε $2συν\left(\frac{\pi}{3}\right)>2συν\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, δηλαδή $f\left(\frac{\pi}{3}\right)>f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

δ) Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα προκύπτει η γραφική παράσταση της f όπως φαίνεται στο σχήμα.

x		0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$2συνx$		2	0	-2	0	2



15287

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία $y=\alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)$, όπου $\omega>0$, $\rho>0$ και $x \in \mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,

α) Να δείξετε ότι $\rho=3$ και $\omega=2$.

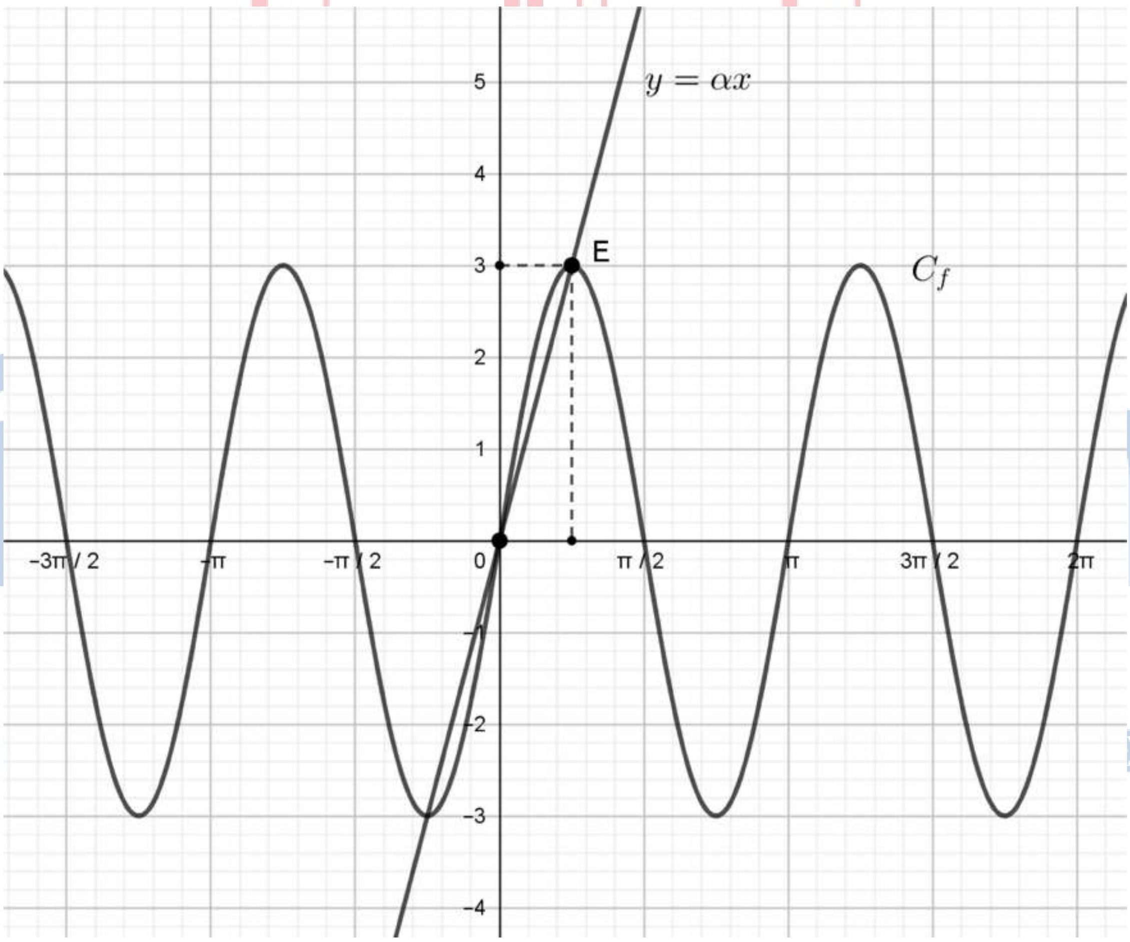
(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3\eta\mu(2x)-\frac{12}{\pi}x=0$.

