

15046

ΘΕΜΑ 2

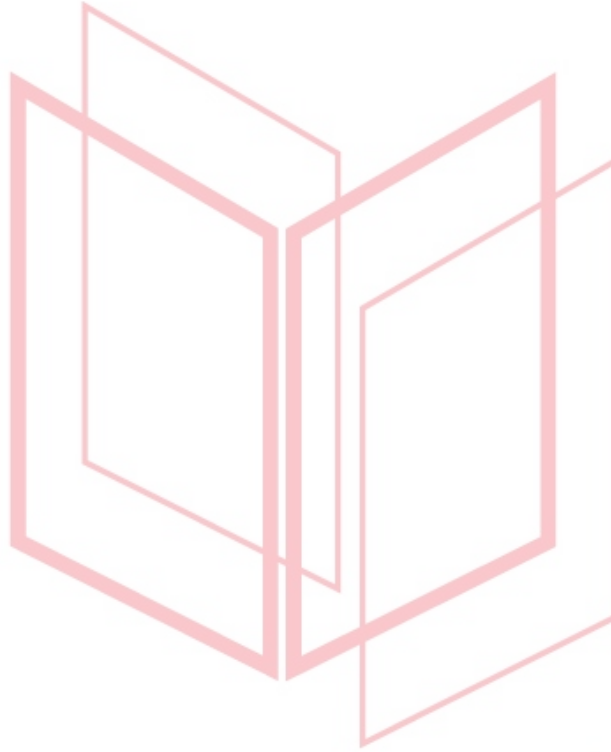
Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\sin A = -\frac{3}{5}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το $\eta\mu A$.

(Μονάδες 15)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

15046-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Ο αριθμός A περιέχεται στο διάστημα $(0, \pi)$ και επειδή ισχύει $\sin A < 0$, έχουμε $\frac{\pi}{2} < A < \pi$.

Άρα το τρίγωνο έχει τη γωνία A αμβλεία, οπότε είναι αμβλυγώνιο.

β) Από την βασική ταυτότητα $\eta\mu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 A = 1$ με $\sigma\upsilon\nu A = -\frac{3}{5}$, παίρνουμε: $\eta\mu^2 A + \frac{9}{25} = 1$,

οπότε

$$\eta\mu^2 A = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

Επιπλέον, αφού $\frac{\pi}{2} < A < \pi$, έχουμε $\eta\mu A > 0$, οπότε $\eta\mu A = \frac{4}{5}$.

αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

15185

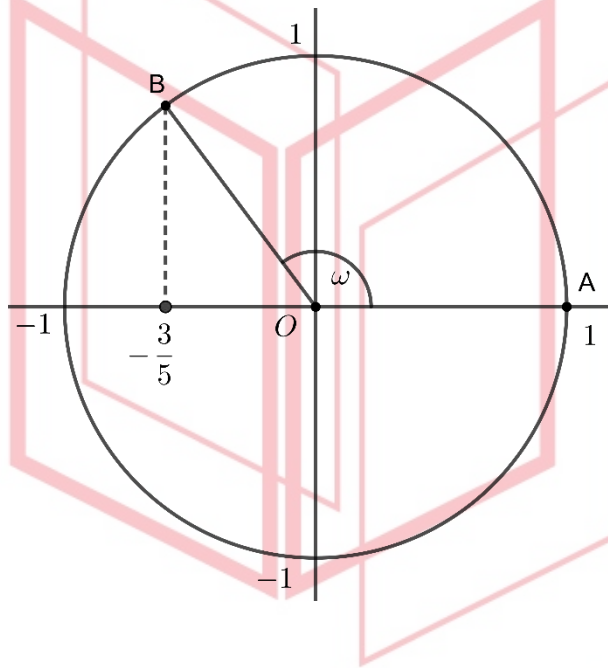
ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ω του παρακάτω σχήματος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 11)

β) Αν $\sin \omega = -\frac{3}{5}$, να βρείτε το $\eta\mu\omega$.

