16128

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή $(C): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E' και E.

(Μονάδες 10)

β) Αν το N είναι τυχαίο σημείο της (C), να βρείτε την τιμή της διαφοράς $|(NE') - (NE)|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C).

(Μονάδες 10)

16128-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Καθώς η υπερβολή έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, θα είναι $\alpha^2=16$ και $\beta^2=9$, οπότε $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=25$, άρα $\gamma=5$. Έτσι, οι εστίες είναι τα σημεία $E'(-5{,}0)$ και $E(5{,}0)$.

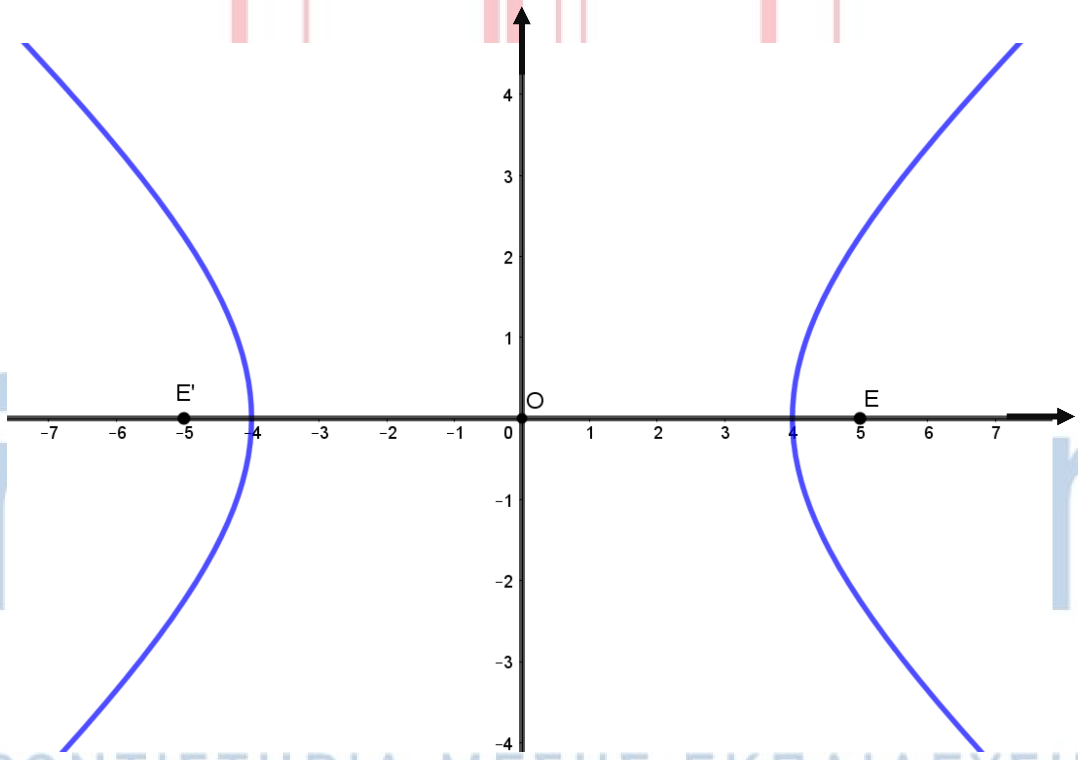
β) Από τον ορισμό της υπερβολής γνωρίζουμε ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων ενός σημείου της υπερβολής από τις εστίες ισούται με 2α.

Έτσι, θα έχουμε ότι $|(NE')-(NE)|=2\cdot 4=8$.

γ) Γνωρίζουμε ότι η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(-\alpha,0)$ και $(\alpha,0)$, δηλαδή στα σημεία $(-4{,}0)$ και $(4{,}0)$.

Επίσης, δεν τέμνει τον άξονα y'y, αφού αν αυτό συνέβαινε θα είχαμε $0-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, αδύνατο.

Έτσι, έχουμε το παρακάτω σχήμα.



17942

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση $(C)\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της.

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο Μ(1,2022) μπορεί να ανήκει στην (C) .

(Μονάδες 13)

17942-Λύση

Λύση

α) Η εξίσωση (C) ανήκει σε υπερβολή, διότι είναι της μορφής $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha=2,\beta=3$.

Οι εστίες της έχουν συντεταγμένες $E(\gamma,0),E'(-\gamma,0)$

όπου $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2 \Leftrightarrow \gamma^2=\alpha^2+\beta^2=4+9=13$. Οπότε $E(\sqrt{13},0),E'(-\sqrt{13},0)$.

β) Για $x=1,y=2022$ η εξίσωση (C) γίνεται:

$\frac{1^2}{4}-\frac{2022^2}{9}=36 \Leftrightarrow 9-4\cdot 2022^2=36^2 \Leftrightarrow 4\cdot 2022^2=9-36^2<0$, η οποία δεν μπορεί να ισχύει.

Άρα το σημείο Μ δεν μπορεί να ανήκει στην υπερβολή.

Γενικότερα, είναι γνωστό ότι για μία υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ ισχύει ότι $x\leq -a$ ή $x\geq a$.

17944

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής $(C): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, εστιακή απόσταση $EE' = 2\sqrt{7}$

και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2, \beta = \sqrt{3}$.

(Μονάδες 8)

β) i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών A, A' της υπερβολής (C).

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής (C).

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή (C), τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της.

(Μονάδες 9)

17944-Λύση

Λύση

α) Ισχύει ότι η εστιακή απόσταση είναι $2\gamma = 2\sqrt{7} \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{7}$.

Για την εκκεντρότητα της υπερβολής ισχύει ότι $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{7}}{2} = \dfrac{\sqrt{7}}{a} \Leftrightarrow a = 2$.

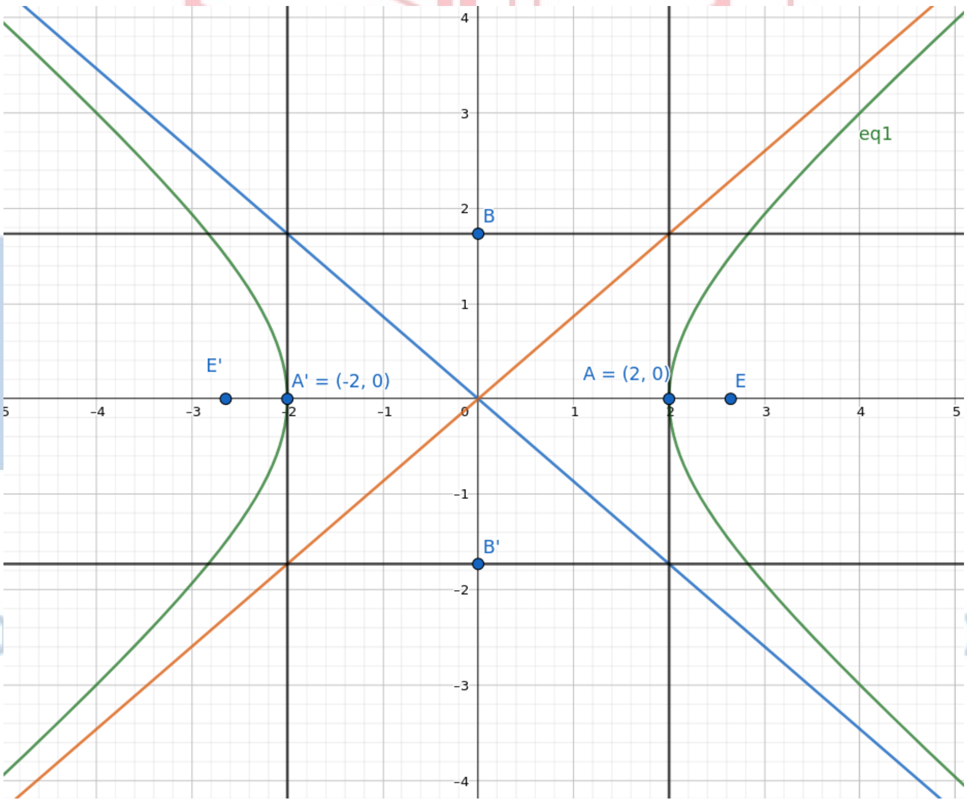
Για τους συντελεστές α,β ισχύει ότι $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = \sqrt{7}^2 - 2^2 = 3 \Leftrightarrow \beta = \sqrt{3}$.