(Μονάδες 10)



15287-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)$ με $\rho>0$, έχει μέγιστη τιμή ρ. Με βάση το σχήμα η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 3, άρα $\rho=3$. Επίσης η περίοδος της συνάρτησης είναι π, οπότε $\pi=\frac{2\pi}{\omega}\Leftrightarrow\omega=2$. Άρα $f(x)=3\eta\mu(2x)$.

β) Η ευθεία $y=\alpha x$ διέρχεται από το σημείο E της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη 3, η οποία είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Η συνάρτηση $f(x)=3\eta\mu(2x)$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή σε διάστημα μιας περιόδου στο $\frac{1}{4}$ της περιόδου, δηλαδή στη θέση $x=\frac{\pi}{4}$. Άρα είναι $\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{4},3\right)$ και $3=\alpha\cdot\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\alpha=\frac{12}{\pi}$. Οπότε η εξίσωση της ευθείας είναι : $y=\frac{12}{\pi}x$.

γ) Η εξίσωση $3\eta\mu(2x)-\frac{12}{\pi}x=0$ γράφεται ισοδύναμα $3\eta\mu(2x)=\frac{12}{\pi}x$. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της $f(x)=3\eta\mu(2x)$ με την ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$. Με βάση το σχήμα τα σημεία τομής είναι 3, οι τετμημένες των οποίων είναι

- $x=0$, δεδομένου ότι $f(0)=3\eta\mu 0=0$ και η ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$ διέρχεται από το σημείο $(0,0)$.
- $x=\frac{\pi}{4}$, δεδομένου ότι $f(\frac{\pi}{4})=3\eta\mu\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\cdot 1=3$ και η ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$ διέρχεται από το σημείο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{12}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{4},3\right)$ και
- $x=-\frac{\pi}{4}$, δεδομένου ότι $f(-\frac{\pi}{4})=3\eta\mu\left(-2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=3\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)=3\cdot(-1)=-3$ και η ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$ διέρχεται από το σημείο $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{12}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(-\frac{\pi}{4},-3\right)$.

Άρα η εξίσωση $3\eta\mu(2x)-\frac{12}{\pi}x=0$ έχει λύσεις τις $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ και $x=-\frac{\pi}{4}$.

15288

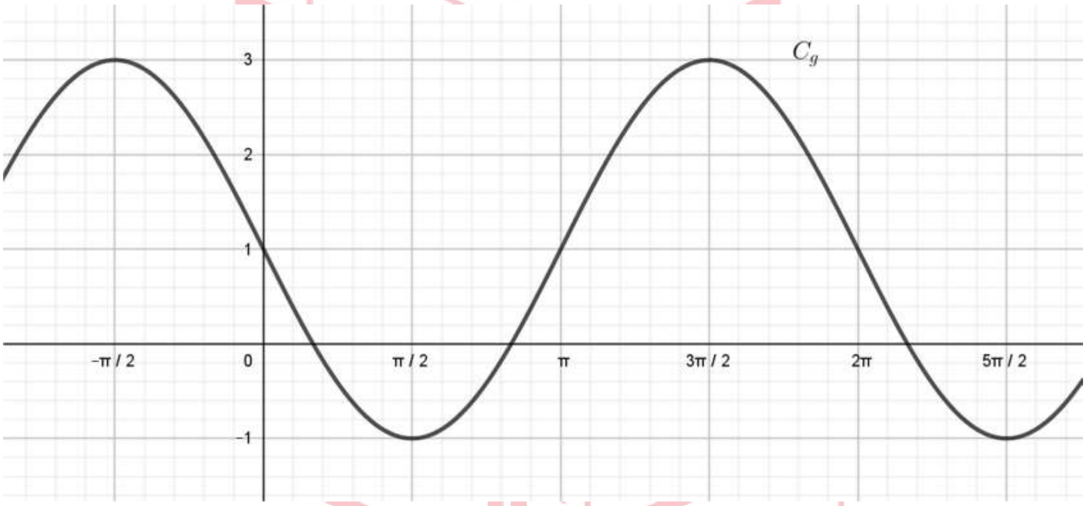
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu 3x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο T, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.

