# 20658

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η έλλειψη $(c)$ με εξίσωση $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$.

α) Να δικαιολογήσετε ότι $\alpha=4$, $\beta=2$ και $\gamma=2\sqrt{3}$.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες της έλλειψης $(c)$.

(Μονάδες 08)

γ) Να σχεδιάσετε την έλλειψη $(c)$ και τον κύκλο $x^2+y^2=16$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 09)

# 20658-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση της έλλειψης $(c)$ είναι της μορφής $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$.

Έτσι είναι $\alpha^2=16 \Leftrightarrow \alpha=4$ και $\beta^2=4 \Leftrightarrow \beta=2$.

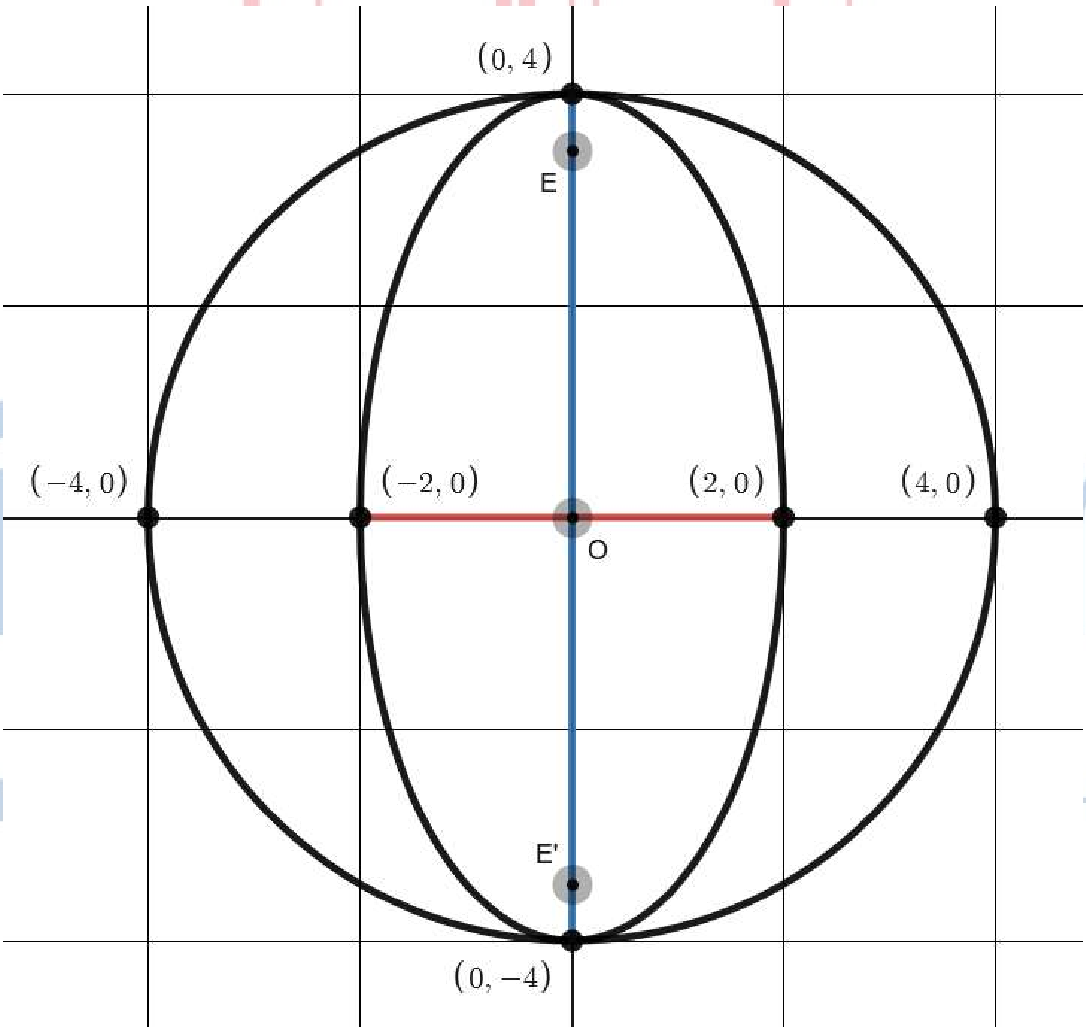
Ακόμη είναι $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2} \Leftrightarrow 2=\sqrt{4^2-\gamma^2} \Leftrightarrow 4=16-\gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2=12 \Leftrightarrow \gamma=2\sqrt{3}$.

β) Για τα μήκη των αξόνων έχουμε:

- μήκος μεγάλου άξονα ίσο με $2\alpha=2\cdot 4=8$,
- μήκος μικρού άξονα ίσο με $2\beta=2\cdot 2=4$.

Οι εστίες είναι τα σημεία $\mathrm{E}'(0,-\gamma)$, $\mathrm{E}(0,\gamma)$, δηλαδή τα $\mathrm{E}'\left(0,-2\sqrt{3}\right)$,$\mathrm{E}\left(0,2\sqrt{3}\right)$.

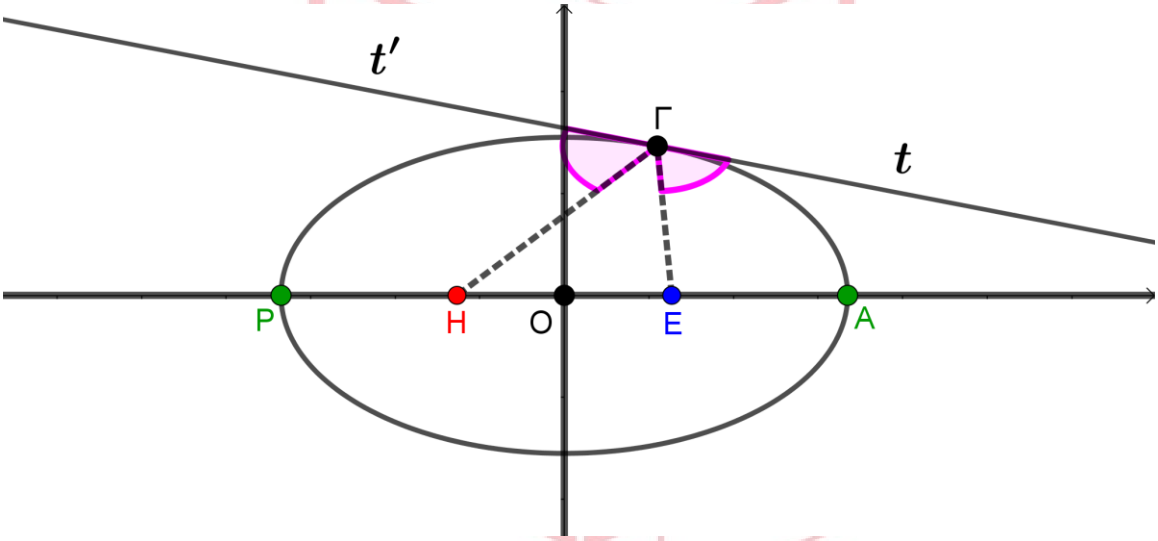
γ) Ο κύκλος $x^2+y^2=16$ έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με $\sqrt{16}=4$.



# 20666

ΘΕΜΑ 4

Η τροχιά της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι μια έλλειψη με μία εστία τον Ήλιο. Η ελάχιστη απόσταση του κέντρου της Γης από το κέντρο του Ήλιου είναι $PH = 147{,}5$ εκατομμύρια $Km$ και η μέγιστη $AH = 152{,}5$ εκατομμύρια $Km$. Στο σχήμα θεωρούμε ότι τα σημεία $H$ και $\Gamma$ είναι τα κέντρα του Ήλιου και της Γης αντίστοιχα. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων με αρχή το μέσο του $HE$ και $x'x$ τον μεγάλο άξονα της έλλειψης, ενώ ο άξονας $y'y$ είναι η μεσοκάθετος του $HE$.




α) Να αποδείξετε $(PA) = 300$ εκατομμύρια $Km$, $(HE) = 5$ εκατομμύρια $Km$ και ότι η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $\varepsilon = \frac{1}{60}$.

(Μονάδες 10)

β) Για μια τυχαία θέση της Γης πάνω στην ελλειπτική τροχιά, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $H\Gamma E$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν ονομάσουμε $t't$ την εφαπτομένη ευθεία της έλλειψης στο $\Gamma$, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $t'\hat{\Gamma}H$ και $t\hat{\Gamma}E$ είναι ίσες.

(Μονάδες 7)

# 20666-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από την εκφώνηση προκύπτει ότι $(PH) = 147{,}5$ και $(PE) = 152{,}5$ εκατομμύρια $Km$.

Αλλά, η εξίσωση της έλλειψης είναι στη μορφή $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ και γνωρίζουμε ότι $(PH) = \alpha - \gamma$, ενώ $(PE) = \alpha + \gamma$.

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε $2\alpha = (PA) = 300$ εκατομμύρια $Km$, ενώ αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε $2\gamma = (HE) = 5$ εκατομμύρια $Km$.