β) i) Οι κορυφές της υπερβολής έχουν συντεταγμένες $A(\alpha, 0), A'(-\alpha, 0)$, άρα θα είναι οι $A(2,0), A'(-2,0)$.

ii) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι $\varepsilon_1 : y = -\dfrac{\beta}{a}x, \varepsilon_2 : y = \dfrac{\beta}{a}x$ οπότε θα έχουμε:

$$\varepsilon_1 : y = \frac{-\sqrt{3}}{2}x, \varepsilon_2 : y = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

γ) Η γραφική παράσταση και τα υπόλοιπα στοιχεία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



20653

ΘΕΜΑ 4

Κατά τη διάρκεια μιας επιχείρησης εντοπισμού ενός αγνοούμενου σε μια αχανή δασώδη επίπεδη περιοχή, δύο παρατηρητές M_1 και M_2 βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία. Ο αγνοούμενος εκτοξεύει φωτοβολίδες που διαθέτει και οι δύο παρατηρητές σημειώνουν τις χρονικές στιγμές που ακούνε τον ήχο της εκπυρσοκρότησης του όπλου. Είναι γνωστό ότι ο παρατηρητής M_1 ακούει σε όλες τις εκρήξεις τον ήχο με διαφορά $4\ sec$ αργότερα από τον παρατηρητή M_2.

α) Αν ονομάσουμε P την θέση του αγνοούμενου, να αποδείξετε ότι $(PM_1)-(PM_2)=1360\ m$. Θεωρούμε ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι $340\ m/sec$.

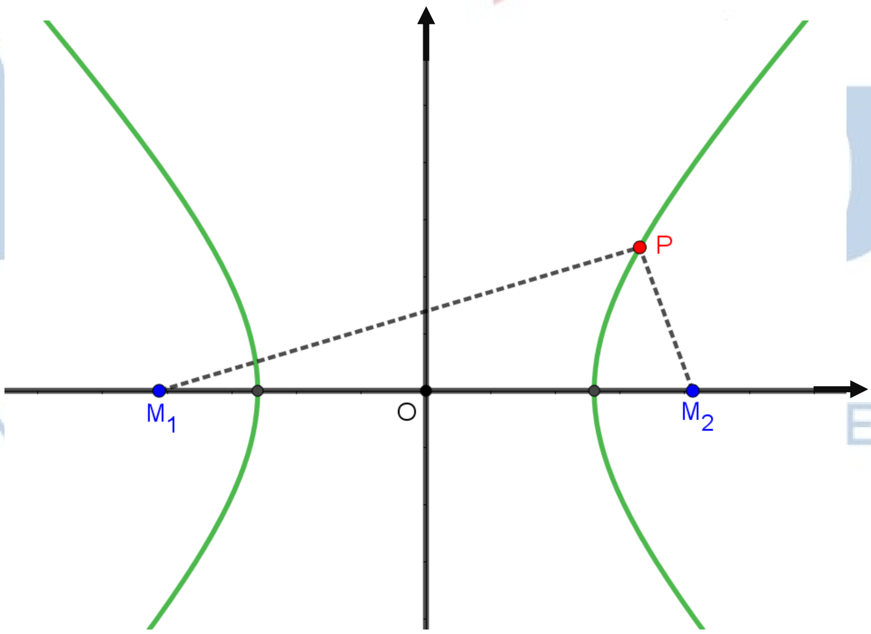
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξτε ότι η θέση P του αγνοούμενου ανήκει σε έναν κλάδο υπερβολής με εστίες τα σημεία M_1 και M_2.

(Μονάδες 8)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι η απόσταση (M_1M_2) είναι $1378\ m$, να αποδείξετε ότι αυτή η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{680^2}-\frac{y^2}{111^2}=1$, θεωρώντας ως άξονα $x'x$ την ευθεία M_1M_2 και κέντρο της υπερβολής την αρχή των αξόνων. Δίνεται ότι $37^2=1369$.

(Μονάδες 9)



20653-Λύση

ΛΥΣΗ

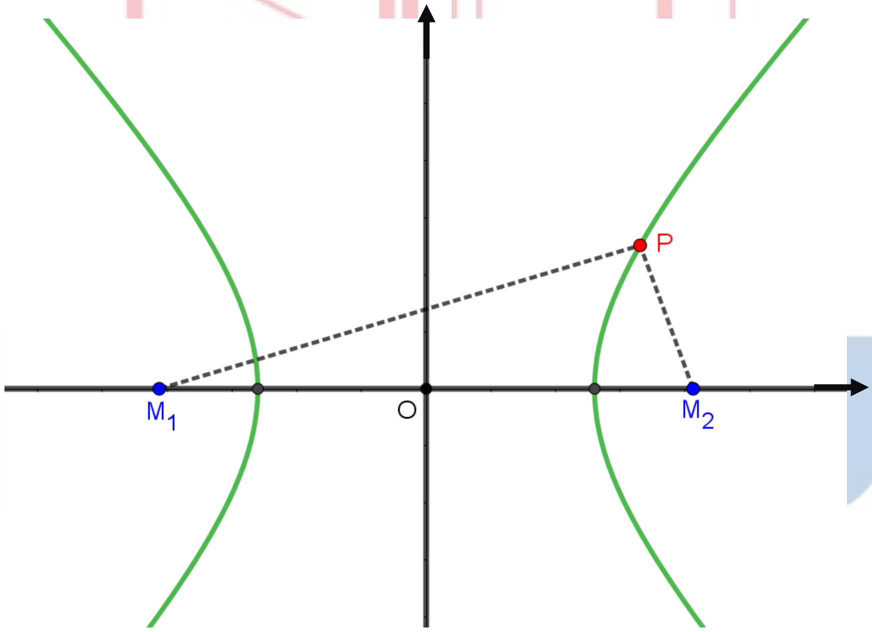
α) Έστω $t\ sec$ ο χρόνος που μεσολάβησε από τη στιγμή της εκπυρσοκρότησης μέχρι τη στιγμή που την άκουσε ο παρατηρητής M_2. Τότε ο αντίστοιχος χρόνος για τον M_1 θα είναι $t+4$ sec. Άρα $(PM_2) = 340 \cdot t$ και $(PM_1) = 340 \cdot (t+4) = 340 \cdot t + 1360$.

Ώστε $(PM_1) - (PM_2) = 1360\ m$.

β) Γνωρίζουμε ότι όλα τα σημεία P που ικανοποιούν τη σχέση $|(PM_1) - (PM_2)|$ =σταθερή, ανήκουν σε δύο κλάδους υπερβολής με εστίες τα σταθερά σημεία M_1 και M_2. Άρα η θέση P του αγνοούμενου θα ανήκει σε έναν κλάδο υπερβολής με εστίες τα M_1 και M_2 και προφανώς σε αυτόν που βρίσκεται πιο κοντά στον παρατηρητή M_2.

γ) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Εδώ είναι $2\alpha = 1360$, οπότε $\alpha = 680$. Η απόσταση (M_1M_2) είναι 2γ, άρα $\gamma = 1378 : 2 = 689$.

Όμως $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 689^2 - 680^2 = (689+680)(689-680) = 1369 \cdot 9 = 37^2 \cdot 3^2 = 111^2$.



20721

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

α) Να βρείτε τις εστίες της C.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της C.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή C και τις ασύμπτωτές της στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 9)