(Μονάδες 3)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\alpha\eta\mu\beta x+\gamma$, με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\beta>0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,β και γ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ii. Για $\alpha=-2$, $\beta=1$ και $\gamma=1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ στο διάστημα $[0,\pi)$

(Μονάδες 10)

15288-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η περίοδος της συνάρτησης είναι $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{3}$, η μέγιστη τιμή της είναι $\max f(x)=2+1=3$, και η ελάχιστη τιμή της είναι $\min f(x)=-2+1=-1$.

β)

i. Από την γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης g, παρατηρούμε ότι παρουσιάζει μέγιστο για $x=-\frac{\pi}{2}$ και το επόμενο μέγιστο για $x=\frac{3\pi}{2}$. Άρα η περίοδος της συνάρτησης είναι $\mathrm{T}=\frac{3\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\pi$, οπότε $\beta=1$. Η καμπύλη προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\alpha\eta\mu x$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, άρα $\gamma=1$. Επίσης

$$\begin{aligned}
&g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=3 \Leftrightarrow \\
&\alpha\cdot\eta\mu\frac{3\pi}{2}+1=3 \Leftrightarrow. \\
&\alpha\cdot(-1)=2 \Leftrightarrow \\
&\alpha=-2
\end{aligned}$$

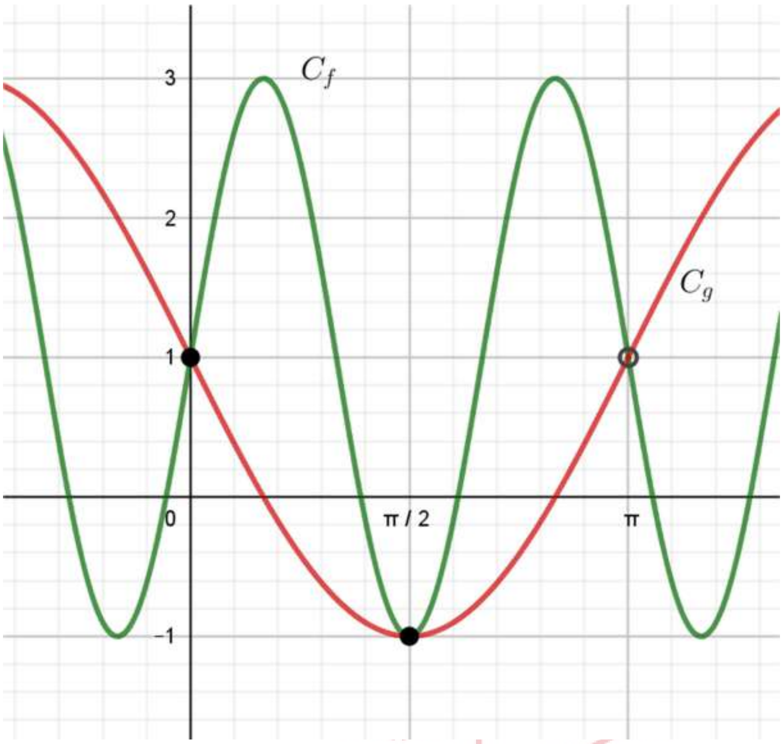
Τελικά $g(x)=-2\eta\mu x+1$.

