12683

ΘΕΜΑ 4

Μια δεξαμενή έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.

α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο $16m^3$, να βρείτε τις διαστάσεις της.

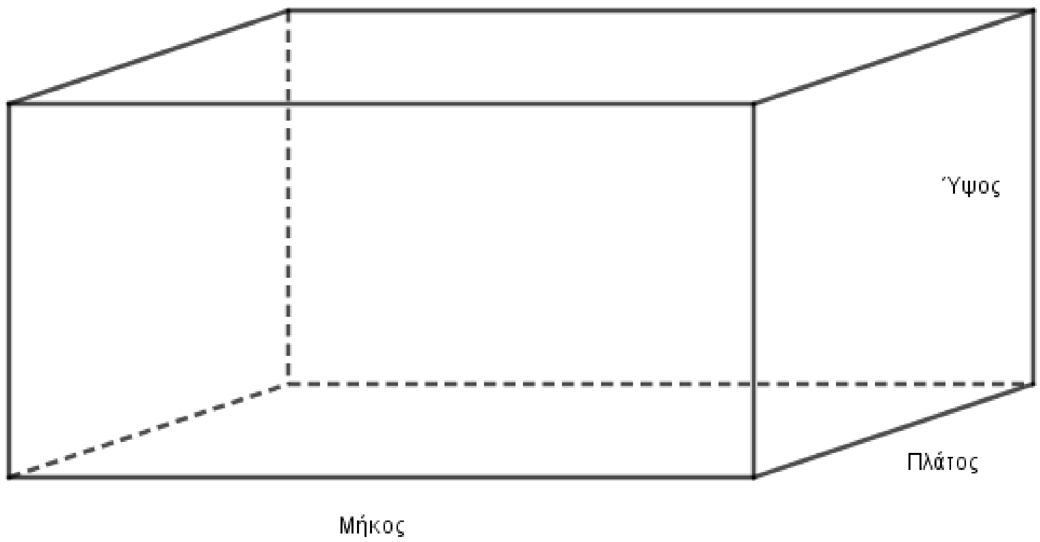
(Μονάδες 8)

β) Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα (όπως στο παρακάτω σχήμα). Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει $16m^3$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει $10m^3$ πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή.

(Μονάδες 8)



12683-Λύση

ΛΥΣΗ

α)Γνωρίζουμε ότι ο όγκος της δεξαμενής ισούται με το γινόμενο των τριών διαστάσεων της. Επειδή η δεξαμενή έχει βάση τετράγωνη θέτουμε x το μήκος και το πλάτος της οπότε το ύψος της θα είναι $\frac{x}{4}$. Άρα ο όγκος της δεξαμενής V θα είναι:

$$V = x \cdot x \cdot \frac{x}{4} = \frac{x^3}{4}$$

Αφού η δεξαμενή έχει όγκο $V = 16m^3$ θα έχουμε:

$$V = 16 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3}{4} = 16 \Leftrightarrow$$

$$x^3 = 64 \Leftrightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{4^3} \Leftrightarrow$$

$$x = 4m.$$

Οπότε η δεξαμενή έχει μήκος και πλάτος ίσα με 4m και ύψος ίσο με 1 m.

β) Έστω x, $(x > 0)$ το μήκος της δεξαμενής. Τότε το πλάτος της θα είναι x-2 και ο όγκος της δεξαμενής θα ισούται με $V = 2x(x-2)$.

Οπότε έχουμε :

$$V = 16 \Leftrightarrow$$

$$2x(x-2) = 16 \Leftrightarrow$$

$$x(x-2) = 8$$

$$x^2 - 2x = 8 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

Έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 > 0$.

Τότε:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2} \Leftrightarrow$$

12683-Λύση

$$x_{1,2} = \begin{cases} \frac{2-6}{2} \\ \frac{2+6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \begin{cases} -2 \;\; απορρίπτεται, γιατι\ πρέπει\ x > 0 \\ 4, \;\; δεκτή \end{cases}$$

Άρα το μήκος της δεξαμενής είναι 4 m και το πλάτος 2m.

γ) Αφού η νέα δεξαμενή περιέχει $10m^3$ πετρέλαιο και η βάση της έχει, μήκος 4m και πλάτος 2 m, αν x είναι το ύψος του υγρού μέσα στη δεξαμενή ο όγκος του υγρού θα είναι:

$$V_{πετρ.} = 10 \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot 2 \cdot x = 10 \Leftrightarrow$$

$$8 \cdot x = 10 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{10}{8} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{5}{4} m.$$

Άρα το ύψος του υγρού στη δεξαμενή είναι $\frac{5}{4} m$.

13028

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - 2\alpha x - 2a - 2 = 0$, με $\alpha \in R^*$ (1).

α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R^*$ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 3.

(Μονάδες 10)

β) Για α=2 να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 15)

13028-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για x=3 η εξίσωση (1) γίνεται:

$\alpha 3^2 - 2\alpha 3 - 2a - 2 = 0 \Leftrightarrow 9\alpha - 6\alpha - 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2.$

Άρα α=2

β) Στην (1) αντικαθιστούμε το α=2 και προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση

$2x^2 - 4x - 6 = 0$ απλοποιούμε με το 2 και έχουμε $x^2 - 2x - 3 = 0$, με α=1, β=-2 και γ=-3.

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 1 = 16 > 0$ οπότε έχει δύο άνισες ρίζες $x_1 = \frac{-(-2)+4}{2} = 3$ και $x_2 = \frac{-(-2)-4}{2} = -1$.

Άρα η εξίσωση έχει λύσεις x=-1 ή x=3.

14406

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \frac{\alpha}{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

(Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}}$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\frac{5}{2}$, να τους υπολογίσετε.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο α ή στο β, έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο.

(Μονάδες 5)

14406-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η δοθείσα ισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta\cdot(\alpha^2 + 1) = \alpha\cdot(\beta^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta + \beta = \alpha\cdot\beta^2 + \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta + \beta - \alpha\cdot\beta^2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\cdot\beta\cdot(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)\cdot(\alpha\cdot\beta - 1) = 0 \overset{\alpha\neq\beta}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \alpha\cdot\beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta = 1.$$

Άρα οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

β) Η παράσταση γράφεται:

$$K = \frac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}} = \frac{\alpha^{22}\cdot\beta^{24}}{\alpha^{-2}\cdot\alpha^{25}\cdot\beta^{25}} = \frac{\alpha^{22}\cdot\beta^{24}}{\alpha^{23}\cdot\beta^{25}} = \frac{\alpha^{22}}{\alpha^{23}}\cdot\frac{\beta^{24}}{\beta^{25}} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = 1.$$

γ) Γνωρίζουμε πως $\alpha + \beta = \frac{5}{2}$ και $\alpha \cdot \beta = 1$ με $\alpha, \beta > 0$. Σύμφωνα με τους τύπους Vieta:

$$s=\alpha+ \beta \text{ και } p= \alpha \cdot \beta ,\ x^2 - sx + p = 0$$

προκύπτει ότι οι αριθμοί α, β είναι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = (-5)^2 - 16 = 9$ και οι ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{5\pm3}{4} \Leftrightarrow x_1 = 2 \text{ ή } x_2 = \frac{1}{2}.$$

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι α=2 και $\beta = \frac{1}{2}$ ή αντίστροφα.