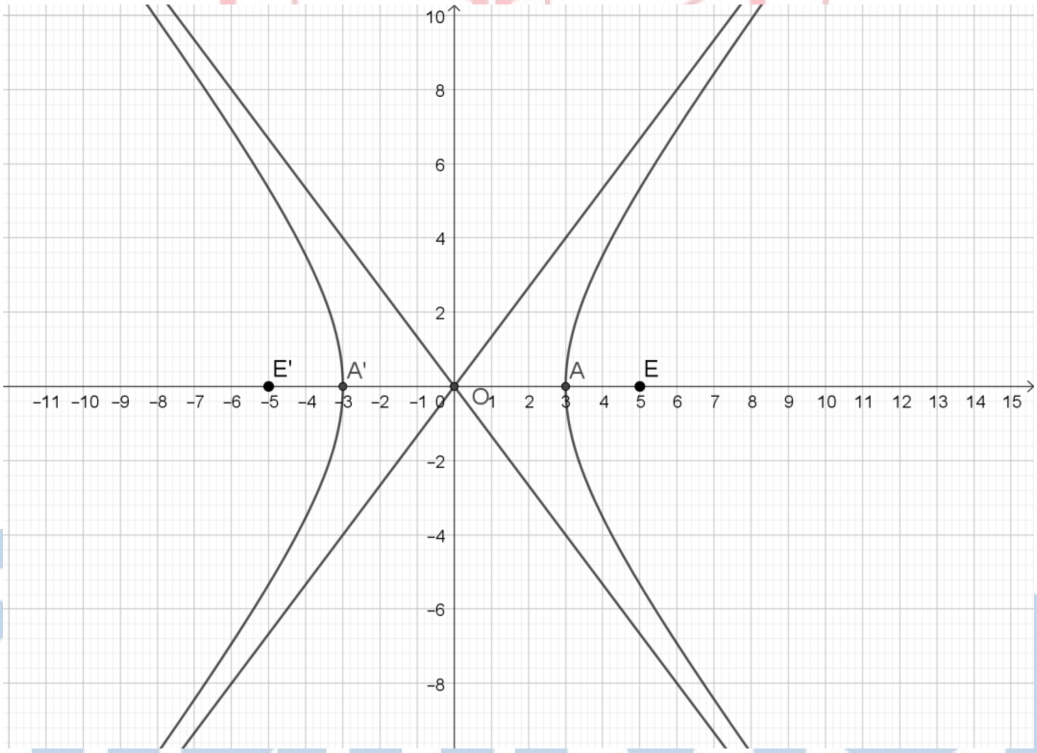
20721-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\alpha^2 = 9$ και $\beta^2 = 16$ οπότε $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 9 + 16 = 25$ και άρα $\gamma = 5$. Οι ζητούμενες εστίες είναι τα σημεία $\mathrm{E}(5,0)$ και $\mathrm{E}'(-5,0)$.

β) Οι ζητούμενες ασύμπτωτες έχουν εξισώσεις $y = \frac{\beta}{\alpha}x$, $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$ δηλαδή $y = \frac{4}{3}x$, $y = -\frac{4}{3}x$.

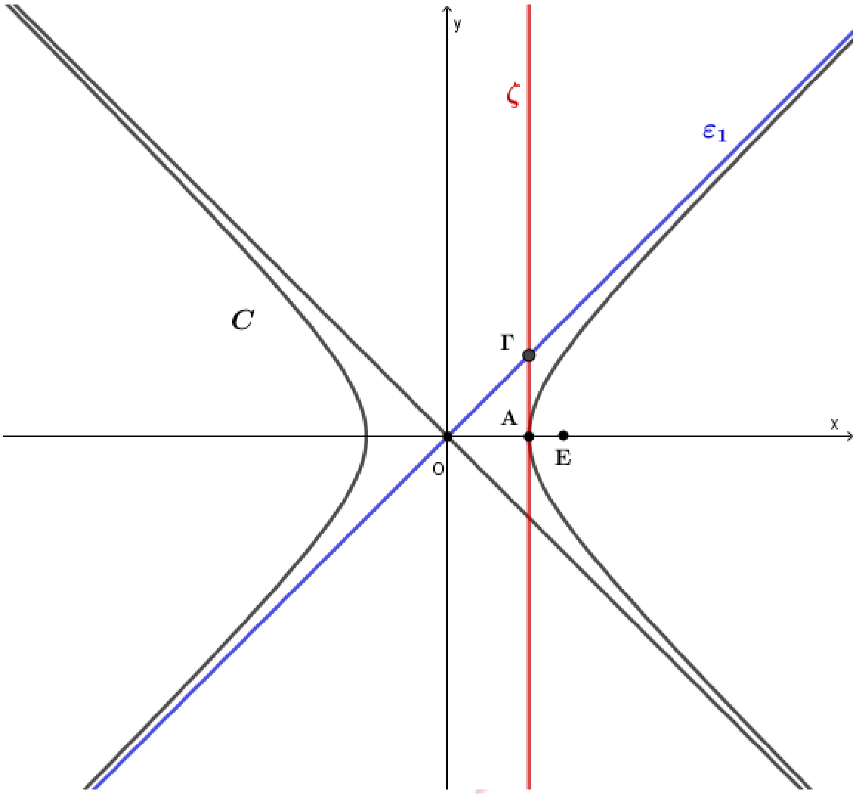
γ) Η υπερβολή C έχει κορυφές τα σημεία $\mathrm{A}(3,0)$ και $\mathrm{A}'(-3,0)$ και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπως και οι ασύμπτωτές της.



20869

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται η υπερβολή $C: x^2 - y^2 = 1$, η εστία της E, η εφαπτομένη της ζ στο σημείο $A(1,0)$ και το σημείο Γ στο οποίο αυτή τέμνει την ασύμπτωτη ευθεία ε_1 της υπερβολής.



α) Να βρείτε τις εστίες E', E και τις ασύμπτωτες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της υπερβολής.

(Μονάδες 10)

β)

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ζ.

(Μονάδες 07)

ii. Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(1,1)$.

(Μονάδες 08)

20869-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, με $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$, έχει εστίες τις $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και ασύμπτωτες τις ευθείες $\varepsilon_1\colon y=\frac{\beta}{\alpha}x$, $\varepsilon_2\colon y=-\frac{\beta}{\alpha}x$.

Η υπερβολή $C\colon x^2-y^2=1$ είναι ισοσκελής, με $\alpha=\beta=1$.

Επιπλέον $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}\Leftrightarrow 1=\sqrt{\gamma^2-1}\Leftrightarrow \gamma^2=2 \overset{\gamma>0}{\Longleftrightarrow} \gamma=\sqrt{2}$.

Επομένως, οι εστίες της C είναι τα σημεία $E'\left(-\sqrt{2},0\right)$, $E\left(\sqrt{2},0\right)$ και ασύμπτωτες, οι ευθείες $\varepsilon_1\colon y=x$, $\varepsilon_2\colon y=-x$.

β)

i. Η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ είναι η ευθεία $\frac{x\cdot x_1}{\alpha^2}-\frac{y\cdot y_1}{\beta^2}=1$.

   Η εφαπτομένη της C στο σημείο $A(1,0)$ είναι η $\zeta\colon x\cdot 1-y\cdot 0=1\Leftrightarrow x=1$.

ii. Το σημείο Γ προκύπτει από την επίλυση του συστήματος (Σ): $\begin{cases}\varepsilon_1\colon\ y=x\\ \zeta\colon x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ x=1\end{cases}$.

   Επομένως $\Gamma(1,1)$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι υπερβολές $(C_1): x^2 - y^2 = 1, (C_2): y^2 - x^2 = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εστίες της C_1 είναι οι $E_1(\sqrt{2}, 0), E'_1(-\sqrt{2}, 0)$.

(Μονάδες 12)

β) Αν E_2, E'_2 οι εστίες της C_2 τότε να αποδείξετε ότι το $E_1E_2E'_1E'_2$ είναι τετράγωνο.

(Μονάδες 13)

21218-Λύση

Λύση

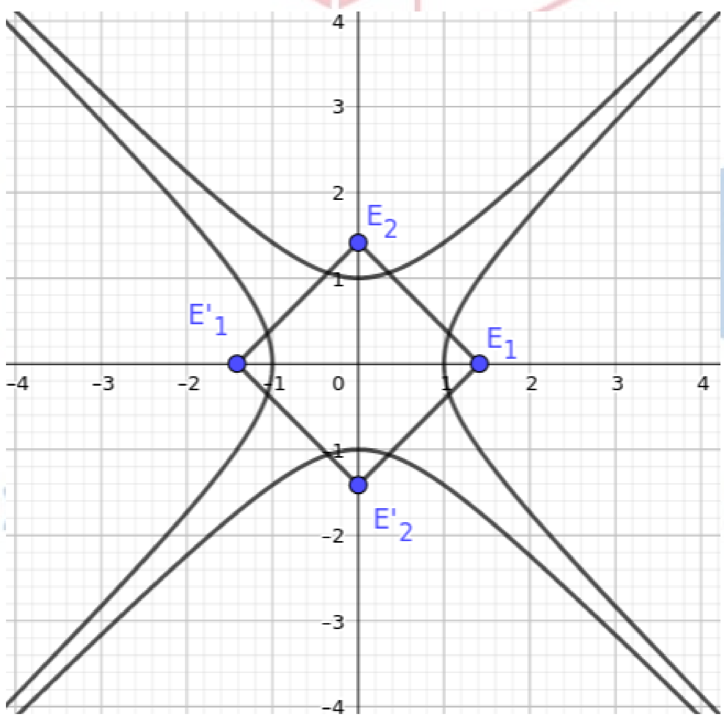
α) Για την υπερβολή C_1 ισχύει ότι έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha=\beta=1$.