ii. Η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}
&f(x)=g(x) \Leftrightarrow \\
&2\eta\mu 3x+1=-2\eta\mu x+1 \Leftrightarrow \\
&\eta\mu 3x=-\eta\mu x \Leftrightarrow \\
&\eta\mu 3x=\eta\mu(-x) \Leftrightarrow \\
&\begin{cases} 3x=2\kappa\pi-x \\ \text{ή} \\ 3x=2\kappa\pi+(\pi+x) \end{cases},\ \kappa\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή: $\begin{cases} x=\frac{\kappa\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2} \end{cases},\ \kappa\in\mathbb{Z}$. Επειδή $x\in[0,\pi)$, για $\kappa=0$ στον πρώτο τύπο λύσεων προκύπτει $x=0$ και στον δεύτερο τύπο λύσεων προκύπτει $x=\frac{\pi}{2}$ (που προκύπτει και από τον πρώτο τύπο λύσεων για $\kappa = 1$). Από τις άλλες τιμές του $\kappa \in \mathbb{Z}$ προκύπτουν λύσεις οι οποίες δεν ανήκουν στο διάστημα $[0, \pi)$.

Η γραφική λύση της εξίσωσης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Τελικά ή εξίσωση έχει δυο λύσεις στο $[0, \pi)$, τις $x = 0$ και $x = \dfrac{\pi}{2}$.

15347

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(\frac{\pi}{3}, 1)$.

(Μονάδες 5)

δ) Για α=2 και $g(x) = 2\eta\mu^2 x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 7)

15347-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$.

Άρα: $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$.

β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε: $f(-x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(-x) - 3\sigma\upsilon\nu(-x) + \alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha = f(x)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι άρτια.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M(\frac{\pi}{3}, 1)$ αν και μόνον αν $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{3} - 3\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + \alpha = 1 \Leftrightarrow 2\cdot\frac{1}{4} - 3\cdot\frac{1}{2} + \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

δ) Με $\alpha = 2$ έχουμε $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + 2$.

Για να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των δύο γραφικών παραστάσεων λύνουμε την εξίσωση :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + 2 = 2\eta\mu^2 x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + 2 = 2(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) + 9\sigma\upsilon\nu x - 9 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2 x - 12\sigma\upsilon\nu x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$(2\sigma\upsilon\nu x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{3}{2}$, αδύνατη.

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

15821

ΘΕΜΑ 4

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι εξίσωση $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x = 3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\varepsilon\phi x = \sqrt{3}$ και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα $[0,2\pi]$.

(Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{3}\cdot\eta\mu x$ και $g(x)=3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα $[0,2\pi]$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β).

(Μονάδες 7)

δ) Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x < 3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0,2\pi]$.

(Μονάδες 6)

15821-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αν υπήρχε γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$, τότε από τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ θα είχαμε $0+0=1$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς δεν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$.

β) Αν $\sigma\upsilon\nu x = 0$ τότε από την εξίσωση $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x = 3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ θα είχαμε και $\eta\mu x = 0$, το οποίο όμως όπως δείξαμε στο α) είναι άτοπο. Συνεπώς $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$.

