12943

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)$ και $\beta=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha+\beta$ και το γινόμενο $\alpha\cdot\beta$

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2=7$

(Μονάδες 13)

12943-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha+\beta=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)+\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}\right)=\frac{6}{2}=3$$

και

$$\alpha\cdot\beta=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)=\frac{1}{4}\left(3^2-\sqrt{5}^2\right)=\frac{1}{4}(9-5)=\frac{4}{4}=1$$

Άρα, $\alpha+\beta=3$ και $\alpha\cdot\beta=1$

β) Έχουμε:

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{4}\left(3+\sqrt{5}\right)^2+\frac{1}{4}\left(3-\sqrt{5}\right)^2=\frac{1}{4}\left(9+5+6\sqrt{5}+9+5-6\sqrt{5}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 28=7$$

που είναι το ζητούμενο.

Υπόδειξη για εναλλακτική λύση.

Το ερώτημα (β) μπορεί να αποδειχθεί άμεσα από το (α) με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

14452

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\sqrt{3}-1$ και $\beta=\sqrt{3}+1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=10$.

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+1=5$.

(Μονάδες 10)

14452-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε :

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=\left(\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)=\left(2\sqrt{3}\right)^2-2=10$$

β) Είναι

$\alpha\beta=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)=3-1=2$ οπότε

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+1=\frac{\beta^2+\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{10}{2}=5$$

14599

ΘΕΜΑ 2

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x|<2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1<x<1$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1,1)$, ισχύει $x^2<1$.

(Μονάδες 13)

14599-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$|2x| < 2$, οπότε

$2|x| < 2$, διαιρούμε τα μέλη της ανίσωσης με το 2 και έχουμε

$|x| < 1$ και τελικά

$-1 < x < 1$

β) Η ανίσωση

$x^2 < 1$ ισχύει, αν και μόνο αν ισχύει η

$\sqrt{x^2} < 1$,που ισχύει αν και μόνο αν ισχύει η

$|x| < 1$, που ισχύει αν και μόνο αν ισχύει

$-1 < x < 1$, δηλαδή $x \in (-1,1)$,που ισχύει.

Άρα για κάθε $x \in (-1,1)$, ισχύει $x^2 < 1$.

14682

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{3})^6$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$.

(Μονάδες 12)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$.

(Μονάδες 13)

14682-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $A = (\sqrt{3})^6 = ((\sqrt{3})^2)^3 = 3^3 = 27$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6 = ((\sqrt[3]{3})^3)^2 = 3^2 = 9$.

Άρα : $A - B = 27 - 9 = 18$.

β) Αφού οι αριθμοί $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$ είναι θετικοί θα έχουν την ίδια διάταξη και όταν υψωθούν εις την έκτη. Από το ερώτημα α) $(\sqrt{3})^6 = A = 27$ και $(\sqrt[3]{3})^6 = B = 9$.

Άρα: $\sqrt[3]{3} < \sqrt{3}$.

14774

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι $\left(2+\sqrt{5}\right)^2 = 9+4\sqrt{5}$ και $\left(1-\sqrt{5}\right)^2 = 6-2\sqrt{5}$

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι $\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}} = 1+2\sqrt{5}$.

(Μονάδες 12)

14774-Λύση

Λύση

α) Έχουμε ότι:

$$\left(2+\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$$

και

$$\left(1-\sqrt{5}\right)^2 = 1^2 - 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 1 - 2\sqrt{5} + 5 = 6 - 2\sqrt{5}$$

β) Από το ερώτημα α) προκύπτει ότι:

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2} =$$

$$\left|2+\sqrt{5}\right| + \left|1-\sqrt{5}\right|.$$

Αλλά $1 < 5 \Rightarrow 1 < \sqrt{5} \Rightarrow 1 - \sqrt{5} < 0$. Οπότε, $\left|1-\sqrt{5}\right| = \sqrt{5} - 1$.

