

12943

ΘΕΜΑ 2

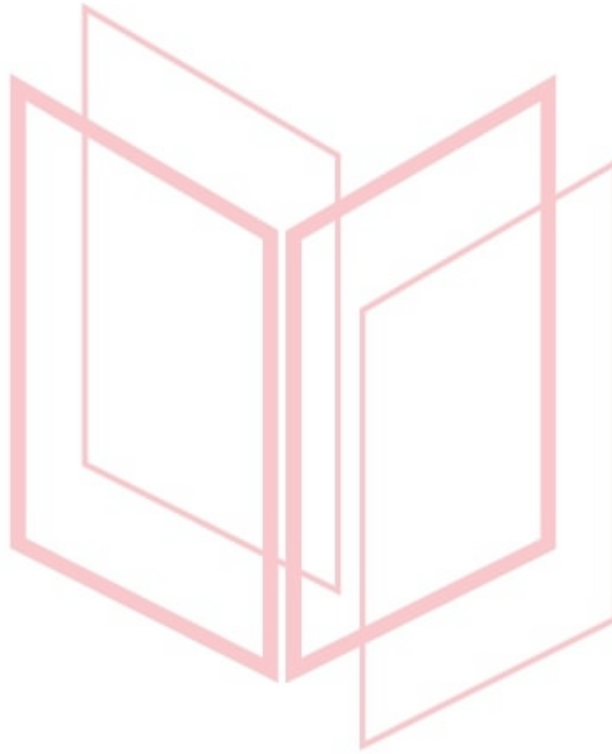
Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ και $\beta = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta$ και το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 7$

(Μονάδες 13)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

12943-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) + \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5}) = \frac{6}{2} = 3$$

και

$$\alpha \cdot \beta = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{1}{4}(3^2 - \sqrt{5}^2) = \frac{1}{4}(9 - 5) = \frac{4}{4} = 1$$

Άρα, $\alpha + \beta = 3$ και $\alpha \cdot \beta = 1$

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= \frac{1}{4}(3 + \sqrt{5})^2 + \frac{1}{4}(3 - \sqrt{5})^2 = \frac{1}{4}(9 + 5 + 6\sqrt{5} + 9 + 5 - 6\sqrt{5}) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 28 = 7 \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.

Υπόδειξη για εναλλακτική λύση.

Το ερώτημα (β) μπορεί να αποδειχθεί άμεσα από το (α) με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14452

ΘΕΜΑ 2

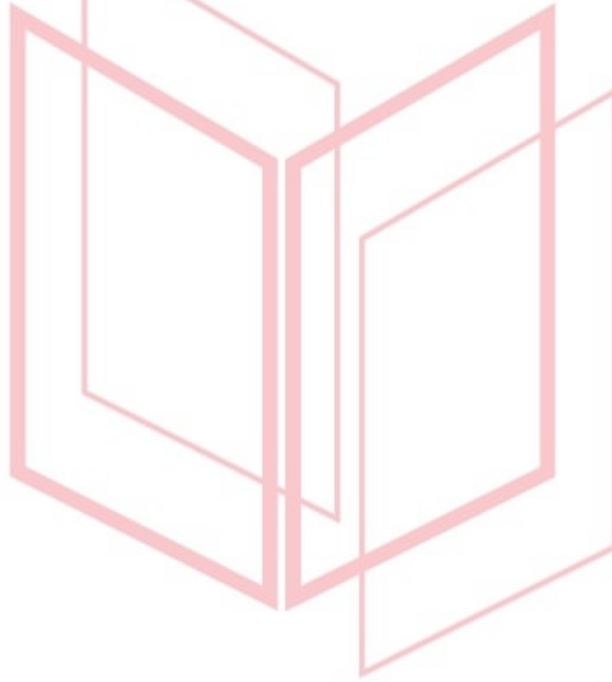
Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{3} - 1$ και $\beta = \sqrt{3} + 1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$.

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$.

(Μονάδες 10)



αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14452-Λύση

ΛΥΣΗ

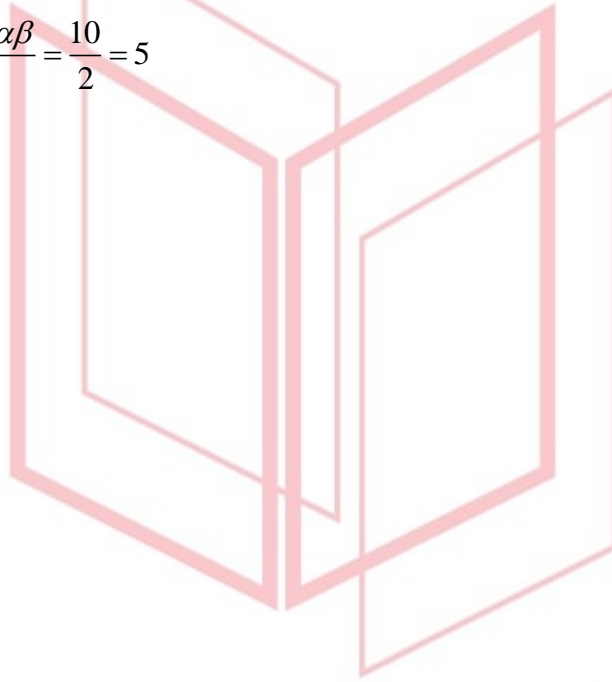
α) Έχουμε :

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = (\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1)^2 - (\sqrt{3} - 1) \cdot (\sqrt{3} + 1) = (2\sqrt{3})^2 - 2 = 10$$

β) Είναι

$$\alpha\beta = (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = 3 - 1 = 2 \text{ οπότε}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = \frac{\beta^2 + \alpha^2 + \alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{10}{2} = 5$$