Με $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ έχουμε ισοδύναμα

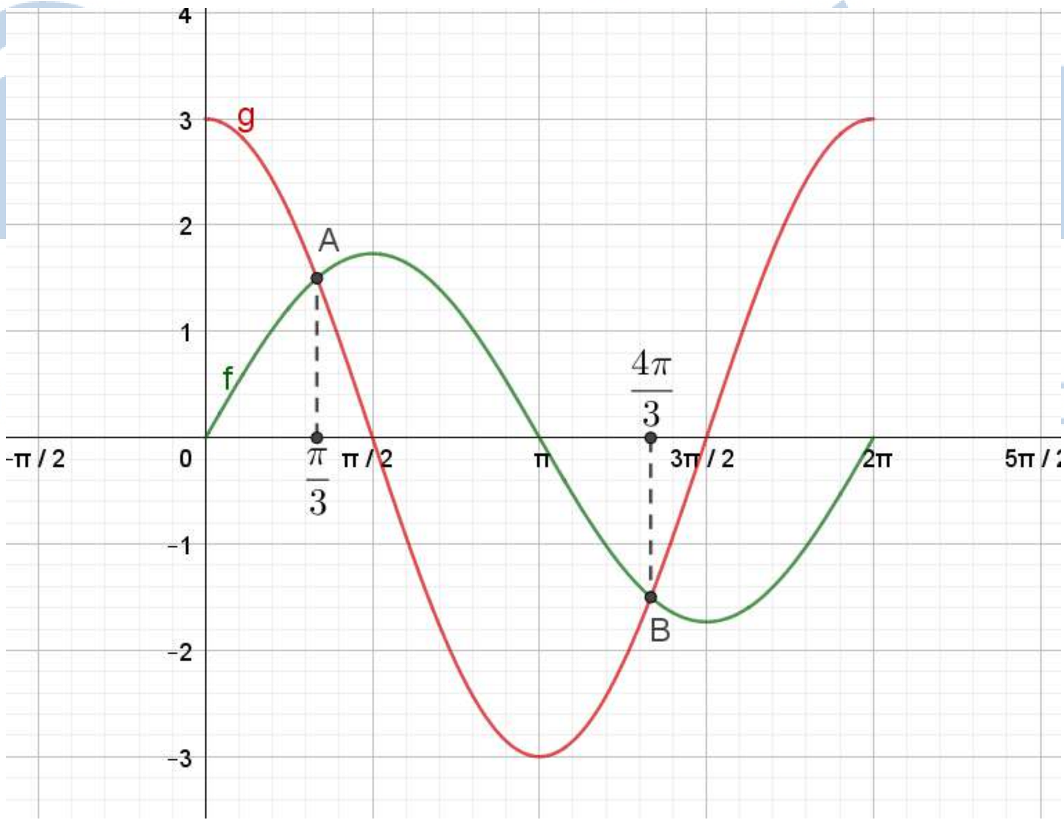
$$\sqrt{3}\cdot\eta\mu x = 3\cdot\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}$$

η οποία στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχει λύσεις τις $x = \frac{\pi}{3}$ και $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

γ) Με βάση τον παρακάτω πίνακα τιμών

x	0	π/2	π	3π/2	2π
$f(x)=\sqrt{3}\cdot\eta\mu x$	0	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	0
$g(x)=3\cdot\sigma\upsilon\nu x$	3	0	-3	0	3

οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



15821-Λύση

Όπως βλέπουμε στο παραπάνω σχήμα οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται στα σημεία Α και Β οι τετμημένες των οποίων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \sqrt{3}\cdot \eta\mu x = 3\cdot \sigma\upsilon\nu x$, που όπως βρήκαμε στο ερώτημα β) είναι $\frac{\pi}{3}$ και $\frac{4\pi}{3}$ αντίστοιχα. Αυτή είναι η ζητούμενη γραφική ερμηνεία.

δ) Η ανίσωση $\sqrt{3}\cdot \eta\mu x < 3\cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$, γραφικά σημαίνει να βρούμε για ποιες τιμές του x στο διάστημα $[0, 2\pi]$, η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g. Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι αυτό συμβαίνει για $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$.

15969

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2συν(13π + x) - 2ημ(\frac{π}{2} - x)$.

α) Να δείξετε ότι $συν(13π + x) = -συνx$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $f(x) = -4συνx$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.

(Μονάδες 12)

15969-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) = \sigma\upsilon\nu(6 \cdot 2\pi + \pi + x) = \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x.$

β) Είναι $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x.$

Άρα $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu x - 2\sigma\upsilon\nu x = -4\sigma\upsilon\nu x.$

γ) Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = -2 \Leftrightarrow -4\sigma\upsilon\nu x = -2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$ $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

20645

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=συν\left(x-\frac{π}{4}\right)$, $g(x)=συνx$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της g προκύπτει η γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 6)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{π}{2}\right)$, $f(π)$.

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}f(x)+1=0$.