(Μονάδες 14)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

15185-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το συνημίτονο της γωνίας ω είναι όσο και η τετμημένη του σημείου B του τριγωνομετρικού κύκλου. Άρα, $\sigma\upsilon\upsilon\omega = -\frac{3}{5}$.

β) Ισχύει ότι:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\upsilon^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{16}{25} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\omega = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}.$$

Από το σχήμα φαίνεται ότι $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ οπότε $\eta\mu\omega > 0$. Άρα, $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$.

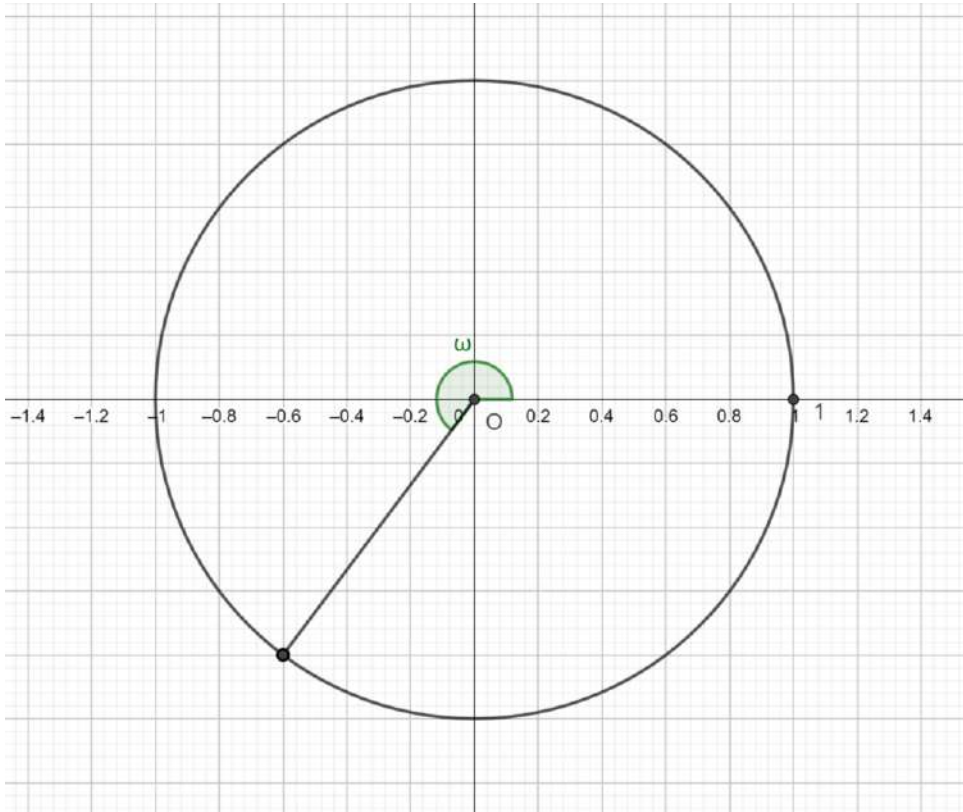
αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

15192

ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$.



α) Να αιτιολογήσετε με βάση το σχήμα γιατί $\sin\omega = -\frac{3}{5}$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

i. $\eta\mu\omega$.

(Μονάδες 6)

ii. $\epsilon\varphi\omega$

(Μονάδες 7)