δ) Από το προηγούμενο ερώτημα θεωρούμε α=2 και $\beta = \frac{1}{2}$. Για να είναι το σχήμα τετράγωνο πρέπει τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να γίνουν ίσα. Έστω ω ο αριθμός που θα προσθέσουμε στον μικρότερο που είναι ο β για να γίνει ίσο με το α, τότε :

$$\alpha = \beta + \omega \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2} + \omega \Leftrightarrow \omega = \frac{3}{2}.$$

14406-Λύση

Άρα πρέπει να προστεθεί στο β ο αριθμός $\frac{3}{2}$.

14490

ΘΕΜΑ 4

Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω.

(Μονάδες 5)

β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \in R$.

Να βρείτε:

i. Το σύνολο Α που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του $\lambda \in \Omega$, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 10)

ii. Την πραγματική τιμή του λ, αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.

(Μονάδες 6)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β ii να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης.

(Μονάδες 4)

14490-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι ενδείξεις ενός ζαριού είναι οι ακέραιες τιμές από το 1 ως το 6.

Άρα $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

β) i. Η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$ ως δευτεροβάθμια δεν έχει πραγματικές ρίζες όταν

Δ<0.

Επομένως,

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 2) = 4 - 4 \cdot \lambda + 8 = 12 - 4 \cdot \lambda$.

Άρα $12 - 4 \cdot \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 3$.

Δηλαδή $\lambda \in (3, +\infty)$, επιπλέον $\lambda \in \Omega$, δηλαδή $\lambda \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Προκύπτει λ=4 ή 5 ή 6.

Άρα το ζητούμενο σύνολο $A = \{4,5,6\}$.

ii. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $x_1 \cdot x_2 = 1$.

Σύμφωνα με τους τύπους Vieta $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda - 2$.

Άρα $\lambda - 2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 3$.

γ) Για $\lambda = 3$ η εξίσωση γίνεται $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ διπλή ρίζα.

Άρα η ρίζα της εξίσωσης είναι η x=1 διπλή.

ΘΕΜΑ 4

14543

Κάθε περιττός ακέραιος αριθμός α γράφεται στη μορφή $a=2k+1,\ k$ ακέραιος.

α) Να γράψετε τους αριθμούς 3,5,7 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.

(Μονάδες 6)

β) i) Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων ισούται πάντα με έναν περιττό ακέραιο.

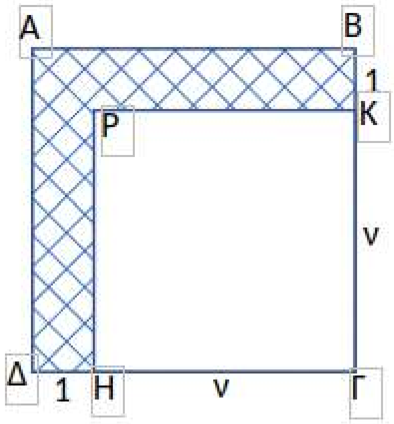
(Μονάδες 6)

ii) Να γράψετε τον αριθμό 2021 ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

(Μονάδες 6)

γ) Στο σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΓΗΡΚ είναι τετράγωνα με (ΓΗ)=(ΓΚ)=ν και (ΒΚ)=(ΔΗ)=1. Αν γνωρίζουμε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με 45, να βρεθεί η τιμή του θετικού ακεραίου ν.

(Μονάδες 7)



14543-Λύση

Λύση

α) Έχουμε διαδοχικά: $3=4-1=2^2-1^2$, $5=3^2-2^2$ και σκεπτόμενοι ότι

$7=M^2-N^2=(M-N)(M+N)$, ένα γινόμενο ακεραίων που δίνει 7 είναι οι 1, 7.

Αν M>N τότε M-N=1, M+N=7 και λύνοντας το σύστημα έχουμε με αντικατάσταση:

M=N+1 και N+1 +N = 7 , άρα 2N = 6, δηλαδή N = 3 και M= 4 .

Οπότε $7=(4)^2-(3)^2$.

β) i) Έστω οι διαδοχικοί ακέραιοι $k, k+1, k\in\mathbb{Z}$.

Η διαφορά των τετραγώνων τους είναι $(k+1)^2-k^2=k^2+2k+1-k^2=2k+1, k\in\mathbb{Z}$.

Ο οποίος είναι περιττός αριθμός.

ii) Έχουμε ότι $2021=2\cdot1010+1$.

Από την απόδειξη στο προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$2021=(1010+1)^2-(1010)^2=1011^2-1010^2$.

γ) Η γραμμοσκιασμένη περιοχή έχει εμβαδόν όσο η διαφορά των εμβαδών των τετραγώνων ΑΒΓΔ και ΓΗΡΚ.

Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά ν+1, ενώ το ΓΗΡΚ έχει πλευρά ν.

Ισχύει $(v+1)^2-v^2=45$, οπότε $2v+1=45 \Leftrightarrow 2v=44 \Leftrightarrow v=22$.

14578

ΘΕΜΑ 3

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση

$$\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$$

(Μονάδες 10)

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0 .$$

(Μονάδες 15)

14578-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η παράσταση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους ισχύει:

$$x^2 - x \neq 0 \text{ και } 1 - x \neq 0\text{, δηλαδή}$$

$$x(x-1) \neq 0 \text{ και } x \neq 1\text{, τελικά}$$

$$x \neq 0 \text{ και } x \neq 1.$$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x^2-1}{x(x-1)} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 1 - x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - x - 1 = 0.$$

Η εξίσωση $2x^2 - x - 1 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 > 0$ και ρίζες τις

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \text{ και}$$

$$x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = 1 \text{ ,που δεν είναι δεκτή, αφού } x \neq 1.$$

Άρα η εξίσωση έχει μία λύση την $x = -\frac{1}{2}$.