Άρα,

$$\left|2+\sqrt{5}\right| + \left|1-\sqrt{5}\right| = 2 + \sqrt{5} + \sqrt{5} - 1 = 1 + 2\sqrt{5}.$$

14805

ΘΕΜΑ 3

Έστω α ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $\alpha=\left|3\sqrt{2}-4\right|+2\left|\sqrt{2}-2\right|$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=\sqrt{2}$. (Θεωρήστε ότι $\sqrt{2}=1{,}41$)

(Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι $\alpha^3=2\alpha$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A=\alpha^3+(\alpha-1)^2$.

(Μονάδες 10)

14805-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Με $\sqrt{2}=1,41$ έχουμε $3\sqrt{2}>4$, οπότε $3\sqrt{2}-4>0$, άρα $|3\sqrt{2}-4|=3\sqrt{2}-4$.

Επίσης $\sqrt{2}-2<0$, οπότε $|\sqrt{2}-2|=-\sqrt{2}+2$.

Έχουμε λοιπόν:

$$\alpha=3\sqrt{2}-4+2(2-\sqrt{2})=3\sqrt{2}-4+4-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

που είναι το ζητούμενο.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) έχουμε:

$$\alpha^3=\alpha^2\alpha=2\alpha$$

γ)Αφού $\alpha^3=2\alpha$, έχουμε:

$$A=\alpha^3+(\alpha-1)^2=2\alpha+\alpha^2-2\alpha+1=\alpha^2+1=2+1=3.$$

14849

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $2 < \sqrt{5}$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2 - \sqrt{5}\,\right)^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$.

(Μονάδες 8)

14849-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Καθώς είναι $2=\sqrt{4}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\sqrt{4}<\sqrt{5}$, το οποίο όμως είναι αληθές αφού $4<5$.

β) Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του τετραγώνου διαφοράς, παίρνουμε

$$\left(2-\sqrt{5}\right)^2=2^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot 2+\left(\sqrt{5}\right)^2=5-4\sqrt{5}+4=9-4\sqrt{5}.$$

γ) Με χρήση των ερωτημάτων α) και β) έχουμε:

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\left|2-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}-2,\text{ αφού } 2<\sqrt{5}\Leftrightarrow 2-\sqrt{5}<0.$$

14931

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha = 1+\sqrt{2}$ και $\beta = 1-\sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = \alpha^2 - \beta^2$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\mathrm{B} = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $\mathrm{A} = 4\sqrt{2}$ και $\mathrm{B} = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 10)

14931-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\mathrm{A}=\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\left(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}\cdot 2=4\sqrt{2}$.

β) Έχουμε $\mathrm{B}=\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\beta^2}=|\alpha|-|\beta|=\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)=1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+1=2$.

γ) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\sqrt{\alpha^2-\beta^2}>\sqrt{\alpha^2}-\sqrt{\beta^2}\overset{\alpha),\beta)}{\Leftrightarrow}$$

$$\sqrt{\mathrm{A}}>\mathrm{B}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{4\sqrt{2}}>2\Leftrightarrow$$

$$4\sqrt{2}>4\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2}>1\Leftrightarrow$$

$2>1$, που ισχύει.

15051

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $\left(2-\sqrt{5}\right)^2 = 9-4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα $\left(2+\sqrt{5}\right)^2$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9-4\sqrt{5}$ και $9+4\sqrt{5}$

(Μονάδες 13)

15051-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\left(2-\sqrt{5}\right)^2=4-4\sqrt{5}+\sqrt{5}^2=4-4\sqrt{5}+5=9-4\sqrt{5}$$

Ομοίως έχουμε:

$$\left(2+\sqrt{5}\right)^2=4+4\sqrt{5}+\sqrt{5}^2=4+4\sqrt{5}+5=9+4\sqrt{5}$$

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\left|2-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}-2$$

αφού ο αριθμός $2-\sqrt{5}$ είναι αρνητικός οπότε $\left|2-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}-2$.

