15092

ΘΕΜΑ 2

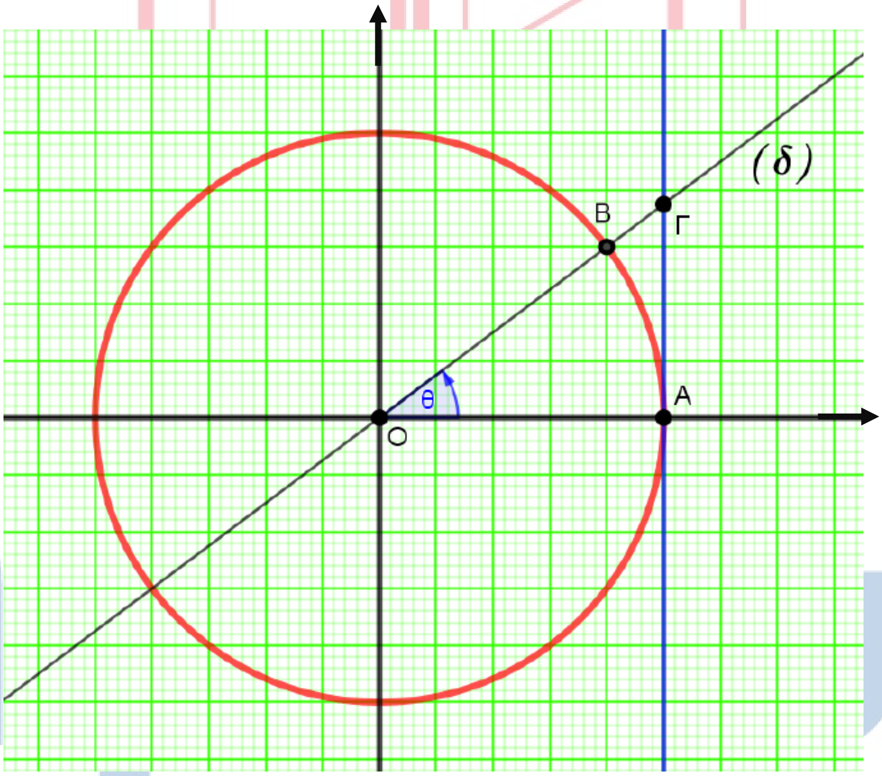
Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί ο τριγωνομετρικός κύκλος και η ευθεία (δ) η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Η τελική πλευρά ΟΒ της θετικής γωνίας $A\hat{O}B = \hat{\theta}$, αν προεκταθεί τέμνει την ευθεία (δ) στο σημείο Γ. Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$.

α) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τον αριθμό $\sigma\upsilon\nu\theta$ και στη συνέχεια τον αριθμό $\varepsilon\varphi\theta$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

(Μονάδες 12)



15092-Λύση

ΛΥΣΗ

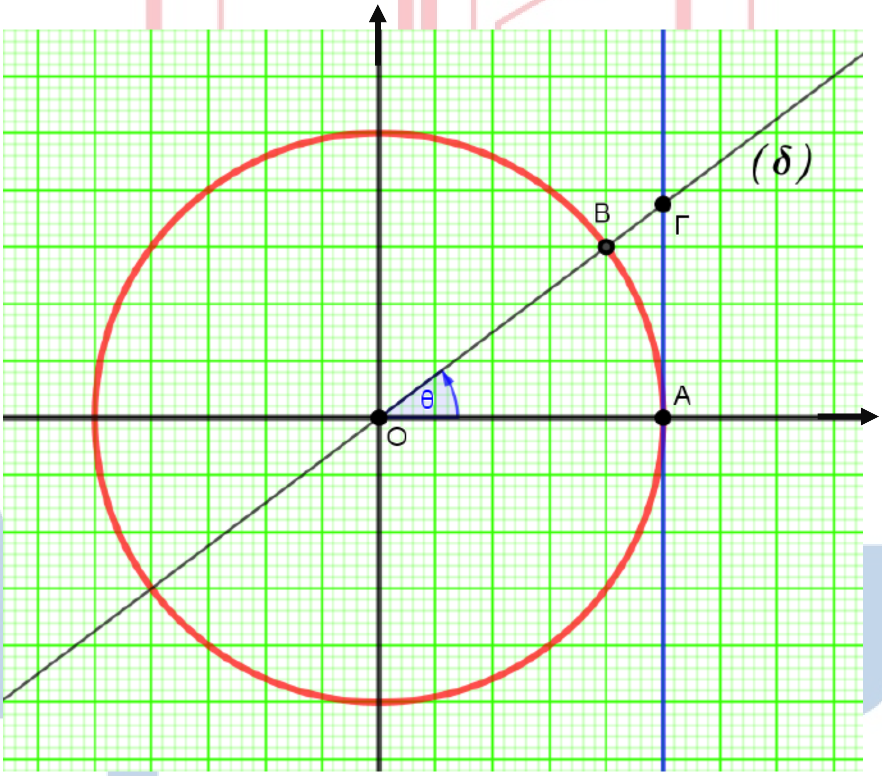
α) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι συνθ $= 0{,}8 = \frac{4}{5}$.