14651

ΘΕΜΑ 4

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4(\lambda + \frac{1}{\lambda})x + 16 = 0 \text{ όπου } \lambda > 0 .$$

α) Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

(Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda > 0$.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)

14651-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από τους τύπους για το άθροισμα και γινόμενο των ριζών εξίσωσης 2[ου] βαθμού έχουμε :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4(\lambda + \frac{1}{\lambda})}{1} = 4(\lambda + \frac{1}{\lambda})$$ και

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{16}{1} = 16$$

Αφού $P = x_1 \cdot x_2 = 16 > 0$ και $S = x_1 + x_2 = 4(\lambda + \frac{1}{\lambda}) > 0$ για κάθε $\lambda > 0$, οι ρίζες x_1, x_2 είναι θετικές και άρα μπορούν να αποτελούν πλευρές ορθογωνίου.

i. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 4(\lambda + \frac{1}{\lambda}) = 8(\lambda + \frac{1}{\lambda})$$

ii. Το εμβαδόν είναι: $\mathrm{E} = x_1 \cdot x_2 = 16$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\Pi \geq 16 \Leftrightarrow$$
$$8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \geq 16 \Leftrightarrow$$
$$\lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2 \Leftrightarrow$$
$$\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{\lambda} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda} \geq 0$$, που ισχύει για κάθε $\lambda > 0$.

γ) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\Pi = 16 \Leftrightarrow$$
$$\frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow$$
$$(\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda = 1$$

Για $\lambda = 1$ η περίμετρος είναι 16 (δηλαδή $2(x_1 + x_2) = 16$ και τελικά $x_1 + x_2 = 8$) και το εμβαδόν είναι 16 (δηλαδή $x_1 \cdot x_2 = 16$), οπότε $x_1 = x_2 = 4$. Επομένως το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

14749

ΘΕΜΑ 3

α)

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ορίζεται η παράσταση: $\mathrm{A} = \dfrac{x}{x-|x|}$.

(Μονάδες 9)

ii. Για τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A, να δείξετε ότι $\mathrm{A} = \dfrac{1}{2}$.

(Μονάδες 7)

β) Για $x<0$, να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{x^3}{x-|x|} = \dfrac{3}{2}x + 2$.

(Μονάδες 9)

14749-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Η παράσταση ορίζεται όταν $x-|x|\neq 0$, δηλαδή όταν $|x|\neq x$ και τελικά όταν $x<0$.

ii. $\mathrm{A}=\dfrac{x}{x-|x|}=\dfrac{x}{x-(-x)}=\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

β) Για $x<0$, έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{x^3}{x-|x|}=\frac{3}{2}x+2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{x-|x|}\cdot x^2=\frac{3}{2}x+2 \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{A}\cdot x^2=\frac{3}{2}x+2 \overset{\alpha)ii}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{1}{2}x^2=\frac{3}{2}x+2 \Leftrightarrow$$

$$x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow$$

$$x=-1,\ x=4.$$

Δεκτή είναι η λύση $x=-1$.

14759

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 6\alpha x + 6\beta,\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = \beta^2 - 36$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -6$

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6x$.

(Μονάδες 6)

ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γi), να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}.$$

(Μονάδες 5)

14759-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq \alpha^2-36 \Leftrightarrow$$
$$3\alpha^2+6\alpha^2+6\beta+3\beta^2+6\alpha\beta+6\beta\geq \beta^2-36 \Leftrightarrow$$
$$9\alpha^2+2\beta^2+6\alpha\beta+12\beta+36\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(9\alpha^2+\beta^2+6\alpha\beta)+(\beta^2+12\beta+36)\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(3\alpha+\beta)^2+(\beta+6)^2\geq 0,$$

που ισχύει σαν άθροισμα τετραγώνων.

β) Βάσει του ερωτήματος α), έχουμε:

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq \beta^2-36 \Leftrightarrow (3\alpha+\beta)^2+(\beta+6)^2\geq 0 \text{ για κάθε } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν : $3\alpha+\beta=0$ και $\beta+6=0$.

Άρα $\beta=-6$ και $\alpha=2$.

γ) Για $\alpha=2$ και $\beta=-6$

i. Λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x)=6x \Leftrightarrow 3x^2+12x-36=6x \Leftrightarrow 3x^2+12x-36-6x=0 \Leftrightarrow$$
$$3x^2+6x-36=0 \Leftrightarrow x^2+2x-12=0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2+2x-12$ είναι: $\Delta=4+48=52=4\cdot 13$

και οι ρίζες:

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{13}}{2}\Leftrightarrow$$
$$x_1=-1+\sqrt{13} \text{ και } x_2=-1-\sqrt{13}.$$

ii. Ισχύει ότι:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{-2}{-12}=\frac{1}{6},$$

αφού $x_1+x_2=-2$ και $x_1\cdot x_2=-12$.

Εναλλακτικά:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{-1+\sqrt{13}}+\frac{1}{-1-\sqrt{13}}=$$
$$\frac{-1-\sqrt{13}-1+\sqrt{13}}{(-1-\sqrt{13})\cdot(-1+\sqrt{13})}=$$
$$\frac{-2}{1-13}=\frac{-2}{-12}=\frac{1}{6}$$

14782

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Τα σημεία $\mathrm{A}(x,y)$ και $\mathrm{B}(-x,y)$ είναι για κάθε τιμή των x,y συμμετρικά ως προς τον άξονα xx'.

ii. Η εξίσωση $x^{\nu}=\alpha$ με $\alpha<0$ και ν περιττό, έχει ακριβώς μία λύση την $-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.

iii. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει $|\alpha|+|\beta|=|\alpha+\beta|$.

iv. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0$.

v. Για κάθε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με λόγο $\lambda=1$, το άθροισμα των ν πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο $S_\nu=\nu\cdot\alpha_1$.

(Μονάδες 10)

β) Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ να δείξετε ότι $\mathrm{P}=x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

(Μονάδες 15)

14782-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Λάθος, είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.

ii. Σωστό.

ii. Λάθος, ισχύει $|\alpha|+|\beta|=|\alpha+\beta|$ αν και μόνο αν $\alpha\cdot\beta\geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α,β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

iv. Σωστό.

v. Σωστό.

β) Θεωρία της παραγράφου 3.3.

33584

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$.

(Μονάδες 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:

i. Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ.