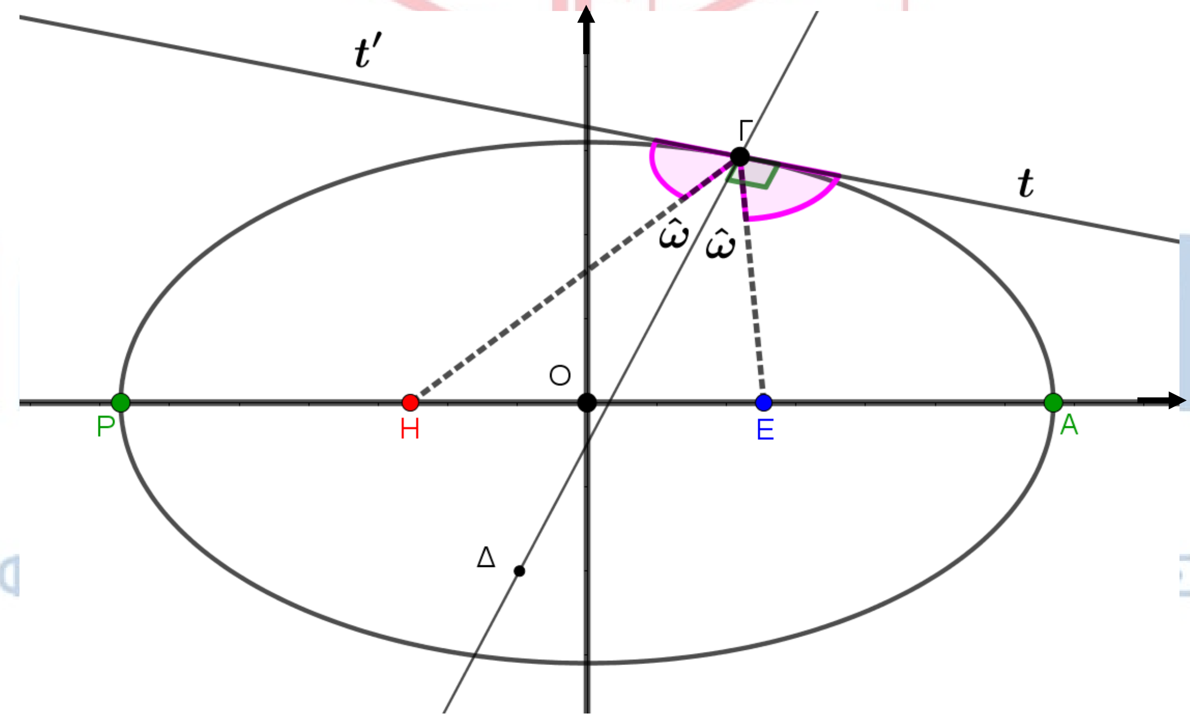
Όμως $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2\gamma}{2\alpha} = \frac{5}{300} = \frac{1}{60}$.

β) Από τον ορισμό της έλλειψης, κάθε σημείο της έχει σταθερό άθροισμα αποστάσεων από τις εστίες ίσο με $2\alpha$, δηλαδή $(\Gamma H) + (\Gamma E) = 2\alpha = 300$.

Αλλά $(HE) = 2\gamma = 5$. Ώστε η περίμετρος του μεταβλητού τριγώνου $\Gamma HE$ είναι σταθερή και ίση με 305 εκατομμύρια $Km$.

γ) Σύμφωνα με την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης, η κάθετη ευθεία $\Delta\Gamma$ στην $t't$ στο σημείο $\Gamma$ διχοτομεί την γωνία $H\hat{\Gamma}E$, άρα έχουμε $H\hat{\Gamma}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}E = \hat{\omega}$.

Ώστε $t'\hat{\Gamma}H = t\hat{\Gamma}E = 90^0 - \omega$.



# 20718

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η έλλειψη $C$ με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$.

α) Να βρείτε τις εστίες της.

(Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε την έλλειψη $C$ σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις εφαπτόμενες στις κορυφές της $C$ και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

(Μονάδες 9)

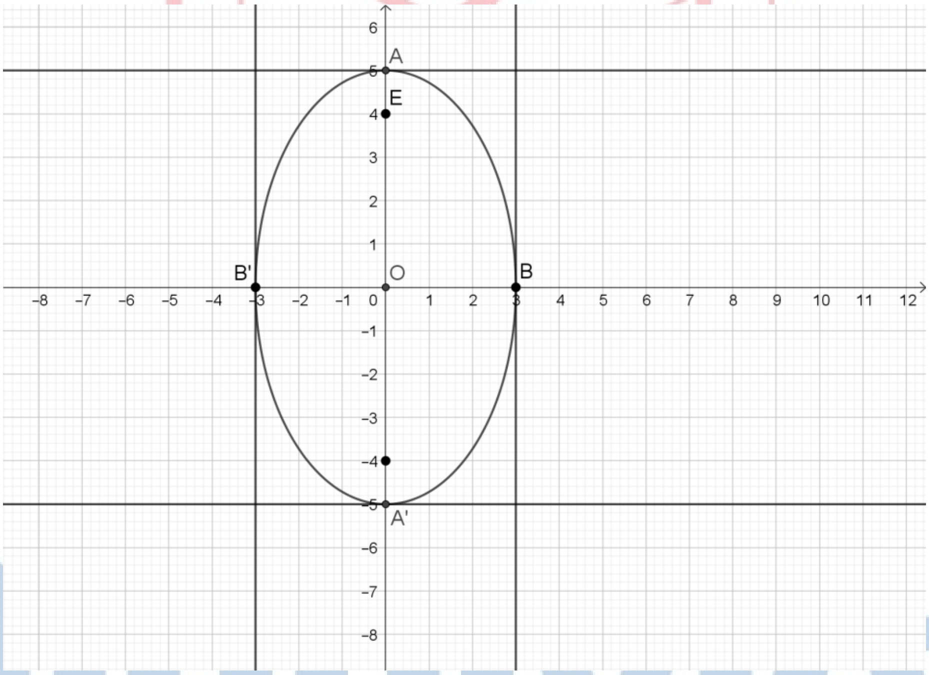
# 20718-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\alpha^2=25$ και $\beta^2=9$ οπότε $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=25-9=16$ και άρα $\gamma=4$. Οι ζητούμενες εστίες είναι τα σημεία $\mathrm{E}(0,4)$ και $\mathrm{E}'(0,-4)$.

β) Η έλλειψη $C$ έχει κορυφές τα σημεία $\mathrm{A}(0,5)$, $\mathrm{A}'(0,-5)$, $\mathrm{B}(3,0)$, $\mathrm{B}'(-3,0)$ και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

γ) Οι εφαπτόμενες στα άκρα των δύο αξόνων της, δηλαδή στα σημεία $\mathrm{A}(0,5)$, $\mathrm{A}'(0,-5)$, $\mathrm{B}(3,0)$, $\mathrm{B}'(-3,0)$ έχουν εξισώσεις $y=5$, $y=-5$, $x=3$, $x=-3$ και φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



# 20722

ΘΕΜΑ 4

Έστω $\mathrm{K}(x, y)$ μεταβλητό σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $(\mathrm{KE})+(\mathrm{KE}')=10$, όπου Ε(3,0) και Ε΄(-3,0).

α) Να βρείτε το είδος της καμπύλης $C$ πάνω στην οποία κινείται το σημείο $\mathrm{K}$ και να γράψετε την εξίσωσή της, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

Έστω $C: \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ και $(\varepsilon): 3x+5y=25$.

β) Να αποδείξετε ότι $C$ και $(\varepsilon)$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο $\mathrm{M}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $\mathrm{M}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β) και να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα την έλλειψη $C$ και την ευθεία $\varepsilon$.

(Μονάδες 6)

δ) Να σχεδιάσετε τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{E\hat{M}E'}$ και να βρείτε την εξίσωσή της .