Εναλλακτικά, από τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $ημ^2θ + συν^2θ = 1$ παίρνουμε

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + συν^2θ = 1$, άρα $συν^2θ = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ και καθώς η γωνία θ βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο θα είναι $συνθ = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

Αλλά $εφθ = \frac{ημθ}{συνθ} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$.

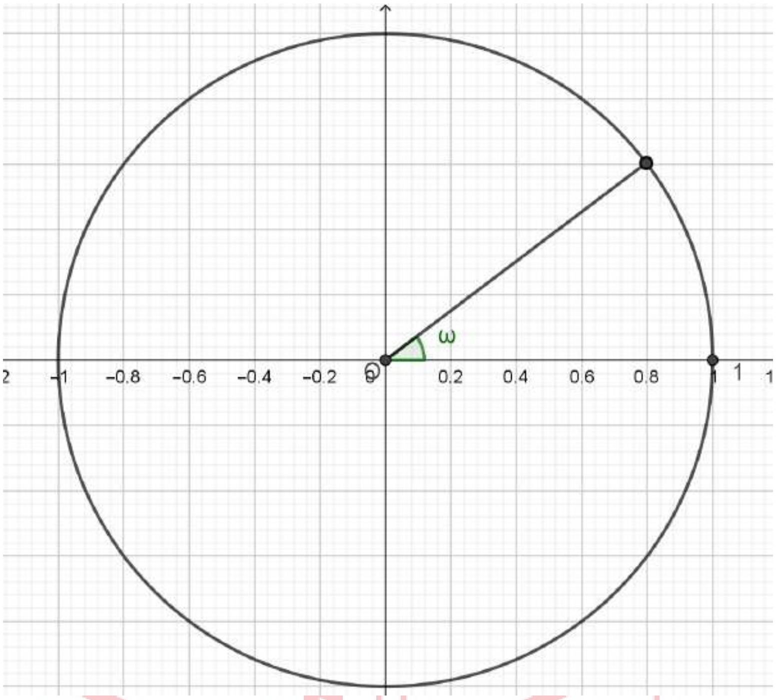
β) Γνωρίζουμε ότι είναι $B(συνθ, ημθ)$ και $Γ(1, εφθ)$. Έτσι έχουμε $B\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $Γ\left(1, \frac{3}{4}\right)$.



15193

ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\sigma\upsilon\nu\omega = 0{,}8$.



α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τις γωνίες στο διάστημα $[0, 2\pi]$, των οποίων το συνημίτονο είναι $-0{,}8$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

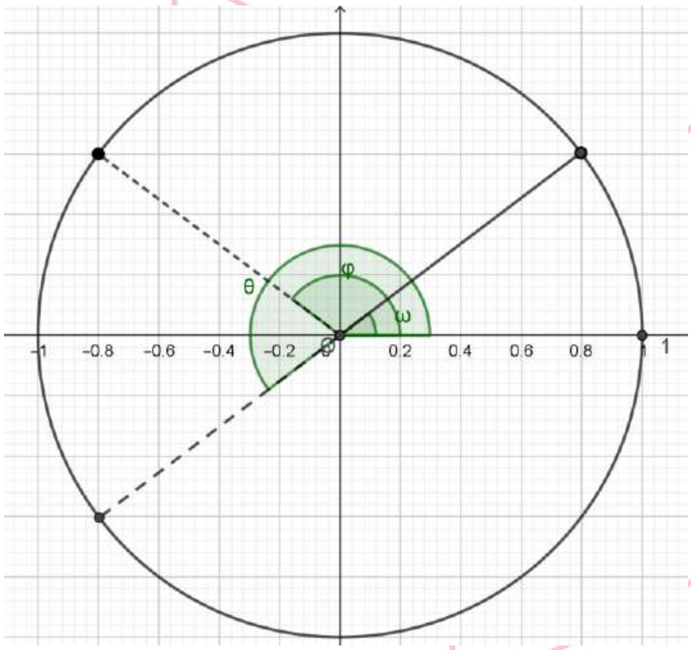
β) Να βρείτε την σχέση των γωνιών που βρήκατε στο α) ερώτημα με την γωνία $\hat{\omega}$.