(Μονάδες 8)

33584-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \left(-2\right)^2 - 4\cdot 1\cdot \lambda = 4 - 4\lambda > 0$, αφού $\lambda < 1 \overset{\cdot(-4)}{\Leftrightarrow} -4\lambda > -4 \overset{(+4)}{\Leftrightarrow} 4 - 4\lambda > 0$. Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β) Έχουμε: $x_1 + x_2 = S = \dfrac{-\beta}{\alpha} = \dfrac{-(-2)}{1} = 2$.

γ)

i. Έχουμε $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, οπότε

$x_1 - 2 = x_2 + 2$ ή $x_1 - 2 = -x_2 - 2$, δηλαδή

$x_1 - x_2 = 4$ ή $x_1 + x_2 = 0$, που απορρίπτεται λόγω β) ερωτήματος.

Άρα $x_1 - x_2 = 4$.

ii. Από τα ερωτήματα β) και γ) έχουμε $x_1 + x_2 = 2$ και $x_1 - x_2 = 4$. Άρα:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x_1 = 6 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}.$$

Το γινόμενο των ριζών είναι $P = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \lambda$, οπότε $\lambda = x_1 x_2 = -3$.

33585

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2-\left(\alpha^2-1\right)x-\alpha=0$, με παράμετρο $\alpha\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta=\left(\alpha^2+1\right)^2$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις ρίζες ρ_1 και ρ_2 της εξίσωσης, ως συνάρτηση του α.

(Μονάδες 10)

Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $\rho_1=\alpha$ και $\rho_2=-\dfrac{1}{\alpha}$,

γ) Να βρείτε τις τιμές του α ώστε $\left|\rho_1-\rho_2\right|=2$.

(Μονάδες 10)

33585-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2-(\alpha^2-1)x-\alpha$, με $\alpha\neq 0$ είναι:

$$\Delta=\left[-(\alpha^2-1)\right]^2-4\cdot\alpha\cdot(-\alpha)=(\alpha^2-1)^2+4\alpha^2=\alpha^4-2\alpha^2+1+4\alpha^2=\alpha^4+2\alpha^2+1=(\alpha^2+1)^2.$$

β) Από το α) ερώτημα προκύπτει ότι $\Delta>0$ για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου α, οπότε η εξίσωση $\alpha x^2-(\alpha^2-1)x-\alpha=0$ έχει δυο ρίζες διαφορετικές, τις:

$$\rho_1=\frac{-\left[-(\alpha^2-1)\right]+\sqrt{(\alpha^2+1)^2}}{2\alpha}=\frac{(\alpha^2-1)+(\alpha^2+1)}{2\alpha}=\alpha$$

$$\rho_2=\frac{-\left[-(\alpha^2-1)\right]-\sqrt{(\alpha^2+1)^2}}{2\alpha}=\frac{(\alpha^2-1)-(\alpha^2+1)}{2\alpha}=-\frac{1}{\alpha}.$$

γ) Έχουμε:

$$|\rho_1-\rho_2|=2\Leftrightarrow\left|\alpha-\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right|=2\Leftrightarrow\left|\alpha+\frac{1}{\alpha}\right|=2\Leftrightarrow\left|\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right|=2\Leftrightarrow\alpha^2+1=2|\alpha|\Leftrightarrow$$

$$|\alpha|^2-2|\alpha|+1=0\Leftrightarrow(|\alpha|-1)^2=0\Leftrightarrow|\alpha|-1=0\Leftrightarrow|\alpha|=1\Leftrightarrow\alpha=\pm1.$$

33826

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η εξίσωση:

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0.$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \quad (1) \quad \text{με παραμέτρους } \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι αν $\gamma < 0$, τότε:

i. $\beta^2 - 4\gamma > 0.$

(Μονάδες 3)

ii. Η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 12)

33826-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Θέτοντας στην εξίσωση $x^4-8x-9=0$ όπου $x^2=u\geq 0$, γίνεται:

$$u^2-8u-9=0.$$

Το τριώνυμο έχει $\alpha=1, \beta=-8, \gamma=-9$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-8)^2-4\cdot 1\cdot(-9)=64+39=100>0.$$

Οι ρίζες του είναι οι:

$$u_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-8)\pm\sqrt{100}}{2}=\begin{cases}\dfrac{8+10}{2}=\dfrac{18}{2}=9>0 \text{ δεκτή}\\ \dfrac{8-10}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1<0 \text{ απορρίπτεται}\end{cases}.$$

Όμως έχουμε $x^2=u\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{9}\Leftrightarrow x=\pm 3$.

β) Όπως και στο ερώτημα α), η εξίσωση $x^4-\beta x^2+\gamma=0$, αν θέσουμε όπου $x^2=u$ με $u\geq 0$, ισοδύναμα γίνεται:

$$u^2+\beta u+\gamma=0.$$

i. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\gamma$, με:

$$\beta^2\geq 0 \text{ και}$$
$$\gamma<0 \text{ οπότε } -\gamma>0.$$

Συνεπώς, $\Delta>0$ ως άθροισμα ενός μη αρνητικού και ενός θετικού αριθμού.

ii. Επειδή $\Delta>0$ το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες u_1, u_2. Από τους τύπους Vieta το γινόμενο των ριζών είναι $P=\frac{\gamma}{\alpha}=\gamma<0$. Άρα, οι ρίζες είναι μη μηδενικές και ετερόσημες. Έστω $\begin{cases}u_1<0, \text{απορρίπτεται}\\ u_2>0 \quad \text{δεκτή}\end{cases}$.

Τότε έχουμε:

$$x^2=u_2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{u_2}.$$

33889

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2-14x+8=0 \qquad (1)$$

και

$$8x^2-14x+3=0 \qquad (2)$$

(Μονάδες10)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad (3) \qquad \text{και} \qquad \gamma x^2+\beta x+\alpha=0 \quad (4),$$

με $\alpha\cdot\gamma\neq 0$.

Να αποδείξετε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha\cdot\gamma\neq 0$, τότε

i. $\rho\neq 0$.

(Μονάδες 5)

ii. $\dfrac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (4).

(Μονάδες 10)

33889-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $3x^2-14x+8$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-14)^2-4\cdot3\cdot8=196-96=100>0$, οπότε η εξίσωση $3x^2-14x+8=0$ έχει δυο ρίζες άνισες, τις

$x_1=\dfrac{-(-14)+\sqrt{100}}{2\cdot3}=\dfrac{14+10}{6}=4$ και

$x_2=\dfrac{-(-14)-\sqrt{100}}{2\cdot3}=\dfrac{14-10}{6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

Το τριώνυμο $8x^2-14x+3$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-14)^2-4\cdot8\cdot3=196-96=100>0$, οπότε η εξίσωση $8x^2-14x+3=0$ έχει δυο ρίζες άνισες, τις

$x_1=\dfrac{-(-14)+\sqrt{100}}{2\cdot8}=\dfrac{14+10}{16}=\dfrac{24}{16}=\dfrac{3}{2}$ και

$x_2=\dfrac{-(-14)-\sqrt{100}}{2\cdot8}=\dfrac{14-10}{16}=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$.

β) Ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει: $\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma=0$. (5)

i. Εάν $\rho=0$, τότε από την σχέση (5) προκύπτει $\gamma=0$, άτοπο, αφού $\alpha\cdot\gamma\neq0$. Άρα $\rho\neq0$.

ii. Ο $\dfrac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (4) αν και μόνο αν $\gamma\left(\dfrac{1}{\rho}\right)^2+\beta\cdot\dfrac{1}{\rho}+\alpha=0\overset{(\cdot\rho^2)}{\Leftrightarrow}\gamma+\beta\rho+\alpha\rho^2=0$, που ισχύει λόγω της σχέσης (5).

34149

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6=0$ (1).

(Μονάδες 09)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1|<2$ (2).

(Μονάδες 09)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

(Μονάδες 07)

34149-Λύση

α) Το τριώνυμο $2x^2 - x - 6$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = -6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-6) = 1 + 48 = 49 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2\cdot 2} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} \dfrac{1+7}{4} = 2 \\ \dfrac{1-7}{4} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned} |x-1| < 2 &\Leftrightarrow -2 < x - 1 < 2 \\ &\Leftrightarrow -2 + 1 < x - 1 + 1 < 2 + 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < x < 3 \end{aligned}$$

γ) Η τιμή του x που ικανοποιεί ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2) είναι η x = 2.

34150

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α ,β, τέτοιοι ώστε:

$$\alpha + \beta = 12 \ \text{ και } \ \alpha^2 + \beta^2 = 272.$$

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι:

$$\alpha \cdot \beta = -64.$$

(Μονάδες 08)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β .

(Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α ,β.

(Μονάδες 07)

34150-Λύση

α) Αντικαθιστώντας στην ταυτότητα $(α + β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2$ τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε:

$$12^2 = 272 + 2αβ \Leftrightarrow 144 = 272 + 2αβ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2αβ = -128 \Leftrightarrow αβ = -64$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = α + β = 12 \text{ και } P = αβ = -64$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 12x - 64 = 0$$

γ) Για $α = 1$, $β = -12$ και $γ = -64$, βρίσκουμε:

$$Δ = β^2 - 4αγ = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64) = 144 + 256 = 400 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{400}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 20}{2} = \begin{cases} \frac{12+20}{2} = 16 \\ \frac{12-20}{2} = -4 \end{cases}$$

Άρα είναι:

$$(α = 16 \text{ και } β = -4) \text{ ή } (α = -4 \text{ και } β = 16)$$

34154

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί:

$$\mathrm{A}=\frac{1}{3-\sqrt{7}},\ \mathrm{B}=\frac{1}{3+\sqrt{7}}.$$

α) Να δείξετε ότι:

$$A+B=3 \text{ και } A\cdot B=\frac{1}{2}.$$

(Μονάδες 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B.

(Μονάδες 13)

34154-Λύση

α) Είναι:

$$
\begin{aligned}
A+B &= \frac{1}{3-\sqrt{7}}+\frac{1}{3+\sqrt{7}}= \\
&= \frac{3+\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})}+\frac{3-\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} \\
&= \frac{3-\sqrt{7}+3+\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} \\
&= \frac{6}{3^2-(\sqrt{7})^2} \\
&= \frac{6}{9-7}=\frac{6}{2}=3.
\end{aligned}
$$

Ισχύει ότι:

$$A\cdot B=\frac{1}{3-\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{3+\sqrt{7}}=\frac{1}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})}=\frac{1}{3^2-(\sqrt{7})^2}=\frac{1}{9-7}=\frac{1}{2}.$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2-Sx+P=0$$

με

$$S=A+B=3 \text{ και } P=A\cdot B=\frac{1}{2}.$$

Τελικά μια ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2-3x+\frac{1}{2}=0.$$

34161

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$.

(Μονάδες 12)

β) Αν α, β με $\alpha<\beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+3=0$.

(Μονάδες 13)

34161-Λύση

α) Είναι:

$$
\begin{aligned}
|2x-1|=3 &\Leftrightarrow 2x-1=3 \ \acute{\eta}\ 2x-1=-3 \\
&\Leftrightarrow 2x=4 \ \acute{\eta}\ 2x=-2 \\
&\Leftrightarrow x=2 \ \acute{\eta}\ x=-1
\end{aligned}
$$

β) Είναι α = – 1 και β = 2. Τότε η εξίσωση γράφεται:

$$-x^2+2x+3=0 \, .$$

Για α = – 1, β = 2 και γ = 3, βρίσκουμε:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot(-1)\cdot 3=4+12=16>0 \, .$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot(-1)}=\frac{-2\pm4}{-2}=\begin{cases}\dfrac{2}{-2}=-1\\[2mm] \dfrac{-6}{-2}=3\end{cases}$$

34310

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης ως συνάρτηση του λ.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

(Μονάδες 10)

34310-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $\lambda x^2+(2\lambda-1)x+\lambda-1$ έχει $\alpha=\lambda$, $\beta=2\lambda-1$, $\gamma=\lambda-1$ και διακρίνουσα:

$$\begin{aligned}\Delta&=(2\lambda-1)^2-4\lambda(\lambda-1)=\\&=4\lambda^2-4\lambda+1-4\lambda^2+4\lambda=\\&=1\end{aligned}$$

Άρα, η διακρίνουσα Δ είναι σταθερή, ανεξάρτητη του λ.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-(2\lambda-1)\pm\sqrt{1}}{2\lambda}=\frac{1-2\lambda\pm1}{2\lambda}=\begin{cases}\dfrac{2-2\lambda}{2\lambda}=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}\\ \dfrac{-2\lambda}{2\lambda}=-1\end{cases}.$$

γ) Η απόσταση των ριζών x_1,x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι $|x_2-x_1|=\left|-1-\frac{1-\lambda}{\lambda}\right|$. Οπότε πρέπει:

$\left|-1-\frac{1-\lambda}{\lambda}\right|=2$ ή ισοδύναμα

$\left|\frac{-\lambda-1+\lambda}{\lambda}\right|=2$ δηλαδή

$\left|\frac{1}{\lambda}\right|=2$ που σημαίνει ότι

$\frac{1}{\lambda}=2$ ή $\frac{1}{\lambda}=-2$ και τελικά

$\lambda=\frac{1}{2}$ ή $\lambda=-\frac{1}{2}$.