Αν $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=1^2+1^2=2$, άρα $\gamma=\sqrt{2}>0$, αφού $\gamma>\alpha=1$,

τότε οι εστίες της θα έχουν συντεταγμένες τις $E_1(\gamma,0)$, $E'_1(-\gamma,0)\Rightarrow E_1(\sqrt{2},0)$, $E'_1(-\sqrt{2},0)$.

β) Η υπερβολή C_2 είναι ίδια με τη C_1 με τις εστίες της να βρίσκονται στον άξονα $y'y$.
Δηλαδή θα ισχύει ότι : $E_2(0,\gamma), E'_2(0,-\gamma)\Rightarrow E_2(0,\sqrt{2}), E'_2(0,-\sqrt{2})$.

Συνεπώς τα σημεία E_1, E_2, E'_1, E'_2, θα ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και βρίσκονται πάνω σε αυτούς, οπότε οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $E_1E_2E'_1E'_2$ είναι ίσες , διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα, άρα αυτό είναι τετράγωνο.



21649

ΘΕΜΑ 2

Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(5,0),\mathrm{E}'(-5,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της C.

(Μονάδες 10)

β) τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της C.

(Μονάδες 8)

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $\mathrm{M}(5,\frac{9}{4})$.

(Μονάδες 7)

21649-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(5,0), \mathrm{E}'(-5,0)$ οπότε έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\gamma=5$. Αφού έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$ συμπεραίνουμε ότι $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{5}{\alpha}=\frac{5}{4} \Leftrightarrow \alpha=4$. Από τη σχέση $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$ έχουμε ότι

$5^2=4^2+\beta^2 \Leftrightarrow \beta^2=9 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta=3$. Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

β) Οι εξισώσεις των ασύμπτωτων της C είναι $y=\frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x$ και $y=-\frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x$.

γ) Η εφαπτόμενη στο $\mathrm{M}(5,\frac{9}{4})$ έχει εξίσωση $\frac{5\cdot x}{25}-\frac{\frac{9}{4}\cdot y}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{5}-\frac{y}{4}=1$.

21651

ΘΕΜΑ 2

Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(5,0), \mathrm{E}'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(4,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της C.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $\mathrm{M}(5,\frac{9}{4})$.

(Μονάδες 7)

21651-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η C έχει εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(5,0), \mathrm{E}'(-5,0)$ οπότε έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\gamma=5$. Αφού διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(4,0)$ έχουμε ότι $\frac{4^2}{\alpha^2}-\frac{0^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{16}{\alpha^2}=1 \Leftrightarrow \alpha^2=16$ και επειδή $\alpha>0$ έχουμε τελικά ότι $\alpha=4$.

Συνεπώς έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{5}{4}$.

β) Από τη σχέση $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$ έχουμε ότι $5^2=4^2+\beta^2 \Leftrightarrow \beta^2=9$ και επειδή $\beta>0$ έχουμε $\beta=3$.

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

γ) Η εφαπτόμενη στο $\mathrm{M}(5,\frac{9}{4})$ έχει εξίσωση $\frac{5\cdot x}{16}-\frac{\frac{9}{4}\cdot y}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{5x}{16}-\frac{y}{4}=1$.

21656

ΘΕΜΑ 4

Έστω υπερβολή C με κέντρο το $(0,0)$, εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(5,0), \mathrm{E}'(-5,0)$ και κορυφές τα σημεία $\mathrm{A}(4,0), \mathrm{A}'(-4,0)$.

α) Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής C.

(Μονάδες 3)

ii. την εξίσωση της υπερβολής C.

(Μονάδες 3)

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα, την υπερβολή C, τις ασύμπτωτες της C και το ορθογώνιο βάσης της C.

(Μονάδες 9)

γ) Αν M τυχαίο σημείο της C, να βρείτε την τιμή της παράστασης $(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')$.

(Μονάδες 5)

δ) Αν $\mathrm{M}(\sqrt{80},6)$ σημείο της C, να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{E}'$.

(Μονάδες 5)

21656-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η υπερβολή C έχει κέντρο το $(0,0)$ και εστίες στον άξονα xx', οπότε θα έχει ασύμπτωτες της μορφής $y=\frac{\beta}{\alpha}x$, $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$ και εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Αφού οι εστίες είναι $\mathrm{E}(5,0),\mathrm{E}'(-5,0)$ συμπεραίνουμε ότι $\gamma=5$ και αφού οι κορυφές της είναι τα σημεία $\mathrm{A}(4,0),\mathrm{A}'(-4,0)$ συμπεραίνουμε ότι $\alpha=4$. Επομένως από τη σχέση $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$ έχουμε ότι $5^2=4^2+\beta^2 \Leftrightarrow \beta^2=9 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta=3$. Τελικά

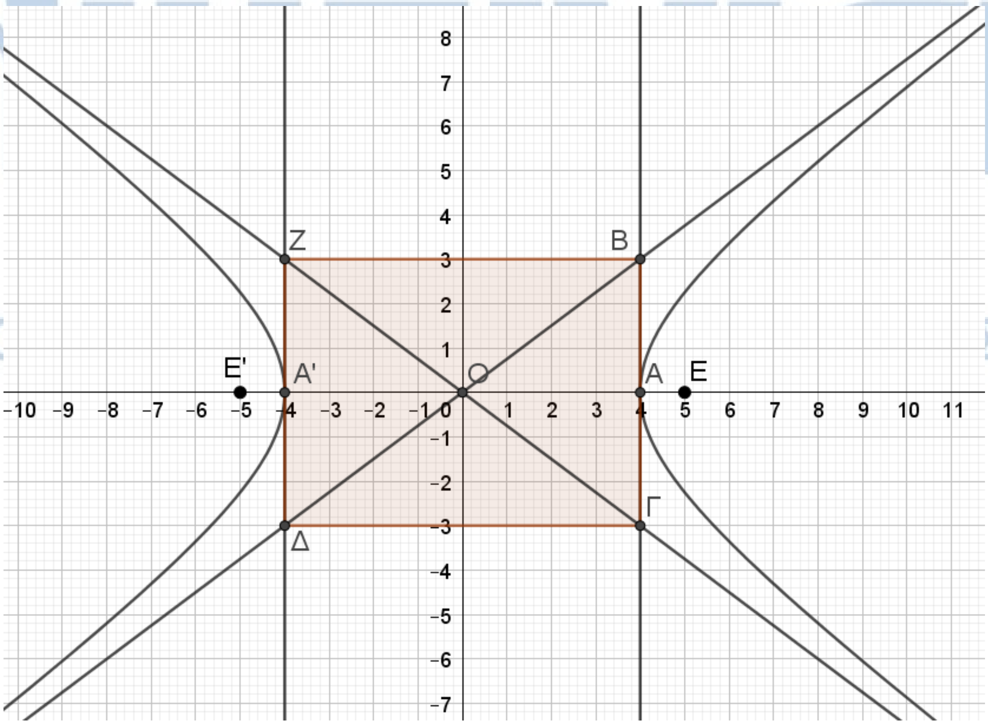
i. οι εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής C είναι $y=\frac{3}{4}x$, $y=-\frac{3}{4}x$

ii. η εξίσωση της υπερβολής C είναι $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

β) Οι κορυφές του ορθογωνίου βάσης είναι τα σημεία τομής των ασυμπτώτων της C με τις εφαπτόμενες της C στις κορυφές της, δηλαδή τα σημεία τομής των ευθειών $y=\frac{3}{4}x$, $y=-\frac{3}{4}x$ με τις ευθείες $x=4$, $x=-4$.

Τα σημεία αυτά είναι τα $\mathrm{B}(4,3),\Gamma(4,-3),\Delta(-4,-3),\mathrm{Z}(-4,3)$, ενώ οι ασύμπτωτες της C είναι οι διαγώνιες του ορθογωνίου βάσης.

Η υπερβολή C, οι ασύμπτωτες της C και το ορθογώνιο βάσης της C, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



21656-Λύση

γ) Από τον ορισμό της υπερβολής γνωρίζουμε ότι για κάθε σημείο M της C είναι $|(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')|=2\alpha$, οπότε $(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')=8$ (αν το M ανήκει στον κλάδο της C που είναι πιο κοντά στην εστία E') ή $(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')=-8$ (αν το M ανήκει στον κλάδο της C που είναι πιο κοντά στην εστία E).