(Μονάδες 13)

15193-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι γωνίες που έχουν συνημίτονο $-0,8$ έχουν τελική πλευρά στο δεύτερο ή στο τρίτο τεταρτημόριο, η οποία τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο σε σημεία με τετμημένη $-0,8$. Άρα οι ζητούμενες γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{\theta}$ είναι όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, με την τελική τους πλευρά να είναι με διακεκομμένη γραμμή.

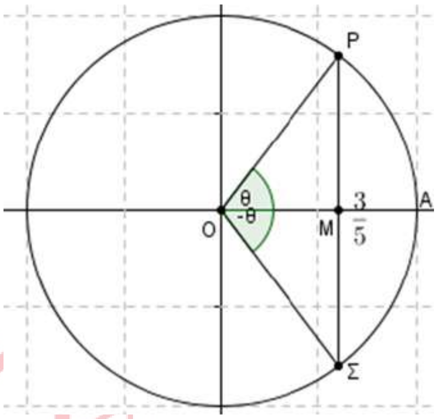


β) Δύο γωνίες σχεδιασμένες στον τριγωνομετρικό κύκλο έχουν αντίθετα συνημίτονα, αν τα σημεία τομής της τελικής τους πλευράς με τον τριγωνομετρικό κύκλο είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$ ή ως προς την αρχή O των αξόνων. Οπότε οι δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $\varphi = \pi - \omega$ ή διαφέρουν κατά π, οπότε $\theta = \pi + \omega$.

15266

ΘΕΜΑ 2

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες θ και $-\theta$.



α) Να αιτιολογήσετε γιατί $συν\theta = \frac{3}{5}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το $ημ\theta$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $-\theta$.

(Μονάδες 8)

15266-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η τελική πλευρά της γωνίας θ είναι η ΟΡ και το σημείο Ρ έχει τετμημένη $x=\frac{3}{5}$. Άρα $συνθ=\frac{3}{5}$.

β) Από την γνωστή ταυτότητα $συν^2θ+ημ^2θ=1$, έχουμε $\frac{9}{25}+ημ^2θ=1$ απ' όπου προκύπτει ότι $ημ^2θ=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$.

Αλλά $0<θ<\frac{π}{2}$, οπότε $ημθ>0$, άρα $ημθ=\frac{4}{5}$.

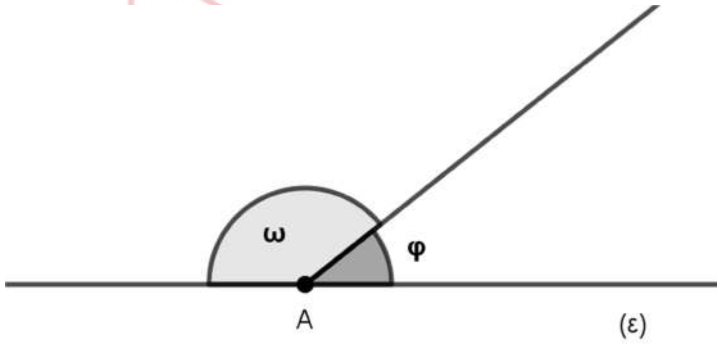
γ) Επειδή η ΟΣ είναι συμμετρική της ΟΡ ως προς τον άξονα $x'x$, το σημείο Σ έχει ίδια τετμημένη με το Ρ και αντίθετη τεταγμένη.

Άρα, $συν(-θ)=συνθ=\frac{3}{5}$ και $ημ(-θ)=-ημθ=-\frac{4}{5}$

15652

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο A της ευθείας (ε) του παρακάτω σχήματος.



α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της αμβλείας γωνίας ω.