(Μονάδες 6)

# 20722-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το άθροισμα των αποστάσεων του σημείου $\mathrm{K}$ από τα σημεία Ε(3,0) και Ε΄(-3,0) είναι ίσο με 10. Επίσης $(\mathrm{EE}') = 6 < 10$. Συνεπώς το $\mathrm{K}$ κινείται στην έλλειψη $C$ με εστίες τα σημεία Ε και Ε΄ και σταθερό άθροισμα $2\alpha = 10$. Είναι $2\alpha = 10 \Leftrightarrow \alpha = 5$ και $\gamma = 3$ οπότε $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 25 - 9 = 16$ και άρα $\beta = 4$. Η εξίσωση της $C$ είναι η $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα $\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \\ 3x + 5y = 25 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση. Από τη 2η εξίσωση έχουμε ότι $y = \frac{25 - 3x}{5}$ και με αντικατάσταση στην 1η εξίσωση έχουμε

$$\frac{x^2}{25} + \frac{\left(\frac{25-3x}{5}\right)^2}{16} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{625 - 150x + 9x^2}{25 \cdot 16} = 1 \Leftrightarrow$$

$$16x^2 + 625 - 150x + 9x^2 = 400 \Leftrightarrow$$

$$25x^2 - 150x + 225 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

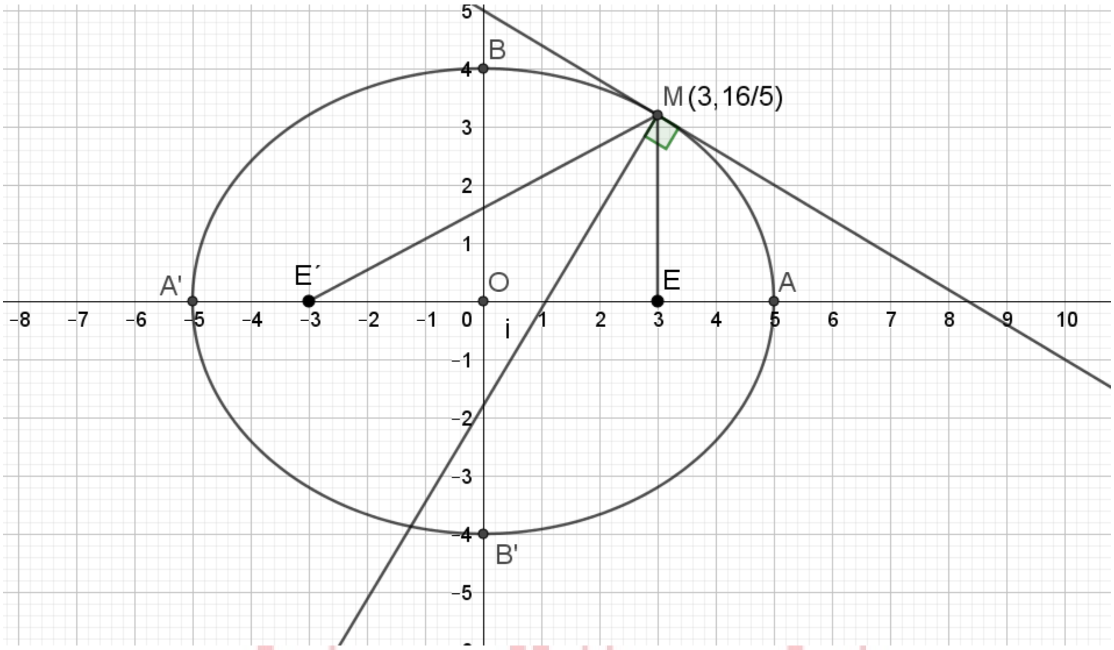
$$x = 3$$

Για $x = 3$ είναι $y = \frac{25 - 3 \cdot 3}{5} = \frac{16}{5}$, που σημαίνει ότι $C$ και $(\varepsilon)$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο $\mathrm{M}(3, \frac{16}{5})$.

γ) Το ότι η ευθεία $\varepsilon$ και η έλλειψη $C$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $\mathrm{M}$, γραφικά σημαίνει ότι η ευθεία $\varepsilon$ εφάπτεται της έλλειψης $C$ στο σημείο $\mathrm{M}$.

Η έλλειψη $C$ έχει κορυφές τα σημεία $\mathrm{A}(5,0)$, $\mathrm{A}'(-5,0)$, $\mathrm{B}(0,4)$, $\mathrm{B}'(0,-4)$ και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπως και η εφαπτομένη της $(\varepsilon)$, που εκτός από το $\mathrm{M}$ διέρχεται και από το (0,5).

# 20722-Λύση




δ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης γνωρίζουμε ότι η διχοτόμος $(\delta)$ της γωνίας $\mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{E}'$, είναι η κάθετη της εφαπτομένης στο σημείο $\mathrm{M}$, όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα. Συνεπώς αναζητούμε την κάθετη στην $(\varepsilon)$ που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}$. Η ευθεία $(\varepsilon)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -\frac{3}{5}$, οπότε αφού $(\delta) \perp (\varepsilon)$, είναι $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow -\frac{3}{5} \cdot \lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = \frac{5}{3}$. Τελικά η ζητούμενη διχοτόμος $(\delta)$ έχει εξίσωση $(\delta): y - y_{\mathrm{M}} = \lambda_\delta \cdot (x - x_{\mathrm{M}}) \Leftrightarrow y - \frac{16}{5} = \frac{5}{3} \cdot (x-3)$.

# 20726

ΘΕΜΑ 4

Ένας κατασκευαστής μπιλιάρδων θέλει να κατασκευάσει ένα ελλειπτικό μπιλιάρδο όπως αυτό του παρακάτω σχήματος (σχήμα 1). Το περίγραμμα του μπιλιάρδου είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(3,0)$ και $\mathrm{E}'(-3,0)$. Η μοναδική τρύπα του μπιλιάρδου έχει σχήμα κύκλου (ο μαύρος κύκλος στο σχήμα 1) με κέντρο το σημείο $\mathrm{E}'$. Για να σχεδιάσει ο κατασκευαστής το περίγραμμα του μπιλιάρδου πάνω σε μία ξύλινη επίπεδη επιφάνεια, τοποθέτησε στα σημεία $\mathrm{E}$ και $\mathrm{E}'$ δύο καρφιά στα οποία έδεσε τις άκρες ενός σχοινιού μήκους 10 μονάδων μήκους. Στη συνέχεια με ένα μολύβι διατηρούσε το σχοινί τεντωμένο, ώστε αυτό, κατά την κίνησή του, να διαγράψει έλλειψη $C$ όπως φαίνεται στο παρακάτω (σχήμα 2).

α) Να βρείτε τα μήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα της έλλειψης $C$.

(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης $C$ και να βρείτε την εκκεντρότητά της.

(Μονάδες 5)

γ) Ένας παίκτης τοποθετεί μια άσπρη μπάλα (ο άσπρος κύκλος στο σχήμα 1) ακριβώς στο σημείο $\mathrm{E}$. Σκοπεύει να χτυπήσει την άσπρη μπάλα ώστε αφού αυτή προσκρούσει πρώτα στο ελλειπτικό περίγραμμα του μπιλιάρδου, στη συνέχεια να πέσει στην τρύπα. Αν θεωρήσουμε ότι ο παίκτης θα χτυπήσει με όση δύναμη απαιτείται για να φτάσει η μπάλα στην τρύπα και το χτύπημα θα είναι στο κέντρο της μπάλας ώστε αυτή να κυλά χωρίς να περιστρέφεται, να βρείτε σε ποιο σημείο της έλλειψης $C$ πρέπει να σημαδέψει, ώστε με ένα μόνο χτύπημα η μπάλα να μπει στην τρύπα:

1) μόνο στα άκρα του μεγάλου άξονα

2) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα

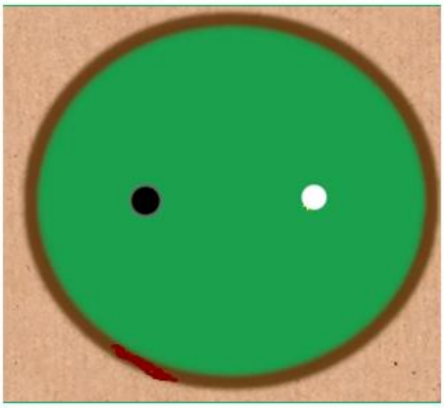
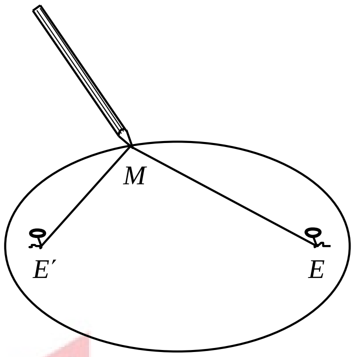
3) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα και στο ένα άκρο του μεγάλου άξονα

4) σε οποιοδήποτε σημείο της $C$ εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα

Επιλέξτε τη μοναδική σωστή απαντήσεις αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

20726

| | |
|---|---|
|  |  |
| Σχήμα 1 | Σχήμα 2 |

# 20726-Λύση

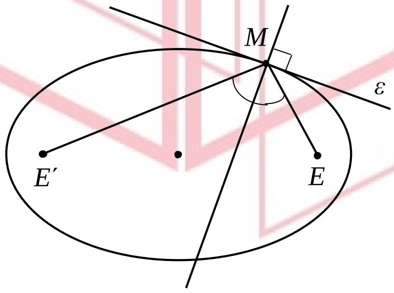
ΛΥΣΗ

α) Το μήκος του σχοινιού εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της έλλειψης από τις εστίες. Συνεπώς το άθροισμα αυτό είναι 10 μονάδες μήκους, που είναι και το μήκος του μεγάλου άξονα. Είναι $2\alpha = 10 \Leftrightarrow \alpha = 5$ και $\gamma = 3$, οπότε $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$. Συνεπώς το μήκος του μικρού άξονα είναι 8 μονάδες μήκους.