34327

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1)

(Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

i. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 7)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β.

(Μονάδες 8)

34327-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο x^2-3x-4 έχει $\alpha=1,\ \beta=-3,\ \gamma=-4$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)=9+16=25>0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 5}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+5}{2}=4\\ \dfrac{3-5}{2}=-1\end{cases}.$$

β)

i. Ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-3\frac{\alpha}{\beta}-4=0\Leftrightarrow\frac{\alpha^2}{\beta^2}-3\frac{\alpha}{\beta}-4=0\overset{\beta\neq 0}{\Longleftrightarrow}$$
$$\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0,$$

το οποίο ισχύει από την υπόθεση.

ii. Στο ερώτημα α) βρήκαμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι οι $x_1=4$ και $x_2=-1$. Επίσης, στο ερώτημα (βi) δείξαμε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1). Οπότε, πρέπει:

$$\frac{\alpha}{\beta}=4\ \text{ή}\ \frac{\alpha}{\beta}=-1.$$

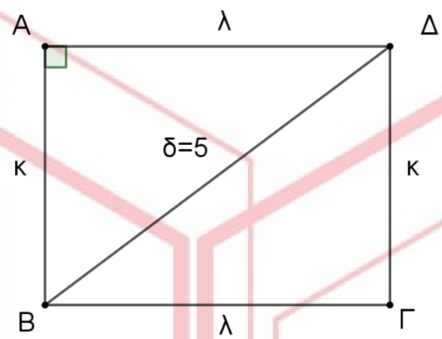
Επειδή οι α,β είναι ομόσημοι, η περίπτωση $\frac{\alpha}{\beta}=-1$ απορρίπτεται. Άρα, ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta}=4\Leftrightarrow\alpha=4\beta,$$

δηλαδή, ο α είναι τετραπλάσιος του β.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις κ και λ του οποίου η περίμετρος είναι $\Pi = 14\ cm$ και μια διαγώνιος $\delta = 5\ cm$.



α)

i. Με χρήση της ταυτότητας $(\kappa+\lambda)^2 = \kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2$, να δείξετε ότι για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E = 12\ cm^2$.

(Μονάδες 7)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί οι τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 7x + 12 = 0$.

(Μονάδες 7)

iii. Να βρείτε τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου.

(Μονάδες 4)

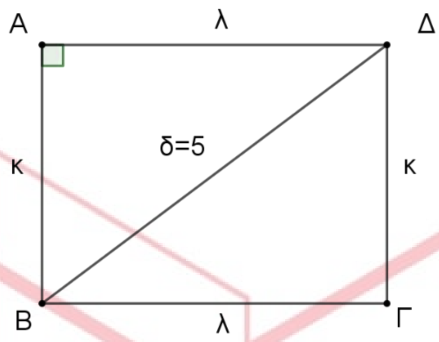
β) Να δείξετε ότι ένα ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 14\ cm$ πρέπει να έχει εμβαδόν $\mathrm{E} \leq \frac{49}{4}$.

(Μονάδες 7)

34390-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



i. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2\kappa + 2\lambda$, οπότε:

$$2\kappa + 2\lambda = 14 \Leftrightarrow \kappa + \lambda = 7.$$

Επίσης, εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Delta$ βρίσκουμε ότι

$$\kappa^2 + \lambda^2 = \delta^2 \Leftrightarrow \kappa^2 + \lambda^2 = 25.$$

Από την ταυτότητα $(\kappa + \lambda)^2 = \kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2$, έχουμε ότι:

$$7^2 = 25 + 2\kappa\lambda \Leftrightarrow$$
$$2\kappa\lambda = 49 - 25 \Leftrightarrow$$
$$\kappa\lambda = 12.$$

Άρα, το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = \kappa\lambda = 12\ cm$.

ii. Δύο αριθμοί είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 7x + 12 = 0$ αν και μόνο αν έχουν άθροισμα $S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{(-7)}{1} = 7$ και γινόμενο $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{12}{1} = 12$. Από το ερώτημα αi) προκύπτει ότι οι διαστάσεις κ και λ ικανοποιούν τις συνθήκες αυτές, οπότε είναι ρίζες της εξίσωσης.

iii. Το τριώνυμο $x^2 - 7x + 12$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$$

και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{7+1}{2} = 4 \\ \frac{7-1}{2} = 3 \end{cases}.$$

Άρα, οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι 3 cm και 4cm.

β) Όπως και στο ερώτημα α), οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου με περίμετρο $\Pi = 14$ και εμβαδόν E έχουν άθροισμα $S = 7$ και γινόμενο $P = E$. Άρα, είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 7x + E = 0.$$

34390-Λύση

Η εξίσωση έχει λύσεις, δηλαδή υπάρχει τέτοιο ορθογώνιο, αν και μόνο αν για τη διακρίνουσα ισχύει

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot E \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49 - 4E \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E \leq \frac{49}{4}.$$

34436

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\frac{1}{5+\sqrt{5}}, B=\frac{1}{5-\sqrt{5}}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $A+B=\frac{1}{2}$

(Μονάδες 8)

i) $A\cdot B=\frac{1}{20}$

(Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β.

(Μονάδες 9)

34436-Λύση

Λύση

α) i) Είναι:

$$A+B=\frac{1}{5+\sqrt{5}}+\frac{1}{5-\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{5-\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}+\frac{5+\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}=$$

$$=\frac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}=$$

$$=\frac{10}{5^2-\sqrt{5}^2}=\frac{10}{25-5}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

ii) Ισχύει ότι:

$$A\cdot B=\frac{1}{5+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{5-\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{1}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}=\frac{1}{5^2-(\sqrt{5})^2}=$$

$$=\frac{1}{25-5}=\frac{1}{20}$$

β) Μία ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: $x^2-Sx+P=0$, με

$S=A+B=\frac{1}{2}$ και $P=A\cdot B=\frac{1}{20}$.

Τελικά, μία ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}=0\Leftrightarrow 20x^2-10x+1=0.$$

34544

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$: (1) με άγνωστο το x και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι η $\Delta = (2\lambda - 4)^2$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ ο αριθμός $x = 2$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 9)

34544-Λύση

α) Είναι: $\alpha = 1$, $\beta = -2\lambda$ και $\gamma = 4(\lambda - 1)$.

