13177

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να δείξετε ότι : $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι : $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$.

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1.

(Μονάδες 9)

13177-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι $2 \le \alpha \le 3$ οπότε $\alpha - 3 \le 0$ και άρα $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$.

Επίσης είναι $-2 \le \beta \le -1$ οπότε $\beta + 2 \ge 0$ και άρα $|\beta + 2| = \beta + 2$.

β) Με πρόσθεση κατά μέλη των $2 \le \alpha \le 3$ και $-2 \le \beta \le -1$ έχουμε ότι $0 \le \alpha + \beta \le 2$.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε ότι $0 \le \alpha + \beta \le 2$ οπότε $|\alpha + \beta| = \alpha + \beta$.

Συνεπώς η παράσταση γίνεται :

$|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2| = \alpha + \beta + 3 - \alpha - (\beta + 2) = \alpha + \beta + 3 - \alpha - \beta - 2 = 1.$

13179

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \le \beta \le 2$ και $2 \le \alpha \le 4$.

α)

i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3.

(Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα.

(Μονάδες 7)

β)

i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \le 1 \le \frac{\alpha}{\beta}$.

(Μονάδες 5)

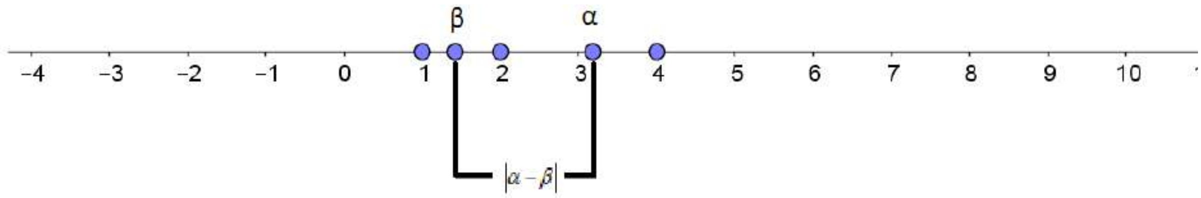
ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta}-1\right|$.

(Μονάδες 6)

13179-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η απόσταση $d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$ των αριθμών α και β πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



i. Από τον άξονα και αφού ο β δεν μπορεί να πάρει τιμή μικρότερη (πιο αριστερά) του 1 και ο α δεν μπορεί να πάρει τιμή μεγαλύτερη (πιο δεξιά) του 4, συμπεραίνουμε ότι η μεγαλύτερη τιμή της $d(\alpha,\beta)$ είναι 3 (μάλιστα $d(\alpha,\beta)=3$ όταν $\beta=1$ και $\alpha=4$), δηλαδή $d(\alpha,\beta)\leq 3$.

ii. Είναι $1\leq\beta\leq 2\Leftrightarrow -1\geq-\beta\geq-2\Leftrightarrow -2\leq-\beta\leq-1$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των $2\leq\alpha\leq 4$, $-2\leq-\beta\leq-1$ έχουμε ότι $2-2\leq\alpha-\beta\leq 4-1\Leftrightarrow 0\leq\alpha-\beta\leq 3$.

Αφού $0\leq\alpha-\beta$ είναι $|\alpha-\beta|=\alpha-\beta\leq 3$ οπότε $d(\alpha,\beta)\leq 3$.

β)

i. Δεδομένου ότι $1\leq\beta\leq 2$ και $2\leq\alpha\leq 4$ έχουμε ότι οι αριθμοί α,β είναι θετικοί και αφού $\beta\leq 2\leq\alpha$ είναι και $\beta\leq\alpha$.

Έτσι αφού $\beta\leq\alpha$ και $\beta>0$ έχουμε ότι $\frac{\beta}{\beta}\leq\frac{\alpha}{\beta}$ δηλαδή $1\leq\frac{\alpha}{\beta}$.

Επίσης αφού $\beta\leq\alpha$ και $\alpha>0$ έχουμε ότι $\frac{\beta}{\alpha}\leq\frac{\alpha}{\alpha}$ δηλαδή $\frac{\beta}{\alpha}\leq 1$.

Τελικά $\frac{\beta}{\alpha}\leq 1\leq\frac{\alpha}{\beta}$.

ii. Αφού δείξαμε ότι $\frac{\beta}{\alpha}\leq 1\leq\frac{\alpha}{\beta}$ έχουμε ότι $1-\frac{\beta}{\alpha}\geq 0$ οπότε $\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right|=1-\frac{\beta}{\alpha}$ και

$\frac{\alpha}{\beta}-1\geq 0$ οπότε $\left|\frac{\alpha}{\beta}-1\right|=\frac{\alpha}{\beta}-1$.