β) Η έλλειψη έχει εστίες στον άξονα $xx'$ και η εξίσωσή της είναι $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Η εκκεντρότητά της είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{3}{5}$.

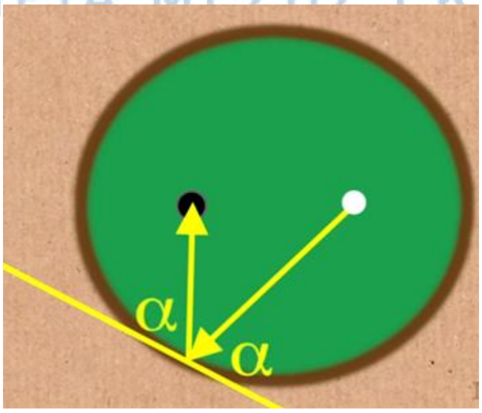
γ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης γνωρίζουμε ότι : Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής Μ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{E}'\hat{\mathrm{M}}\mathrm{E}$ , όπου $\mathrm{E}, \mathrm{E}'$ οι εστίες της έλλειψης (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα).




Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή ένα ηχητικό κύμα ή μια φωτεινή ακτίνα που ξεκινούν από τη μία εστία μιας έλλειψης, ανακλώμενα σε αυτήν, διέρχονται από την άλλη εστία. Συνεπώς σε οποιοδήποτε σημείο της $C$ και αν σημαδέψει θα πετύχει το στόχο του, εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα, αφού τότε η μπάλα θα πέσει στην τρύπα χωρίς να χτυπήσει πρώτα στο περίγραμμα του μπιλιάρδου.

Σωστή απάντηση η 4).

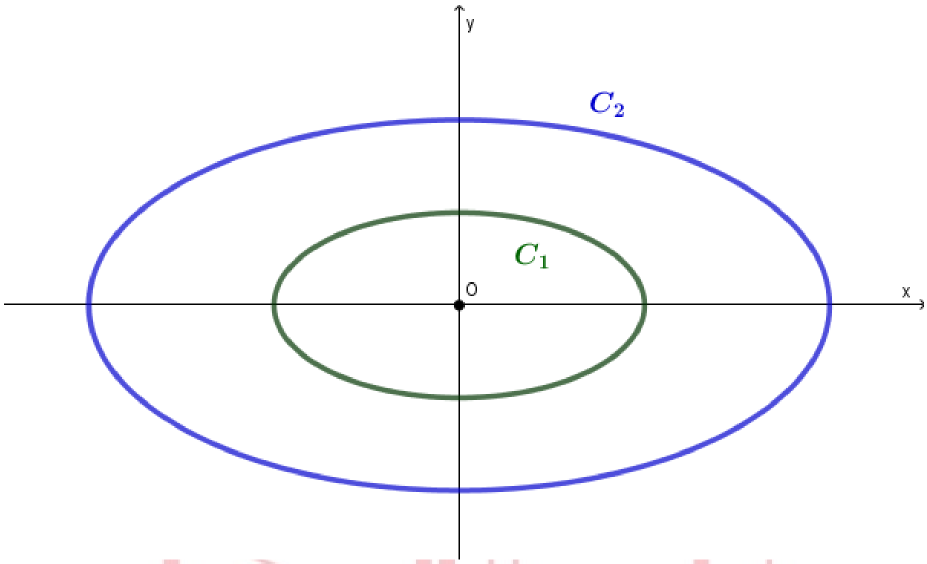




# 20865

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: x^2 + 4y^2 = 4$ , $C_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ και οι γραφικές τους παραστάσεις στο παρακάτω σχήμα.




α) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες των δύο ελλείψεων.

(Μονάδες 14)

β) Από το σχήμα φαίνεται ότι οι δύο ελλείψεις έχουν την ίδια εκκεντρότητα. Να αποδείξετε ότι αυτό είναι αληθές.

(Μονάδες 11)

# 20865-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση της έλλειψης $C$ με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$, μήκος μεγάλου άξονα $2\alpha$ και μήκος μικρού άξονα $2\beta$, είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,\ \text{όπου}\ \beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$$

Η εξίσωση της έλλειψης $C_1$: $x^2+4y^2=4$ γίνεται ισοδύναμα $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. Είναι λοιπόν:

$\alpha^2=4 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha=2$ , $\beta^2=1 \overset{\beta>0}{\Longleftrightarrow} \beta=1$ και $1=\sqrt{4-\gamma^2} \Leftrightarrow \gamma^2=3 \overset{\gamma>0}{\Longleftrightarrow} \gamma=\sqrt{3}$ .

Επομένως, είναι:

$$2\alpha=4,\ 2\beta=2,\ E'\left(-\sqrt{3},0\right),\ E\left(\sqrt{3},0\right).$$

Για την έλλειψη $C_2$: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ είναι αντίστοιχα:

$\alpha^2=16 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha=4$ , $\beta^2=4 \overset{\beta>0}{\Longleftrightarrow} \beta=2$ και $2=\sqrt{16-\gamma^2} \Leftrightarrow \gamma^2=12 \overset{\gamma>0}{\Longleftrightarrow} \gamma=2\sqrt{3}$ .

Επομένως, είναι:

$$2\alpha=8,\ 2\beta=4,\ E'\left(-2\sqrt{3},0\right),\ E\left(2\sqrt{3},0\right).$$

β) Δύο ελλείψεις όταν έχουν την ίδια εκκεντρότητα $\varepsilon$ λέγονται όμοιες, όπου $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}$ .

Η έλλειψη $C_1$ έχει εκκεντρότητα $\varepsilon_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Η έλλειψη $C_2$ έχει εκκεντρότητα $\varepsilon_2=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Επομένως, ο ισχυρισμός είναι αληθής.

# 20883

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης C: $16x^2 + 25y^2 = 400$.

α) Να βρείτε τα μήκη ΒΒ', ΑΑ' του μικρού και τον μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της Ε και Ε'. (Μονάδες 12)

β) Αν Ε'(-3,0) και Ε(3,0), να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο Ε' και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το Ε και είναι παράλληλη στον άξονα y'y. (Μονάδες 13)

# 20883-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι: C: $16x^2 + 25y^2 = 400$ ή C: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, οπότε:

$\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 5$, άρα (Α'Α) = 2α = 2·5 = 10 είναι το μήκος του μεγάλου άξονα.

Επίσης $\beta^2 = 16 \Leftrightarrow \beta = 4$, άρα (Β'Β) = 2β = 2·4 = 8 είναι το μήκος του μικρού άξονα.

Ακόμη: $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 25 - 16 = 9$, οπότε γ = 3.

Άρα Ε'(-γ,0) και Ε(γ,0) ή Ε'(-3,0) και Ε(3,0) είναι οι εστίες της έλλειψης.

β) Έχουμε Ε'(-3,0) και Ε(3,0).

Θέλουμε η Ε' να είναι εστία της ζητούμενης παραβολής, άρα $\frac{p}{2} = -3 \Leftrightarrow p = -6$, άρα

C': $y^2 = 2px$ ή C': $y^2 = 2\cdot(-6)x$ ή C': $y^2 = -12x$, είναι η ζητούμενη εξίσωση.

# 21308

ΘΕΜΑ 2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄ της έλλειψης και την απόστασή τους.

(Μονάδες 09)

β) Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης.

(Μονάδες 08)

γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης στο σημείο της $B(0,4)$.

(Μονάδες 08)

# 21308-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση της έλλειψης είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha=5$ και $\beta=4$.

Επομένως έχει εστίες της μορφής $E(\gamma,0)$ και $E'(-\gamma,0)$, με $\gamma>0$ , όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$ ή $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$ ή $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2$.

Αντικαθιστώντας $\alpha=5$ και $\beta=4$ έχουμε $\gamma^2=5^2-4^2$ ή $\gamma^2=25-16$ ή $\gamma^2=9$ ή $\gamma=3$, εφόσον $\gamma>0$.

Άρα οι εστίες της έλλειψης είναι οι $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$.

Η απόσταση των εστιών είναι $2\gamma=2\cdot 3=6$.

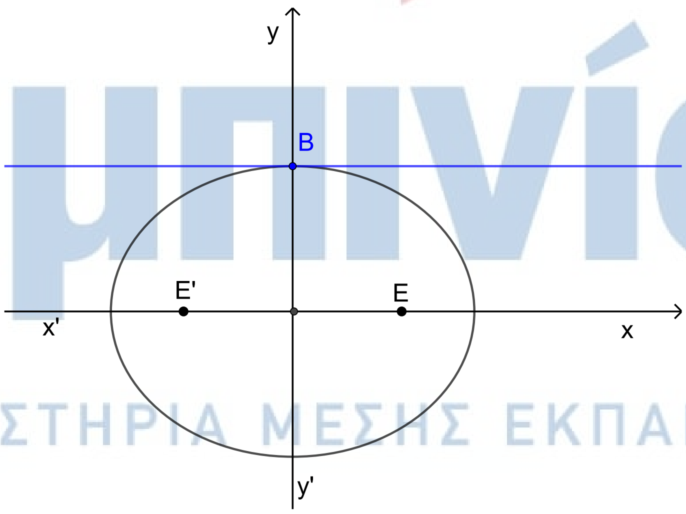
β) Ο μικρός άξονας της έλλειψης έχει μήκος $2\beta=2\cdot 4=8$.

Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης έχει μήκος $2\alpha=2\cdot 5=10$.

γ) Από τη θεωρία η εφαπτομένη (ε) της έλλειψης της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο της $(x_1,y_1)$ είναι $\frac{x\cdot x_1}{\alpha^2}+\frac{y\cdot y_2}{\beta^2}=1$.

Αντικαθιστώντας όπου $x_1$ και $y_1$ τις συντεταγμένες του σημείου Β της έλλειψης και όπου $\alpha=5$ και $\beta=4$ έχουμε:

$\frac{0x}{25}+\frac{4y}{16}=1$ ή $y=4$, που είναι η εξίσωση της (ε).



# 21647

ΘΕΜΑ 2

Η έλλειψη $C$ έχει εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(4,0), \mathrm{E}'(-4,0)$ και μεγάλο άξονα 10. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της $C$.

(Μονάδες 10)

β) την εκκεντρότητά της $C$.

(Μονάδες 7)

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της $C$ στο σημείο της $\mathrm{M}(4, \frac{9}{5})$.

(Μονάδες 8)

# 21647-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η έλλειψη $C$ έχει εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(4,0), \mathrm{E}'(-4,0)$ οπότε έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\gamma=4$. Αφού έχει μεγάλο άξονα 10 συμπεραίνουμε ότι $2\alpha=10 \Leftrightarrow \alpha=5$. Από τη σχέση $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ έχουμε ότι

$5^2=\beta^2+4^2 \Leftrightarrow \beta^2=9 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta=3$. Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

β) Η εκκεντρότητα είναι $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{4}{5}$.

γ) Η εφαπτόμενη στο $\mathrm{M}(4,\frac{9}{5})$ έχει εξίσωση $\frac{4\cdot x}{25}+\frac{\frac{9}{5}\cdot y}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{4\cdot x}{25}+\frac{y}{5}=1$.

# 21648

ΘΕΜΑ 2

Η έλλειψη $C$ έχει εστίες τα σημεία $E(3,0), E'(-3,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(4,\frac{12}{5})$.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του μεγάλου άξονα είναι 10.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της $C$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C$ στο σημείο της $M(4,\frac{12}{5})$.

(Μονάδες 7)

Δίνεται ότι $\sqrt{1369} = 37$

# 21648-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η έλλειψη $C$ έχει εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(3,0), \mathrm{E}'(-3,0)$ οπότε έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\gamma=3$. Από τον ορισμό της έλλειψης γνωρίζουμε ότι $(\mathrm{ME})+(\mathrm{ME}')=2\alpha$ .Είναι

$$(\mathrm{ME})+(\mathrm{ME}')=\sqrt{(4-3)^2+(\frac{12}{5}-0)^2}+\sqrt{(4+3)^2+(\frac{12}{5}-0)^2}=$$

$$\sqrt{1+\frac{144}{25}}+\sqrt{49+\frac{144}{25}}=\sqrt{\frac{169}{25}}+\sqrt{\frac{1369}{25}}=\frac{13}{5}+\frac{37}{5}=\frac{50}{5}=10 \quad .$$

Συνεπώς $2\alpha=10 \Leftrightarrow \alpha=5$.

β) Από τη σχέση $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ έχουμε ότι

$5^2=\beta^2+3^2 \Leftrightarrow \beta^2=16 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta=4$. Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

γ) Η εφαπτόμενη στο $\mathrm{M}(4,\frac{12}{5})$ έχει εξίσωση $\frac{4\cdot x}{25}+\frac{\frac{12}{5}\cdot y}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{4\cdot x}{25}+\frac{4y}{15}=1$.

# 21655

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η έλλειψη $C$ με κέντρο το $\mathrm{O}(0,0)$, εστίες τα σημεία $\mathrm{E}, \mathrm{E}'$ και κορυφές τα σημεία $\mathrm{A}(5,0), \mathrm{A}'(-5,0), \mathrm{B}, \mathrm{B}'$. Αν είναι γνωστό ότι το τετράπλευρο $\mathrm{BEB}'\mathrm{E}'$ είναι τετράγωνο, να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες των σημείων $\mathrm{B}, \mathrm{B}', \mathrm{E}, \mathrm{E}'$.

(Μονάδες 8)

β) την εξίσωση της έλλειψης $C$.

(Μονάδες 7)

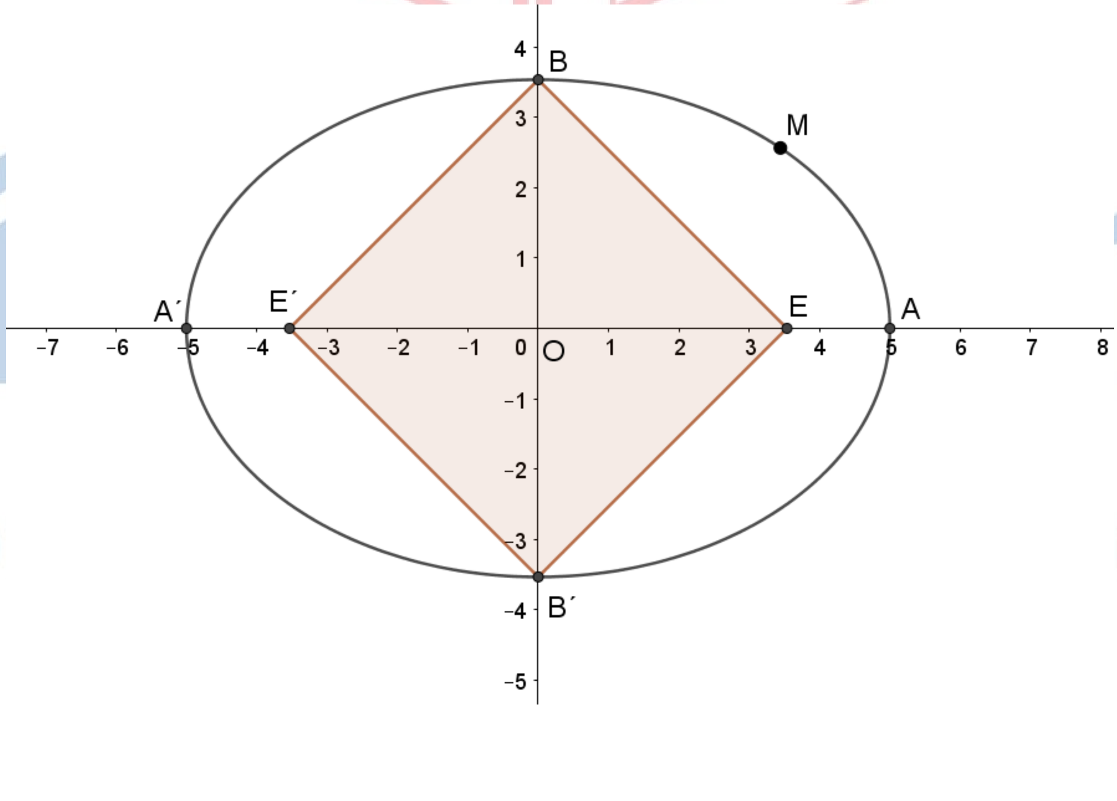
γ) Έστω $\mathrm{M}$ τυχαίο σημείο της $C$, που δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα $\mathrm{A}, \mathrm{A}'$.

i. να αποδείξετε ότι όλα τα τρίγωνα $\mathrm{EME}'$ έχουν την ίδια περίμετρο την οποία να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 5)

ii. να βρείτε τις συντεταγμένες του $\mathrm{M}$ για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{EME}'$ παίρνει τη μέγιστη τιμή του, την οποία και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 5)



# 21655-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι $\mathrm{E}(\gamma,0),\mathrm{E}'(-\gamma,0)$ και $\mathrm{B}(0,\beta),\mathrm{B}'(0,-\beta)$, όπου $\beta>0,\gamma>0$.

Αφού το τετράπλευρο $\mathrm{BEB}'\mathrm{E}'$ είναι τετράγωνο, θα έχει ίσες διαγώνιους, δηλαδή $\mathrm{OB}=\mathrm{OE}$ και άρα $\beta=\gamma$. Γνωρίζουμε επίσης ότι $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, οπότε αφού $\alpha=5$ και $\beta=\gamma$ έχουμε ότι $5^2=\beta^2+\beta^2 \Leftrightarrow 25=2\beta^2 \Leftrightarrow \beta^2=\frac{25}{2} \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta=\frac{5}{\sqrt{2}}$.