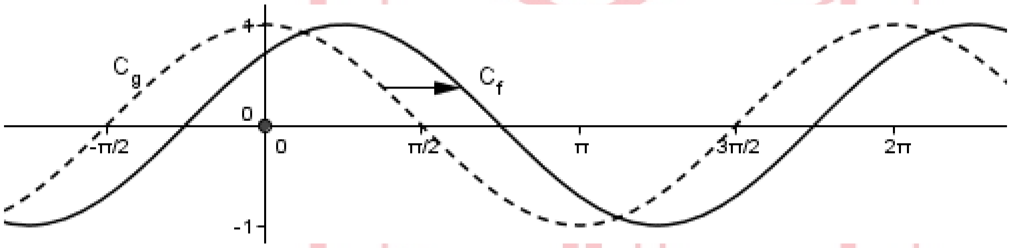
(Μονάδες 7)

20645-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από την ισότητα $f(x)=g\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f προκύπτει από τη γραφική παράσταση της g, αν την μετατοπίσουμε κατά $\frac{\pi}{4}$ μονάδες προς τα δεξιά.

β) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γνωστή γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\text{συν}x$ (με διακεκομμένη γραμμή) και η γραφική παράσταση της f που προκύπτει από αυτή, αν την μεταφέρουμε δεξιά κατά $\frac{\pi}{4}$ μονάδες.



γ) Είναι:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\text{συν}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

και

$$f(\pi)=f\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\text{συν}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\text{συν}\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

δ) Με τη βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος, έχουμε:

$$\sqrt{2}f(x)+1=0 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow f(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\text{συν}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \text{συν}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\text{συν}\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4} \\ \text{ή} \\ x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi-\frac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\pi \\ \text{ή} \\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{με } \kappa\in\mathbb{Z}$$

20712

ΘΕΜΑ 4

Σε μια θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης f, που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες. Να βρείτε :

α) την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη).

(Μονάδες 6)

β) την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας.

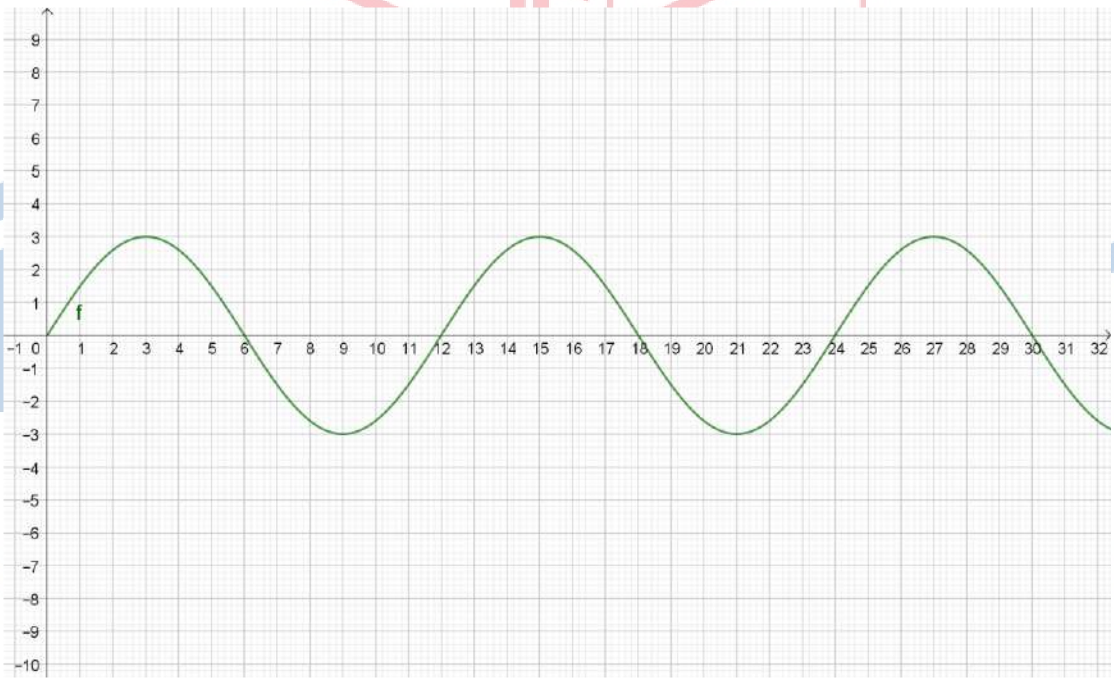
(Μονάδες 6)

γ) τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

δ) ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα.