Συνεπώς

13179-Λύση

$\left|1-\dfrac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\dfrac{\alpha}{\beta}-1\right| \Leftrightarrow$

$1-\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha}{\beta}-1 \Leftrightarrow$

$\alpha\beta - \alpha\beta \cdot \dfrac{\beta}{\alpha} = \alpha\beta \cdot \dfrac{\alpha}{\beta} - \alpha\beta \Leftrightarrow$

$\alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \alpha\beta \Leftrightarrow$

$0 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow$

$0 = (\alpha-\beta)^2 \Leftrightarrow$

$\alpha = \beta$.

Όμως $1 \le \beta \le 2 \le \alpha \le 4$, οπότε για να είναι $\alpha = \beta$ θα πρέπει $\alpha = \beta = 2$.

14071

ΘΕΜΑ 2

α) Η αλγεβρική παράσταση Κ, που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1, πάνω στον άξονα είναι:

Α. Κ=|x+1|+|x-2| Β. Κ=|x-1|+|x+2| Γ. Κ=(|x|+1)+(|x|-2)

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή παράσταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

β) Αν είναι Κ=|x+1| + |x-2| τότε:

i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Κ όταν $x=\frac{3}{2}$.

(Μονάδες 10)

ii) Αν x>2 να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση Κ και να αποδείξετε ότι Κ>3.

(Μονάδες 10)

14071-Λύση

Λύση

α) Η αλγεβρική παράσταση Κ, που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1, πάνω στον άξονα είναι η Κ=|x+1| + |x-2| διότι το |x+1| δηλώνει την απόσταση του x από το -1 και το |x-2| την απόσταση του x από το 2.

β) Είναι Κ=|x+1| + |x-2| τότε:

i) για $x=\frac{3}{2}$ γίνεται: $K=\left|\frac{3}{2}+1\right|+\left|\frac{3}{2}-2\right|=\frac{5}{2}+\left|\frac{-1}{2}\right|=\frac{6}{2}=3$

ii) Αφού είναι x>2 τότε x-2 > 0 και x+1 > 0 οπότε η παράσταση Κ γίνεται:

$$K=x+1+x-2=2x-1$$

Ακόμη έχουμε: $x>2 \Leftrightarrow 2x>4 \Leftrightarrow 2x-1>3 \Leftrightarrow K>3$.

14412

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$, τότε

α) Να δείξετε ότι $\dfrac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}-\dfrac{|1-\alpha|}{1-\alpha}=2$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\alpha+\beta > \dfrac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}-\dfrac{|1-\alpha|}{1-\alpha}$.

(Μονάδες 13)

14412-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\alpha > \beta$ και ισοδύναμα $\alpha - \beta > 0$, οπότε $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$.

Επίσης $\alpha > 1$ ισοδύναμα $1 - \alpha < 0$, οπότε $|1-\alpha| = \alpha - 1$.

Άρα $\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \frac{|1-\alpha|}{1-\alpha} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha-1}{1-\alpha} = 1 + \frac{1-\alpha}{1-\alpha} = 1+1 = 2$.

β) Είναι

$\alpha > 1$ και $\beta > 1$, οπότε

$\alpha + \beta > 1+1$, δηλαδή

$\alpha + \beta > 2$ και από το α) ερώτημα έχουμε ότι

$$\alpha + \beta > \frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \frac{|1-\alpha|}{1-\alpha}.$$

14491

ΘΕΜΑ 2

α) Να λυθεί η ανίσωση $|y - 3| < 1$

(Μονάδες 12)

β) Αν x,y είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου.

(Μονάδες 13)

14491-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$|y-3|<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow -1+3<y-3+3<1+3 \Leftrightarrow 2<y<4$

β) Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο: $E = xy$.

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανισότητες $1<x<3$ και $2<y<4$ βρίσκουμε:

$1\cdot 2<x\cdot y<3\cdot 4 \Leftrightarrow 2<E<12$

14572

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει: $|x+2|<1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$.

(Μονάδες 10)

β) $|2x+4|<2$.

(Μονάδες 15)

14572-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$|x+2|<1 \Leftrightarrow$$
$$-1<x+2<1 \Leftrightarrow$$
$$-1-2<x+2-2<1-2 \Leftrightarrow$$
$$-3<x<-1.$$

β) Έχουμε διαδοχικά:

$-3<x<-1$, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης με το 2, οπότε

$-6<2x<-2$, προσθέτουμε στα μέλη της ανίσωσης το 4 και έχουμε

$-2<2x+4<2$, οπότε τελικά

$$|2x+4|<2.$$

Εναλλακτικά, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης $|x+2|<1$ με το 2 και έχουμε

$2\cdot|x+2|<2\cdot 1$, οπότε

$|2\cdot(x+2)|<2$ και τελικά

$$|2x+4|<2.$$

14617

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$ (I).