Συνεπώς $\mathrm{E}(\frac{5}{\sqrt{2}},0),\mathrm{E}'(-\frac{5}{\sqrt{2}},0),\mathrm{B}(0,\frac{5}{\sqrt{2}}),\mathrm{B}'(0,-\frac{5}{\sqrt{2}})$.

β) Η έλλειψη έχει κέντρο το $\mathrm{O}(0,0)$ και εστίες στον άξονα $xx'$ οπότε θα έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Έχουμε όμως ότι $\alpha=5$ και $\beta=\frac{5}{\sqrt{2}}$, οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι η $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{25}{2}}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{2y^2}{25}=1$.

γ) Από τον ορισμό της έλλειψης γνωρίζουμε ότι για κάθε σημείο $\mathrm{M}$ της $C$ είναι $(\mathrm{ME})+(\mathrm{ME}')=2\alpha=10$.

i. Η περίμετρος του τριγώνου $\mathrm{EME}'$ για κάθε σημείο $\mathrm{M}$ της $C$ που δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα $\mathrm{A},\mathrm{A}'$ είναι ίση με

$$(\mathrm{ME})+(\mathrm{ME}')+(\mathrm{EE}')=10+\frac{10}{\sqrt{2}}.$$

ii. Το τρίγωνο $\mathrm{EME}'$ για κάθε σημείο $\mathrm{M}$ της $C$ που δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα $\mathrm{A},\mathrm{A}'$ έχει σταθερή βάση την $(\mathrm{EE}')=\frac{10}{\sqrt{2}}$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή του, όταν το ύψος από την κορυφή $\mathrm{M}$ πάρει τη μέγιστη τιμή του. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν το σημείο $\mathrm{M}$ ταυτιστεί με ένα εκ των $\mathrm{B}(0,\frac{5}{\sqrt{2}}),\mathrm{B}'(0,-\frac{5}{\sqrt{2}})$, όπου η μέγιστη τιμή του ύψους είναι $\frac{5}{\sqrt{2}}$ και η μέγιστη τιμή του εμβαδού του τριγώνου $\mathrm{EME}'$ είναι αντίστοιχα $\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{\sqrt{2}}\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{25}{2}$.

# 22168

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται η παραβολή $y^2 = 2px$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

α) Αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο Α(1,2), να βρείτε:

i. Την εξίσωση της παραβολής. (Μονάδες 10)

ii. Την εστία Ε της παραβολής. (Μονάδες 05)

β) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο το Ο, αν η μια εστία της είναι το σημείο Ε(1,0) και ο μεγάλος άξονας της έχει μήκος ίσο με 4.

(Μονάδες 10)

# 22168-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Η παραβολή $y^2 = 2px$ διέρχεται από το Α(1,2), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωσή της, δηλαδή:

$$2^2 = 2p1 \;\; ή \;\; 4 = 2p \;\; ή \;\; p = 2$$

Επομένως, $y^2 = 2 \cdot 2x$ ή $y^2 = 4x$ .

ii. Η εστία Ε της παραβολής είναι:

$$E\left(\frac{p}{2},0\right) \;\; ή \;\; E(1,0)$$

β) Μία από τις εστίες της έλλειψης είναι το σημείο Ε(γ,0) και ο μεγάλος άξονας έχει μήκος 2α. Αφού η εστία είναι το σημείο Ε(1,0), έχουμε ότι γ = 1.

Επειδή ο μεγάλος άξονας έχει μήκος ίσο με 4 έχουμε ότι 2α = 4, οπότε α = 2.

Είναι:

$$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$

Οπότε, η εξίσωση της έλλειψης γίνεται:

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

# 22192

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{81}=1 \qquad (1)$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E΄.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $B(0,9)$ είναι σημείο της έλλειψης.

(Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο της $B(0,9)$.

(Μονάδες 10)

# 22192-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η έλλειψη με εξίσωση την (1) έχει $\alpha^2 = 225$, $\beta^2 = 81$ και εστίες τα σημεία Ε(γ,0), Ε΄(-γ,0). Είναι:

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 225 - 81 = 144$$

Άρα, $\gamma = 12$. Επομένως, οι εστίες της έλλειψης είναι:

$$E(12,0),\ E΄(-12,0)$$

β) Εξετάζουμε αν οι συντεταγμένες του σημείου Β επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης. Για $x = 0$ και $y = 9$ είναι:

$$\frac{0^2}{225} + \frac{9^2}{81} = 1$$

Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, οπότε το σημείο Β είναι σημείο της έλλειψης .

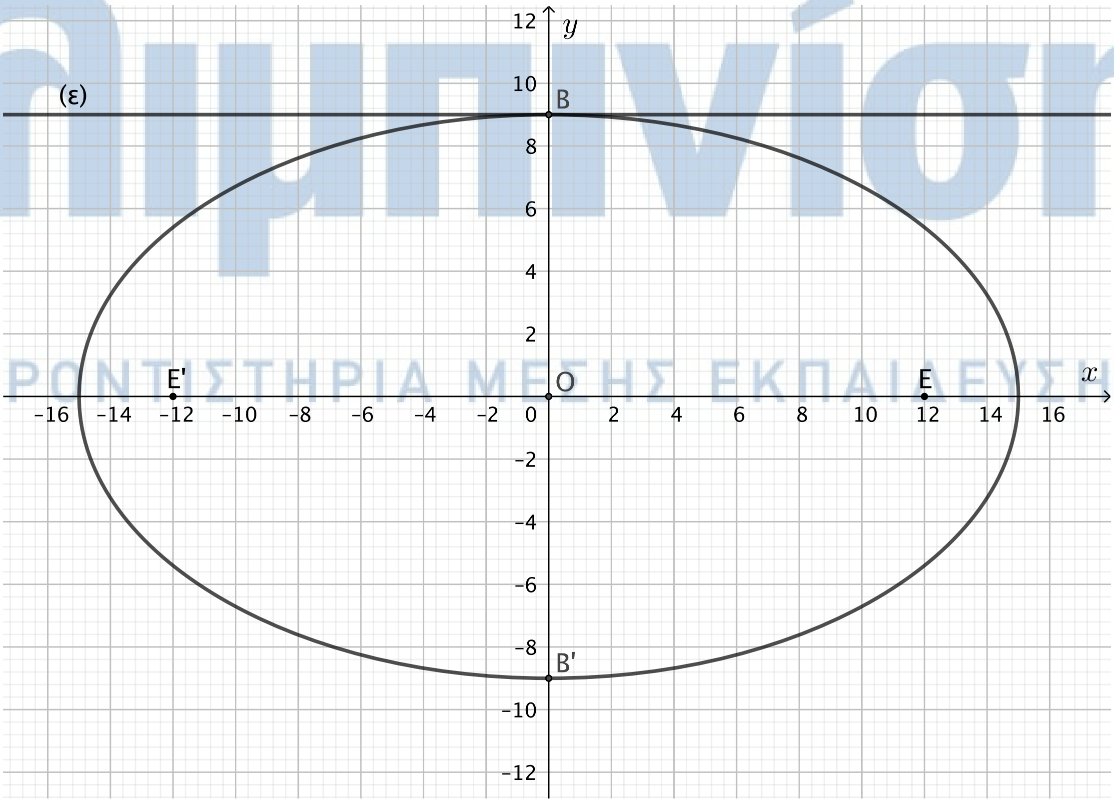
γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο της $B(x_1,y_1)$ είναι:

$$\frac{xx_1}{225} + \frac{yy_1}{81} = 1$$

Αφού δίνεται ότι Β(0,9), η ζητούμενη εξίσωση θα είναι:

$$\frac{0x}{225} + \frac{9y}{81} = 1 \quad ή \quad y = 9$$

Η καμπύλη της έλλειψης, οι εστίες Ε, Ε΄ της και η εφαπτομένη (ε) απεικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα:



# 22268

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\frac{\chi^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται ……………….. Οι εστίες της Ε και Ε’ , έχουν συντεταγμένες Ε(….., …..) και Ε’(….., …..) . Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με ….. και η εκκεντρότητα της είναι ίση με ………».