(Μονάδες 7)



20712-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Γραφικά η υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη πλημμυρίδα και τη χαμηλότερη άμπωτη, εκφράζεται με τη διαφορά του ελαχίστου -3 της συνάρτησης f, από το μέγιστό της 3. Συνεπώς η ζητούμενη υψομετρική διαφορά είναι 6 μέτρα.

β) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι το μικρότερο διάστημα που απαιτείται για να αρχίσει να επαναλαμβάνεται η γραφική παράσταση είναι 12 ώρες. Συνεπώς η ζητούμενη περίοδος είναι 12.

γ) Ο τύπος της ημιτονοειδούς συνάρτησης f είναι της μορφής $f(t)=\rho\cdot\eta\mu(\omega t)$ όπου $\rho>0,\omega>0$. Δεδομένου ότι η μέγιστη τιμή της f είναι 3 συμπεραίνουμε ότι $\rho=3$. Επίσης η περίοδος είναι 12 οπότε $\frac{2\pi}{\omega}=12\Leftrightarrow\omega=\frac{\pi}{6}$. Συνεπώς η συνάρτηση f έχει τύπο $f(t)=3\cdot\eta\mu(\frac{\pi}{6}\cdot t)$.

δ) Αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης $f(t)=\frac{3}{2}$, όπου $0\le t\le 24$. Είναι

$$f(t)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 3\cdot\eta\mu(\frac{\pi}{6}\cdot t)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\eta\mu(\frac{\pi}{6}\cdot t)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu(\frac{\pi}{6}\cdot t)=\eta\mu(\frac{\pi}{6})\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{6}\cdot t=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\ \acute{\eta}\\ \frac{\pi}{6}\cdot t=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=12\kappa+1\\ \acute{\eta}\\ t=12\kappa+5\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$$

Επειδή $0\le t\le 24$, έχουμε τελικά ότι οι ζητούμενες ώρες είναι 1, 5, 13, 17.

Σχόλιο: Αυτό επιβεβαιώνεται και γραφικά από τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f, με την ευθεία $y=\frac{3}{2}$.

21244

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha+1}{2}\sigma\upsilon\nu(\beta x)$, με $\alpha,\beta>0$, η οποία έχει ελάχιστο -2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=3$ και $\beta=4$.

(Μονάδες 5)

β) Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A}=\dfrac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\varepsilon\varphi(\pi-x)\cdot\eta\mu(2\pi+x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi-x)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$. Να δείξετε ότι $\mathrm{A}=-1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2\mathrm{A}$, στο διάστημα $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 10)

21244-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $f(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu\omega x$, με $\rho,\omega>0$:

Έχει ελάχιστο $-\rho$, οπότε έχουμε $-\dfrac{\alpha+1}{2}=-2\Leftrightarrow\alpha+1=4\Leftrightarrow\alpha=3$.

Ακόμα έχει περίοδο $\mathrm{T}=\dfrac{2\pi}{\omega}$, οπότε έχουμε $\dfrac{2\pi}{\beta}=\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\beta=4$.

Τελικά, η συνάρτηση είναι $f(x)=2\sigma\upsilon\nu 4x$. (1)

β) Έχουμε για τον αριθμητή:

$\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi(\pi-x)=-\varepsilon\varphi x$, $\eta\mu(2\pi+x)=\eta\mu x$.

Έχουμε για τον παρονομαστή :

$\sigma\upsilon\nu(3\pi-x)=\sigma\upsilon\nu(\pi-x)=-\sigma\upsilon\nu x$,

$\sigma\varphi\left(\dfrac{7\pi}{2}-x\right)=\sigma\varphi\left(3\pi+\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)=\sigma\varphi\left(\pi+\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)=\sigma\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\varepsilon\varphi x$,

$\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}-(-x)\right)=\eta\mu(-x)=-\eta\mu x$.