Επίσης, $\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}=\left|2+\sqrt{5}\right|=2+\sqrt{5}$, αφού ο αριθμός $2+\sqrt{5}$ είναι θετικός, οπότε $\left|2+\sqrt{5}\right|=2+\sqrt{5}$.

34152

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\sqrt{(x-2)^2}$ και $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

(Μονάδες 07)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

(Μονάδες 08)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \le 2$, ισχύει $A=B$.

(Μονάδες 10)

34152-Λύση

α) Η παράσταση Α ορίζεται για εκείνες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x που ισχύει:

$$\left(x - 2\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in R .$$

β) Η παράσταση Β ορίζεται για εκείνες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x που ισχύει:

$$\left(2 - x\right)^3 \geq 0 \Leftrightarrow 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq 2 .$$

γ) Για κάθε x ≤ 2, είναι:

$$A = \sqrt{(x-2)^2} = \left|x - 2\right| = -\left(x - 2\right) = 2 - x \text{ και } B = \sqrt[3]{(2-x)^3} = 2 - x .$$

Άρα $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

34155

ΘΕΜΑ 2

Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}, \quad B=\sqrt{3}, \quad \Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\Gamma=\sqrt{15}$.

(Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A, B .

(Μονάδες 10)

34155-Λύση

α) Είναι:

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\Gamma=\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[6]{5}=$$
$$=5^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{3}\cdot5^{\frac{1}{6}}=\sqrt{3}\cdot5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$$
$$=\sqrt{3}\cdot5^{\frac{3}{6}}=\sqrt{3}\cdot5^{\frac{1}{2}}=$$
$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{15}.$$

β) Είναι:

$$\mathrm{A}=\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{25}\ \text{ και }\ B=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{6}}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}\,.$$

Ισχύει ότι:

$$25<27\Leftrightarrow\sqrt[6]{25}<\sqrt[6]{27}\Leftrightarrow\mathrm{A}<\mathrm{B}\,.$$

34157

ΘΕΜΑ 2

Αν είναι $\mathrm{A}=2-\sqrt{3}$, $\mathrm{B}=2+\sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2$.

(Μονάδες 13)

34157-Λύση

α) Είναι:

$$A \cdot B = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4-3 = 1\,.$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\Pi &= A^2 + B^2 \\ &= \left(2-\sqrt{3}\right)^2 + \left(2+\sqrt{3}\right)^2 \\ &= 2^2 - 2\cdot 2\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 + 2\cdot 2\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 \\ &= 4+3+4+3 = 14.\end{aligned}$$

36778

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός x, ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 12)

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

36778-Λύση

Λύση

α) Ισχύει ότι:

$$K=\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}=\frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2}-\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=\frac{|x+2|}{x+2}-\frac{|x-3|}{x-3}.$$

Η παράσταση K έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} x+2\neq 0 \\ x-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -2 \\ x\neq 3 \end{cases}.$$

Οπότε πρέπει $x\neq -2,3$.

β) Ισχύει ότι: $-2<x<3$, οπότε $x+2>0$ και $x-3<0$.

Άρα $|x+2|=x+2$ και $|x-3|=-(x-3)$.

Οπότε $K=\frac{|x+2|}{x+2}-\frac{|x-3|}{x-3}=\frac{x+2}{x+2}-\frac{-(x-3)}{x-3}=1+1=2$, που είναι ανεξάρτητη του x.

37172

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A=\left(\sqrt{2}\right)^6,\quad B=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6,\quad \Gamma=\left(\sqrt[6]{6}\right)^6.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $A+B+\Gamma=23$.

(Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.

(Μονάδες 12)

37172-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$A + B + \Gamma = (\sqrt{2})^6 + (\sqrt[3]{3})^6 + (\sqrt[6]{6})^6 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 + \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 + \left(6^{\frac{1}{6}}\right)^6 =$$

$$2^{\frac{6}{2}} + 3^{\frac{6}{3}} + 6^{\frac{6}{6}} = 8 + 9 + 6 = 23.$$

β) Ισχύουν: $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{9}$.