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία εφάπτεται στην καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1), στο σημείο της Β(0,-2). (Μονάδες 10)

# 22268-Λύση

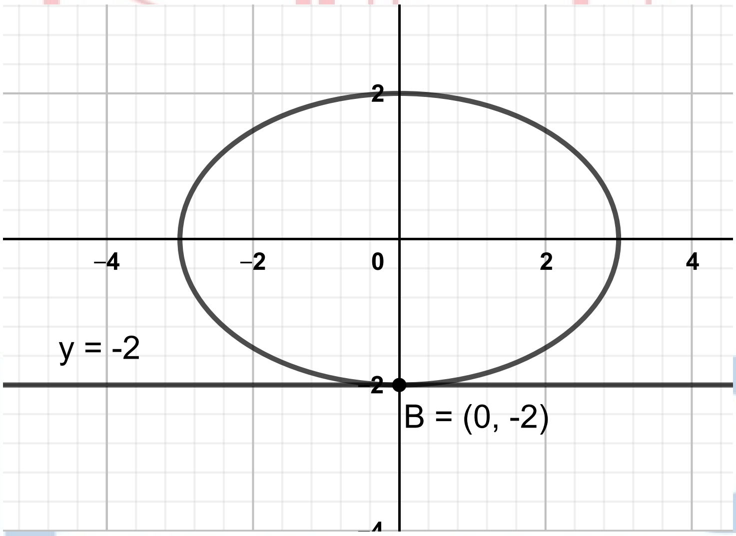
ΛΥΣΗ

Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\alpha^2 = 9$ και $\beta^2 = 4$. Η μορφή αυτής της εξίσωσης παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται σε έλλειψη με εστίες στον άξονα x'x. Οι εστίες έχουν συντεταγμένες Ε(γ, 0) , και Ε'(-γ, 0), όπου $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{5}$ . Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης είναι ίσο με $2\alpha = 2 \cdot 3 = 6$

α) «Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται **έλλειψη**. Οι εστίες της Ε και Ε' , έχουν συντεταγμένες Ε($\boldsymbol{\sqrt{5}, 0}$) και Ε'**(**$\boldsymbol{-\sqrt{5}, 0}$) . Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με **6** και η εκκεντρότητα της είναι ίση με $\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{3}}$ ».

β)




Η εφαπτόμενη ευθεία σε σημείο με συντεταγμένες $(x_1, y_1)$ της έλλειψης είναι της μορφής ε: $\frac{x x_1}{9} + \frac{y y_1}{4} = 1 \Leftrightarrow 4 \cdot x x_1 + 9 \cdot y y_1 = 36$. Δίνεται το σημείο επαφής Β(0,-2), οπότε αν θέσουμε στην εξίσωση της ευθείας ε όπου $x_1 = 0$ και $y_1 = -2$ θα έχουμε ε : $4x \cdot 0 + 9y \cdot (-2) = 36$ ή ε : $-18y = 36$ ή ε: $y = -2$.

# 22273

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας τις συντεταγμένες :

i. Των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες x’x και y’y.

ii. Των εστιών Ε και Ε’ της έλλειψης.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α(0 , 4) και εφάπτονται στη καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

# 22273-Λύση

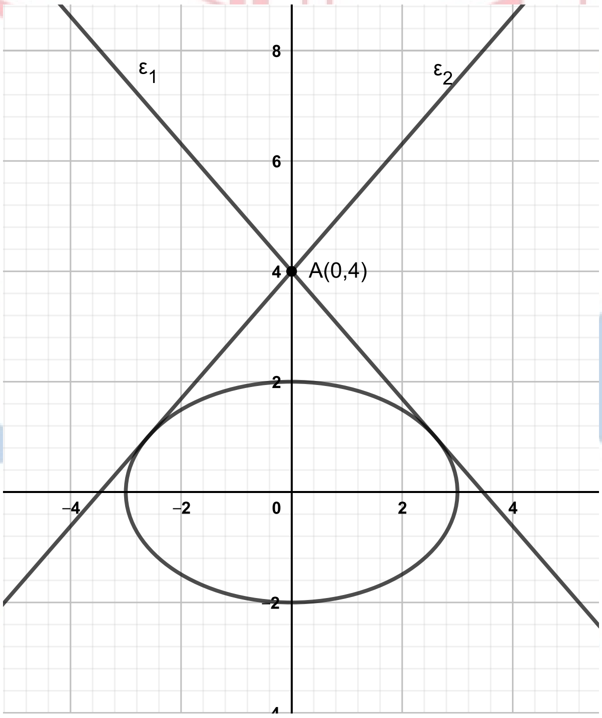
ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$= 1, όπου $\alpha^2$= 9 και $\beta^2 = 4$.

i. Για να βρούμε τα σημεία τομής της έλλειψης αυτής με τον άξονα x’x θέτουμε στην εξίσωση (1) y=0. Έτσι έχουμε $\frac{\chi^2}{9}$ = 1 ή $x^2$= 9, οπότε x =3 ή x= -3. Τα σημεία τομής με τον άξονα x’x είναι τα σημεία Α(3,0) και Α’(-3,0).
Αντίστοιχα, για να βρούμε τα σημεία τομής της έλλειψης αυτής με τον άξονα y’y θέτουμε στην εξίσωση (1) x=0. Έτσι έχουμε $\frac{y^2}{4}$ = 1 ή $y^2$= 4, οπότε y =2 ή y= -2. Τα σημεία τομής με τον άξονα y’y είναι τα σημεία Β(0,2) και Β’(0,-2).

ii. Η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη με εστίες στον άξονα x’x. Οπότε οι εστίες έχουν συντεταγμένες Ε(γ, 0) , και Ε’(-γ, 0), όπου γ = $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ = $\sqrt{5}$ . Άρα οι εστίες της Ε, και Ε’ έχουν συντεταγμένες Ε($\sqrt{5}$, 0) και Ε’(-$\sqrt{5}$, 0).

β)




Το σημείο Α(0, 4) είναι εξωτερικό σημείο της έλλειψης, αφού είναι σημείο στον άξονα y’y και η έλλειψη που μας δόθηκε τέμνει τον άξονα y’y στα σημεία Β(0, 2) και Β’(0,-2). Θεωρούμε Μ($x_1$, $y_1$) το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο Μ θα είναι της μορφής ε: $\frac{x\,x_1}{9} + \frac{y\,y_1}{4}$ = 1 ⇔ 4 $xx_1$+ 9 $yy_1$ = 36 . Η ευθεία ε διέρχεται από το

# 22273-Λύση

σημείο Α(0 , 4), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε. Ισχύει δηλαδή $4{\cdot}0\, x_1 + 9{\cdot}\, 4y_1 = 36 \Leftrightarrow y_1 = 1$ (2).

Επιπλέον το σημείο $M(x_1,\, y_1)$ είναι σημείο της έλλειψης, οπότε ικανοποιεί την εξίσωση(1). Άρα ισχύει $\frac{{x_1}^2}{9} + \frac{{y_1}^2}{4} = 1$ (3), και λόγω της (2) η σχέση (3) μας δίνει

$$\frac{{x_1}^2}{9} + \frac{1^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{{x_1}^2}{9} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad ή \quad x_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Για $x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ και λόγω της (2) έχουμε $y_1 = 1$, έχουμε την εφαπτόμενη ε με εξίσωση

$$ε:\ 4\,\frac{3\sqrt{3}}{2}x + 9\ y = 36 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\,x + 3y = 12.$$

Για $x_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ από τη σχέση (2) έχουμε $y_1 = 1$, οπότε η εφαπτόμενη ε έχει εξίσωση

$$ε:\ 4\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)x + 9\ y = 36 \Leftrightarrow -2\sqrt{3}\,x + 3y = 12.$$

Άρα οι δύο εφαπτόμενες της έλλειψης που διέρχονται από το σημείο Α(0, 4) είναι οι $ε_1$ : $2\sqrt{3}\,x + 3y = 12$ και $ε_2$ : $-2\sqrt{3}\,x + 3y = 12$.

# 22556

ΘΕΜΑ 2

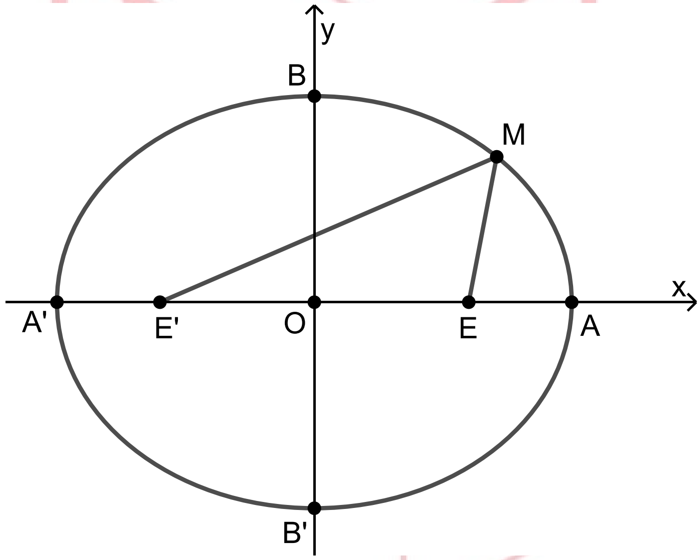
Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει κορυφές τα σημεία $A'(-5\,,0)$, $A(5\,,0)$, $B'(0\,,-4)$ και $B(0\,,4)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα μήκη των αξόνων της έλλειψης είναι $(A'A) = 10$ και $(B'B) = 8$ . (Μονάδες 10)

ii. Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-3\,,0)$ και $E(3\,,0)$. (Μονάδες 10)

β) Έστω $M$ ένα σημείο της έλλειψης. Να αποδείξετε ότι $(ME') + (ME) = 10$. (Μονάδες 5)



# 22556-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Είναι $(\text{A}'\text{A}) = |x_\text{A} - x_{\text{A}'}| = |5+5| = 10$ και $(\text{B}'\text{B}) = |y_\text{B} - y_{\text{B}'}| = |4+4| = 8$ ,

άρα ο μεγάλος άξονας έχει μήκος $(\text{A}'\text{A}) = 10$ και ο μικρός άξονας έχει μήκος $(\text{B}'\text{B}) = 8$.

ii) Είναι $(\text{A}'\text{A}) = 2\alpha$ ή $2\alpha = 10$ ή $\alpha = 5$

και $(\text{B}'\text{B}) = 2\beta$ ή $2\beta = 8$ ή $\beta = 4$ .

