12857

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x -2\lambda +2=0$.

α) i. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda=-2$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το $x=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in R$ για τις οποίες η εξίσωση είναι ταυτότητα.

(Μονάδες 8)

12857-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Για λ=-2 η εξίσωση γίνεται $-3x+6=0 \Leftrightarrow -3x=-6 \Leftrightarrow x=2.$

Άρα η λύση της εξίσωσης είναι x=2.

ii) Για x=1 η εξίσωση γίνεται

$$(\lambda-1)1-2\lambda+2=0 \Leftrightarrow \lambda-1-2\lambda+2=0 \Leftrightarrow -\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=1.$$

β) Για να έχουμε ταυτότητα η εξίσωση θα είναι της μορφής 0x=0 , δηλαδή λ-1=0 και 2λ-2=0, επομένως η δύο εξισώσεις συναληθεύουν για λ=1.

12917

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $(|\alpha-1|-3)x=\alpha+2$ (1), με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για $\alpha=0$ και $\alpha=5$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του α ισχύει $|\alpha-1|=3$.

(Μονάδες 8)

ii. Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα β)i.

(Μονάδες 9)

12917-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για $\alpha = 0$ η εξίσωση γίνεται:

$$(|0-1|-3)\cdot x = 0+2 \Leftrightarrow (1-3)\cdot x = 2 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1.$$

Για $\alpha = 5$ η εξίσωση γίνεται:

$$(|5-1|-3)\cdot x = 5+2 \Leftrightarrow (4-3)\cdot x = 7 \Leftrightarrow x = 7.$$

β)

i. Είναι $|\alpha - 1| = 3 \Leftrightarrow \{\alpha - 1 = 3 \text{ ή } \alpha - 1 = -3\} \Leftrightarrow \{\alpha = 4 \text{ ή } \alpha = -2\}.$

ii. Για $\alpha = 4$ η εξίσωση γίνεται:

$$(|4-1|-3)\cdot x = 4+2 \Leftrightarrow 0\cdot x = 6\,,$$

που είναι αδύνατη.

Για $\alpha = -2$ η εξίσωση γίνεται:

$$(|-2-1|-3)\cdot x = -2+2 \Leftrightarrow 0\cdot x = 0,$$

που είναι ταυτότητα.

13169

ΘΕΜΑ 2

Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3 \leq x \leq 5$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x - 5 \leq 0 < x - 2$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| - |x - 5| = 2$.

(Μονάδες 15)

13169-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αφού $3 \le x \le 5$, θα έχουμε $x - 5 \le 5 - 5$, άρα $x - 5 \le 0$. Ακόμα $3 \le x$, οπότε $3 - 2 \le x - 2$, άρα $1 \le x - 2$. Ώστε $x - 2 > 0$.

β) Γνωρίζουμε ότι αν $y \ge 0$, τότε $|y| = y$ ενώ αν $y \le 0$, τότε $|y| = -y$. Έτσι η δοθείσα εξίσωση γράφεται $x - 2 - (5 - x) = 2$, άρα $x - 2 - 5 + x = 2$, οπότε $2x = 9$. Τελικά $x = \frac{9}{2}$, λύση η οποία είναι δεκτή, αφού $\frac{9}{2} = 4{,}5 \ \in [3{,}5]$.

13170

ΘΕΜΑ 4

Υποθέτουμε ότι κάθε κεφάλαιο που κατατίθεται σε έναν λογαριασμό μιας τράπεζας, αυξάνεται στο τέλος κάθε έτους κατά ε % (το επίσημο επιτόκιο αύξησης που δίνει δηλαδή η τράπεζα είναι ε %).

α) Αποδείξτε ότι αν καταθέσουμε στη συγκεκριμένη τράπεζα κεφάλαιο x € με επιτόκιο ε %, ύστερα από δύο έτη θα εισπράξουμε κεφάλαιο $x \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^2$ €.

(Μονάδες 7)

β) Ένα κεφάλαιο 15.000 € το χωρίζουμε σε δύο ποσά. Το ένα από τα δύο, κατατέθηκε σε μια τράπεζα Α με επιτόκιο 2% και το άλλο, κατατέθηκε σε μια άλλη τράπεζα Β με επιτόκιο 3%. Ύστερα από 2 χρόνια, εισπράχθηκε, με βάση το α) ερώτημα, και από τις δύο τράπεζες συνολικό κεφάλαιο 15.811 €. Ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β.

i) Να αποδείξετε ότι το ποσό y είναι λύση της εξίσωσης

$$(1{,}03^2 - 1{,}02^2) \cdot y = 15811 - 15000 \cdot 1{,}02^2$$

(Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε το κεφάλαιο που κατατέθηκε σε κάθε τράπεζα.

(Μονάδες 8)

13170-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αν καταθέσουμε στην τράπεζα κεφάλαιο x € με επιτόκιο ε %, τότε στο τέλος του 1ου έτους, το κεφάλαιο στην τράπεζα θα είναι $x+\frac{\varepsilon}{100}\cdot x=x\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)$.