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

15192-Λύση

ΛΥΣΗ

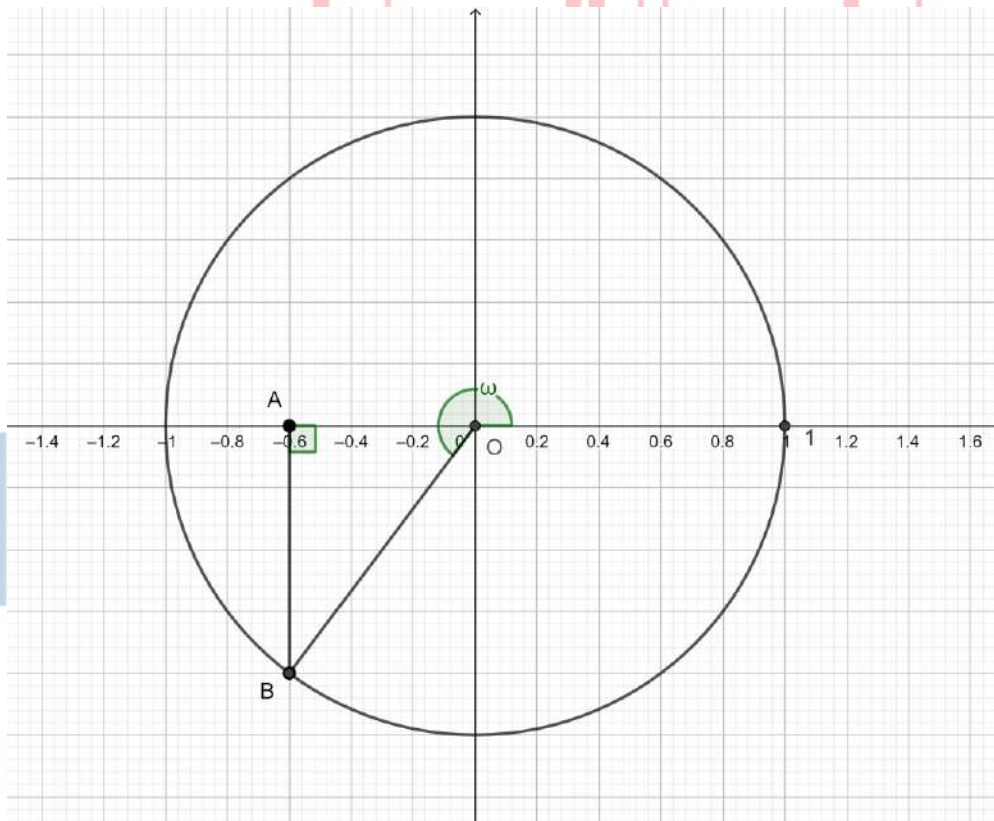
α) Το συνημίτονο μιας γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τετμημένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της με τον κύκλο. Οπότε είναι $\sigma\upsilon\nu\omega = -0,6 = -\frac{3}{5}$.

β)

ι. Είναι: $\eta\mu\omega = \pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}$, το $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$ απορρίπτεται

διότι $\omega \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \eta\mu\omega < 0$, οπότε $\eta\mu\omega = -\frac{4}{5}$.

Εναλλακτικά, σχεδιάζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο $\text{O}\hat{\text{A}}\text{B}$ ($\hat{\text{A}} = \frac{\pi}{2}$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$(\text{AB}) = \sqrt{1-(\text{OA})^2} = \sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

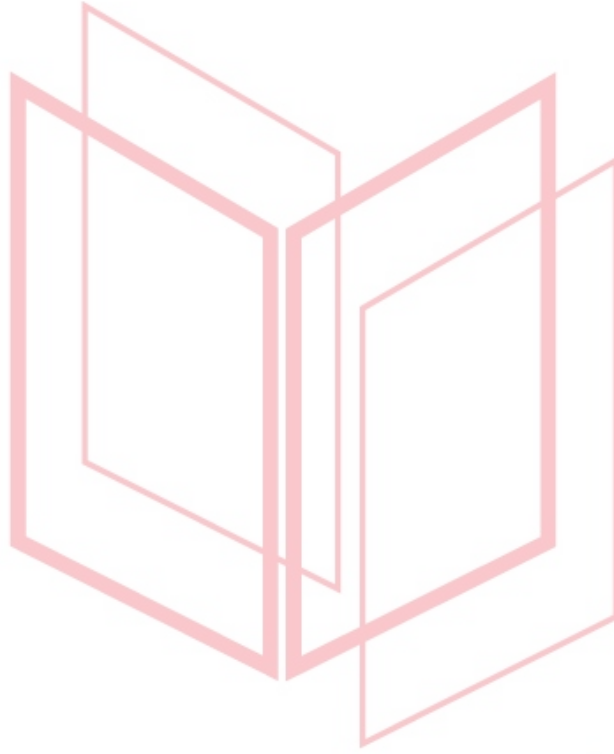
Όμως το ημίτονο μιας γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της με τον κύκλο. Οπότε είναι $\eta\mu\omega = -\frac{4}{5}$ (1).