αθημπινίσης

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14599

ΘΕΜΑ 2

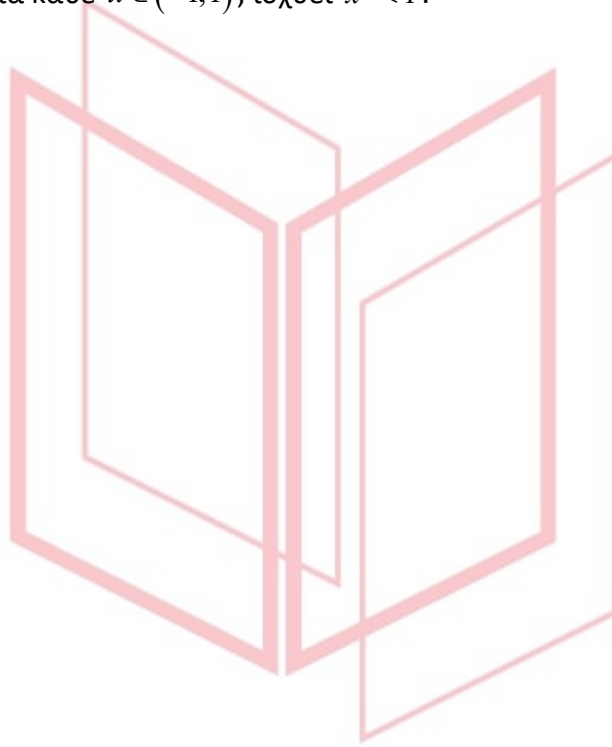
Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x| < 2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$, ισχύει $x^2 < 1$.

(Μονάδες 13)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14599-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$|2x| < 2, \text{ οπότε}$$

$2|x| < 2$, διαιρούμε τα μέλη της ανίσωσης με το 2 και έχουμε

$$|x| < 1 \text{ και τελικά}$$

$$-1 < x < 1$$

β) Η ανίσωση

$x^2 < 1$ ισχύει, αν και μόνο αν ισχύει η
 $\sqrt{x^2} < 1$, που ισχύει αν και μόνο αν ισχύει η
 $|x| < 1$, που ισχύει αν και μόνο αν ισχύει
 $-1 < x < 1$, δηλαδή $x \in (-1, 1)$, που ισχύει.

Άρα για κάθε $x \in (-1, 1)$, ισχύει $x^2 < 1$.

αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14682

ΘΕΜΑ 2

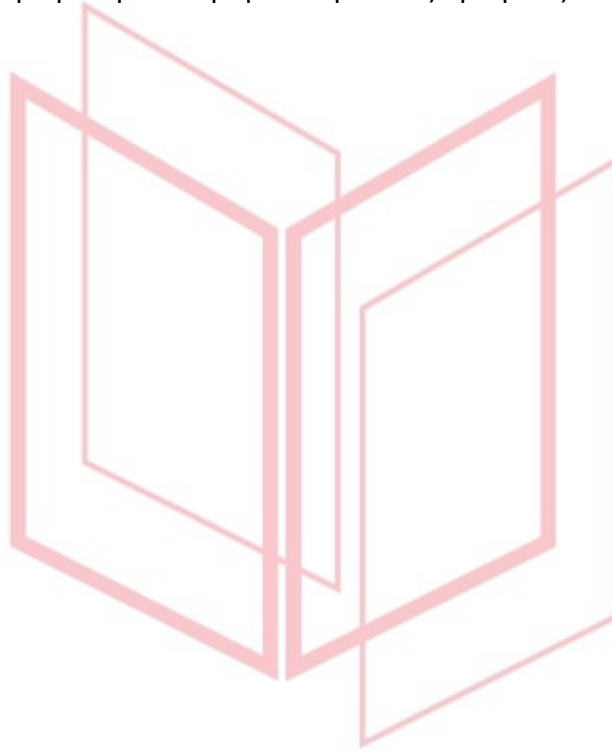
Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{3})^6$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$.

(Μονάδες 12)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$.

(Μονάδες 13)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14682-Λύση

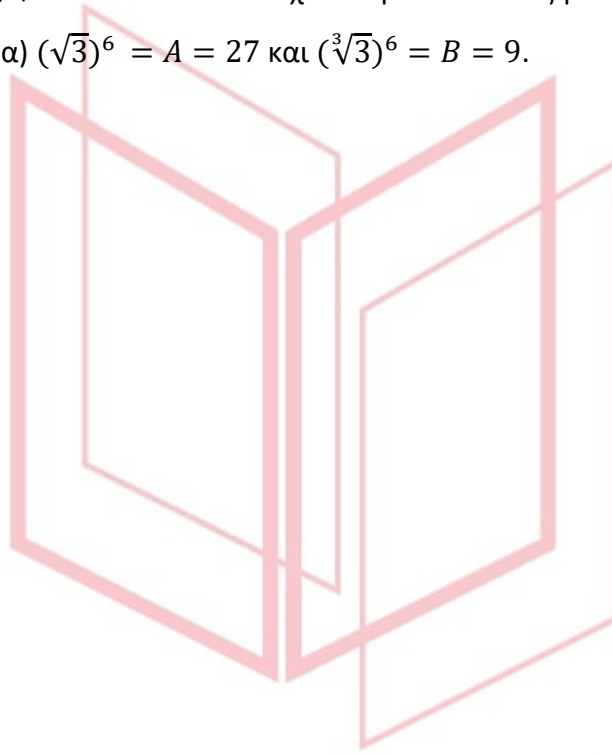
ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $A = (\sqrt{3})^6 = ((\sqrt{3})^2)^3 = 3^3 = 27$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6 = ((\sqrt[3]{3})^3)^2 = 3^2 = 9$.

Άρα: $A - B = 27 - 9 = 18$.

β) Αφού οι αριθμοί $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$ είναι θετικοί θα έχουν την ίδια διάταξη και όταν υψωθούν εις την έκτη. Από το ερώτημα α) $(\sqrt{3})^6 = A = 27$ και $(\sqrt[3]{3})^6 = B = 9$.

Άρα: $\sqrt[3]{3} < \sqrt{3}$.



αθηνάπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14774

ΘΕΜΑ 2

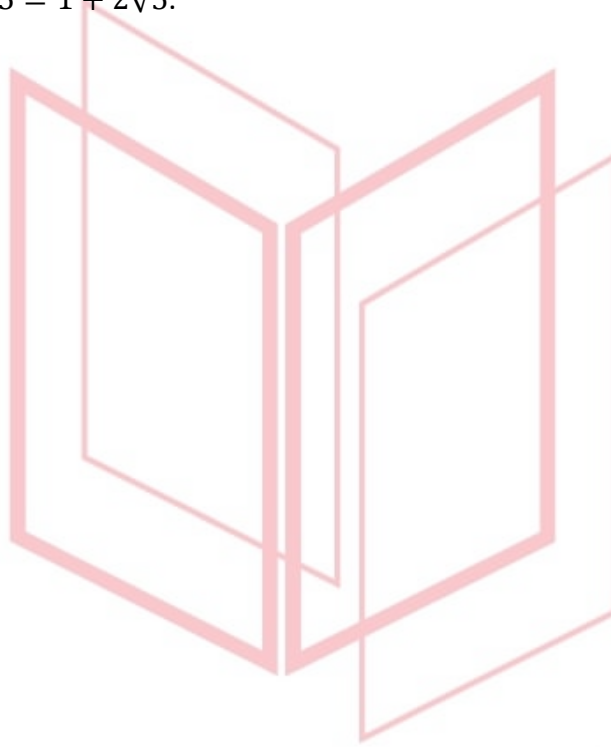
α) Να δείξετε ότι $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $(1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}.$$

(Μονάδες 12)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14774-Λύση

Λύση

α) Έχουμε ότι:

$$(2 + \sqrt{5})^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$$

και

$$(1 - \sqrt{5})^2 = 1^2 - 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 1 - 2\sqrt{5} + 5 = 6 - 2\sqrt{5}$$

β) Από το ερώτημα α) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} &= \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} = \\ &= |2 + \sqrt{5}| + |1 - \sqrt{5}|. \end{aligned}$$

Αλλά $1 < 5 \Rightarrow 1 < \sqrt{5} \Rightarrow 1 - \sqrt{5} < 0$. Οπότε, $|1 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 1$.

Άρα,

$$|2 + \sqrt{5}| + |1 - \sqrt{5}| = 2 + \sqrt{5} + \sqrt{5} - 1 = 1 + 2\sqrt{5}.$$

αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14805

ΘΕΜΑ 3

Έστω α ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $\alpha = |3\sqrt{2} - 4| + 2|\sqrt{2} - 2|$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \sqrt{2}$. (Θεωρήστε ότι $\sqrt{2} = 1,41$)

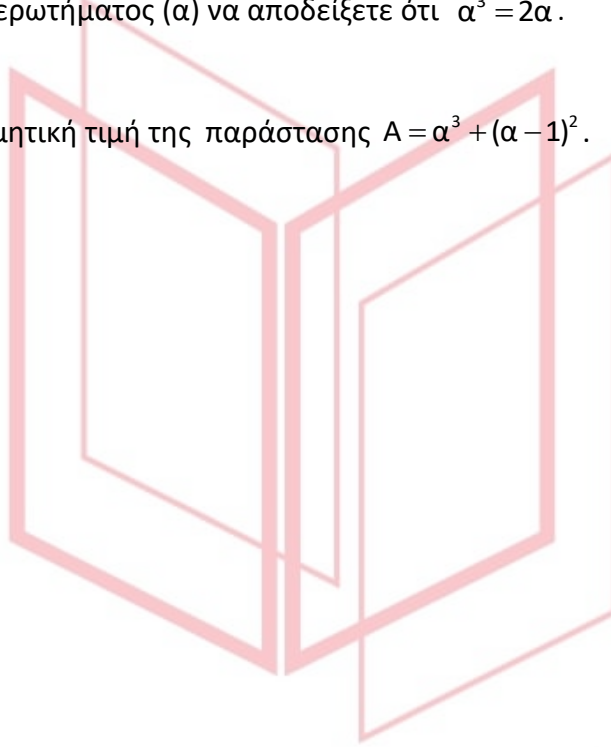
(Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι $\alpha^3 = 2\alpha$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \alpha^3 + (\alpha - 1)^2$.

(Μονάδες 10)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14805-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Με $\sqrt{2} = 1,41$ έχουμε $3\sqrt{2} > 4$, οπότε $3\sqrt{2} - 4 > 0$, άρα $|3\sqrt{2} - 4| = 3\sqrt{2} - 4$.

Επίσης $\sqrt{2} - 2 < 0$, οπότε $|\sqrt{2} - 2| = -\sqrt{2} + 2$.

Έχουμε λοιπόν:

$$\alpha = 3\sqrt{2} - 4 + 2(2 - \sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - 4 + 4 - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

που είναι το ζητούμενο.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) έχουμε:

$$\alpha^3 = \alpha^2 \alpha = 2\alpha$$

γ) Αφού $\alpha^3 = 2\alpha$, έχουμε:

$$A = \alpha^3 + (\alpha - 1)^2 = 2\alpha + \alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^2 + 1 = 2 + 1 = 3.$$

αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14849

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $2 < \sqrt{5}$.

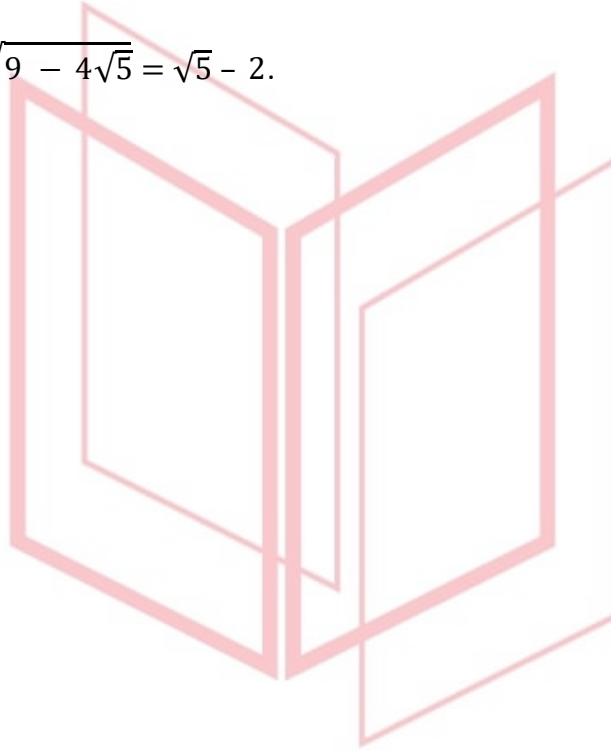
(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$.