(Μονάδες 12)

15652-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα

$$\eta\mu^2\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi=1 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2\varphi=1 \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu^2\varphi=1-\frac{9}{25} \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu^2\varphi=\frac{16}{25} \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu\varphi=\pm\frac{4}{5}.$$

Επειδή η γωνία φ είναι οξεία, έχουμε τελικά $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{4}{5}$.

β) Όπως φαίνεται από το σχήμα, η γωνία ω είναι παραπληρωματική της γωνίας φ, οπότε $\eta\mu\omega=\eta\mu\varphi=\frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=-\sigma\upsilon\nu\varphi=-\frac{4}{5}$.

15999

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = 2συν\left(\frac{π}{2} - θ\right) + ημ(-θ)$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = ημθ$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης Α, όταν $θ \in \left(\frac{3π}{2}, 2π\right)$ και $συνθ = \frac{12}{13}$.

(Μονάδες 13)

15999-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι γνωστό ότι $συν\left(\frac{π}{2}-θ\right)=ημθ$ και $ημ(-θ)=-ημθ$, οπότε έχουμε:

$$A=2συν\left(\frac{π}{2}-θ\right)+ημ(-θ)=2ημθ-ημθ=ημθ$$

που είναι το ζητούμενο.

β) Από την ταυτότητα $ημ^2θ+συν^2θ=1$, με $συνθ=\frac{12}{13}$ έχουμε:

$$ημ^2θ=1-συν^2θ=1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169}$$

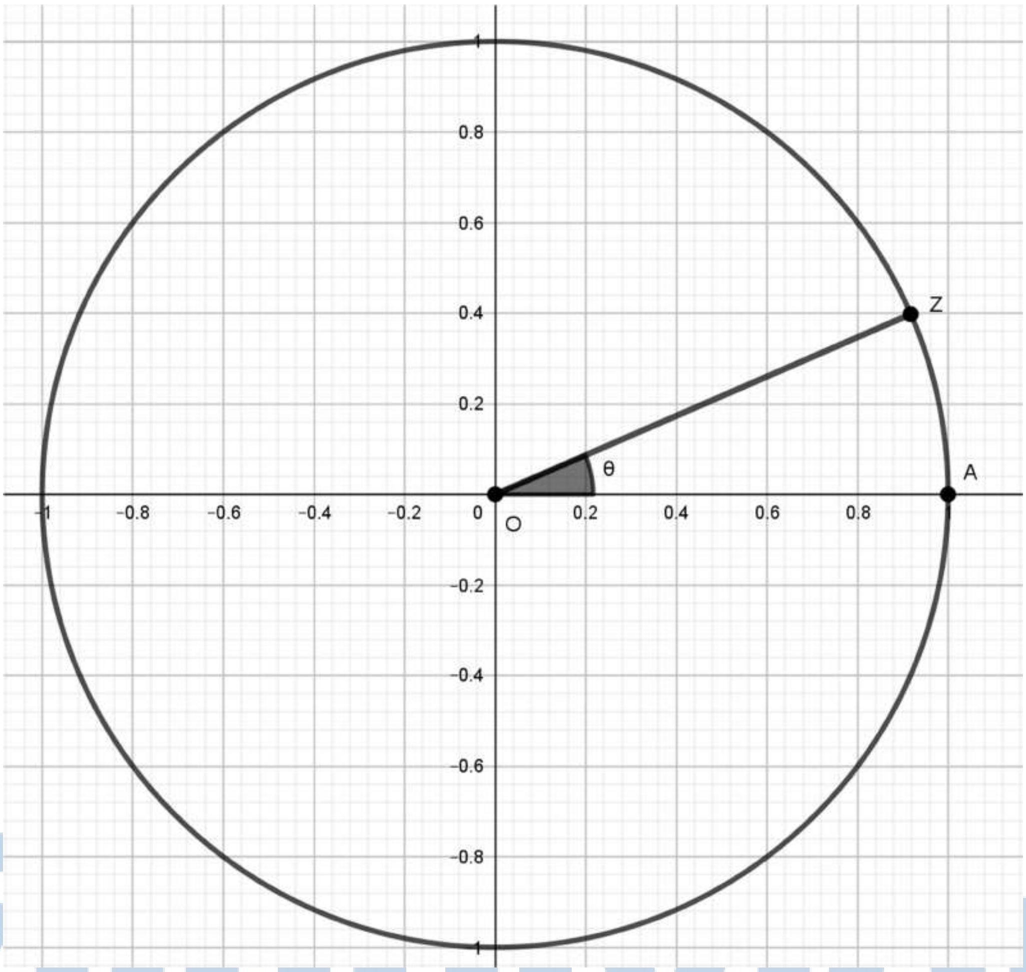
Αλλά $θ\in\left(\frac{3π}{2},2π\right)$, οπότε $ημθ<0$, άρα:

$$ημθ=-\sqrt{\frac{25}{169}}=-\frac{5}{13}$$

17933

ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $\widehat{\mathrm{AOZ}} = \theta$.