15192-Λύση

ii. Υπολογισμός της $\varepsilon\varphi\omega$:

Είναι: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$, οπότε από το α) ερώτημα και τη σχέση (1) έχουμε

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}.$$



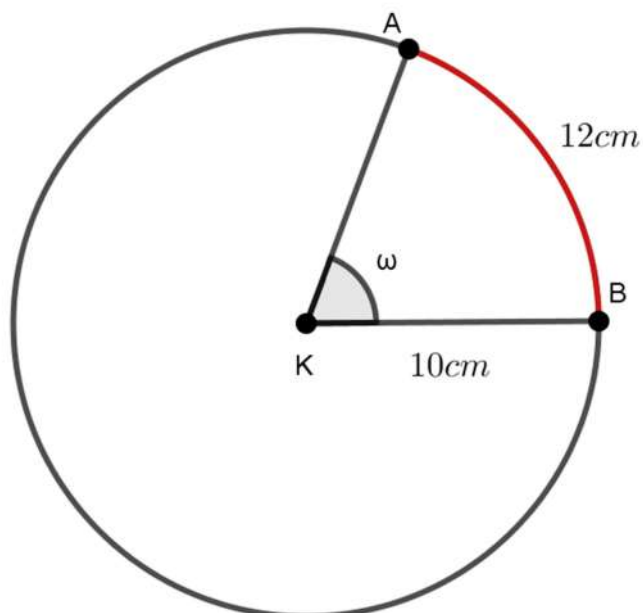
αθηνάπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

15814

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο κύκλος του παρακάτω σχήματος με κέντρο K και ακτίνα 10 cm . Επίσης δίνεται το τόξο \widehat{AB} με μήκος 12 cm και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω .



α)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί το μέτρο της γωνίας ω είναι $1,2\text{ rad}$.

(Μονάδες 6)

ii. Με χρήση του αι) ερωτήματος, να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω είναι οξεία.

(Μονάδες 6)

β) Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{9}{25}$, να βρείτε το $\eta\mu\omega$.

(Δίνεται ότι $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$).

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ (Μονάδες 13)

15814-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Στο συγκεκριμένο σχήμα, η γωνία ω είναι επίκεντρη και βαίνει σε τόξο μήκους 12 cm . Δεδομένου ότι το 1 rad (1 ακτίσιο) είναι η γωνία η οποία, όταν γίνει επίκεντρη, βαίνει σε τόξο μήκους 10 cm , η γωνία ω είναι ίση με $\frac{12}{10} = 1,2\text{ rad}$.

ii. Ισχύει ότι $1,2\text{ rad} < \frac{\pi}{2}\text{ rad}$ (γιατί $1,2 \cdot 2 = 2,4 < \pi$), οπότε η γωνία ω είναι οξεία.