Τότε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2\lambda)^2 - 4\cdot 1\cdot 4(\lambda-1) = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = (2\lambda-4)^2.$$

β) Επειδή $\Delta = (2\lambda - 4)^2 \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση δεν είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Συγκεκριμένα ισχύουν τα παρακάτω:

- Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda-4)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 4 \Leftrightarrow \frac{2\lambda}{2} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2$ τότε η εξίσωση (1) έχει μια διπλή λύση.
- Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow (2\lambda-4)^2 > 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$ τότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

γ) Ο αριθμός $x = 2$ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) άρα την επαληθεύει.

Έτσι έχουμε:

$$2^2 - 2\lambda\cdot 2 + 4(\lambda-1) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda + 4\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow 0\lambda = 0, \text{ ταυτότητα.}$$

Τελικά, για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ ο αριθμός $x = 2$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

34920

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + x - 1$ (1).

α) Αν x_1, x_2 είναι ρίζες του τριωνύμου (1), να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $x_1 + x_2$, x_1x_2 και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\frac{1}{x_1} = -1$ και $\frac{1}{x_2} = 2$, να βρείτε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τις $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

(Μονάδες 12)

34920-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $2x^2 + x - 1$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = 1$ και $\gamma = -1$. Οπότε:

το άθροισμα των ριζών του είναι $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{1}{2}$

και το γινόμενό τους $x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{1}{2}$.

Επίσης, έχουμε ότι:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_1}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1.$$

β) Μια εξίσωση που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1} = -1$ και $\frac{1}{x_2} = 2$, είναι η $x^2 - Sx + P = 0$,

με $S = -1 + 2 = 1$ και $P = (-1) \cdot 2 = -2$.

Άρα, μια εξίσωση είναι η $x^2 - x - 2 = 0$.

35038

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha \cdot \beta = 4 \text{ και } \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$.

(Μονάδες 10)

Β) Να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

35038-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta) = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(\alpha+\beta) = 20 \Leftrightarrow \alpha+\beta = 5$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \alpha+\beta = 5 \text{ και } P = \alpha\cdot\beta = 4$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 4$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 4$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 \\ \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2+10x=12$.

(Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0$.

(Μονάδες 10)

35100-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$-2x^2+10x-12=0 \overset{:(-2)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$

Για $\alpha=1$, $\beta=-5$ και $\gamma=6$, βρίσκουμε:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1>0.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases}\frac{5+1}{2}=3\\ \frac{5-1}{2}=2\end{cases}$$

β) Πρέπει:

$$x-2\neq0 \Leftrightarrow x\neq2.$$

Τότε ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\frac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2x^2+10x-12=0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow (x=3 \text{ ή } x=2)$$

Η ρίζα $x=2$ απορρίπτεται λόγω του περιορισμού.

Τελικά η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=3$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{K}=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-3x-2$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K.

(Μονάδες 8)

35382-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $2x^2-3x-2$ έχει $\alpha=2$, $\beta=-3$, $\gamma=-2$ και διακρίνουσα:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)=9+16=25>0$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm 5}{4}=\begin{cases}\dfrac{3+5}{4}=2\\ \dfrac{3-5}{4}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Τότε:

$$2x^2-3x-2=2\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)(x-2)=(2x+1)(x-2)$$

β) Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση K πρέπει ο παρονομαστής της να είναι διαφορετικός του μηδενός. Δηλαδή:

$$\begin{aligned}&2x^2-3x-2\neq 0\overset{\alpha)}{\Leftrightarrow}\\ &\Leftrightarrow (2x+1)(x-2)\neq 0\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow (2x+1\neq 0\ \kappa\alpha\iota\ x-2\neq 0)\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \left(x\neq -\frac{1}{2}\ \kappa\alpha\iota\ x\neq 2\right)\end{aligned}$$

γ) Για $x\neq -\frac{1}{2}$ και $x\neq 2$ ισχύει ότι:

$$K=\frac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}=\frac{(x-2)^2}{(2x+1)(x-2)}=\frac{x-2}{2x+1}$$

36651

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης όταν $\lambda = -2$ και όταν $\lambda = 3$.

(Μονάδες 8)

β) i. Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

(Μονάδες 3)

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

(Μονάδες 6)

γ) Αν ισχύει $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5,\ \lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 8)

36651-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4\lambda+5=0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=4\lambda^2-16\lambda-20=4(\lambda^2-4\lambda-5)$$

Όταν $\lambda=-2$, τότε

$$\Delta=4(4+8-5)=28>0$$

οπότε η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Όταν $\lambda=3$, τότε

$$\Delta=4(9-12-5)=-32<0$$

οπότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

β) i. Όταν $\lambda=5$ η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=4(25-20-5)=0$, οπότε έχει μια διπλή ρίζα.

ii. Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα μόνο όταν ισχύει $\Delta=0$. Είναι:

$$\Delta=0\Leftrightarrow\lambda^2-4\lambda-5=0\Leftrightarrow\lambda=5 \text{ ή } \lambda=-1$$

Επομένως, εκτός από την περίπτωση $\lambda=5$ που συναντήσαμε στο ερώτημα βi), η εξίσωση έχει διπλή ρίζα και όταν $\lambda=-1$.

δ) Ισχύει

$$|\lambda^2-4\lambda-5|=4\lambda-\lambda^2+5=-(\lambda^2-4\lambda-5),\ \lambda\in\mathbb{R}-\{-1,5\}$$

οπότε ο αριθμός $\lambda^2-4\lambda+5$ είναι αρνητικός. Επομένως η διακρίνουσα $\Delta=4(\lambda^2-4\lambda-5)$ είναι αρνητική και η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

36661

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2-\lambda)x^2-(\lambda^2-1)x+\lambda-1=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού.

(Μονάδες 6)

36661-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι 2ου βαθμού, αν και μόνο αν:

$$\lambda^2-\lambda\neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0 \text{ και } \lambda\neq 1$$

β) Με $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$ έχουμε:

$$(\lambda^2-\lambda)x^2-(\lambda^2-1)x+\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)x^2-(\lambda-1)(\lambda+1)x+\lambda-1=0$$

$$\overset{\lambda\neq 1}{\Leftrightarrow} \lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$$

που είναι το ζητούμενο.