δ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της υπερβολής, γνωρίζουμε ότι για κάθε σημείο της M, η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{E}'$ είναι η εφαπτομένη της στο M .Συνεπώς η ζητούμενη διχοτόμος είναι η εφαπτομένη της C στο $\mathrm{M}(\sqrt{80},6)$, δηλαδή η ευθεία με εξίσωση $\frac{\sqrt{80}\cdot x}{16}-\frac{6y}{9}=1$.

21973

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = \lambda|\vec{\beta}|$ τότε υποχρεωτικά $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

ii. Η εφαπτομένη του κύκλου C: $x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του A (x_1, y_1), έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

iii. Η διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 2px$, έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$.

iv. Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης είναι μικρότερη της μονάδας.

v. Η εξίσωση: $x^2 + y^2 = \alpha^2$ είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

(Μονάδες 15)

21973-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

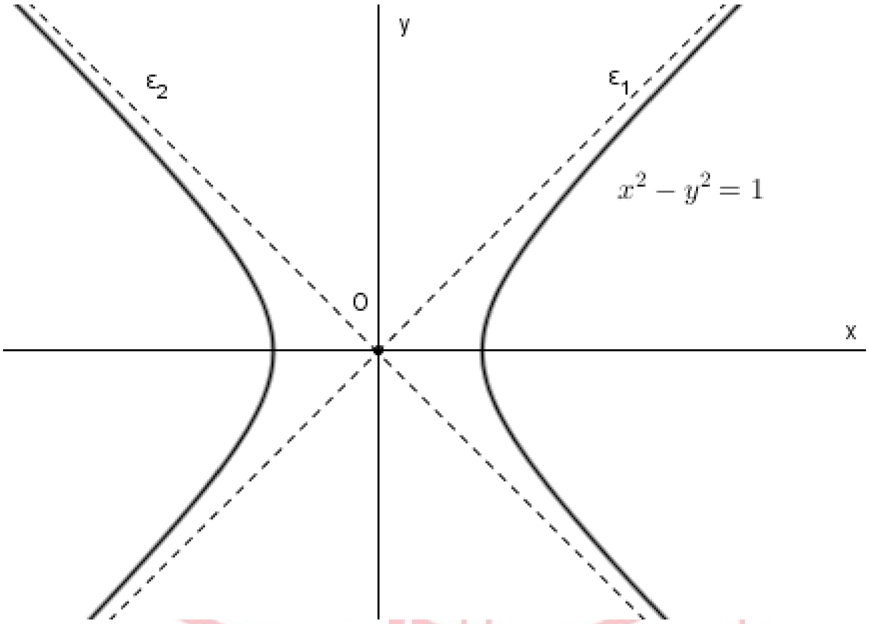
i. Λάθος
ii. Σωστό
iii. Σωστό
iv. Σωστό
v. Λάθος

β) Πρόταση σελίδα 60, 61.

22051

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$. Να αποδείξετε για τις ασύμπτωτες ευθείες ε_1 και ε_2 της υπερβολής ότι:



α) Συμπίπτουν με την διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου και την διχοτόμο του 2ου και 4ου τεταρτημορίου, αντίστοιχα.

(Μονάδες 13)

β) Είναι ευθείες κάθετες μεταξύ τους.

(Μονάδες 12)

22051-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Γενικά, οι εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$.

Εδώ είναι $\alpha=\beta=1$.

Οπότε, οι ασύμπτωτες ευθείες ε_1 και ε_2 της δοθείσας υπερβολής είναι $\varepsilon_1 : y=x$ και $\varepsilon_2 : y=-x$

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι οι ασύμπτωτες ευθείες ε_1 και ε_2 της δοθείσας υπερβολής είναι $\varepsilon_1 : y=x$ και $\varepsilon_2 : y=-x$ και συνεπώς οι αντίστοιχες κλίσεις είναι $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=-1$. Άρα, $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$. Επομένως, $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

22169

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με ασύμπτωτη την $y = \frac{3}{4}x$. Η απόσταση των κορυφών της Α και Α΄ είναι 8.

α)

i. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής. (Μονάδες 10)

ii. Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής; (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ στο σημείο της $(5, \frac{9}{4})$. (Μονάδες 10)

22169-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι η $y = \frac{β}{α}x$ και $y = -\frac{β}{α}x$. Εφόσον η $y = \frac{3}{4}x$ είναι ασύμπτωτη και $α,β > 0$, έχουμε ότι $\frac{β}{α} = \frac{3}{4}$ δηλαδή $4β = 3α$ ή $β = \frac{3}{4}α$. (1)

Η απόσταση των κορυφών της ΑΑ' είναι ίση με 2α, οπότε $2α = 8$, άρα $α = 4$. (2)

Από (1) και (2) έχουμε ότι $β = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$.

Επομένως η εξίσωση της υπερβολής $\frac{x^2}{α^2} - \frac{y^2}{β^2} = 1$ γίνεται $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ ή $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

ii. $α^2+β^2 = γ^2$ και από το αi) ερώτημα έχουμε ότι $α = 4$ και $β = 3$. Επομένως $4^2+ 3^2 = γ^2$ ή $γ^2 = 25$ ή $γ = 5$.

Οι εστίες είναι της μορφής Ε(γ,0) και Ε'(-γ,0), επομένως Ε(5,0) και Ε'(-5,0).

β) Η εφαπτόμενη της υπερβολής $\frac{x^2}{α^2} - \frac{y^2}{β^2} = 1$ στο σημείο της (x_1, y_1) δίνεται από τον τύπο

$\frac{xx_1}{α^2} - \frac{yy_1}{β^2} = 1$ ή $\frac{xx_1}{16} - \frac{yy_1}{9} = 1$. Στο σημείο $(5, \frac{9}{4})$ θα έχουμε $\frac{5x}{16} - \frac{\frac{9}{4}y}{9} = 1$ ή $\frac{5x}{16} - \frac{y}{4} = 1$.

22174

ΘΕΜΑ 4

Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης Ε(γ,0), ενώ η άλλη εστία είναι στο Ε΄(-γ,0). Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι 0,6 ενώ ο μεγάλος άξονας 10.

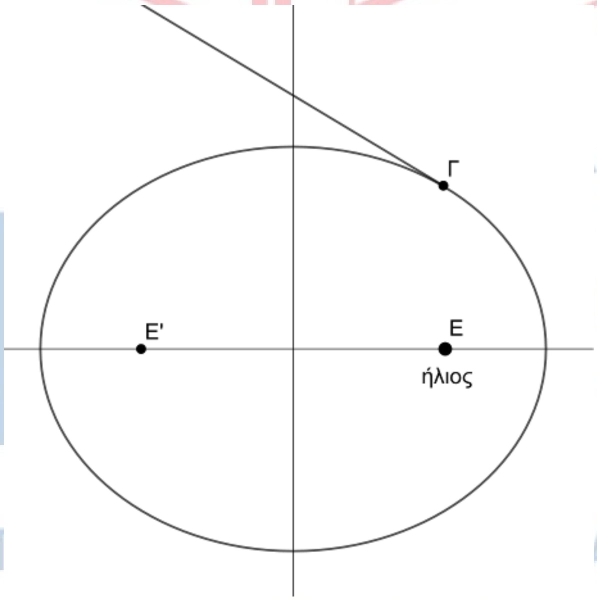
α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς. (Μονάδες 09)

β) Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

i. Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο $Γ\left(3,\frac{16}{5}\right)$ εκπέμπεται από αυτόν σήμα που κινείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα Οy. Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο Δ(0,5). (Μονάδες 09)

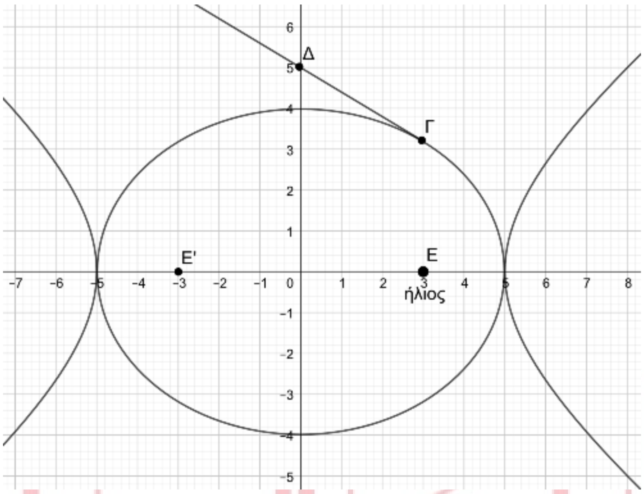
ii. Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ με x > 0. Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών;

(Μονάδες 07)



22174-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης είναι 2α, οπότε 2α =10, άρα α = 5.

Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι ε = $\frac{\gamma}{\alpha}$, οπότε $\frac{\gamma}{\alpha}=0,6$ ή $\frac{\gamma}{5}=0,6$ ή γ = 3.

Όμως $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$.

Η εξίσωση της έλλειψης δίνεται από τον τύπο $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, άρα $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

β)

i. Η εφαπτομένη της έλλειψης σε σημείο (x_1, y_1) δίνεται από τον τύπο $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$.

Εφόσον το σημείο επαφής είναι το Γ$\left(3,\frac{16}{5}\right)$ η εξίσωση της εφαπτομένης θα γίνει

$\frac{x3}{25}+\frac{y\frac{16}{5}}{16}=1$ ή $\frac{3x}{25}+\frac{y}{5}=1$. Για να διέρχεται από το σημείο Δ(0,5) θα πρέπει οι συντεταγμένες του σημείου να την επαληθεύουν. Πράγματι $\frac{3\cdot 0}{25}+\frac{5}{5}=1$ ή 1 = 1 που σημαίνει ότι η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο Δ.

ii. Σημεία συνάντησης των τροχιών είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεών τους εφόσον υπάρχουν. Οι εξισώσεις είναι $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ και $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$. Προσθέτοντας κατά μέλη $2\frac{x^2}{25}=2$ ή $x^2=25$ ή x = 5 επειδή x > 0. Η $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ για x = 5 μας δίνει

$\frac{5^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ή $1+\frac{y^2}{16}=1$ ή $\frac{y^2}{16}=0$

22174-Λύση

ή y = 0. Σημείο συνάντησης είναι το (5,0).

22196

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση

$$x^2 - y^2 = 25 \qquad (1)$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2) της υπερβολής.

(Μονάδες 10)

γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 05)

22196-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{25}=1$$

Επομένως, είναι $\alpha^2=25 \Leftrightarrow \alpha=5$, $\beta^2=25 \Leftrightarrow \beta=5$ και $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=25+25=50$.

Άρα, $\gamma=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία Ε(γ,0), Ε΄(-γ,0), δηλαδή:

$$E\left(5\sqrt{2},0\right),\ E'\left(-5\sqrt{2},0\right)$$

β) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

είναι οι ευθείες

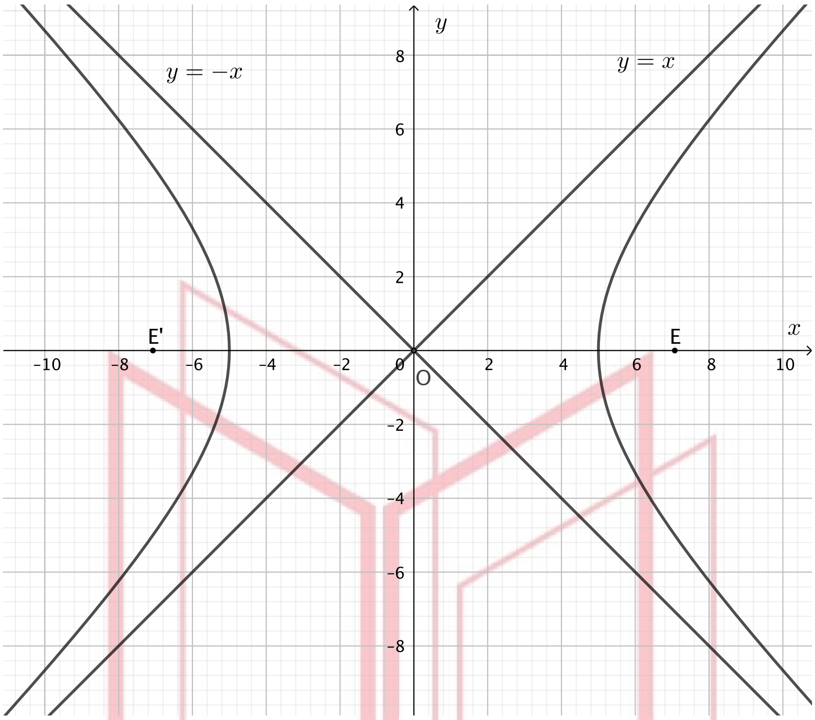
$$(\varepsilon_1): y=\frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): y=-\frac{\beta}{\alpha}x$$

δηλαδή

$$(\varepsilon_1): y=x \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): y=-x$$

γ) Οι ευθείες (ε_1), (ε_2) έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=-1$ αντίστοιχα. Αφού $\lambda_1\lambda_2=-1$, συμπεραίνουμε ότι οι ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2) είναι κάθετες. Η καμπύλη της υπερβολής, οι εστίες Ε, Ε΄ της και οι ασύμπτωτες απεικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα:

22196-Λύση



22269

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση : $\frac{x^2}{4}$ - y^2 = 1 (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας :

i. Τις συντεταγμένες των εστιών της.

ii. Την εκκεντρότητά της.

iii. Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της, Α($\sqrt{5}$, $\frac{1}{2}$). (Μονάδες 10)

22269-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η υπερβολή με εξίσωση : $\frac{x^2}{4}$ - y^2 = 1 (1) έχει $\alpha^2 = 4$ και $\beta^2 = 1$. Οι εστίες της βρίσκονται στον άξονα x’x και έχουν συντεταγμένες Ε(γ, 0) και Ε’(-γ, 0), όπου γ = $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ = $\sqrt{5}$.

i. Οι εστίες της υπερβολής έχουν συντεταγμένες Ε($\sqrt{5}$, 0) και Ε’(- $\sqrt{5}$, 0).

ii. Η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

iii. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = \frac{\beta}{\alpha}x = \frac{1}{2}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x = -\frac{1}{2}x$.

β) Η εξίσωση της εφαπτόμενης της υπερβολής στο σημείο της με συντεταγμένες (x_1, y_1) θα έχει τη μορφή $\varepsilon : \frac{x x_1}{4} - y y_1 = 1 \Leftrightarrow x x_1 - 4 y y_1 = 4$. Οπότε για $x_1 = \sqrt{5}$ και $y_1 = \frac{1}{2}$ στην εξίσωση της ευθείας ε θα έχουμε $\varepsilon : \sqrt{5}\cdot x - 4\cdot \frac{1}{2} y = 4$ ή $\varepsilon : \sqrt{5}\cdot x - 2y = 4$.

22559

ΘΕΜΑ 2

Η υπερβολή στο παρακάτω σχήμα έχει εστίες τα σημεία $E'(-10\,,0)$ και $E(10\,,0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-8\,,0)$ και $A(8\,,0)$.

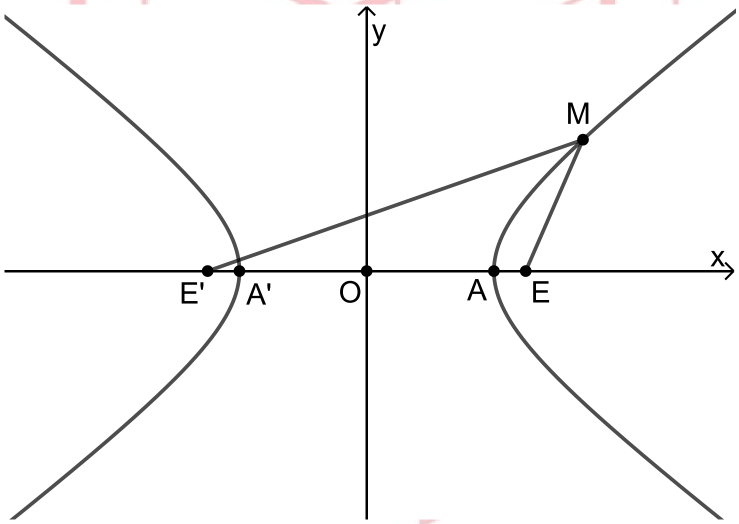
α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. (Μονάδες 12)

β) Έστω M ένα σημείο της υπερβολής.

i. Να αποδείξετε ότι $|(ME')-(ME)|=16$. (Μονάδες 8)

ii. Αν $(ME)=9$, να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την εστία E'.