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6, 8)$.

(Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6,8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in (3, 4)$.

(Μονάδες 13)

14617-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η ανίσωση (I) γράφεται $|x-7|<1 \Leftrightarrow -1<x-7<1 \Leftrightarrow 7-1<x<7+1$.

Ώστε $6<x<8 \Leftrightarrow x \in (6,8)$.

β) Είναι $k \in (6,8) \Leftrightarrow 6<k<8 \Leftrightarrow \frac{1}{6}>\frac{1}{k}>\frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{24}{6}>\frac{24}{k}>\frac{24}{8} \Leftrightarrow 4>\frac{24}{k}>3$.

Άρα $3<\frac{24}{k}<4 \Leftrightarrow \frac{24}{k} \in (3,4)$.

14801

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι αληθής ή Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι ψευδής.

i. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η πρόταση:

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$.

ii. Για κάθε $\theta \in (0, +\infty)$ ισχύει: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

iii. Η εξίσωση $x^3 = 5$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

iv. Αν ισχύουν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι αρνητικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x.

v. Ο παρακάτω πίνακας θα μπορούσε να είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0,4]$.

x	0	1	1	2	4
$y = f(x)$	0	1	-1	2	0,5

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει η ανισότητα:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

(Μονάδες 15)

14801-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Είναι λάθος (Λ). Π.χ $-5<-1$ και $-4<-2$, όμως $(-5)\cdot(-4)>(-1)\cdot(-2)$.

ii. Είναι σωστή (Σ).

iii. Είναι λάθος (Λ). Η εξίσωση έχει μια ρίζα, την $x=\sqrt[3]{5}$.

iv. Είναι λάθος (Λ). Όταν η διακρίνουσα είναι αρνητική, το τριώνυμο είναι ομόσημο του α, δηλαδή θετικό στην προκειμένη περίπτωση, για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x.

v. Είναι λάθος (Λ). Ο πίνακας αποτελείται και από τα ζεύγη $(1,-1)$ και $(1,1)$ που έχουν την ίδια τετμημένη και διαφορετική τεταγμένη. Δηλαδή υπάρχει ένα x που αντιστοιχεί σε διαφορετικά y.

β) Είναι ιδιότητα των απολύτων τιμών, παράγραφος 2.3 του σχολικού βιβλίου.

14811

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Το σημείο $M(x, y)$ με $x > 0$ και $y < 0$ βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

ii. Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ισχύει: $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma.$

iii. Ισχύει $|\alpha| \geq \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

iv. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε: $\alpha - \gamma > \beta - \delta$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, δ.

v. Η εξίσωση $\alpha x = \alpha$ έχει μοναδική λύση $x = 1$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β να αποδείξετε ότι: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

(Μονάδες 15)

14811-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Λ

ii. Σ

iii. Σ

iv. Λ

v. Λ

β) Θεωρία σελ. 63

14932

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν

ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι αδύνατη, όταν $\alpha \neq 0$ και $\beta = 0$.

ii. Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος φυσικός, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}$=α.

iii. Αν α>0 και Δ<0 η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ αληθεύει για κάθε $x \epsilon R$.

iv. Αν η απόσταση του x από το 0 είναι ίση με 3, τότε x=3 ή x=-3.

v. Η γραφική παράταση μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 10)

β) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β , να αποδείξετε ότι

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| .$$

(Μονάδες 15)

14932-Λύση

ΛΥΣΗ:

α)

i. Λ
ii. Λ
iii. Λ
iv. Σ
v. Σ

β) Θεωρία ενότητας 2.3. Απόδειξη ιδιότητας 3 σελίδα 63.

15054

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha<0<\beta<\gamma$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός $A=\alpha(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)\beta$ είναι θετικός.

(Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha+|\alpha-\beta|+|\gamma-\beta|-\gamma=0$.

(Μονάδες 9)

15054-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από τις $\alpha<\beta$ και $\beta<\gamma$ προκύπτουν αντίστοιχα ότι $\alpha-\beta<0$ και $\gamma-\beta>0$, οπότε $(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)<0$. Επιπλέον, $\alpha\beta<0$ οπότε το γινόμενό τους $\alpha(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)\beta$, που είναι ο αριθμός A, είναι θετικό.