α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi + \theta$ και $4\pi - \theta$.

(Μονάδες 9)

β)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\eta\mu\theta = 0,4$.

(Μονάδες 7)

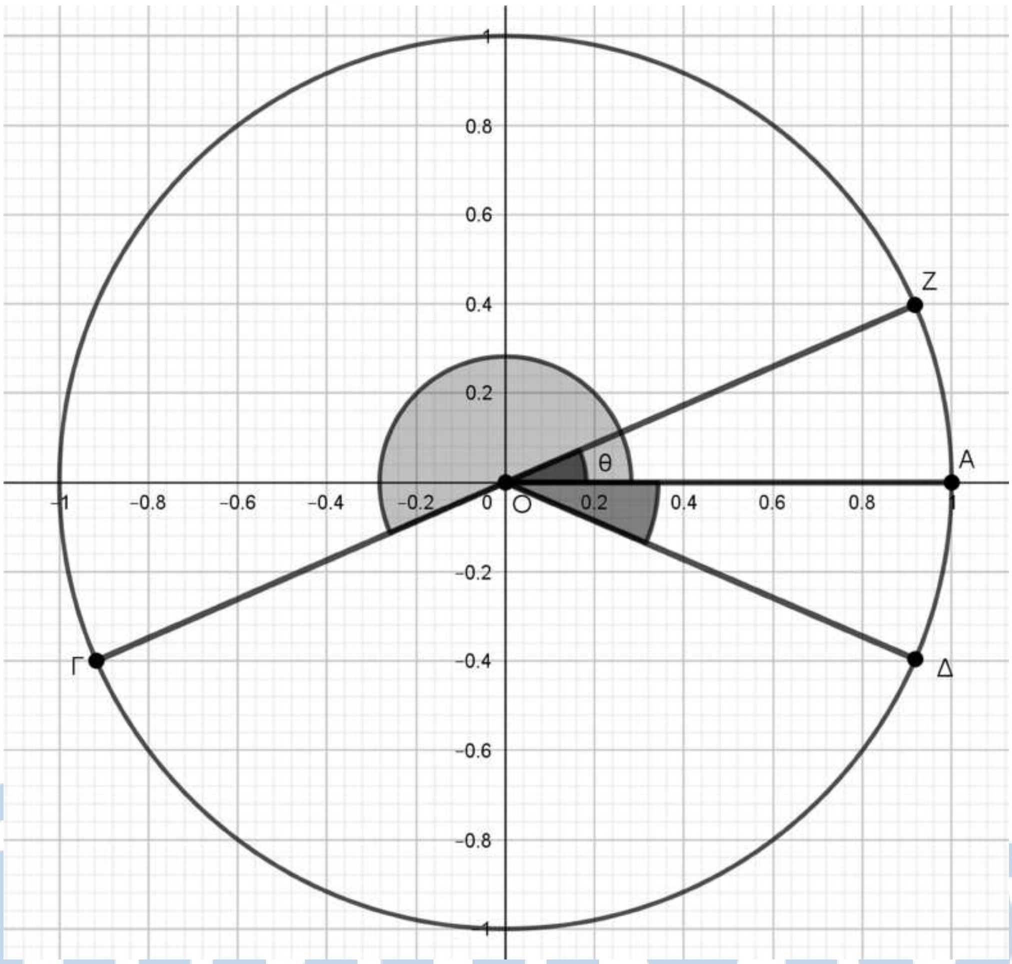
ii. Με χρήση του βi) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\eta\mu(3\pi + \theta)$ και $\eta\mu(4\pi - \theta)$.

(Μονάδες 9)

17933-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο έχουμε $\widehat{\mathrm{AOZ}} = \theta$, η τελική πλευρά της $3\pi + \theta$, είναι η $\mathrm{O\Gamma}$ και η τελική πλευρά της $4\pi - \theta$ είναι η $\mathrm{O\Delta}$.