(Μονάδες 5)



22559-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Επειδή η υπερβολή έχει τις εστίες της $E'(-10\,,0)$, $E(10\,,0)$ και τις κορυφές της $A'(-8\,,0)$, $A(8\,,0)$ στον άξονα $x'x$, η εξίσωση της είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Είναι $\gamma = 10$ και $\alpha = 8$, άρα

$\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$

$\beta^2 = 10^2 - 8^2$

$\beta^2 = 36$

$\beta = 6$.

Επομένως η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

β) i) Το M είναι σημείο της υπερβολής, αν και μόνο αν η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων του M από τις εστίες E' και E είναι 2α, δηλαδή $|(ME')-(ME)|=2\alpha$.

Επειδή $\alpha = 8$, θα είναι $|(ME')-(ME)|=16$.

ii) Δίνεται $(ME)=9$ οπότε έχουμε:

$|(ME')-9|=16$

$(ME')-9=-16$ ή $(ME')-9=16$

$(ME')=-7$ ή $(ME')=25$

και επειδή $(ME')>0$ θα είναι $(ME')=25$.

22561

ΘΕΜΑ 2

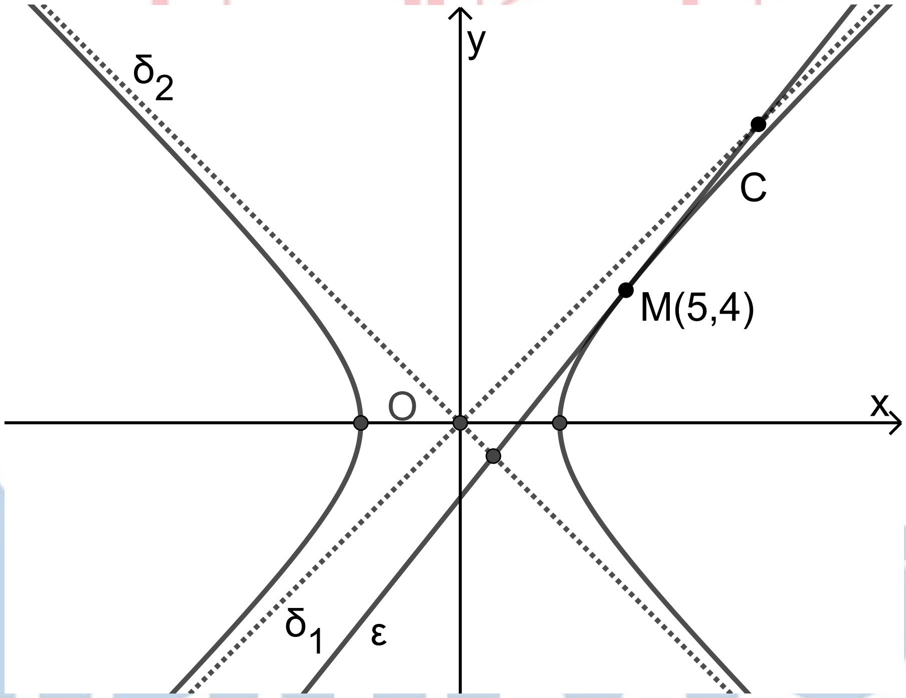
Στο παρακάτω σχήμα η υπερβολή C έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = 9$, οι ευθείες δ_1 και δ_2 είναι οι ασύμπτωτες της C και η ε είναι η εφαπτομένη της C στο σημείο της $M(5\,,4)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι εξισώσεις των ασυμπτώτων είναι $\delta_1: y = x$ και $\delta_2: y = -x$. (Μονάδες 8)

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι $\varepsilon: 5x - 4y = 9$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_1 καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_2. (Μονάδες 9)



22561-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι οι ευθείες $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$.

Επειδή $C: x^2-y^2=9$ είναι $\alpha^2=\beta^2=9$, άρα $\alpha=\beta=3$, οπότε οι ασύμπτωτες της C είναι οι ευθείες $\delta_1: y=\frac{3}{3}x$ ή $\delta_1: y=x$ και $\delta_2: y=-\frac{3}{3}x$ ή $\delta_2: y=-x$.

ii) Η εφαπτομένη ε της υπερβολής $C: x^2-y^2=9$ στο σημείο της $M(5\,,4)$, έχει εξίσωση $\varepsilon: xx_1-yy_1=9$ ή $\varepsilon: 5x-4y=9$.

β) Τα σημεία τομής της $\varepsilon: 5x-4y=9$ με τις $\delta_1: y=x$ και $\delta_2: y=-x$, προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεών τους. Επομένως θα έχουμε

$$\begin{cases}5x-4y=9\\ \quad y=x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}5x-4x=9\\ \quad y=x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=9\\ y=9\end{cases}$$

και

$$\begin{cases}5x-4y=9\\ \quad y=-x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}5x+4x=9\\ \quad y=-x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}9x=9\\ y=-x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}.$$

Επομένως το σημείο τομής των ε και δ_1 έχει συντεταγμένες $(9\,,9)$ και το σημείο τομής των ε και δ_2 έχει συντεταγμένες $(1\,,-1)$.

22566

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $4x^2 - y^2 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι A(1,0) και A΄(-1,0)

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = 2x$ και $y = -2x$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή A και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -2x$ έχει εξίσωση $y = -2x + 2$ (Μονάδες 8)

22566-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η υπερβολή γράφεται

$$4x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

άρα η υπερβολή είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με εστίες και κορυφές στον άξονα $x'x$, και έχει $\alpha^2 = 1$ άρα $\alpha = \pm 1$

επομένως οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι τα σημεία Α(α,0) και Α΄(-α,0) δηλαδή

$$A(1,0) \text{ και } A'(-1,0)$$

β) Σύμφωνα με τον μνημονικό κανόνα για τον υπολογισμό των ασύμπτωτων τις υπερβολής, παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος της εξίσωσής της και εξισώνουμε κάθε παράγοντα με το μηδέν. Έχουμε $4x^2 - y^2 = (2x - y)(2x + y)$, άρα οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι:

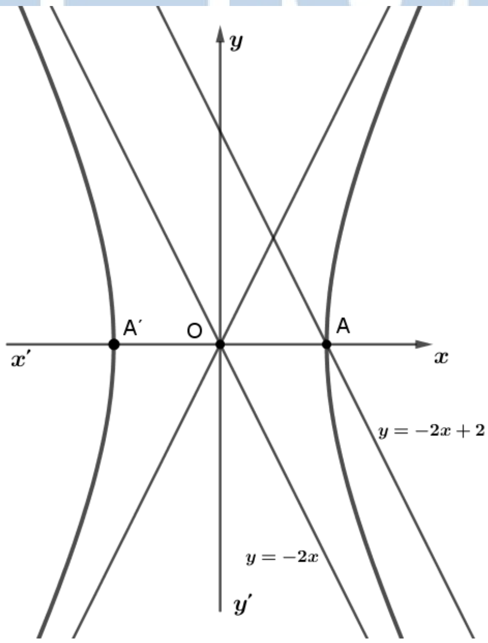
$$2x - y = 0 \quad \text{και} \quad 2x + y = 0$$

δηλαδή

$$y = 2x \quad \text{και} \quad y = -2x$$

γ) Η ευθεία που είναι παράλληλη της ασύμπτωτης $y = -2x$, και διέρχεται από το $A(1,0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = - 2, άρα έχει εξίσωση

$$y - 0 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 2$$



22567

ΘΕΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο Οxy η υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-4\,,0)$ και $A(4\,,0)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \frac{3}{4}x$ και $y = -\frac{3}{4}x$.