β) Επειδή $\alpha-\beta<0$ και $\gamma-\beta>0$ έχουμε:

$$|\alpha-\beta|=-\alpha+\beta \text{ και } |\gamma-\beta|=\gamma-\beta$$

οπότε $\alpha+|\alpha-\beta|+|\gamma-\beta|-\gamma=\alpha-\alpha+\beta+\gamma-\beta-\gamma=0$, που είναι το ζητούμενο.

33888

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει:

$$(\alpha-1)(1-\beta)>0$$

α) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α και β.

(Μονάδες13)

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{K}=|\alpha-1|+|1-\beta|.$$

(Μονάδες 12)

33888-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αφού $(\alpha-1)(1-\beta)>0$, οι $(\alpha-1)$ και $(1-\beta)$ είναι ομόσημοι, οπότε:

$$\left.\begin{matrix}\alpha-1>0\\ \text{και}\\ 1-\beta>0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\alpha>1\\ \text{και}\\ \beta<1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\beta<1<\alpha$$

ή

$$\left.\begin{matrix}\alpha-1<0\\ \text{και}\\ 1-\beta<0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\alpha<1\\ \text{και}\\ \beta>1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\alpha<1<\beta$$

Σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των α και β.

β) Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

i. Αν $\beta<1<\alpha$, τότε:

$0<\alpha-1\Rightarrow|\alpha-1|=\alpha-1$,

$0<1-\beta\Rightarrow|1-\beta|=1-\beta$ και

$\beta-\alpha<0\Rightarrow|\beta-\alpha|=\alpha-\beta$ άρα,

$|\beta-\alpha|=4\Leftrightarrow\alpha-\beta=4$.

Οπότε: $\mathrm{K}=|\alpha-1|+|1-\beta|=\alpha-1+1-\beta=\alpha-\beta=4$.

ii. Αν $\alpha<1<\beta$, τότε:

$\alpha-1<0\Rightarrow|\alpha-1|=1-\alpha$,

$1-\beta<0\Rightarrow|1-\beta|=\beta-1$ και

$\beta-\alpha>0\Rightarrow|\beta-\alpha|=\beta-\alpha$ άρα,

$|\beta-\alpha|=4\Leftrightarrow\beta-\alpha=4$.

Οπότε: $\mathrm{K}=|\alpha-1|+|1-\beta|=1-\alpha+\beta-1=\beta-\alpha=4$.

35041

ΘΕΜΑ 2

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

35041-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$d(2x,3) = 3 - 2x \Leftrightarrow |2x-3| = 3 - 2x \Leftrightarrow |2x-3| = -(2x-3) \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$|\alpha| = -\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 0$$

Τότε από τη σχέση (1) ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$|2x-3| = -(2x-3) \Leftrightarrow 2x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

β) Επειδή ισχύει $x \leq \frac{3}{2}$ είναι $2x-3 \leq 0$ και $3-x > 0$. Τότε:

$$|2x-3| = -(2x-3) \ \text{ και } \ |3-x| = 3-x$$

Επομένως η παράσταση K γράφεται:

$$K = |2x-3| - 2|3-x| = -(2x-3) - 2(3-x) = 3 - 2x - 6 + 2x = -3$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{A}=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. για κάθε $x \geq 2$, $\mathrm{A}=3x-4$.

ii. για κάθε $x<2$, $\mathrm{A}=8-3x$

(Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4.$$

(Μονάδες 13)

35112-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Ισχύει ότι:

$x \geq 2 \Leftrightarrow 3x \geq 3 \cdot 2 \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow 3x - 6 \geq 0$.

Άρα $|3x-6| = 3x-6$.

Τότε:

$\mathrm{A} = |3x-6| + 2 = 3x - 6 + 2 = 3x - 4$.

ii. Ισχύει ότι:

$x < 2 \Leftrightarrow 3x < 3 \cdot 2 \Leftrightarrow 3x < 6 \Leftrightarrow 3x - 6 < 0$.

Άρα $|3x-6| = -(3x-6) = 6 - 3x$.

Τότε:

$\mathrm{A} = |3x-6| + 2 = 6 - 3x + 2 = 8 - 3x$.