β)

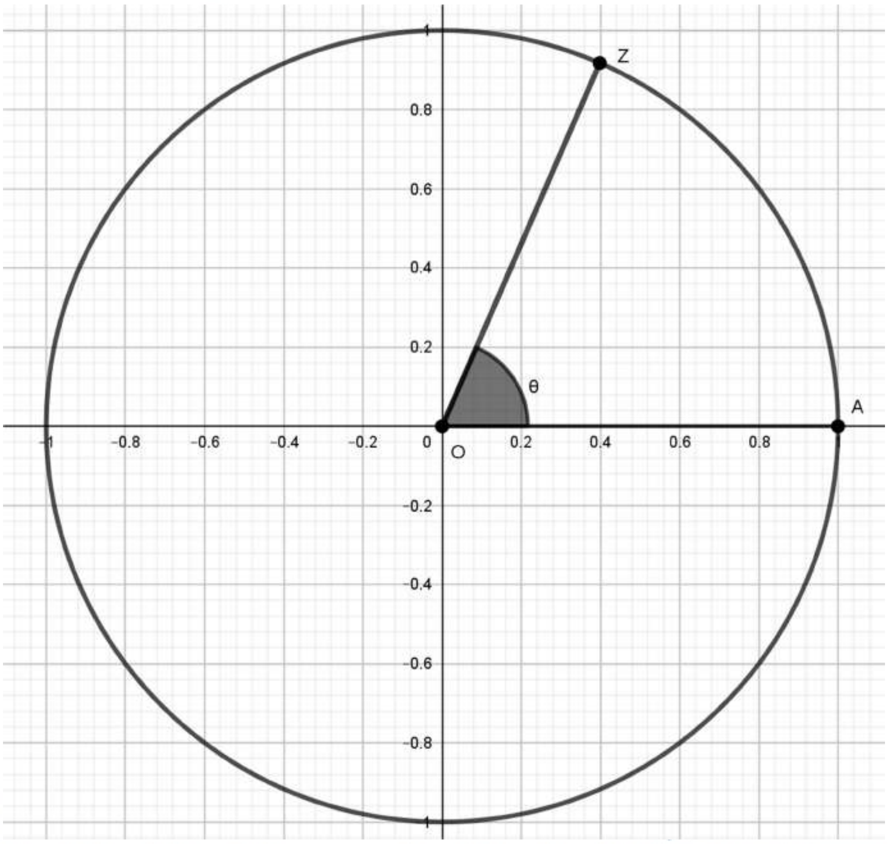
i. Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, η τεταγμένη του σημείου Z της τελικής πλευράς της γωνίας θ είναι $0,4$, άρα $\eta\mu\theta = 0,4$.

ii. Από τις συμμετρίες που σχηματίζονται στον τριγωνομετρικό κύκλο, έχουμε:
$\eta\mu(3\pi + \theta) = -0,4$ και $\eta\mu(4\pi - \theta) = -0,4$.

17936

ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $\widehat{\mathrm{AOZ}}=\theta$.



α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi+\theta$ και $\dfrac{\pi}{2}+\theta$.

(Μονάδες 9)

β)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\sigma\upsilon\nu\theta=0,4$.

(Μονάδες 7)