Στο τέλος του 2ου έτους, το κεφάλαιο στην τράπεζα θα είναι

$x\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)+\frac{\varepsilon}{100}\cdot x\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)=x\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)=x\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^2$.

β)

i. Αφού ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β, άρα $15000-y$ θα είναι το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Α. Σύμφωνα με το α) ερώτημα το ποσό που θα υπάρχει στην τράπεζα Β μετά από δύο έτη θα είναι $y\left(1+\frac{3}{100}\right)^2=y\cdot 1{,}03^2$, ενώ το αντίστοιχο ποσό στην τράπεζα Α θα είναι

$(15000-y)\left(1+\frac{2}{100}\right)^2=(15000-y)\cdot 1{,}02^2$.

Οπότε, θα πρέπει να ισχύει $y\cdot 1{,}03^2+(15000-y)\cdot 1{,}02^2=15811$. Έτσι, θα έχουμε: $y\cdot 1{,}03^2-\ y\cdot 1{,}02^2+15000\cdot 1{,}02^2=15811 \Leftrightarrow$

$y\cdot(1{,}03^2-\ 1{,}02^2)=15811-15000\cdot 1{,}02^2$

ii. Η προηγούμενη εξίσωση γράφεται

$y(1{,}03-1{,}02)(1{,}03+1{,}02)=15811-15000\cdot 1{,}0404 \Leftrightarrow$

$y\cdot 0{,}01\cdot 2{,}05=15811-15606 \Leftrightarrow y=\frac{205}{0{,}01\cdot 2{,}05}=\frac{2050000}{205}=10000.$

Άρα το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β ήταν 10000 €, ενώ στην τράπεζα Α είναι 5000 €.

14224

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{A}=\dfrac{x^2-1}{x^2-x},\ x\neq 0,\ x\neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $\mathrm{A}=\dfrac{x+1}{x}$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται.

(Μονάδες 8)

ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

14224-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $\mathrm{A}=\dfrac{x^2-1}{x^2-x}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}=\dfrac{x+1}{x}$.

β)

i. Πρέπει να βρούμε την τιμή του x για την οποία

$\mathrm{A}=0$, δηλαδή

$\dfrac{x+1}{x}=0$, που συμβαίνει όταν

$x+1=0$, δηλαδή όταν

$x=-1$.

ii. Για να πάρει η παράσταση A την τιμή 2, πρέπει να ισχύουν ισοδύναμα:

$$\frac{x+1}{x}=2 \Leftrightarrow$$
$$x+1=2x \Leftrightarrow$$

$x=1$, που δεν είναι αποδεκτή τιμή για το x.

Άρα η παράσταση A δεν μπορεί να πάρει την τιμή 2.

14649

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $K = |x+1| + 2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $K = \begin{cases} x+3, & \alpha\nu\ x \geq -1 \\ 1-x, & \alpha\nu\ x < -1 \end{cases}$.

(Μονάδες 12)

β)

i. Να λυθεί η εξίσωση $|x-2| = 4$.

ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης K αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

(Μονάδες 13)

14649-Λύση

Λύση

α) Για $x \geq -1$ είναι $x + 1 \geq 0$, οπότε $|x + 1| + 2 = x + 1 + 2 = x + 3$.

Για $x < -1$ είναι $x + 1 < 0$, οπότε $|x + 1| + 2 = -(x + 1) + 2 = -x - 1 + 2 = 1 - x$.

Άρα, τελικά $K = \begin{cases} x + 3, & αν\ x \geq -1 \\ 1 - x, & αν\ x < -1 \end{cases}$.

β)

i. Είναι $|x - 2| = 4 \Leftrightarrow \{x - 2 = 4 \text{ ή } x - 2 = -4\} \Leftrightarrow \{x = 6 \text{ ή } x = -2\}$.

ii. Για $x = 6 > -1$ είναι $K = 6 + 3 = 9$.

Για $x = -2 < -1$ είναι $K = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3$.

34146

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha+3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Όταν α = 1.

(Μονάδες 05)

ii) Όταν α = -3.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

(Μονάδες 12)

34146-Λύση

α) i) Για $\alpha = 1$ η εξίσωση γράφεται: $(1+3)x = 1^2 - 9 \Leftrightarrow 4x = -8 \Leftrightarrow x = -2$.

ii) Για $\alpha = -3$ η εξίσωση γράφεται: $(-3+3)\mathrm{x} = (-3)^2 - 9 \Leftrightarrow 0\mathrm{x} = 0$, ταυτότητα.

β) Η εξίσωση έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν: $\alpha + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -3$.