Αντικαθιστώντας έχουμε $\mathrm{A}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x\cdot(-\varepsilon\varphi x)\cdot\eta\mu x}{-\sigma\upsilon\nu x\cdot\varepsilon\varphi x\cdot(-\eta\mu x)}=-1$.

γ) Έχουμε, λόγω της (1) και του β) ερωτήματος:

$f(x)=2\mathrm{A}\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 4x=-2\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu 4x=-1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu 4x=\sigma\upsilon\nu\pi\Leftrightarrow$

$4x=2\kappa\pi\pm\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\kappa\pi}{2}\pm\dfrac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$

Επειδή πρέπει $x\in\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$, δηλαδή $\pi\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

$\pi\le\dfrac{\kappa\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{3\pi}{2}\Leftrightarrow 1\le\dfrac{\kappa}{2}+\dfrac{1}{4}\le\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow$

$\dfrac{3}{4}\le\dfrac{\kappa}{2}\le\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}\le\kappa\le\dfrac{5}{2}\overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow}\kappa=2.$

Άρα $x=\pi+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}$

$\pi\le\dfrac{\kappa\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{3\pi}{2}\Leftrightarrow 1\le\dfrac{\kappa}{2}-\dfrac{1}{4}\le\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow$

$\dfrac{5}{4}\le\dfrac{\kappa}{2}\le\dfrac{7}{4}\Leftrightarrow\dfrac{5}{2}\le\kappa\le\dfrac{7}{2}\overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow}\kappa=3.$

Άρα, πάλι $x=\pi+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}$.

21995

ΘΕΜΑ 2

Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $ημx = α$ στο διάστημα $[-2π, 2π]$ όταν:

α) $α = 1$.

(Μονάδες 13)

β) $α = -2$.

(Μονάδες 12)

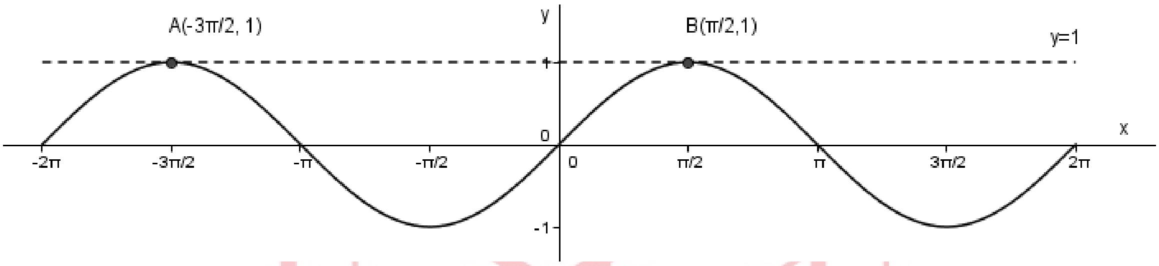
Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

21995-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Ζητάμε πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $ημx = 1$ στο διάστημα $[-2π, 2π]$.

Στο σχήμα παρακάτω, φαίνεται το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ημx στο διάστημα $[-2π, 2π]$ και το αντίστοιχο τμήμα της ευθείας $y = 1$.



Οι λύσεις της εξίσωσης $ημx = 1$ στο διάστημα $[-2π, 2π]$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ημx με την ευθεία $y = 1$, δηλαδή των σημείων $A\left(\frac{-3π}{2}, 1\right)$ και $B\left(\frac{π}{2}, 1\right)$. Άρα, η εξίσωση $ημx = 1$ στο διάστημα $[-2π, 2π]$ εχει δύο λύσεις: $x = \frac{-3π}{2}$ ή $x = \frac{π}{2}$.

β) Ζητάμε πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $ημx = -2$ στο διάστημα $[-2π, 2π]$.

Όμως, γνωρίζουμε ότι $-1 \leq ημx \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε, η εξίσωση $ημx = -2$ είναι αδύνατη, δηλαδή η εξίσωση $ημx = -2$ στο διάστημα $[-2π, 2π]$ δεν έχει καμία λύση.