β) Έχουμε:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega + \left(\frac{9}{25}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega = 1 - \frac{81}{625} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega = \frac{544}{625} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\omega = \pm \frac{\sqrt{544}}{25} = \pm \frac{4\sqrt{34}}{25}$$

Και επειδή η γωνία ω είναι οξεία, $\eta\mu\omega = \frac{4\sqrt{34}}{25}$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

16000

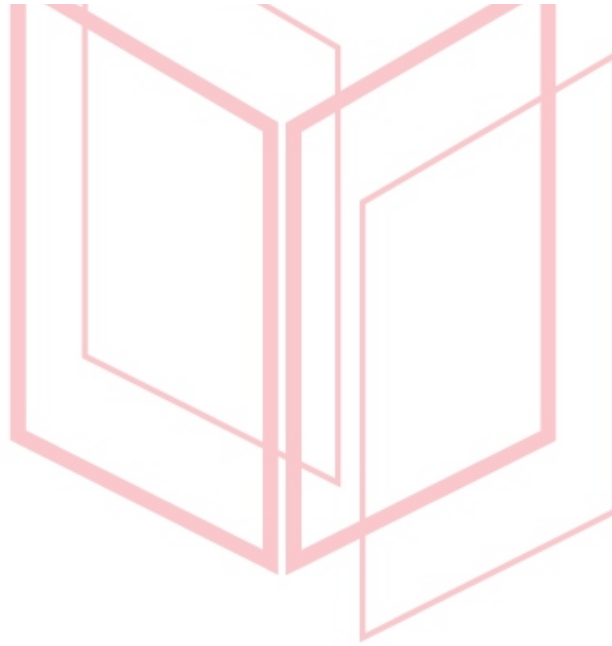
ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία θ ώστε $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Έστω θ μια γωνία με $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$. Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

(Μονάδες 13)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

16000-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει τέτοια γωνία, τότε από την ταυτότητα $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$ θα έχουμε:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \text{ δηλαδή } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

που αποκλείεται. Επομένως δεν υπάρχει τέτοια γωνία.

β) Είναι:

$$\eta\mu^2\theta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

και επειδή $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, έχουμε $\eta\mu\theta < 0$, οπότε $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία ω , με $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, για την οποία ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$.

α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίστε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \epsilon\varphi\omega}$.

(Μονάδες 13)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

20817-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από την τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ έχουμε ισοδύναμα:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\omega = \frac{9}{25} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\omega = \pm\frac{3}{5}.$$

Επειδή $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, $\eta\mu\omega < 0$, οπότε $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$.

β) Έχουμε $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$ και $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$, οπότε $\epsilon\phi\omega = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$. Συνεπώς η τιμή της παράστασης

A είναι:

$$A = \frac{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \epsilon\phi\omega} = \frac{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{7}{5}}{\frac{7}{4}} = -\frac{4}{5}.$$

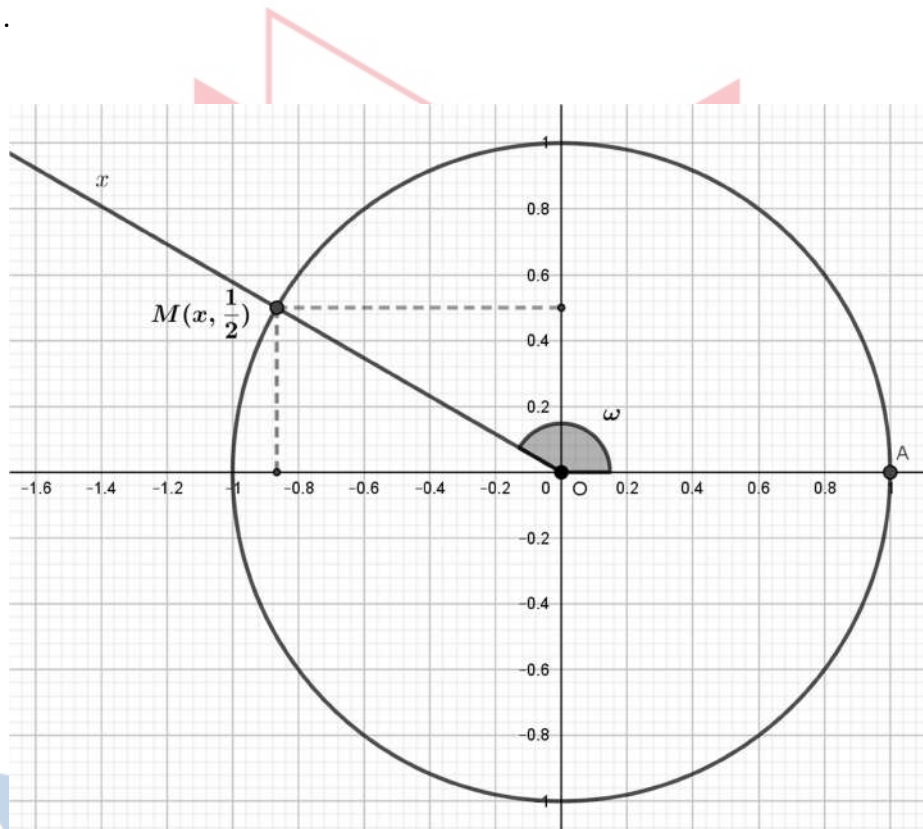
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