(Μονάδες 8)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14849-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Καθώς είναι $2 = \sqrt{4}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\sqrt{4} < \sqrt{5}$, το οποίο όμως είναι αληθές αφού $4 < 5$.

β) Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του τετραγώνου διαφοράς, παίρνουμε

$$(2 - \sqrt{5})^2 = 2^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 + (\sqrt{5})^2 = 5 - 4\sqrt{5} + 4 = 9 - 4\sqrt{5}.$$

γ) Με χρήση των ερωτημάτων α) και β) έχουμε:

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2, \text{ αφού } 2 < \sqrt{5} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{5} < 0.$$



αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14931

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - \beta^2$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 10)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14931-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $A = \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = (1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2}) \cdot (1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2}$.

β) Έχουμε $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2} = |\alpha| - |\beta| = (1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1) = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 = 2$.

γ) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2} \stackrel{\alpha, \beta)}{\Leftrightarrow}$$

$$\sqrt{A} > B \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{4\sqrt{2}} > 2 \Leftrightarrow$$

$$4\sqrt{2} > 4 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2} > 1 \Leftrightarrow$$

$$2 > 1, \text{ που ισχύει.}$$

αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

15051

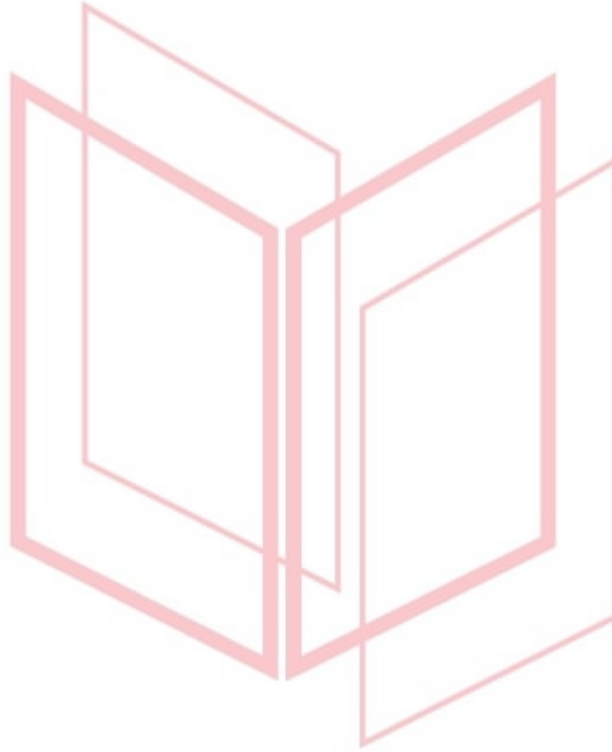
ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα $(2 + \sqrt{5})^2$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9 - 4\sqrt{5}$ και $9 + 4\sqrt{5}$

(Μονάδες 13)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

15051-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$(2-\sqrt{5})^2 = 4 - 4\sqrt{5} + \sqrt{5}^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = 9 - 4\sqrt{5}$$

Ομοίως έχουμε:

$$(2+\sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + \sqrt{5}^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$$

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$$

αφού ο αριθμός $2-\sqrt{5}$ είναι αρνητικός οπότε $|2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$.

Επίσης, $\sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{(2+\sqrt{5})^2} = |2+\sqrt{5}| = 2+\sqrt{5}$, αφού ο αριθμός $2+\sqrt{5}$ είναι θετικός, οπότε

$$|2+\sqrt{5}| = 2+\sqrt{5}.$$

αθηνάπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

34152

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

(Μονάδες 07)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

(Μονάδες 08)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$.

(Μονάδες 10)



αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

34152-Λύση

α) Η παράσταση A ορίζεται για εκείνες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x που ισχύει:

$$(x - 2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

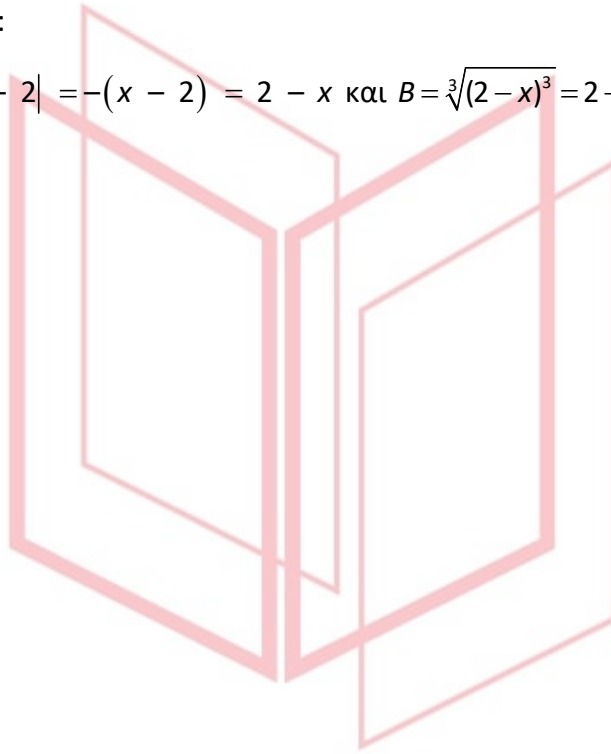
β) Η παράσταση B ορίζεται για εκείνες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x που ισχύει:

$$(2 - x)^3 \geq 0 \Leftrightarrow 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq 2.$$

γ) Για κάθε $x \leq 2$, είναι:

$$A = \sqrt{(x-2)^2} = |x - 2| = -(x - 2) = 2 - x \text{ και } B = \sqrt[3]{(2-x)^3} = 2 - x.$$

Άρα $A = B$.



αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

34155

ΘΕΜΑ 2

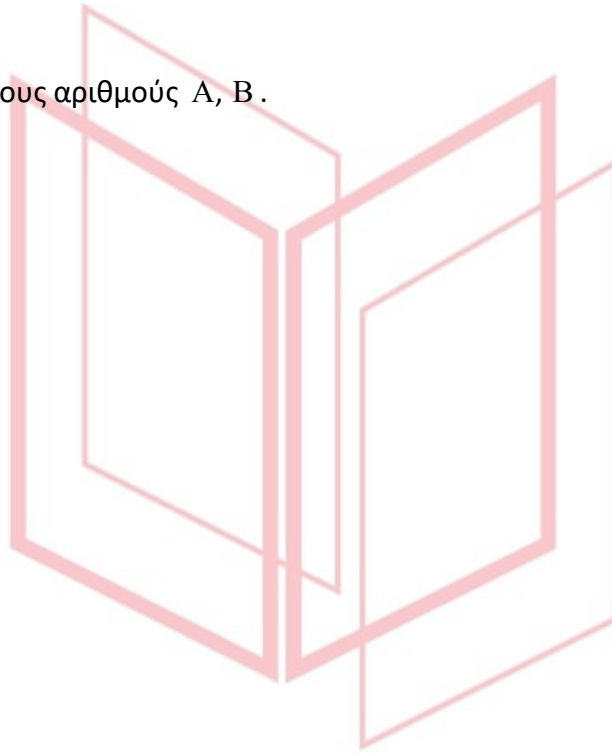
Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[5]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$.

(Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A , B .

(Μονάδες 10)



αθηνάμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

34155-Λύση

α) Είναι:

$$\begin{aligned}A \cdot B \cdot \Gamma &= \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{5} = \\&= 5^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt{3} \cdot 5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} \\&= \sqrt{3} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt{3} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = \\&= \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}.\end{aligned}$$

β) Είναι:

$$A = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25} \text{ και } B = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}.$$

Ισχύει ότι:

$$25 < 27 \Leftrightarrow \sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{27} \Leftrightarrow A < B.$$

αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

34157

ΘΕΜΑ 2

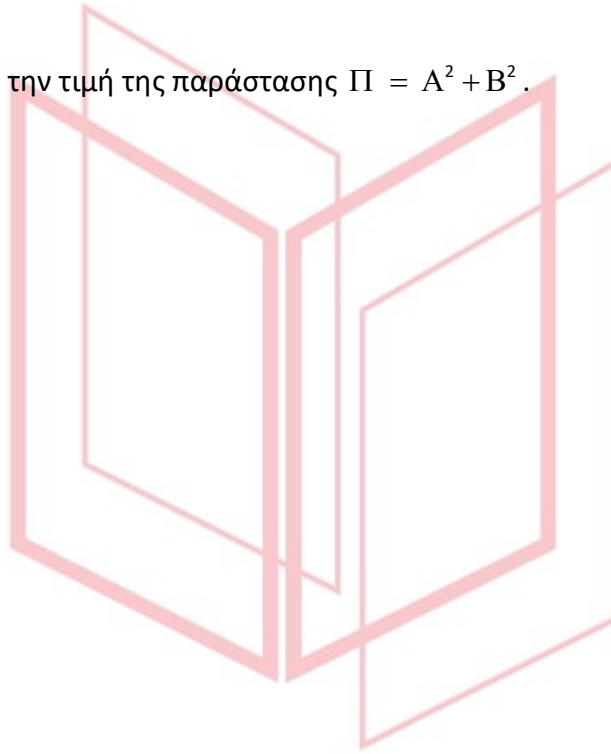
Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

(Μονάδες 13)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

34157-Λύση

α) Είναι:

$$A \cdot B = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1.$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \Pi &= A^2 + B^2 \\ &= (2 - \sqrt{3})^2 + (2 + \sqrt{3})^2 \\ &= 2^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + 2^2 + 2 \cdot 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= 4 + 3 + 4 + 3 = 14. \end{aligned}$$

αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

36778

ΘΕΜΑ 2

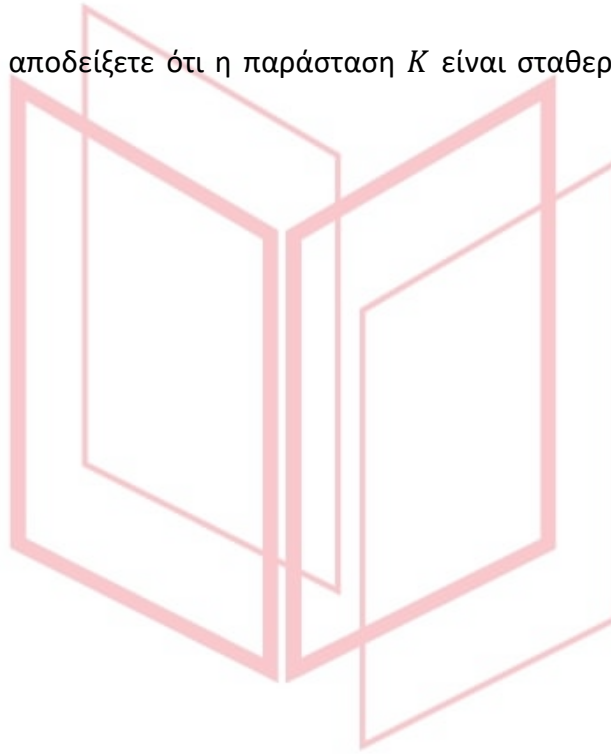
Δίνεται η παράσταση $K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 12)

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

(Μονάδες 13)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

36778-Λύση

Λύση

α) Ισχύει ότι:

$$K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3} = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2} - \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} = \frac{|x+2|}{x+2} - \frac{|x-3|}{x-3}.$$

Η παράσταση K έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} x+2 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 3 \end{cases}.$$

Οπότε πρέπει $x \neq -2, 3$.