β) Για κάθε $x \geq 2$ είναι $|3x-6| = 3x-6$. Τότε:

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x-6| + 2} = \frac{(3x)^2 - 4^2}{3x - 6 + 2} = \frac{(3x-4)(3x+4)}{3x-4} = 3x + 4.$$

ΘΕΜΑ 2

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς τις απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$$

(Μονάδες 15)

35412-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι:

$$5<x<10 \Leftrightarrow (5<x \ \kappa\alpha\iota\ x<10) \Leftrightarrow (0<x-5 \ \kappa\alpha\iota\ x-10<0)$$

Τότε:

$$|x-5|=x-5 \ \text{και}\ |x-10|=-(x-10)$$

β) Είναι:

$$\mathrm{A}=\frac{|x-5|}{x-5}+\frac{|x-10|}{x-10}=\frac{x-5}{x-5}+\frac{-(x-10)}{x-10}=1+(-1)=0$$

36672

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία Α , Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2<x<7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x+2|$

(Μονάδες 4)

ii) $|x-7|$

(Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2|+|x-7|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά.

(Μονάδες 5)

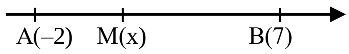
δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

(Μονάδες 7)

36672-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αφού $-2<x<7$ το σημείο Μ θα βρίσκεται μεταξύ των σημείων Α και Β όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



i) $|x+2|=d(x,-2)=(\mathrm{MA})$, δηλαδή εκφράζει την απόσταση του σημείου Μ από το σημείο Α.

ii) $|x-7|=d(x,7)=(\mathrm{MB})$, δηλαδή εκφράζει την απόσταση του σημείου Μ από το σημείο Β.

β) Είναι $|x+2|+|x-7|=(\mathrm{MA})+(\mathrm{MB})=(\mathrm{AB})$.

γ) Είναι $\mathrm{A}=|x+2|+|x-7|=(\mathrm{AB})=d(-2,7)=|-2-7|=|-9|=9$.

δ) Αφού $-2<x<7$ είναι: $x+2>0$ οπότε $|x+2|=x+2$ και

$x-7<0$ οπότε $|x-7|=-x+7$.

Επομένως $\mathrm{A}=|x+2|+|x-7|=x+2-x+7=9$.

36894

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$.

(Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2$.

(Μονάδες 10)

36894-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$\alpha+\frac{1}{\alpha}\le -2 \overset{\alpha<0}{\Leftrightarrow}$

$\alpha^2+\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\ge -2\alpha$, δηλαδή

$\alpha^2+1+2\alpha\ge 0$, οπότε

$(\alpha+1)^2\ge 0$, που ισχύει.

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$|\alpha|+\left|\frac{1}{\alpha}\right|\ge 2 \overset{\alpha<0}{\Leftrightarrow}$

$-\alpha-\frac{1}{\alpha}\ge 2$, οπότε

$\alpha+\frac{1}{\alpha}\le -2$, που από το α) ερώτημα ισχύει για κάθε $\alpha<0$.

36898

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να δείξετε ότι $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$ (1).

(Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

36898-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\geq 2$, οπότε

$\frac{|\alpha|}{|\beta|}+\frac{|\beta|}{|\alpha|}\geq 2$, δηλαδή

$\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{|\alpha|\cdot|\beta|}\geq 2$, οπότε

$|\alpha|^2+|\beta|^2\geq 2|\alpha|\cdot|\beta|$, συνεπώς

$|\alpha|^2+|\beta|^2-2|\alpha|\cdot|\beta|\geq 0$ και τελικά

$\left(|\alpha|-|\beta|\right)^2\geq 0$ που ισχύει.

β) Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $|\alpha|-|\beta|=0\Leftrightarrow|\alpha|=|\beta|$, δηλαδή αν και μόνο αν $\alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$ (δηλαδή όταν οι αριθμοί α,β είναι ίσοι ή αντίθετοι).

37201

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A=|x-1|+|y-3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A=x-y+2$.

(Μονάδες 12)

β) $0<A<4$.

(Μονάδες 13)

37201-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$1<x<4 \Leftrightarrow 1<x \;\kappa\alpha\iota\; x<4 \Leftrightarrow x-1>0 \;\kappa\alpha\iota\; x-4<0$$

Άρα $|x-1|=x-1$

Ισχύει ακόμα:

$$2<y<3 \Leftrightarrow 2<y \;\kappa\alpha\iota\; y<3 \Leftrightarrow y-2>0 \;\kappa\alpha\iota\; y-3<0$$

Άρα $|y-3|=-(y-3)=3-y$

Τότε:

$$A=|x-1|+|y-3|=x-1+3-y=x-y+2$$

β) Είναι $1<x<4$ (1) και:

$$\begin{aligned} &2<y<3 \Leftrightarrow -2>-y>-3 \Leftrightarrow -3<-y<-2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -3+2<-y+2<-2+2 \Leftrightarrow -1<-y+2<0 \end{aligned} \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1), (2) και βρίσκουμε:

$$1-1<x-y+2<4+0 \Leftrightarrow 0<x-y+2<4$$

Άρα $0<A<4$