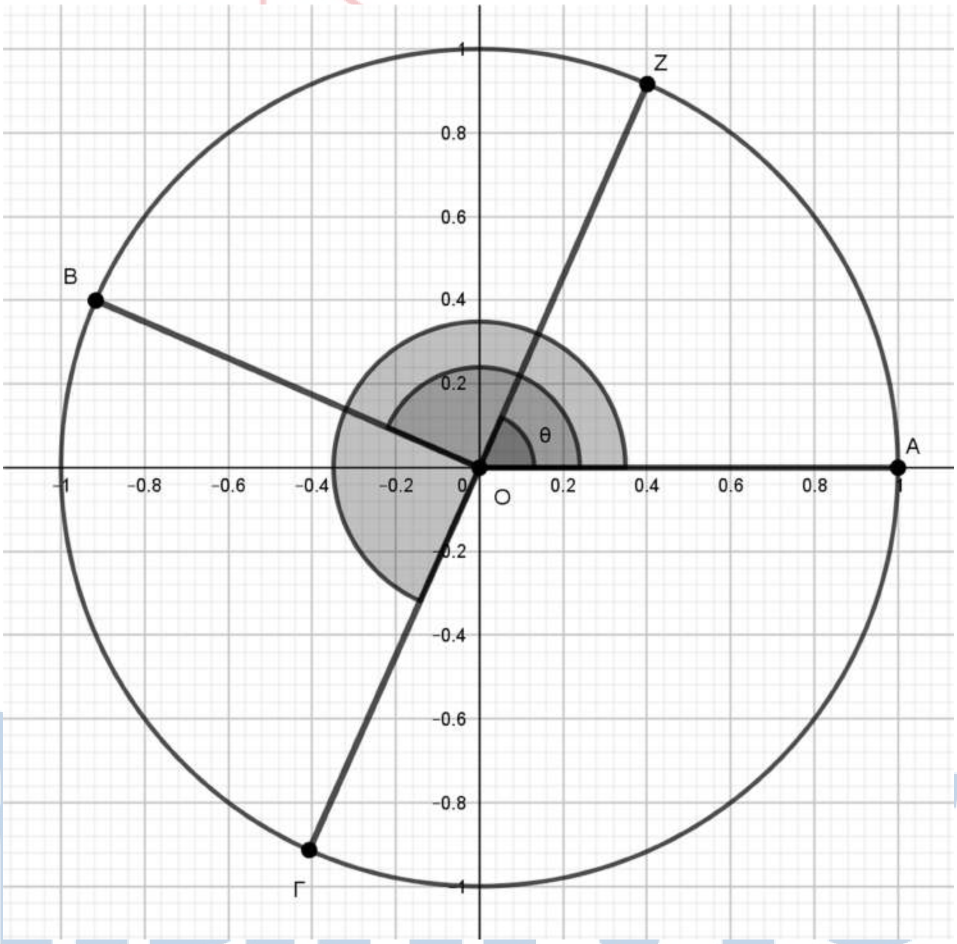
ii. Με χρήση του βi) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\sigma\upsilon\nu\left(3\pi+\theta\right)$ και $\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$.

(Μονάδες 9)

17936-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο έχουμε $\widehat{\mathrm{AOZ}}=\theta$, η τελική πλευρά της $3\pi+\theta$, είναι η $\mathrm{O\Gamma}$ και η τελική πλευρά της $\frac{\pi}{2}+\theta$ είναι η OB.



β)

i. Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, η τετμημένη του σημείου Z της τελικής πλευράς της γωνίας θ είναι $0,4$, άρα $\sigma\upsilon\nu\theta=0,4$.

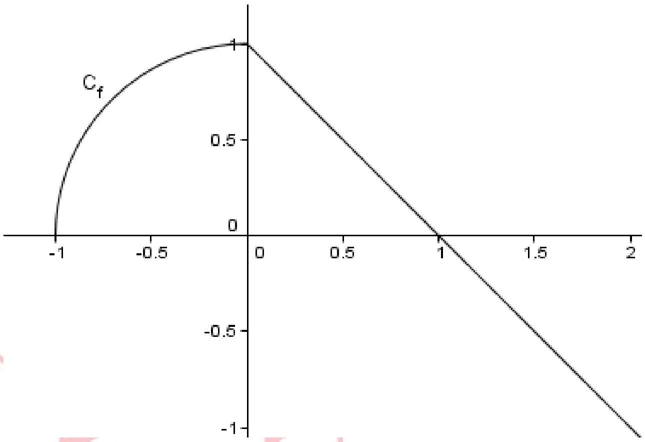
ii. Από τις συμμετρίες που σχηματίζονται στον τριγωνομετρικό κύκλο, έχουμε:

$\sigma\upsilon\nu(3\pi+\theta)=-0,4$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=0,4$.

18231

ΘΕΜΑ 4

Έστω $f:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση C_f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρείτε τη μονοτονία και τη μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 5)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$f\left(-\frac{3}{5}\right),\ f\left(-\frac{5}{9}\right)$$

(Μονάδες 7)

γ) Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 0\\ 1-x, & x>0\end{cases},$$

να βρείτε τους αριθμούς $f(\sigma\upsilon\nu 120^o)$, $f(\eta\mu 120^o)$

(Μονάδες 8)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x-2)$, $x\ge 1$.

(Μονάδες 5)

18231-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από τη γραφική παράσταση της f συμπεραίνουμε ότι αυτή είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,\,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,\,+\infty)$. Επιπλέον η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=0$. Η μέγιστη τιμή της είναι ίση με $f(0)=1$.