β) Ισχύει ότι: $-2 < x < 3$, οπότε $x+2 > 0$ και $x-3 < 0$.

Άρα $|x+2| = x+2$ και $|x-3| = -(x-3)$.

Οπότε $K = \frac{|x+2|}{x+2} - \frac{|x-3|}{x-3} = \frac{x+2}{x+2} - \frac{-(x-3)}{x-3} = 1+1=2$, που είναι ανεξάρτητη του x .

αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

37172

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

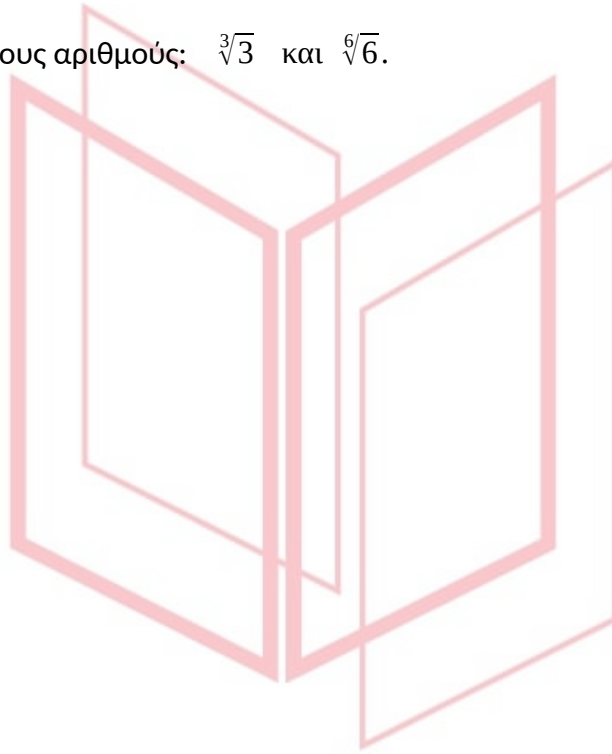
$$A=(\sqrt{2})^6, \quad B=(\sqrt[3]{3})^6, \quad \Gamma=(\sqrt[6]{6})^6.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $A+B+\Gamma=23$.

(Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.

(Μονάδες 12)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

37172-Λύση

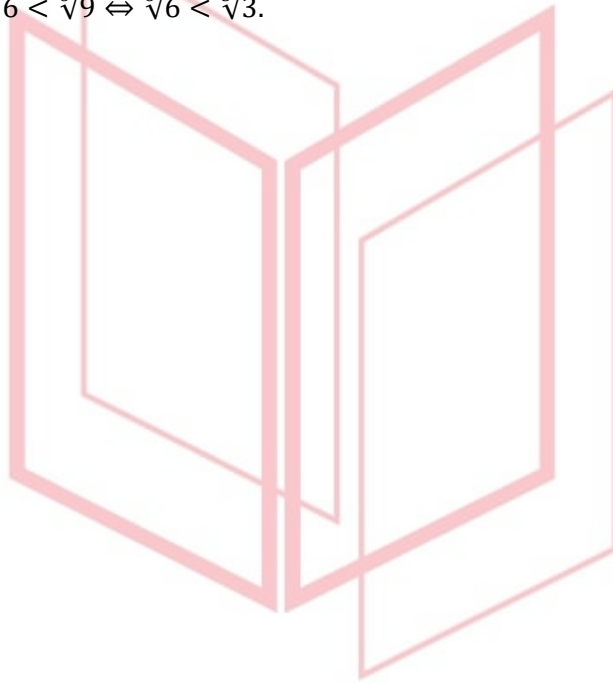
ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$A + B + \Gamma = (\sqrt{2})^6 + (\sqrt[3]{3})^6 + (\sqrt[6]{6})^6 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 + \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 + \left(6^{\frac{1}{6}}\right)^6 = 2^{\frac{6}{2}} + 3^{\frac{6}{3}} + 6^{\frac{6}{6}} = 2^3 + 3^2 + 6 = 8 + 9 + 6 = 23.$$

β) Ισχύουν: $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{9}$.

Ακόμα: $6 < 9 \Leftrightarrow \sqrt[6]{6} < \sqrt[6]{9} \Leftrightarrow \sqrt[6]{6} < \sqrt[3]{3}$.



αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ 2

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις)

$$\sqrt{2} \cong 1,41$$

$$\sqrt{3} \cong 1,73$$

$$\sqrt{5} \cong 2,24$$

$$\sqrt{7} \cong 2,64$$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών, πως θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3 \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$;

(Μονάδες 13)

αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

37192-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι

- $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 2,24 = 4,48$
- $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot 2,24 = 6,72$
- $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4 \cdot \sqrt{5} = 4 \cdot 2,24 = 8,96$

β) Ισχύει ότι:

$$\frac{3 \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{3\sqrt{5} - \sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{3\sqrt{5} - \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{10}{2} = 5$$



αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

37194

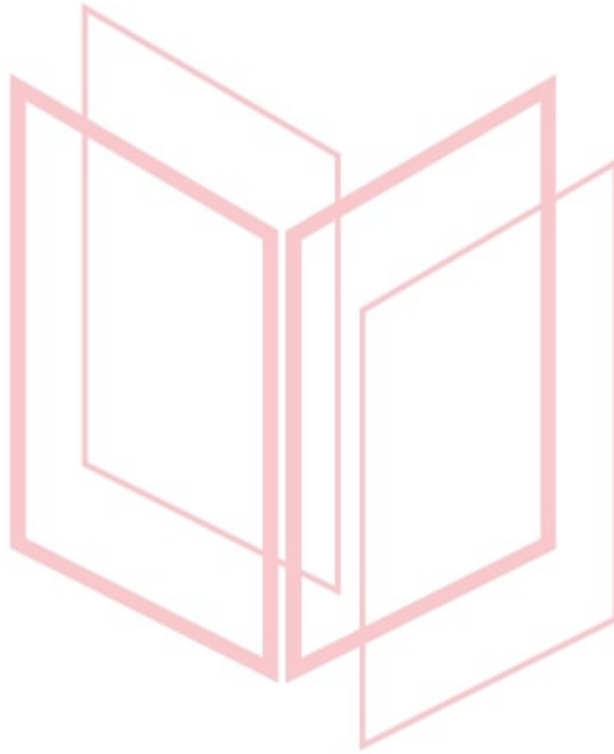
ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$

(Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$

(Μονάδες 13)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

37194-Λύση

ΛΥΣΗ

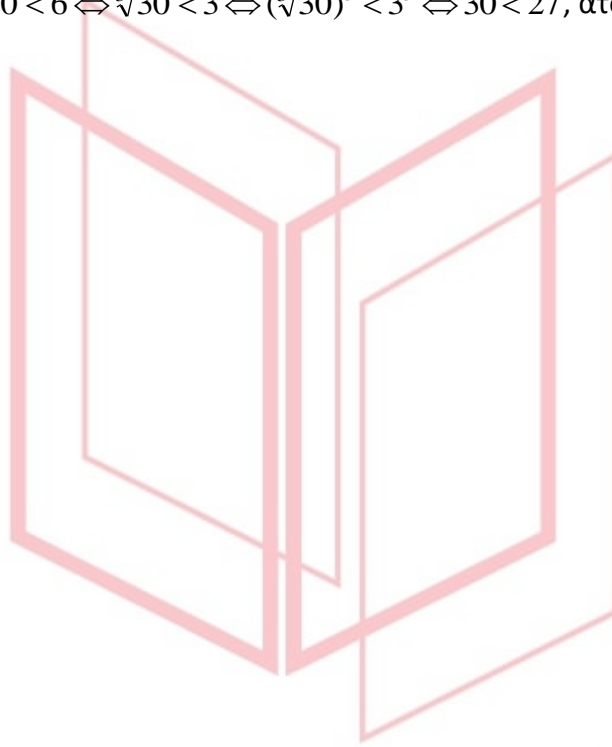
α) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$3 < \sqrt[3]{30} < 4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3^3} < \sqrt[3]{30} < \sqrt[3]{4^3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{30} < \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow 27 < 30 < 64, \text{ το οποίο ισχύει}$$

β) Έστω ότι $\sqrt[3]{30} < 6 - \sqrt[3]{30}$, τότε:

$$\sqrt[3]{30} < 6 - \sqrt[3]{30} \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{30} < 6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{30} < 3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{30})^3 < 3^3 \Leftrightarrow 30 < 27, \text{ άτοπο.}$$

Άρα $\sqrt[3]{30} > 6 - \sqrt[3]{30}$



αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

37197

ΘΕΜΑ 2

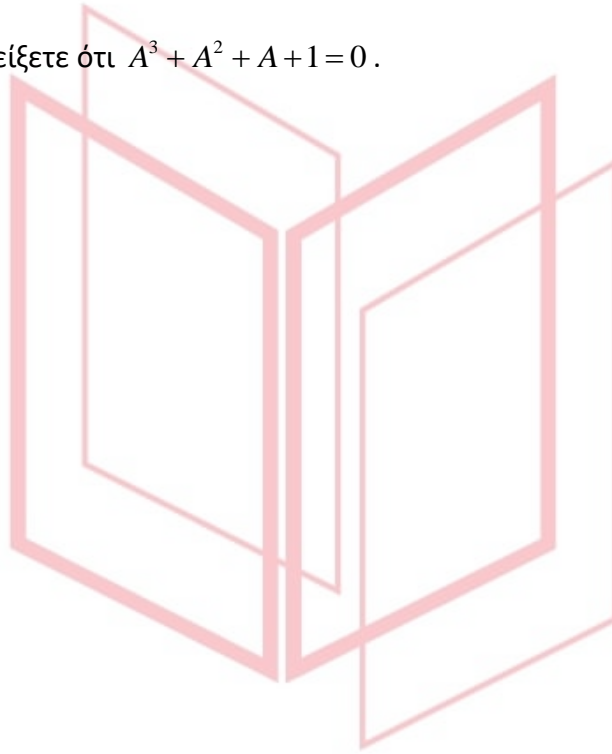
Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x = -3$ να αποδείξετε ότι $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$.

(Μονάδες 12)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

37197-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

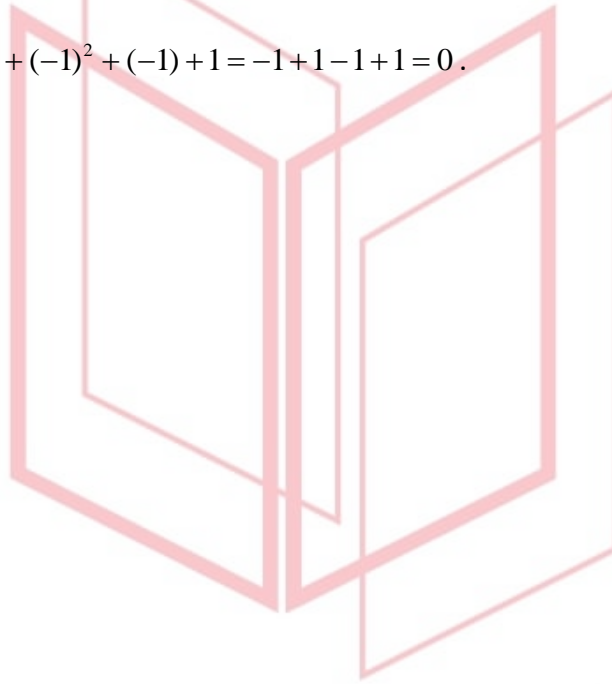
$$1-x \geq 0 \text{ και } x^4 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -1 \text{ και } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ και } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \leq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1]$$