Για την εύρεση της μοναδικής λύσης της εξίσωσης έχουμε:

$$(\alpha+3)\mathrm{x} = \alpha^2 - 9 \Leftrightarrow (\alpha+3)\mathrm{x} = (\alpha+3)(\alpha-3)$$

$$\overset{\alpha\neq-3}{\Leftrightarrow} \frac{(\alpha+3)\mathrm{x}}{\alpha+3} = \frac{(\alpha+3)(\alpha-3)}{\alpha+3}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{x} = \alpha - 3.$$

34163

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

(Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

34163-Λύση

α) Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$\lambda x = x + \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \lambda x - x = \lambda^2 - 1$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

β) Η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν:

$$\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$$

Η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \overset{\lambda \neq 1}{\Leftrightarrow} \frac{(\lambda - 1)x}{\lambda - 1} = \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}{\lambda - 1} \Leftrightarrow x = \lambda + 1 .$$

γ) Η εξίσωση είναι ταυτότητα αν και μόνο αν:

$$\lambda - 1 = 0 \text{ και } (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda = 1 \text{ και } (1 - 1)(1 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda = 1.$$

34872

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\kappa x + 3 = 2x$, με παράμερο $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\kappa = 1$ και για $\kappa = 3$.

(Μονάδες 13)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη για $\kappa = 2$.

(Μονάδες 12)

34872-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Θα λύσουμε την εξίσωση $\kappa x+3=2x$ για $\kappa=1$, οπότε: $x+3=2x \Leftrightarrow x=3$.

Για $\kappa=3$ έχουμε $3x+3=2x \Leftrightarrow x=-3$.

β) Για $\kappa=2$ η εξίσωση γίνεται $2x+3=2x \Leftrightarrow 0x=3$, που είναι αδύνατη.

35033

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$, με x πραγματικό αριθμό.

α) Να αποδείξετε ότι αν $2 \leq x < 3$, τότε $A + B = x - 1$.

(Μονάδες 16)

β) Υπάρχει $x \in [2,3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

35033-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$2 \leq x < 3 \Leftrightarrow x \geq 2 \text{ και } x < 3 \Leftrightarrow 2x \geq 4 \text{ και } x - 3 < 0 \Leftrightarrow 2x - 4 \geq 0 \text{ και } x - 3 < 0.$$

Τότε:

$$A = |2x - 4| = 2x - 4 \;\text{ και }\; B = |x - 3| = -(x - 3) = 3 - x.$$

Επομένως:

$$A + B = 2x - 4 + 3 - x = x - 1.$$

β) Είναι:

$$A + B = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3,$$

το οποίο είναι αδύνατο, διότι $x \in [2,3)$.

Επομένως, δεν υπάρχει $x \in [2,3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$.

36673

ΘΕΜΑ 4

Σε έναν άξονα τα σημεία Α , Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$, τότε:

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

36673-Λύση

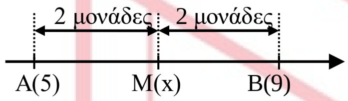
ΛΥΣΗ

α) $|x-5| = d(x,5) = (\mathrm{MA})$, δηλαδή εκφράζει την απόσταση του σημείου Μ από το σημείο Α.

$|x-9| = d(x,9) = (\mathrm{MB})$, δηλαδή εκφράζει την απόσταση του σημείου Μ από το σημείο Β.

β)

i) Από την ισότητα $|x-5| = |x-9|$ συμπεραίνουμε ότι $(\mathrm{MA}) = (\mathrm{MB})$, δηλαδή το σημείο Μ είναι το μέσο του ΑΒ, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



ii) Είναι: $(\mathrm{AB}) = d(5,9) = |5-9| = |-4| = 4$.

Επομένως το σημείο Μ απέχει 2 μονάδες από το σημείο Α(5) και 2 μονάδες από το σημείο Β(9), οπότε x = 7.

Αλγεβρικά

$$|x-5| = |x-9| \Leftrightarrow$$

$$x-5 = x-9 \text{ ή } x-5 = -x+9 \Leftrightarrow$$

$$x-5 = x-9 \text{ αδύνατη ή } x-5 = -x+9 \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7$$

36896

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x=\lambda^2-1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές τιμές για το λ, να γράψετε τρεις εξισώσεις.

(Μονάδες 9)

β)

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μια και μοναδική λύση.

(Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) να ισούται με 4.

(Μονάδες 8)

36896-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για $\lambda = 0$, η εξίσωση γίνεται: $-1x = -1$.

Για $\lambda = 1$, η εξίσωση γίνεται: $0x = 0$.

Για $\lambda = 3$, η εξίσωση γίνεται: $2x = 8$.

β)

i. Η (1) έχει μια και μοναδική λύση αν και μόνο αν $\lambda - 1 \neq 0$, δηλαδή $\lambda \neq 1$.

ii. Για $\lambda \neq 1$, η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι: $x = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda - 1} = \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}{\lambda - 1} = \lambda + 1$. Η λύση ισούται με 4, οπότε $\lambda + 1 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 3$. Άρα για $\lambda = 3$ η λύση της εξίσωσης ισούται με 4.