Επομένως

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

$5^2 = 4^2 + \gamma^2$

$\gamma^2 = 9$

$\gamma = 3$ .

Άρα οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $\text{E}'(-3\,,0)$ και $\text{E}(3\,,0)$.

β) Επειδή το $\text{M}$ είναι σημείο της έλλειψης, σύμφωνα με τον ορισμό της έλλειψης θα είναι

$(\text{ME}') + (\text{ME}) = 2\alpha$ ή $(\text{ME}') + (\text{ME}) = 10$.

# 22558

ΘΕΜΑ 2

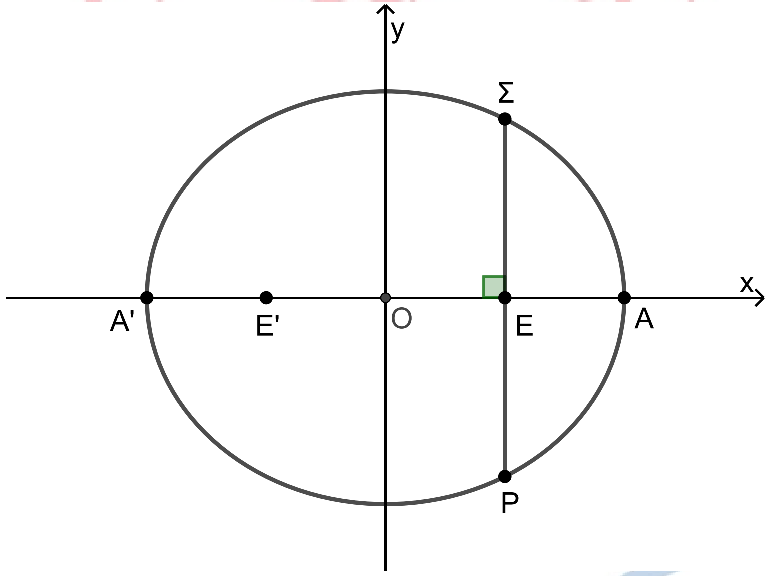
Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει εστίες τα σημεία $\mathrm{E}'(-2\,,0)$ και $\mathrm{E}(2\,,0)$ και μήκος μεγάλου άξονα $(\mathrm{A}'\mathrm{A}\,) = 8$.

α) Να αποδείξετε ότι η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ . (Μονάδες 12)

β) Έστω $\Sigma$ και $\mathrm{P}$ τα σημεία της έλλειψης που έχουν την ίδια τετμημένη με την εστία $\mathrm{E}(2\,,0)$. Επίσης το $\Sigma$ έχει θετική τεταγμένη και το $\mathrm{P}$ αρνητική τεταγμένη.

i. Να αποδείξετε ότι $\Sigma(2\,,3)$ και $\mathrm{P}(2\,,-3\,)$. (Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος $\Sigma\mathrm{P}$ . (Μονάδες 5)



# 22558-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $\mathrm{E}'(-2\,,0)$ και $\mathrm{E}(2\,,0)$,

άρα $2\gamma = (\mathrm{E}'\mathrm{E}\,) = 4$ ή $\gamma = 2$ .

Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι $(\mathrm{A}'\mathrm{A}\,) = 8$,

άρα $2\alpha = (\mathrm{A}'\mathrm{A}\,) = 8$ ή $\alpha = 4$.

Επομένως $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 4^2 - 2^2 = 12$.

Επειδή οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $x'x$, η έλλειψη έχει εξίσωση της μορφής

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, οπότε με αντικατάσταση προκύπτει $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

β) i) Από την εξίσωση της έλλειψης $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ , για $x = x_{\mathrm{E}} = 2$ βρίσκουμε:

$$\frac{2^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$$

$$3 + y^2 = 12$$

$$y^2 = 9$$

$$y = 3 \text{ ή } y = -3$$

Επειδή το $\Sigma$ έχει θετική τεταγμένη και το $\mathrm{P}$ αρνητική, θα είναι $\Sigma(2,3)$ και $\mathrm{P}(2,-3\,)$.

ii) Είναι $(\Sigma\mathrm{P}) = |y_{\mathrm{P}} - y_{\Sigma}| = |-3-3| = |-6| = 6$ .

# 22564

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$ και $C_2: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $Α(2,2)$ και $Β(-2,2)$ ανήκουν και στις δύο ελλείψεις.

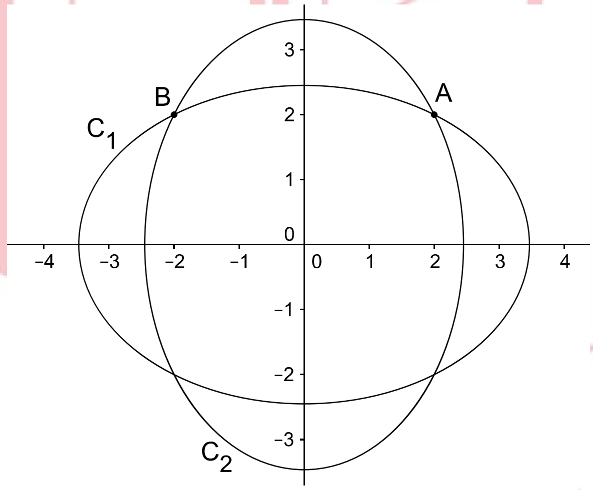
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης $ε_1$ της έλλειψης $C_1$ στο σημείο Α και η εξίσωση της εφαπτομένης $ε_2$ της έλλειψης $C_2$ στο σημείο Β είναι αντίστοιχα

$$x + 2y - 6 = 0 \text{ και } -2x + y - 6 = 0 \ .$$

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες $ε_1$, $ε_2$ είναι κάθετες. (Μονάδες 5)



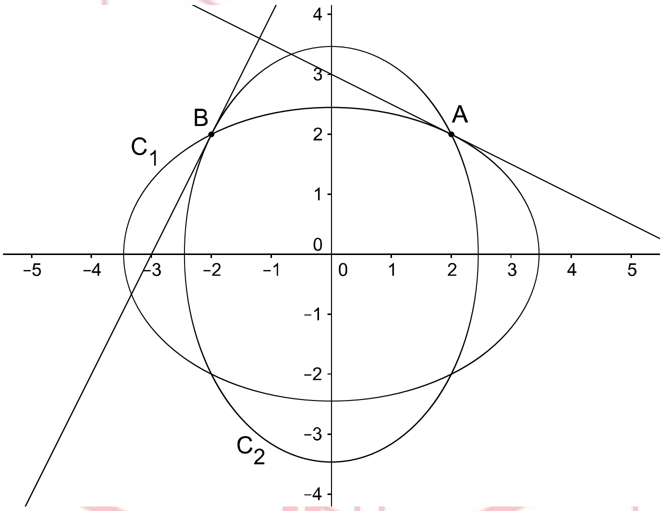
# 22564-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν τις εξισώσεις των δύο ελλείψεων αφού

$$\frac{2^2}{12}+\frac{2^2}{6}=\frac{4}{12}+\frac{4}{6}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1 \quad \text{και} \quad \frac{2^2}{6}+\frac{2^2}{12}=\frac{4}{6}+\frac{4}{12}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

Το σημείο Β είναι συμμετρικό του σημείο Α ως προς τον άξονα $y'y$, επομένως θα ανήκει στις δύο ελλείψεις, αφού και το σημείο Α ανήκει στις δύο ελλείψεις.




β) Η εφαπτομένη $\varepsilon_1$ της έλλειψης $C_1$ στο σημείο Α έχει εξίσωση:

$$\frac{2x}{12}+\frac{2y}{6}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{6}+\frac{2y}{6}=1 \Leftrightarrow x+2y=6 \Leftrightarrow x+2y-6=0.$$

Η εφαπτομένη $\varepsilon_2$ της έλλειψης $C_2$ στο σημείο Β έχει εξίσωση:

$$\frac{-2x}{6}+\frac{2y}{12}=1 \Leftrightarrow \frac{-2x}{6}+\frac{y}{6}=1 \Leftrightarrow -2x+y=6 \Leftrightarrow -2x+y-6=0.$$

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης $\varepsilon_1$ είναι $\lambda_1=-\frac{1}{2}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης $\varepsilon_2$ είναι $\lambda_2=2$.

Οι εφαπτομένες $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ είναι κάθετες, γιατί $\lambda_1\lambda_2=-\frac{1}{2}\cdot 2=-1$.