β) Για $x = -3$, είναι:

$$A = \sqrt{1-(-3)} - \sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt{1+3} - \sqrt[4]{3^4} = \sqrt{4} - 3 = 2 - 3 = -1$$

Τότε:

$$A^3 + A^2 + A + 1 = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0.$$



αθημπινίσης

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

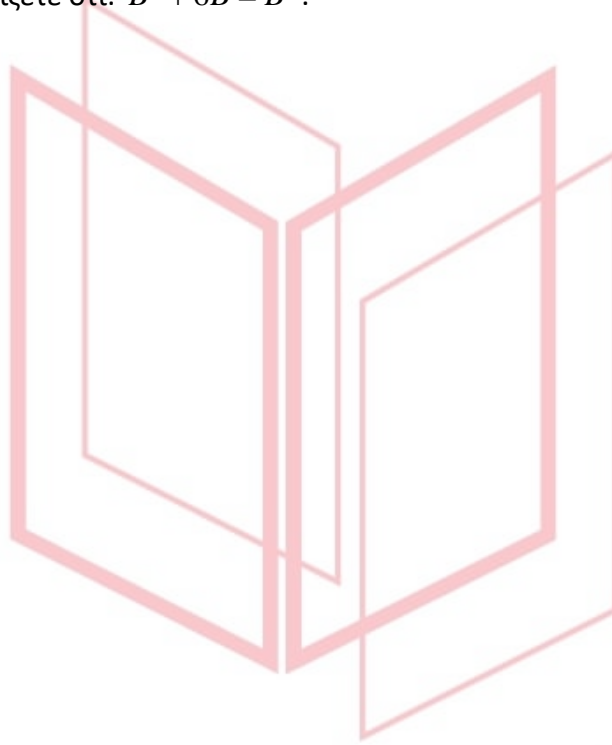
37198

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$.



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

37198-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

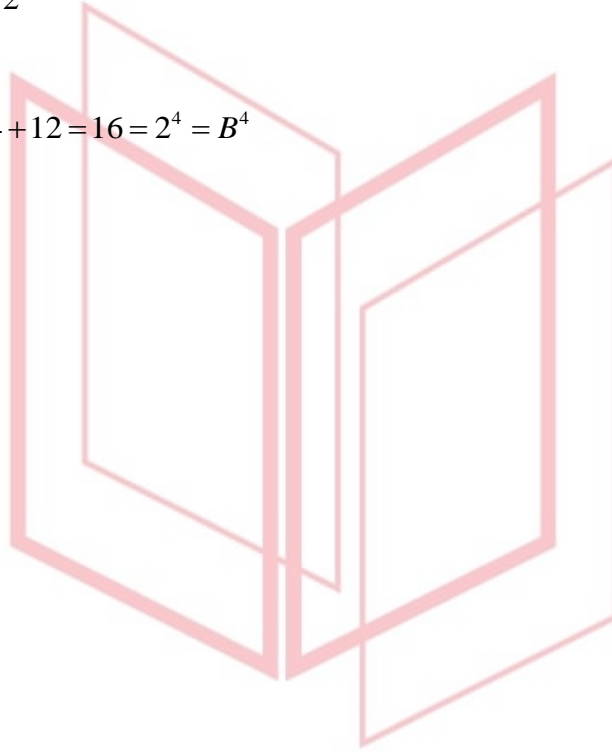
$$(x-2)^5 \geq 0 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2, +\infty)$$

β) Για $x = 4$, είναι:

$$B = \sqrt[5]{(4-2)^5} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

Τότε:

$$B^2 + 6B = 2^2 + 6 \cdot 2 = 4 + 12 = 16 = 2^4 = B^4$$



αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

37199

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$

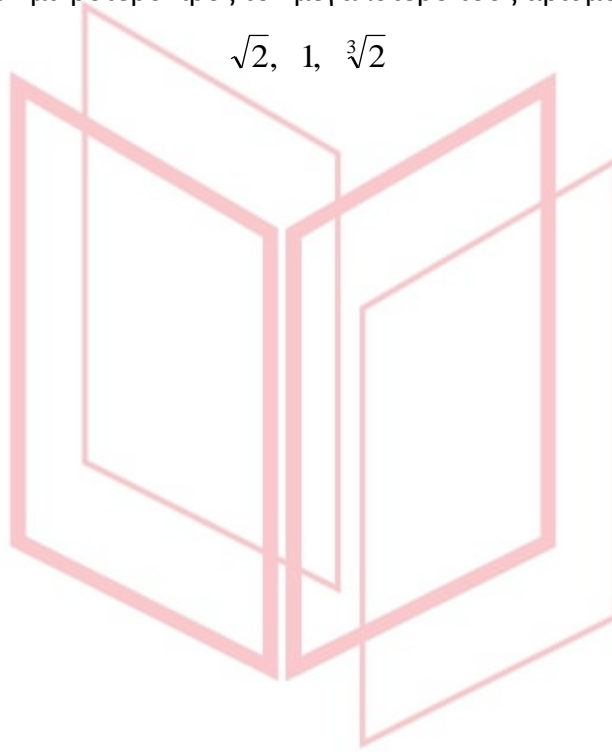
α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$.

(Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$\sqrt{2}$, 1, $\sqrt[3]{2}$

(Μονάδες 12)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

37199-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$A - B = (\sqrt{2})^6 - (\sqrt[3]{2})^6 = [(\sqrt{2})^2]^3 - [(\sqrt[3]{2})^3]^2 = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$$

β) Ισχύει ότι:

$$1 < 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow 1 < \sqrt[3]{2} \quad (1)$$

Και

$$A - B = 4 > 0 \Leftrightarrow A > B \Leftrightarrow (\sqrt{2})^6 > (\sqrt[3]{2})^6 \Leftrightarrow \sqrt{2} > \sqrt[3]{2} \quad (2)$$

Από τις ανισώσεις (1), (2) βρίσκουμε:

$$1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$$

αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