Ακόμα: $6 < 9 \Leftrightarrow \sqrt[6]{6} < \sqrt[6]{9} \Leftrightarrow \sqrt[6]{6} < \sqrt[3]{3}$.

37192

ΘΕΜΑ 2

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις)

$\sqrt{2} \cong 1{,}41$

$\sqrt{3} \cong 1{,}73$

$\sqrt{5} \cong 2{,}24$

$\sqrt{7} \cong 2{,}64$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών, πως θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$;

(Μονάδες 13)

37192-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι

- $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 2{,}24 = 4{,}48$
- $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot 2{,}24 = 6{,}72$
- $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5}\sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4 \cdot \sqrt{5} = 4 \cdot 2{,}24 = 8{,}96$

β) Ισχύει ότι:

$$\frac{3 \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{3\sqrt{5} - \sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{3\sqrt{5} - \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{10}{2} = 5$$

37194

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$

(Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$

(Μονάδες 13)

37194-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$3<\sqrt[3]{30}<4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3^3}<\sqrt[3]{30}<\sqrt[3]{4^3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{27}<\sqrt[3]{30}<\sqrt[3]{64} \Leftrightarrow 27<30<64$, το οποίο ισχύει

β) Έστω ότι $\sqrt[3]{30}<6-\sqrt[3]{30}$, τότε:

$\sqrt[3]{30}<6-\sqrt[3]{30} \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{30}<6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{30}<3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{30})^3<3^3 \Leftrightarrow 30<27$, άτοπο.

Άρα $\sqrt[3]{30}>6-\sqrt[3]{30}$

37197

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x=-3$ να αποδείξετε ότι $A^3+A^2+A+1=0$.

(Μονάδες 12)

37197-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$1-x\geq 0\ \kappa\alpha\iota\ x^4\geq 0 \Leftrightarrow -x\geq -1\ \kappa\alpha\iota\ x\in R \Leftrightarrow x\leq 1\ \kappa\alpha\iota\ x\in R \Leftrightarrow x\leq 1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1]$

β) Για $x=-3$, είναι:

$A=\sqrt{1-(-3)}-\sqrt[4]{(-3)^4}=\sqrt{1+3}-\sqrt[4]{3^4}=\sqrt{4}-3=2-3=-1$

Τότε:

$A^3+A^2+A+1=(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1=-1+1-1+1=0$.

37198

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$.

37198-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$(x-2)^5 \geq 0 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2\ ,\ +\infty)$

β) Για $x=4$, είναι:

$B = \sqrt[5]{(4-2)^5} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

Τότε:

$B^2 + 6B = 2^2 + 6 \cdot 2 = 4 + 12 = 16 = 2^4 = B^4$

37199

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A=(\sqrt{2})^6$ και $B=(\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A-B=4$.

(Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\sqrt{2},\ \ 1,\ \ \sqrt[3]{2}$$

(Μονάδες 12)

37199-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$A-B=\left(\sqrt{2}\right)^6-\left(\sqrt[3]{2}\right)^6=\left[\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^3-\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^3\right]^2=2^3-2^2=8-4=4$$

β) Ισχύει ότι:

$$1<2\Leftrightarrow\sqrt[3]{1}<\sqrt[3]{2}\Leftrightarrow 1<\sqrt[3]{2}\quad (1)$$

Και

$$A-B=4>0\Leftrightarrow A>B\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}\right)^6>\left(\sqrt[3]{2}\right)^6\Leftrightarrow\sqrt{2}>\sqrt[3]{2}\quad (2)$$

Από τις ανισώσεις (1), (2) βρίσκουμε:

$$1<\sqrt[3]{2}<\sqrt{2}$$