αθημαπινίσις

ΘΕΜΑ 2

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται γωνία $\widehat{AOx} = \omega$, $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ και το σημείο

$$M\left(x, \frac{1}{2}\right).$$



α) Να βρείτε το $\eta\mu\omega$. Με ποιον τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας ω ισούται η τετμημένη x του σημείου M ;

(Μονάδες 12)

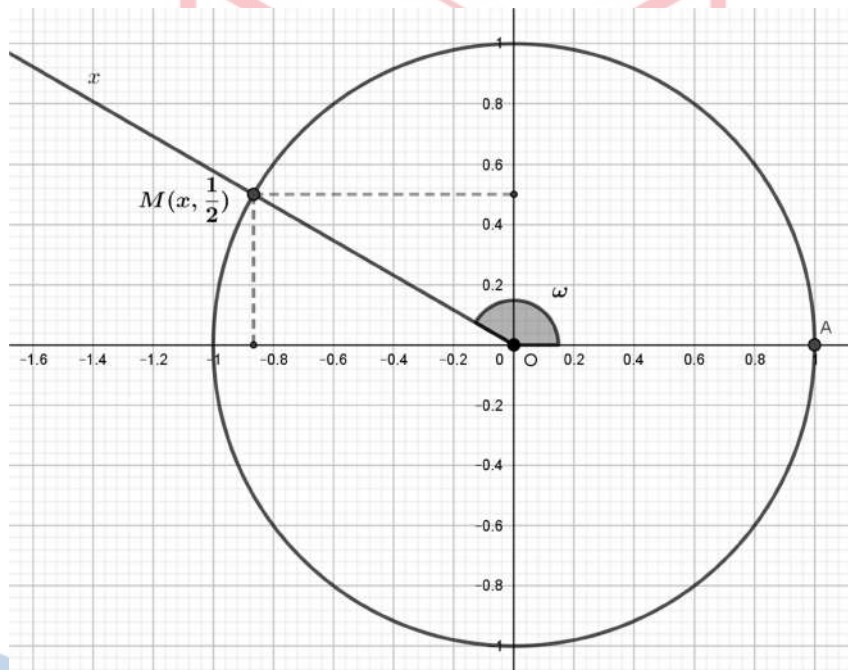
β) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Μονάδες 13)

20824-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το σημείο $M\left(x, \frac{1}{2}\right)$ είναι σημείο τομής της τελικής πλευράς της γωνίας ω με τον τριγωνομετρικό κύκλο, άρα η τετμημένη του ισούται με το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και η τεταγμένη του με το $\eta\mu\omega$. Οπότε $x = \sigma\upsilon\nu\omega$ και $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$



β) Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ και από το α) ερώτημα $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$. Οπότε έχουμε ισοδύναμα:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Από το α) ερώτημα η τετμημένη x του σημείου M ισούται με το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και $x < 0$. Άρα και

$$\sigma\upsilon\nu\omega < 0, \text{ οπότε } \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$