β) Οι αριθμοί $-\frac{3}{5},-\frac{5}{9}$ περιέχονται στο διάστημα $[-1,\,0]$ όπου η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και

$$-\frac{3}{5}+\frac{5}{9}=\frac{-27+25}{45}=-\frac{2}{45}<0$$

οπότε $-\frac{3}{5}<-\frac{5}{9}$ και λόγω της μονοτονίας της f συμπεραίνουμε ότι $f\left(-\frac{3}{5}\right)<f\left(-\frac{5}{9}\right)$.

γ) Είναι:

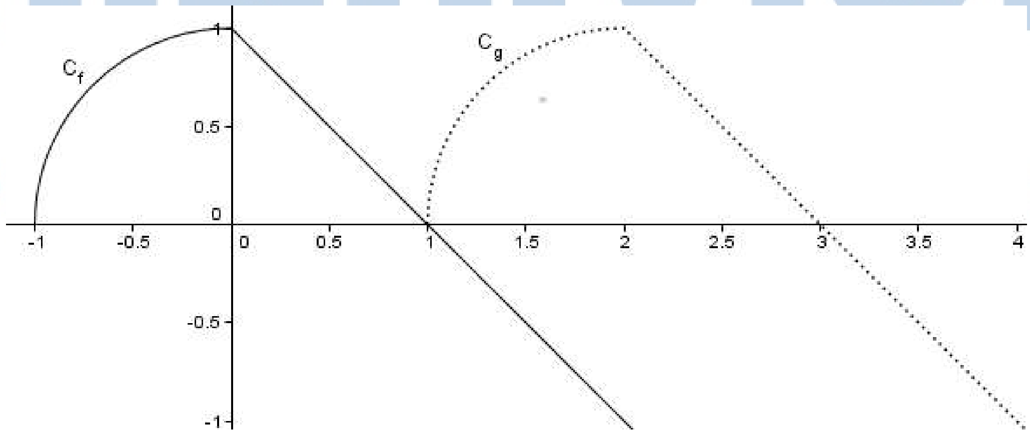
$$\sigma\upsilon\nu 120^\circ=\sigma\upsilon\nu(180^\circ-60^\circ)=-\sigma\upsilon\nu 60^\circ=-\frac{1}{2}\in[-1,\,0]$$

$$\text{και } \eta\mu 120^\circ=\eta\mu(180^\circ-60^\circ)=\eta\mu 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\in(0,\,+\infty)$$

Έτσι, με τη βοήθεια του τύπου της f έχουμε:

$$f(\sigma\upsilon\nu 120^\circ)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και } f(\eta\mu 120^\circ)=f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

δ) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει με μεταφορά της C_f δυο μονάδες προς τα δεξιά και φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



21237

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ότι $\eta\mu\theta = \dfrac{\eta\mu\dfrac{2\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\pi}{4}}$.

α) Να δείξετε ότι:

i. $\eta\mu\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(Μονάδες 5)

ii. $\eta\mu\theta = \sqrt{3} - 1$.

(Μονάδες 7)

β) Αν για την γωνία θ έχουμε $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\theta$.

(Μονάδες 13)

21237-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Έχουμε $\eta\mu\frac{2\pi}{3}=\eta\mu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ii.Έχουμε $\eta\mu\theta=\dfrac{\eta\mu\frac{2\pi}{3}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}}\overset{i}{=}\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}-1.$

β) Έχουμε $\sigma\upsilon\nu\theta=\pm\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}=\pm\sqrt{1-\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\pm\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt{2\sqrt{3}-3}$, δεδομένου ότι αν μια γωνία ανήκει στο 1ο τεταρτημόριο το συνημίτονό της είναι θετικός αριθμός.

22002

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ότι $ημ18^o = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Να βρείτε τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) $συν72^o$

(Μονάδες 8)

β) $συν108^o$

(Μονάδες 9)

γ) $ημ162^o$

(Μονάδες 8)

22002-Λύση

ΛΥΣΗ

Αναγωγή στο 1^{ο} τεταρτημόριο:

α) $συν72^{o} = συν(90^{o} - 18^{o}) = ημ18^{o} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

β) $συν108^{o} = συν(90^{o} + 18^{o}) = -ημ18^{o} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

γ) $ημ162^{o} = ημ(180^{o} - 18^{o}) = ημ18^{o} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.