γ) Με $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$ η εξίσωση $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=[-(\lambda+1)]^2-4\cdot\lambda\cdot 1=\lambda^2+2\lambda+1-4\lambda=(\lambda-1)^2>0$$

Επομένως η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ) Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{\lambda+1\pm\sqrt{(\lambda-1)^2}}{2\lambda}=\frac{\lambda+1\pm(\lambda-1)}{2\lambda}=\begin{cases}\dfrac{\lambda+1+\lambda-1}{2\lambda}=1\\[2ex]\dfrac{\lambda+1-\lambda+1}{2\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}\end{cases}$$

36663

ΘΕΜΑ 4

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)$ cm

α) Να βρείτε ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.

(Μονάδες 6)

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i. Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.

(Μονάδες 12)

ii. Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

(Μονάδες 7)

36663-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α είναι $E_A = d^2 cm^2$.

Το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Β είναι $E_B = (d+1)^2 cm^2$.

β) i. Αν το εμβαδόν της επιφάνειας είναι Ε, τότε ισχύει

$$E = 200d^2 \text{ και } E = 128(d+1)^2$$

οπότε έχουμε:

$$200d^2 = 128(d+1)^2 \Leftrightarrow 25d^2 = 16(d+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 25d^2 = 16(d^2+2d+1) \Leftrightarrow 25d^2 = 16d^2 + 32d + 16$$

$$\Leftrightarrow 9d^2 - 32d - 16 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-32)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-16) = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$$

και ρίζες τους αριθμούς $d_1 = 4$ και $d_2 = -\frac{4}{9}$. Η λύση $d_2 = -\frac{4}{9}$ απορρίπτεται, αφού το μήκος της πλευράς είναι θετικός αριθμός. Άρα $d = 4$, οπότε κάθε πλακάκι τύπου Α έχει πλευρά 4 και κάθε πλακάκι τύπου Β έχει πλευρά 5.

ii. Είναι:

$$E = 200d^2 = 200 \cdot 4^2 = 200 \cdot 16 = 3.200 cm^2$$

36675

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2-4x+2-\lambda^2=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε:

i) Να βρείτε το $S=x_1+x_2$.

ii) Να βρείτε το $P=x_1\cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

(Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$,

ii) να βρείτε τον αριθμό λ.

(Μονάδες 10)

36675-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο: $x^2-4x+2-\lambda^2$ έχει $\alpha=1$, $\beta=-4$, $\gamma=2-\lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot1\cdot(2-\lambda^2)=16-8+4\lambda^2=8+4\lambda^2$$

Είναι $\Delta=8+4\lambda^2>0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ οπότε η εξίσωση $x^2-4x+2-\lambda^2=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε

i) $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{-4}{1}=4$.

ii) $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{2-\lambda^2}{1}=2-\lambda^2$

γ) Έστω $x_1=2+\sqrt{3}$ και x_2 η ζητούμενη ρίζα. Τότε:

i) Από το άθροισμα των ριζών έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}&x_1+x_2=4\Leftrightarrow\\&2+\sqrt{3}+x_2=4\Leftrightarrow\\&x_2=4-2-\sqrt{3}\Leftrightarrow\\&x_2=2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

ii) Από το γινόμενο των ριζών έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}&x_1\cdot x_2=2-\lambda^2\Leftrightarrow\\&(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2-\lambda^2\Leftrightarrow\\&2^2-\sqrt{3}^2=2-\lambda^2\Leftrightarrow\\&4-3=2-\lambda^2\Leftrightarrow\\&\lambda^2=1\Leftrightarrow\\&\lambda=\pm1\end{aligned}$$

36890

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=3$.

(Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 15)

36890-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$|x-2|=3$, οπότε

$x-2=-3$ ή $x-2=3$ και τελικά

$x=-1$ και $x=5$.

β) Μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες $x_1=-1$ και $x_2=5$ είναι η $x^2-Sx+P=0$, όπου

$S=x_1+x_2=-1+5=4$ και $P=x_1x_2=(-1)\cdot 5=-5$. Άρα $x^2-4x-5=0$.

37171

ΘΕΜΑ 2

Αν α,β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta=2 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-15$.

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α,β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

37171-Λύση

Λύση

α) Είναι:

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30 \Leftrightarrow$$
$$\alpha\beta(\alpha+\beta)=-30 \Leftrightarrow$$
$$\alpha\beta\cdot 2=-30 \Leftrightarrow$$
$$\alpha\beta=-15$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση μπορεί να είναι της μορφής:

$x^2-Sx+P=0$ με $S=\alpha+\beta=2$ και $P=\alpha\beta=-15$.

Τελικά, μία ζητούμενη εξίσωση είναι η: $x^2-2x-15=0$.

Το τριώνυμο $x^2-2x-15$ έχει διακρίνουσα

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-15)=4+60=64>0$.

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\dfrac{2\pm 8}{2}=5$ ή -3.

Άρα είναι $\alpha=5$ και $\beta=-3$ ή $\alpha=-3$ και $\beta=5$.

37178

ΘΕΜΑ 2

Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $x+1$ μέτρα και x μέτρα.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

(Μονάδες 10)

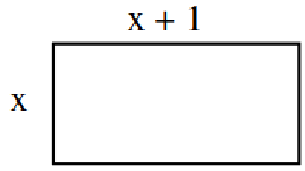
β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

(Μονάδες 15)

37178-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η περίμετρος Π του ορθογωνίου είναι:



$\Pi = 2(x+1) + 2x = 4x + 2$,με $x > 0$

και το εμβαδόν του Ε είναι:

$E = x(x+1) = x^2 + x$, με x>0.

β) Ισχύει ότι:

$$E = 90 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + x = 90 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + x - 90 = 0.$$

Το τριώνυμο $x^2 + x - 90$ έχει $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -90$ και διακρίνουσα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha \cdot \gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 361 > 0$

Οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + x - 90 = 0$είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{-1 \pm 19}{2}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{-1+19}{2} = 9 \\ \dfrac{-1-19}{2} = -10 \end{cases}$$

Η λύση $x = -10$ απορρίπτεται αφού x>0.

Συνεπώς οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $x = 9$ μέτρα και $x + 1 = 10$ μέτρα.

37181

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0, (1)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ.

(Μονάδες 13)

β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 12)

37181-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον η εξίσωση: $x^2-(\lambda-1)x+6=0, (1)$ έχει λύση το 1, ισχύει ότι:

$1^2-(\lambda-1)\cdot 1+6=0 \Leftrightarrow 1-\lambda+1+6=0 \Leftrightarrow 8-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=8.$

β) Για $\lambda=2$ η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2-(2-1)x+6=0 \Leftrightarrow x^2-x+6=0.$$

Η διακρίνουσα, με α=1, β=-1, γ=6, γίνεται:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 6=1-24=-23<0$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες για $\lambda=2$.