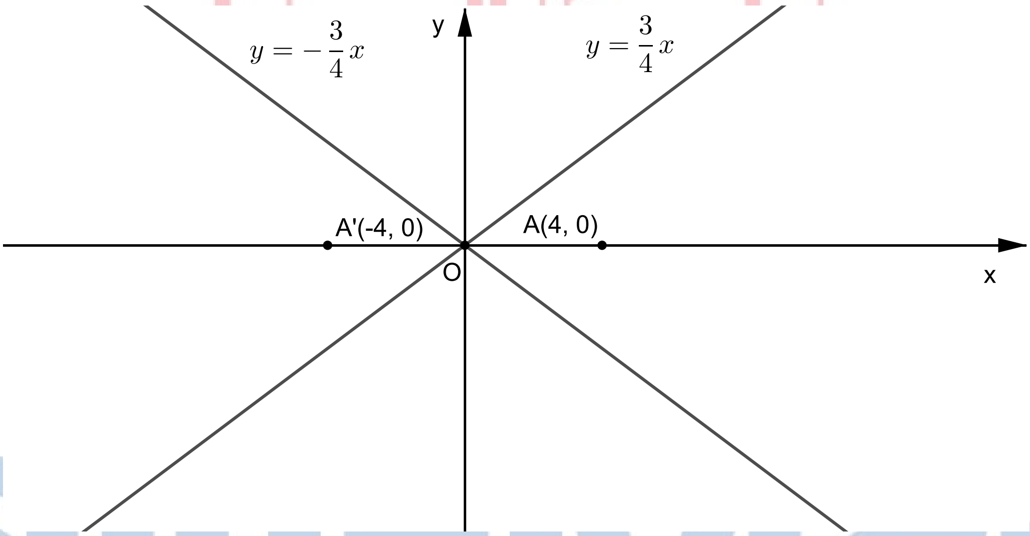
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha = 4$ και $\beta = 3$, (Μονάδες 10)

ii. οι εστίες της C είναι τα σημεία $E'(-5\,,0)$ και $E(5\,,0)$. (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή C .

(Μονάδες 5)



22567-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Η υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-\alpha\,,0)$ και $A(\alpha\,,0)$. Δίνεται $A'(-4\,,0)$ και $A(4\,,0)$, άρα θα έχουμε $\alpha = 4$.

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι ευθείες $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$.

Δίνεται ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες $y = \frac{3}{4}x$ και $y = -\frac{3}{4}x$,

άρα θα έχουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{4}$ και επειδή $\alpha = 4$, προκύπτει $\beta = 3$.

ii) Οι εστίες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι τα σημεία $E'(-\gamma\,,0)$ και $E(\gamma\,,0)$.

Είναι

$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$

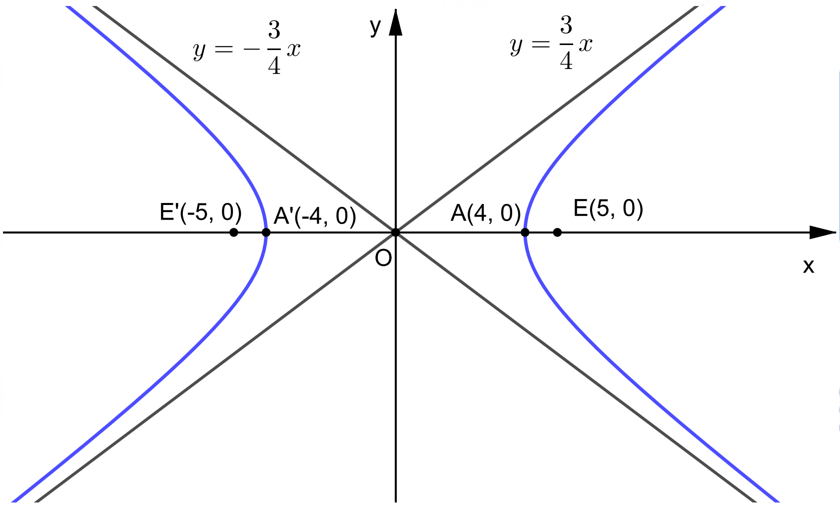
$\gamma^2 = 4^2 + 3^2$

$\gamma^2 = 25$

$\gamma = 5$.

Επομένως οι εστίες της υπερβολής είναι τα σημεία $E'(-5\,,0)$ και $E(5\,,0)$.

β)



32206

ΘΕΜΑ 4

Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(5,0), \mathrm{E}'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(5,\frac{9}{4})$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της C.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{E}'$.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ασύμπτωτές της.

(Μονάδες 6)

Δίνεται ότι $\sqrt{1681} = 41$.

32206-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η C έχει εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(5,0), \mathrm{E}'(-5,0)$ οπότε έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\gamma=5$. Από τον ορισμό της υπερβολής γνωρίζουμε ότι $|(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')|=2\alpha$. Είναι

$$(\mathrm{ME})-(\mathrm{ME}')=\sqrt{(5-5)^2+(\frac{9}{4}-0)^2}-\sqrt{(5+5)^2+(\frac{9}{4}-0)^2}=$$
$$\sqrt{\frac{81}{16}}-\sqrt{100+\frac{81}{16}}=\frac{9}{4}-\sqrt{\frac{1681}{16}}=\frac{9}{4}-\frac{41}{4}=-\frac{32}{4}=-8$$

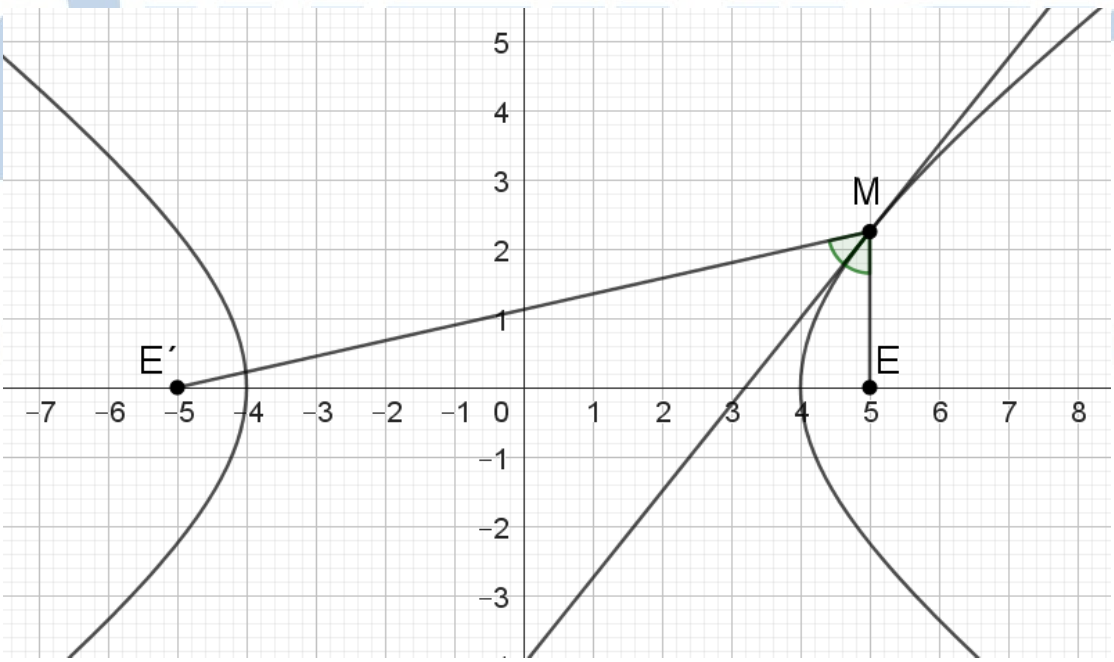
Συνεπώς $2\alpha=|-8| \Leftrightarrow \alpha=4$ οπότε έχει εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{5}{4}$.

β) Από τη σχέση $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$ έχουμε ότι $5^2=4^2+\beta^2 \Leftrightarrow \beta^2=9 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta=3$.

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση της C είναι η $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

γ) Η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{E}'$ είναι η εφαπτόμενη στο $\mathrm{M}(5,\frac{9}{4})$ που έχει εξίσωση

$\frac{5\cdot x}{16}-\frac{\frac{9}{4}\cdot y}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{5x}{16}-\frac{y}{4}=1$.



32206-Λύση

δ) Οι ασύμπτωτες της C έχουν εξισώσεις $\varepsilon_1 : y = \frac{3}{4}x \Leftrightarrow 3x - 4y = 0$ και $\varepsilon_2 : y = -\frac{3}{4}x \Leftrightarrow 3x + 4y = 0$. Τα διανύσματα $\vec{\delta}_1 : (4,3)$ και $\vec{\delta}_2 : (-4,3)$ είναι παράλληλα στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.

Είναι $\sigma\upsilon\nu(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| \cdot |\vec{\delta}_2|} = \frac{-4 \cdot 4 + 3 \cdot 3}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{-16+9}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{25}} = \frac{-7}{25}$ οπότε το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ασύμπτωτές της C είναι $\frac{7}{25}$.